

ОСОБЕННОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
СКОПЛЕНИЙ ГАЛАКТИК© 2024 г. А. И. Рябинков¹, А. Д. Каминкер^{1*}¹Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия

Поступила в редакцию 21.12.2024 г.

После доработки 21.01.2025 г.; принята к публикации 21.01.2025 г.

Проведен статистический анализ анизотропных квазипериодических особенностей пространственного распределения скоплений галактик, полученных на основе спектроскопических и фотометрических красных смещений в интервале $0.1 \leq z \leq 0.47$. На основе данных каталога SDSS III показано, что обнаруженное ранее в северном полушарии выделенное направление (узкий конус направлений: $\alpha_0 = 170^\circ \pm 5^\circ$, $\delta_0 = 29^\circ \pm 5^\circ$), вдоль которого одномерное распределение проекций декартовых координат скоплений содержит значимую ($\gtrsim(4-5)\sigma$) квазипериодическую компоненту, может быть найдено и при использовании фотометрических красных смещений, достигающих определенной точности ($\Delta z \lesssim 0.013$). На основе данных фотометрического каталога DES \times unWISE проведен анализ пространственного распределения скоплений в южном полушарии, где также обнаружен конус близких направлений ($\alpha_0 = 346^\circ \pm 5^\circ$, $\delta_0 = -29^\circ \pm 5^\circ$), которые приблизительно являются продолжением указанных направлений северного полушария. Спектры мощности одномерных распределений вдоль этих направлений содержат значимые ($\gtrsim(4-5)\sigma$) особенности в том же интервале волновых чисел $0.04 \lesssim k \lesssim 0.06 \text{ h Mpc}^{-1}$.

Ключевые слова: космология, скопления галактик, спектроскопия, фотометрия, красные смещения, крупномасштабная структура Вселенной.

DOI: 10.31857/S0320010824120025, EDN: LGGSYR

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в литературе накоплен ряд свидетельств того, что пространственное распределение космологически удаленных объектов (например, галактик или скоплений галактик) могут проявлять элементы крупномасштабной регулярности (см., например, Бродхарст и др., 1990; Салей и др., 1993; Лэнди и др., 1996; Эйнасто и др., 1997b, 2011, 2016; Саар и др., 2002; Эйнасто, 2014), характеризующиеся довольно широким интервалом масштабов ($100-140 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$). Следует отметить, что все такие свидетельства имеют вероятностный характер и соответствуют относительно невысокому уровню значимости ($\sim 3\sigma$).

Кроме того, в ряде цитированных работ (см., например, Бродхарст и др., 1990; Салей и др., 1993; Лэнди и др., 1996) показано, что крупномасштабная квазипериодичность может иметь анизотропный характер, т.е. проявляться только в определенных направлениях в пространстве. Такая анизотропия может быть свойственна квазипериодическим аномалиям, проявляющимся в пространственном распределении космологических объектов, и требует особой методики для своего надежного обнаружения (см., например, Саар и др., 2002).

В качестве разновидности такой методики в работе Рябинкова, Каминкера (2021) был предложен ме-

тод проекций декартовых координат массива рассматриваемых объектов в сопутствующей системе координат (СК) на ось X вращающейся системы, центр которой совмещен с центром неподвижной СК. При этом ось X сканировала определенные области северного полушария. По одномерным распределениям проекций строились 1D спектры мощности (СМ) $P_X(k)$ и определялся уровень значимости отдельных пиков СМ при различных k . Этим методом на основе каталога галактик SDSS DR7 в интервале спектроскопических красных смещений $0.16 \leq z \leq 0.47$ было найдено направление X_0 , для которого пики в одномерных СМ имеют наибольшую амплитуду (значимость $\gtrsim(4-5)\sigma$). Экваториальные координаты этого направления составляли $\alpha_0 \simeq 175^\circ-177^\circ$ — прямое восхождение и $\delta_0 \simeq 22^\circ-27^\circ$ — склонение. Пики в 1D СМ свидетельствовали о существовании в указанном интервале z анизотропной квазипериодической компоненты с характерным масштабом (квазипериодом) $\Delta X = 116 \pm 10 \text{ h}^{-1} \text{ Mpc}$.

В последующей работе (Рябинков, Каминкер, 2024) были использованы две разновидности предложенного метода статистического анализа распределения одномерных проекций декартовых координат галактик на различные оси X . Результаты работы Рябинкова, Каминкера (2021) были подтверждены на основе расширенного каталога галактик SDSS DR12 LOWZ. Было показано, в частности, что в том же интервале спектральных z и приблизительно в том же направле-

*Электронный адрес: kam.astro@mail.ioffe.ru

нии X_0 одномерные распределения проекций координат галактик содержат значимую ($\gtrsim(4-5)\sigma$) квазипериодическую компоненту с тем же характерным масштабом.

В той же работе был проведен предварительный анализ данных каталога южного неба (Вэнь, Хань, 2022) с данными фотометрических красных смещений скоплений галактик. В результате в одномерном распределении проекций на ось X_0 южного полушария, приблизительно противоположную оси X_0 северного полушария, также обнаружена квазипериодическая компонента, характерный масштаб которой $130 \pm 10 h^{-1}$ Мпк с учетом погрешности согласуется с обсуждаемым выше масштабом северного полушария.

В настоящей работе рассматриваются скопления галактик, как в северном, так и в южном полушариях в интервале красных смещений $0.1 \leq z \leq 0.47$. С использованием методики, развитой в предыдущих работах, проведено сравнение спектроскопических z , определенных для скоплений галактик, с фотометрическими из каталога SDSS III для северного полушария (Вэнь и др., 2012). Кроме того, на основе данных каталога Вэнь, Хань (2022) рассмотрены фотометрические z скоплений южного полушария. Подтверждается существование единой анизотропной квазипериодической аномалии с характерными масштабами, лежащими в интервале $100-140 h^{-1}$ Мпк.

В разделе 2 мы описываем наблюдательные данные, исследуемые в работе. В разделе 3 вводим основные определения и базовые величины, используемые в дальнейшем анализе. В разделе 4 рассматриваем методику анализа и его результаты в применении к северному полушарию, проводим сравнение СМ распределений скоплений галактик с измеренными спектроскопическими и фотометрическими красными смещениями z . В разделе 5 проводим анализ скоплений с фотометрическими z в южном полушарии. Выводы и обсуждения результатов приводим в разделе 6.

2. НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ ДАННЫЕ

В северном полушарии мы используем спектроскопические и фотометрические данные скоплений галактик, отождествленных на основе каталога галактик SDSS III (Вэнь и др., 2012)¹. В каталоге “WHL12” в интервале космологических красных смещений $0.1 \leq z \leq 0.47$ собрано 42 929 скоплений. Исследуемая область скоплений в экваториальной системе координат (α и δ) показана в левой верхней части рис. 1а. Погрешность спектроскопических красных смещений составляет $\delta z = \Delta z / (1+z) \sim (3-6) \times 10^{-4}$ (см., например, Болтон и др., 2012) и вполне достаточна для надежного определения неоднородностей (как

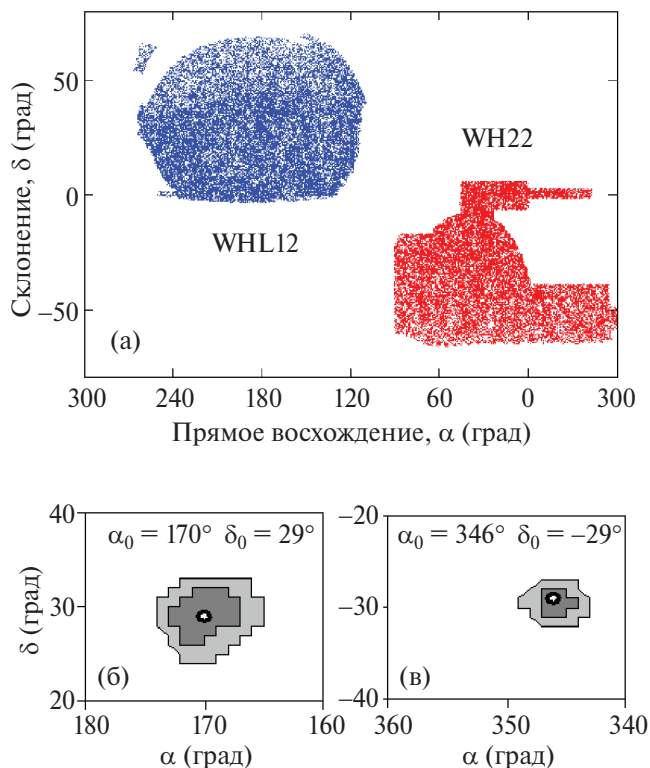


Рис. 1. Угловые распределения скоплений галактик, рассматриваемых в данной работе, в экваториальной системе координат. В левой верхней части рис. 1а показана область скоплений преимущественно в северном полушарии, отождествленных в работе (Вэнь и др., 2012) на основе данных SDSS (каталог “WHL12”). В правой нижней части — область скоплений преимущественно в южном полушарии (каталог “WH22”), отождествленных на основе фотометрических данных каталога галактик “DES × unWISE” (Вэнь, Хань, 2022). На рис. 1б (в разделе 4 — область (r1)) и 1в (в разделе 5 — область (r3)) показаны доверительные области, построенные для наибольших высот пиков в спектрах мощности $P_X(k)$ одномерных распределений проекций декартовых координат скоплений на направляющие оси кубоидов X , при $k = k_{\max} = 0.057 h$ Мпк⁻¹ — рис. 1б и $k = k_{\max} = 0.047 h$ Мпк⁻¹ — рис. 1в (детали см. в разделах 4 и 5); серый цвет соответствует доверительному уровню 3σ , темно-серый — 4σ , черный — 5σ ; белые звездочки в центре доверительных областей указывают направления X_0 (α_0, δ_0), отвечающие максимальным высотам пиков. Рисунки 1б и 1в ограничены прямоугольными областями на небе, внутри которых проводилось сканирование осью X при вычислении уровней значимости, представленных на рис. 3 и 4.

нерегулярных, так и квазирегулярных), соответствующих рассматриваемым в настоящей работе масштабам $\Delta z \sim (3-5) \times 10^{-2}$.

В южном полушарии использовались фотометрические данные скоплений галактик, отождествленных на основе расширенного каталога галактик “DES × unWISE” (Вэнь, Хань, 2022)². В каталоге

¹zmtt.bao.ac.cn/galaxy_clusters/catalogs.html, “WHL12”

²zmtt.bao.ac.cn/galaxy_clusters/catalogs.html, “WH22”

“WH22” в интересующем нас интервале красных смещений ($0.1 \leq z \leq 0.47$) идентифицировано 27 938 скоплений; средняя погрешность фотометрических z составляет $\delta z \lesssim 0.013$. Область скоплений южного полушария показана в правой нижней части рис. 1а.

Используя данные указанных каталогов, мы вводим декартову систему координат (ДСК) для всех собранных в них скоплений галактик в сопутствующем пространстве. Кроме того, вводится вращающаяся ДСК, центр которой совмещен с неподвижной ДСК. Это позволяет изучать особенности распределения проекций декартовых координат скоплений на ось X вращающейся ДСК и, тем самым, проследить зависимость этих распределений от направления оси X .

3. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим пространственное распределение скоплений галактик в определенной области неба, используя ДСК:

$$\begin{aligned} X_i &= D(z_i) \sin(90^\circ - \delta_i) \cos \alpha_i, \\ Y_i &= D(z_i) \sin(90^\circ - \delta_i) \sin \alpha_i, \\ Z_i &= D(z_i) \cos(90^\circ - \delta_i), \end{aligned} \quad (1)$$

где $D(z_i)$ — радиальное (вдоль луча зрения) сопутствующее расстояние i -го скопления с красным смещением z_i , $i = 1, 2, \dots$, нумерует скопления (Кайзер и др., 1997; Хогг, 1999)

$$D(z_i) = \frac{c}{H_0} \int_0^{z_i} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}} dz, \quad (2)$$

$H_0 = 100 h \text{ км с}^{-1} \text{ Мпк}^{-1}$ — постоянная Хаббла в современную эпоху, c — скорость света; α_i — прямое восхождение и δ_i — склонение i -го скопления в экваториальной системе координат (ЭСК).

В дальнейшем, для сравнение с нашими предыдущими результатами, мы используем ту же Λ CDM модель с $\Omega_m = 0.25$ и $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m = 0.75$.

Следуя работам Рябинкова, Каминкера (2021, 2024), мы используем два метода построения одномерных (1D) распределений проекций декартовых координат скоплений.

Первый метод можно назвать методом *преобразования Радона*. Он используется при построении рис. 4б в разделе 5. По существу мы имеем дело с дискретным аналогом так называемого 3D преобразования Радона (см., например, Динс, 2007), применяемым к определенной выборке скоплений галактик, и рассматриваем проекции на подвижную ось X всех декартовых координат (неподвижной ДСК), попадающих в каждый бин (равный интервал разбиения) внутри заданного интервала $X_1 \leq X \leq X_2$. Поворачивая ось X и сохраняя интервал (X_1, X_2) , мы последовательно проецируем на эту ось координаты всех скоплений выборки, попадающих в этот интервал.

Каждое фиксированное направление оси X определяется углами α и δ ЭСК, связанной с наблюдателем. Для каждого такого направления строится одномерное (1D) распределение проекций на ось X координат скоплений, принадлежащих исследуемой пространственной области, и вычисляется СМ полученного распределения. Таким образом, находятся направления повышенной высоты доминантных пиков в СМ при $k \sim (0.04\text{--}0.06) h \text{ Мпк}^{-1}$ и направление X_0 (α_0, δ_0), вдоль которого высота пика максимальна (см. рис. 1б,в).

При этих вычислениях имеют место два основных свойства преобразования Радона: 1) *трансляционная инвариантность*, которая позволяет переносить распределение проекций декартовых координат объектов, полученное для данной оси X , на любую другую ось \tilde{X} , параллельную данной; 2) *линейность*, которая позволяет объединять проекции координат объектов, расположенных в отдельных непересекающихся областях, в единое преобразование Радона всей выборки в целом. Отметим, что методом преобразования Радона можно получить только выделенное направление (но не положение) оси X_0 в пространстве, которое может соответствовать также любой другой оси \tilde{X}_0 .

Второй метод, представляющий собой разновидность первого, можно назвать методом *сканирующего (вращающегося) кубоида*. Ниже он применяется при построении рис. 3а,б в разделе 4 и рис. 4а в разделе 5. В этих случаях мы строим в пространстве прямоугольный параллелепипед (кубоид) с фиксированными координатами его вершин $X_1 \leq X \leq X_2$, $Y_1 \leq Y \leq Y_2$, $Z_1 \leq Z \leq Z_2$ в подвижной ДСК, жестко связанной с кубоидом, при этом направление оси X задает ориентацию кубоида в экваториальной (неподвижной) СК. Поворачивая кубоид вместе с осью X относительно начала координат $X = 0$ и определяя грани кубоида для каждого фиксированного направления оси X , мы проецируем на эту ось координаты всех скоплений из данного каталога, расположенных внутри кубоида.

Как и в первом методе, каждое фиксированное направление определяется углами α и δ ЭСК, и для каждого направления вычисляется СМ. При очевидном сходстве предложенных методов отличие метода вращающегося кубоида в том, что каждое направление оси X однозначно связано с определенной выборкой объектов (скоплений галактик), попадающих внутрь границ кубоида. Это позволяет приближенно локализовать выделенные направления пространственного распределения объектов, обнаруженные на определенном уровне значимости.

Оба метода (по существу, являясь интегральными) оказываются довольно чувствительными к присутствию разреженных, трудно обнаруживаемых, квазипериодических компонент и связанной с ними возможной анизотропии пространственного распределения объектов. В обоих рассмотренных выше подходах базовой величиной для спектрального анализа явля-

ется функция 1D-распределения $N_X(X)$, аккумулирующая проекции координат на каждую фиксированную ось X , $N_X(X)dX$ — число скоплений галактик, проекции которых на ось X попадают в интервал dX . С помощью функции $N_X(X)$ мы вычисляем в рамках бинового подхода так называемую нормированную функцию 1D-распределения

$$NN(X_c^l) = \frac{N_X(X_c^l) - S_X}{\sqrt{S_X}}, \quad (3)$$

где X_c^l — центральная точка l -го бина, $l = 1, 2, \dots, N_b$ нумерует бины, S_X — среднее по всем рассматриваемым бином значения функции $N_X(X_c^l)$. Отметим, что величину $NN(X_c)$ можно рассматривать как отношение сигнал/шум в функции от значений X_c^l вдоль выбранной оси.

Величина $NN(X_c^l)$ позволяет вычислить 1D-спектр мощности (1D-СМ)

$$P_X(k_m) = |F_X(k_m)|^2 = -\frac{1}{N_b} \left\{ \left[\sum_{l=1}^{N_b} NN(X_c^l) \cos(k_m X_c^l) \right]^2 + \left[\sum_{l=1}^{N_b} NN(X_c^l) \sin(k_m X_c^l) \right]^2 \right\}, \quad (4)$$

где $F_X(k_m) = (N_b)^{-1/2} \sum_{l=1}^{N_b} NN(X_c^l) e^{-i(k_m X_c^l)}$ — одномерное дискретное преобразование Фурье, $k_m = 2\pi m/L_X$ — волновое число, соответствующее целым гармоническим числам $m = 1, 2, \dots, M$, максимальное число независимых гармоник $M = \lfloor N_b/2 \rfloor$ определяется так называемым числом Найквиста, $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число $\leq x$, где x — произвольное действительное (положительное) число; L_X — полный интервал вдоль оси X , так называемая длина выборки в данном направлении конфигурационного пространства.

Мы вращаем координаты XYZ подвижной СК (во втором случае, жестко связанные с кубоидом) на определенные углы Эйлера, так что новая ось X'^3 ориентирована в определенном направлении (α' and δ') относительно исходной (неподвижной) ЭСК. Выполняя последовательность таких поворотов, мы находим направление X_0 , вдоль которого 1D-СМ содержит максимально высокий пик, при $k = k_{\max}$, лежащем в интервале $0.04 \leq k \leq 0.06 \text{ h Мпк}^{-1}$.

Для однородности статистических условий в различных направлениях X' мы фиксируем одни и те же границы сканирующих осей $X_1 \leq X' \leq X_2$, но разные для северного и южного полушария, как показано на рис. 3а и 4а. Например, для вращающегося кубоида в северном полушарии имеем $132 \leq X' \leq 1242 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$,

³Здесь и далее обозначение X' вместо X указывает на ось X вращающейся ДСК.

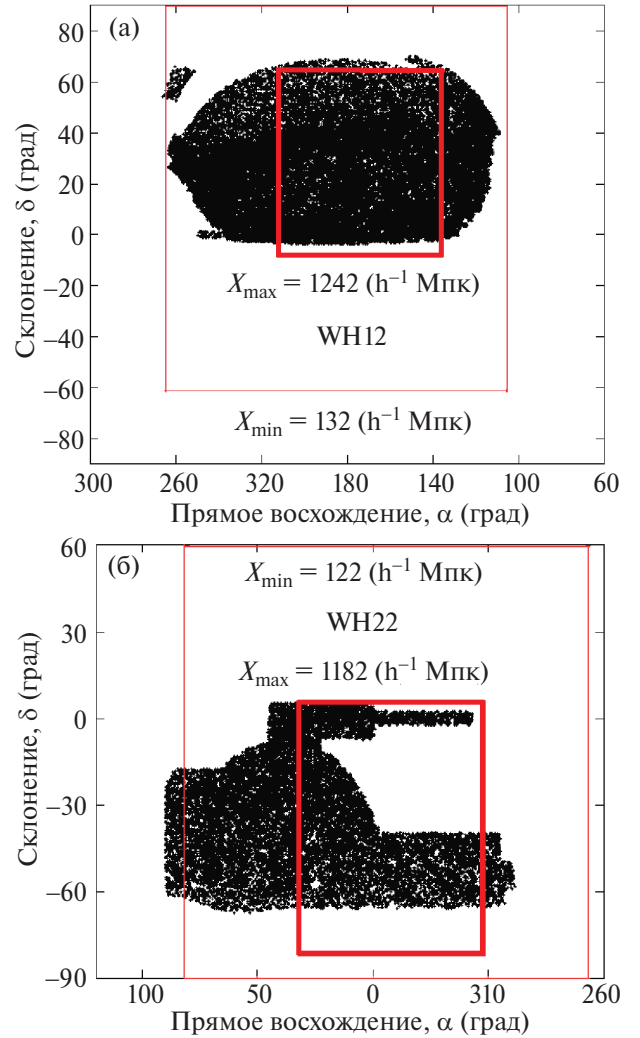


Рис. 2. Те же угловые распределения скоплений галактик, что и на рис. 1а, но с наложенными на них прямоугольными границами, образованными крайними положениями двух граней кубоидов, соответствующих максимальному X_{\max} и минимальному X_{\min} значениям координаты X при сканировании осью X областей, представленных на рис. 1б и 1в в северном — рис. 2а и южном — рис. 2б полушариях соответственно; при этом граням, максимально удаленным от начала координат (толстые линии), соответствуют значения $X_{\max} = 1242 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$ (рис. 2а) и $X_{\max} = 1182 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$ (рис. 2б), а граням, минимально удаленным (тонкие линии), — значения $X_{\min} = 132 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$ (рис. 2а) и $X_{\min} = 122 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$ (рис. 2б).

между которыми расположены $N_b = 111$ независимых бинов с шириной $\Delta_X = 10 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$.⁴

Для оценки значимости полученных пиков в СМ мы используем показательное распределение высот (амплитуд) пиков P_k в спектрах мощности (см., например, Дженкинс, Уоттс 1971, подраздел 6.3.1.),

⁴При этом мы выбираем такие области сканирования осью X' , чтобы на границах этих областей все бины $\Delta_{X'}$ внутри интервала $X_1 \leq X' \leq X_2$ были заполнены проекциями координат объектов приблизительно равномерно.

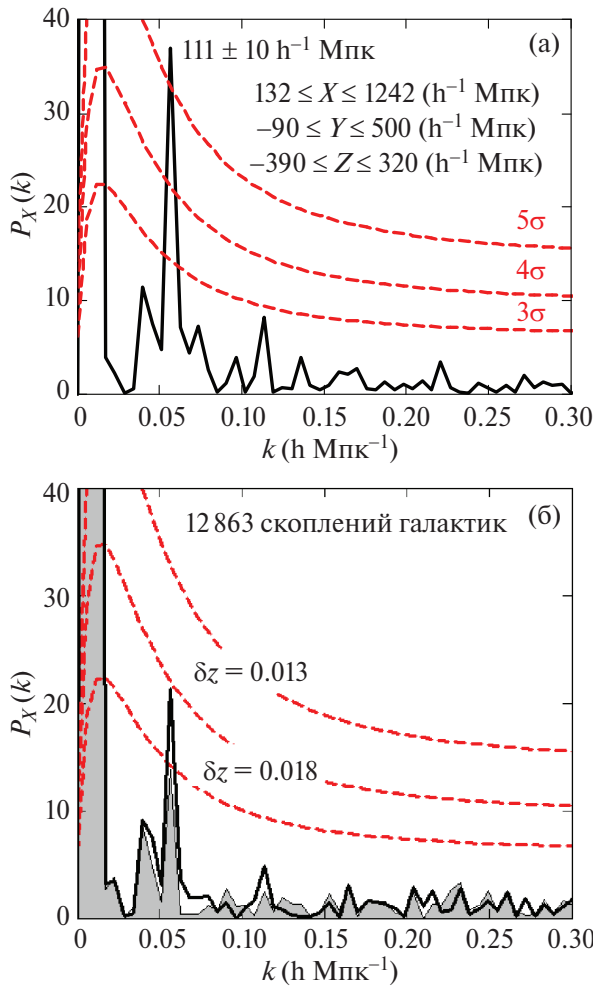


Рис. 3. Спектры мощности $P_X(k)$ (сплошные линии) одномерных распределений проекций на ось X_0 (см. ниже) декартовых координат скопления галактик северного полушария, попадающих в кубоид, ограниченный координатами X, Y, Z (см. вставку на рис. 3а) в его собственной системе отсчета; при этом фиксированное направление оси $X = X_0$ (координаты указаны на рис. 1б) соответствует пику максимальной высоты при $k = k_{\max} = 0.057 \pm 0.005 h \text{ Мпк}^{-1}$ ($111 \pm 10 h^{-1} \text{ Мпк}$).

Рис. 3а: декартовы координаты скопления вычислялись на основе *спектроскопических* $z = z_{\text{sp}}$. Штриховые линии соответствуют уровням значимости ($3\sigma, 4\sigma, 5\sigma$), вычисленным (для всех $k \leq 0.3 h \text{ Мпк}^{-1}$) путем сканирования осью X прямоугольной области, показанной на рис. 1б (см. текст).

Рис. 3б: То же, что на рис. 3а, но с заменой части спектрометрических (z_{sp}) на фотометрические (z_{ph}) для тех из рассмотренных скопления, для которых выполняется одно из двух условий: $\delta z = |z_{\text{sp}} - z_{\text{ph}}|/(z_{\text{sp}} + 1) \leq 0.013$ — толстая кривая или $\delta z \leq 0.018$ — тонкая кривая, ограничивающая область, закрашенную серым цветом. Указана общая для всех трех распределений статистика скопления.

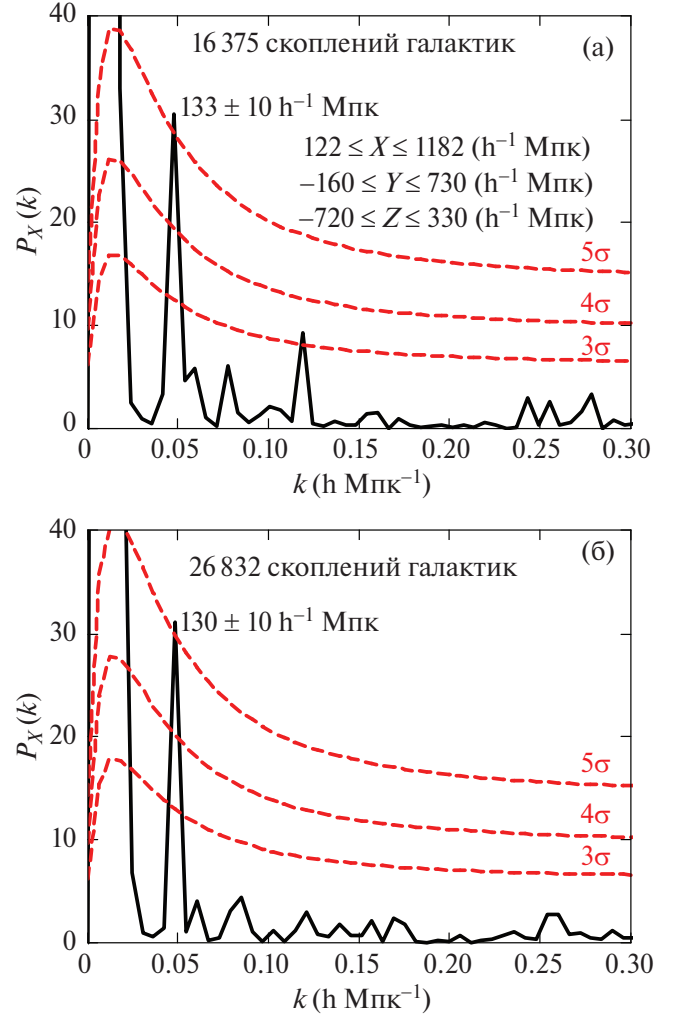


Рис. 4. Рис. 4а построен аналогично рис. 3а, но для массива скопления галактик южного полушария из каталога “WH22” (см. раздел 2), содержащего только фотометрические z_{ph} , определенные со средней для интервала $0.1 \leq z \leq 0.47$ точностью $\delta z \sim 0.013$; направление X_0 (указано на рис. 1в) соответствует пику максимальной высоты при $k = k_{\max} = 0.047 \pm 0.004 h \text{ Мпк}^{-1}$ ($133 \pm 10 h^{-1} \text{ Мпк}$); во вставках даны координаты кубоида X, Y, Z и статистика скопления, попадающих в кубоид с осью $X = X_0$. Штриховые линии соответствуют уровням значимости ($3\sigma, 4\sigma, 5\sigma$), вычисленным путем сканирования осью X прямоугольной области, показанной на рис. 1в.

Рис. 4б — спектр мощности $P_X(k)$ (сплошные линии) одномерного распределения проекций на ось X_0 декартовых координат всех скопления южного полушария, попадающих в интервал $132 \leq X_0 \leq 1172 h^{-1} \text{ Мпк}$ (преобразование Радона, см. текст); пик максимальной высоты ($\gtrsim 5\sigma$) соответствует $k = k_{\max} = 0.048 \pm 0.004 h \text{ Мпк}^{-1}$ ($130 \pm 10 h^{-1} \text{ Мпк}$); точность определения фотометрических z_{ph} та же, что и на рис. 4а. Штриховыми линиями показаны уровни значимости, вычисленные для той же прямоугольной области, что и на рис. 4а, но с использованием преобразования Радона.

соответствующее нормально распределенным случайным величинам $\text{Re}[F_X(k)]$ и $\text{Im}[F_X(k)]$ с нулевыми средними $\langle \text{Re}[F_X(k)] \rangle = \langle \text{Im}[F_X(k)] \rangle = 0$ и дисперсиями $\sigma^2(k) = \langle \{\text{Re}[F_X(k)]\}^2 \rangle + \langle \{\text{Im}[F_X(k)]\}^2 \rangle = \langle P_X(k) \rangle$, где Re и Im — вещественная и мнимая части преобразования Фурье для данной гармоники k , $P_X(k)$ определено в (4), $\langle \dots \rangle$ — усреднение по статистическому ансамблю. В этом случае функция плотности вероятности величин $z = P_k$ представляется в виде

$$\mathcal{P}_X(z)dz = \frac{1}{\sigma^2(k)} \exp(-z/\sigma^2(k))dz. \quad (5)$$

Тогда кумулятивную функцию вероятности того, что случайная высота пика P_k оказывается меньше некоторой фиксированной величины $P_k < P_k^*$, можно записать (см., например, Скаргл, 1982; Фельдман, 1994; Фрескура, 2008):

$$\mathcal{F}(P_k < P_k^*, \lambda) = 1 - \exp(-\lambda \cdot P_k^*), \quad P_k^* \geq 0, \quad (6)$$

где параметр экспоненциального распределения $\lambda = \lambda(k) = \sigma^{-2}(k) = \langle P_X(k) \rangle^{-1}$ в отличие от цитированных выше работ, в которых принималось, что $\lambda = \text{const}$, является относительно гладкой функцией k . Существенным условием справедливости приведенных формул является статистическая независимость различных k (см., например, Ломб, 1976). В итоге выражение (6) позволяет получить уровни значимости пиков $P_X(k)$, если вычислить усредненные $\langle \dots \rangle$ амплитуды СМ при различных k .

В качестве такого усреднения (по ансамблю) мы проводим усреднение СМ $\langle P_X(k) \rangle$, полученных в ходе сканирования осью X' определенных областей на небе (см. разделы 4 и 5). Практически для оценок уровней значимости с помощью выражения (6) удобно использовать подгоночную аппроксимацию, детали которой описаны, например, в Рябинкова, Каминкера (2021). При этом в силу теоремы о центральном сечении (*the projection-slice theorem*; см., например, Динс, 2007) мы принимаем, что усредненный по множеству направлений спектр мощности 1D-преобразования Радона $\lambda^{-1}(k) = \langle P_X(k) \rangle$ аппроксимируется модельной функцией

$$f(k) = f_{\text{CDM}}(k) + 1, \quad (7)$$

где $f_{\text{CDM}}(k)$ описывает 3D флуктуации плотности холодной темной материи (“CDM”), усредненные по направлениям $k = |\vec{k}|$ (Бардин и др., 1986), а “1” в правой части равенства (7) описывает так называемый дробный шум (Фельдман и др., 1994), равномерный по всем рассматриваемым k .

С помощью (6), учитывая приближенное равенство $\lambda(k) \simeq f(k)^{-1}$, можно построить сглаженные уровни доверительной вероятности $\beta(k) = \mathcal{F}(P_k < P_k^*)$ для любых k во всем интервале ($0 \leq k \leq 0.3$). В последующих разделах мы используем такие сглаженные зависимости от k для оценки значимости пиков в 1D-СМ (см. рис. 3а, 3б и 4а, 4б). При этом, в силу сходства двух

рассмотренных выше методов, мы применяем тот же подход к оценке значимости пиков в СМ, полученных методом вращающегося кубоида.

В отличие от работ Рябинкова, Каминкера (2021, 2024) в настоящей работе мы рассматриваем одни те же области сканирования (см. разделы 4 и 5) и для поиска выделенных направлений (вблизи X_0), и для оценки значимости полученных пиков. Это может приводить к занижению величины $\lambda(k)$ и, тем самым, к завышению доверительного уровня $\beta(k)$, т.е. занижению оценки значимости полученных пиков.

4. СЕВЕРНОЕ ПОЛУШАРИЕ. ВРАЩАЮЩИЙСЯ КУБОИД

В северном полушарии поиск следов квазипериодичности в определенных направлениях пространственного распределения скоплений галактик проводился на основе каталога “WHL12” (см. раздел 2) методом вращающегося кубоида (см. раздел 3). Для упрощения процедуры поиска мы учитываем результаты работы (Рябинков, Каминкер, 2024), полученные на основе статистического анализа каталога галактик SDSS DR12 LOWZ. Начинаем поиск с того же направления X_0 ($\alpha_0 = 170^\circ$, $\delta_0 = 28^\circ$) и для того же $k = k_{\text{max}} = 0.054 \text{ h Мпк}^{-1}$, что и в указанной работе, и получаем пик в спектре мощности, но значительно меньшей значимости $\sim (3-4)\sigma$ (оценки значимости обсуждаются ниже). Далее варьируются размеры граней кубоида так, чтобы высота пика в спектре мощности для того же направления X_0 достигала наибольшего значения. Установленные таким образом координаты вершин приводятся на рис. 3а.

Затем с шагом 1° проводится коррекция направления максимального пика X_0 и уточнение величины k_{max} , что в результате приводит к значениям углов $\alpha_0 = 170^\circ$, $\delta_0 = 29^\circ$ и масштабу $2\pi/k_{\text{max}} = 111 \pm 10 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$. Фиксируя полученные координаты вершин кубоида в его собственной системе координат, мы сканируем осью X подвижной СК с шагом 1° две прямоугольные области в плоскости α , δ . Обе области сканирования определяются интервалами углов: $160^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, $20^\circ \leq \delta \leq 40^\circ$ — область (r1) (см. рис. 1б) и $140^\circ \leq \alpha \leq 190^\circ$, $10^\circ \leq \delta \leq 50^\circ$ — область (r2). Отметим, что область (r2) целиком включает меньшую область (r1).

При сканировании осью кубоида X области (r1) на небе, представленной на рис. 1б, различные сечения кубоида, перпендикулярные оси X , очерчивают различные прямоугольные области на плоскости (α, δ) . На рис. 2а для наглядности показаны две такие области, соответствующие крайним положениям граней кубоида при вращении оси X в пределах области сканирования, изображенной на рис. 1б. Меньший прямоугольник, ограниченный толстыми линиями на рис. 2а, соответствует наиболее отдаленной грани кубоида $X_{\text{max}} = 1242 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$, а больший, ограниченный тонкими линиями, — ближайшей к началу

координат грани $X_{\min} = 132 h^{-1}$ Мпк. Видно, что даже при сканировании ограниченной области, показанной на рис. 1б, кубоид в различных положениях захватывает все скопления (с небольшими исключениями) рассматриваемой части каталога “WHL12”.

В результате сканирования области (r1) можно построить одномерные спектры мощности $P_X(k)$ для каждого направления оси кубоида X и после усреднения $\langle \dots \rangle$ получить усредненные спектры мощности $\langle P_X(k) \rangle$ для любого фиксированного $0 \leq k \leq 0.3$. С помощью формулы (6), полагая что $\lambda(k) = \langle P_X(k) \rangle^{-1}$, можно построить относительно гладкие кривые уровней значимости, показанные на рис. 3а и 3б. С другой стороны, в результате этого же сканирования области (r1) находим направления повышенной значимости (доверительные области) пиков $P_X(k)$ при фиксированном $k = k_{\max} = 0.057 h$ Мпк $^{-1}$ (соответствующем X_0). Полученные таким образом доверительные области окрашены оттенками серого на рис. 1б.

Сканирование по большей области (r2) проводится для проверки отсутствия дополнительных областей с повышенной значимостью пиков $\gtrsim 3\sigma$ в одномерных спектрах мощности $P_X(k)$ при $0.04 \leq k \leq 0.06 h$ Мпк $^{-1}$.

Спектр мощности $P_X(k)$, полученный для направления X_0 , приведен на рис. 3а. Спектр построен с учетом данных 12 863 скоплений галактик в интервале красных смещений $0.1 \leq z \leq 0.47$, представленных в каталоге “WHL12” (см. раздел 2) и попадающих в кубоид с осью $X = X_0$ и размерами, указанными во вставке. Декартовы координаты скоплений и их проекции на ось X_0 вычислялись с помощью формул (1) с учетом только спектроскопических $z = z_{\text{sp}}$. Видно, что значимость доминирующего пика в спектре мощности превышает 5σ . Однако, с учетом неопределенности оценок значимости (см. Рябинов, Каминкер, 2024), здесь и далее принимаются более осторожные оценки $\gtrsim (4-5)\sigma^5$.

На рис. 3б представлены спектры мощности для той же статистики скоплений, но теперь определенная часть спектроскопических z_{sp} заменена на фотометрические z_{ph} при условии, что отклонение $\delta z = |z_{\text{sp}} - z_{\text{ph}}| / (z_{\text{sp}} + 1)$ не превышает заданную величину. Показаны спектры для двух значений $\delta z \leq 0.013$ (толстые линии) и $\delta z \leq 0.018$ (тонкие линии, ограничивающие области, закрашенные серым цветом). Для первого ограничения 63% спектроскопических z_{sp} заменяются на фотометрические z_{ph} , а для второго эта доля составляет уже 76%.

Если считать, что величины δz характеризуют точность фотометрических измерений, то из рис. 3б следует, что величина пика в спектре мощности существенно зависит от этой точности. При $\delta z \leq 0.013$ зна-

чимость пика приближается к 4σ , а при $\delta z \leq 0.018$ — к 3σ . Отсюда следует, что сравнение высоты пика в спектре мощности, полученном для рассматриваемой аномалии на основе фотометрических измерений z , с высотой пика, полученной при тех же условиях, но на основе спектроскопических измерений, при необходимых подтверждении и доработке может быть использован для тестирования точности фотометрических измерений.

5. ЮЖНОЕ ПОЛУШАРИЕ. СКАНИРУЮЩИЙ КУБОИД И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА

В южном полушарии поиск квазипериодичности в определенных выделенных направлениях пространственного распределения скоплений проводился на основе данных каталога “WH22” (см. раздел 2) двумя методами: сканирующего кубоида (рис. 4а) и преобразований Радона (рис. 4б).

Применяя метод сканирующего кубоида выберем в качестве начального направления оси X_0 направление, противоположное найденному для северного полушария: $\alpha = 350^\circ$, $\delta = -29^\circ$. Фиксируя это направление, варьируем координаты вершин кубоида в его собственной СК, чтобы получить наибольшую высоту пика, соответствующую той же $k = k_{\max} \approx 0.057 h$ Мпк $^{-1}$, что и в северном полушарии.

Далее рассматривая полученные координаты вершин вращающегося кубоида как нулевое приближение, последовательно варьируем направление оси X_0 с шагом 1° , а затем уточняем координаты вершин кубоида. В результате координаты оси X_0 в ЭСК определяются как $\alpha_0 = 346^\circ$ и $\delta_0 = -29^\circ$, а координаты вершин кубоида приведены на рис. 4а. При этом положение пика $k = k_{\max}$ сдвигается в сторону меньших значений k , т.е. $k = k_{\max} \approx 0.047 h$ Мпк $^{-1}$. Координаты оси X_0 в ЭСК показаны на рис. 1в, где построены также доверительные области (окрашены оттенками серого) для направлений, соответствующих наибольшим высотам пиков в СМ.

Полученные таким образом доверительные области и направление оси X_0 совпадают с направлением и доверительными областями, полученными аналогичной процедурой варьирования при использовании метода преобразования Радона (рис. 4б). Оптимальный интервал значений X в этом случае оказывается равным $132 \leq X \leq 1172 h^{-1}$ Мпк, при этом волновое число, соответствующее максимальному пику, равно $k = k_{\max} \approx 0.048 h$ Мпк $^{-1}$.

Фиксируя полученные координаты вершин кубоида в его собственной СК, мы проводим последовательное сканирование осью X с шагом 1° двух прямоугольных областей в плоскости α , δ . Как и в северном полушарии, обе области сканирования расположены внутри прямоугольника, ограниченного толстыми линиями на рис. 2б, и определяются интервалами углов: $340^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, $-40^\circ \leq \delta \leq -20^\circ$ — об-

⁵ В разделах 4 и 5 статьи РК24 оцениваются дисперсии уровней значимости, полученных для сглаженных спектров мощности различных реализаций при последовательных сдвигах угловых решеток (в координатах α и δ) со слабой корреляцией между узловыми направлениями.

ласть (r3) (см. рис. 1в) и $320^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$, $-50^\circ \leq \delta \leq -10^\circ$ — область (r4). Как и в северном полушарии (раздел 4) область (r4) целиком включает меньшую область (r3).

Проводя сканирование области (r3) и выполняя построение соответствующих одномерных СМ $P_X(k)$ для каждого направления оси X' , можно получить усредненные СМ $\langle P_X(k) \rangle$ при любом фиксированном $0 \leq k \leq 0.3$. Как и в разделе 4, используя формулы (6) и $\lambda(k) = \langle P_X(k) \rangle^{-1}$, можно построить уровни значимости, показанные на рис. 4а и 4б.

Сканирование по большей области (r4), как и в северном полушарии, служит для контроля отсутствия дополнительных областей с повышенной значимостью пиков $\gtrsim 3\sigma$ в одномерных СМ $P_X(k)$ при $0.04 \leq k \leq 0.06 \text{ h Мпк}^{-1}$.

Как и в разделе 4, на рис. 2б для наглядности показаны две области, соответствующие крайним положениям граней кубоида при вращении оси X в пределах области сканирования (рис. 1в). Меньший прямоугольник, ограниченный толстыми линиями, соответствует наиболее отдаленной грани кубоида $X_{\max} = 1182 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$, а больший, ограниченный тонкими линиями, — ближайшей к началу координат грани $X_{\min} = 122 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$. Мы видим, что при сканировании кубоид в различных положениях захватывает подавляющее большинство скоплений южного полушария, вошедших в каталог.

На рис. 4а представлен спектр мощности $P_X(k)$, полученный методом вращающегося кубоида с наибольшей высотой пика при $k = k_{\max} \simeq 0.047 \pm \pm 0.004 \text{ h Мпк}^{-1}$ (квазипериод $133 \pm 10 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$), соответствующей направлению X_0 . Спектр построен с учетом данных 16 375 скоплений в интервале красных смещений $0.1 \leq z \leq 0.47$. Декартовы координаты скоплений и их проекции на ось X_0 вычислялись с помощью формул (1) с учетом только фотометрических $z = z_{\text{ph}}$. Видно, что значимость доминирующего пика в спектре мощности превышает 5σ , однако с учетом неопределенности таких оценок (см. раздел 4) мы должны ограничиться интервалом $\gtrsim (4-5)\sigma$.

Для сравнения на рис. 4б приведен спектр мощности, полученный методом преобразования Радона для расширенной статистики скоплений (26 832) с использованием фотометрических z_{ph} . Видно, что пик при $k = k_{\max} \simeq 0.048 \pm 0.004 \text{ h Мпк}^{-1}$ (период $130 \pm 10 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$) соответствует той же значимости, что и пик на рис. 4а.

Таким образом, оба метода, использующие только фотометрические красные смещения z_{ph} скоплений галактик в южном полушарии, дают значимые пики при близких значениях k_{\max} в одномерных спектрах мощности, построенных для одного и того же направления X_0 , близкого к направлению, противоположному аналогичному направлению X_0 северного полушария.

6. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

В настоящей работе на основе каталогов “WHL12” (Вэнь и др., 2012) и “WH22” (Вэнь, Хань, 2022) в северном и южном полушариях соответственно (см. также раздел 2) рассматривается возможность существования анизотропной квазипериодической структуры (аномалии) в пространственном распределении космологически удаленных ($0.1 \leq z \leq 0.47$) скоплений галактик. Мы используем предложенный ранее (Рябинков, Каминкер, 2021, 2024) метод проекций декартовых координат скоплений на различные оси X , последовательно поворачиваемые в границах определенных (заданных наблюдательными данными) областей на небе — преобразование Радона — и его модификацию — метод сканирующего кубоида. При поворотах оси X кубоида его грани (ребра, вершины) фиксированы в системе координат XYZ , жестко с ним связанной, а в объем кубоида попадают различные выборки массивов скоплений (см. рис. 1а и 2а,б), входящих в один из двух каталогов. Такой подход позволяет грубо локализовать возможную аномалию в сопутствующем пространстве.

В обеих разновидностях метода одномерных проекций после каждого поворота оси X вычисляется нормированное распределение (3) проекций координат скоплений на эту ось в границах фиксированного интервала $X_1 \leq X \leq X_2$. Затем строится соответствующий спектр мощности (4) во всем рассматриваемом интервале $0.0 \leq k \leq 0.3$, при этом космологические красные смещения скоплений ограничиваются интервалом $0.1 \leq z \leq 0.47$. Среди всех направлений X с различными спектрами мощности мы находим (независимо в каждом полушарии) направление X_0 (α_0 и δ_0) с максимальной высотой пика в интервале $0.04 \lesssim k \lesssim 0.06$.

Чтобы произвести оценку значимости полученных пиков мы используем, следуя работам Рябинкова, Каминкера (2019, 2021), экспоненциальную вероятность (5), (6), чтобы получить заданную величину амплитуды пика в спектре мощности при случайном распределении амплитуд пиков. Основным элементом этой оценки является вычисление усредненного спектра мощности (4) $\langle P(k) \rangle$ для всех дискретных k из рассматриваемого интервала. Такое усреднение проводилось по результатам сканирования двух выделенных областей (r1) и (r3), показанных на рис. 1б и 1в, в северном и южном полушариях соответственно.

Подведем итог полученным результатам.

1. В северном и южном полушариях независимо обнаружено присутствие анизотропной квазипериодической аномалии в пространственном распределении скоплений с характерным масштабом в интервале сопутствующих расстояний $100-140 \text{ h}^{-1} \text{ Мпк}$.

2. Направления X_0 (α_0 , δ_0), в которых амплитуды пиков в спектре мощности максимальны, в

обоих полушариях близки к противоположным: $\alpha_0 = 170^\circ \pm 5^\circ$, $\delta_0 = 29^\circ \pm 5^\circ$ — в северном и $\alpha_0 = 346^\circ \pm 5^\circ$, $\delta_0 = -29^\circ \pm 5^\circ$ — в южном полушариях соответственно.

3. Эти особенности проявляются как с использованием спектроскопических z_{sp} (в северном), так и фотометрических красных смещений z_{ph} (в южном), определяемых со средней погрешностью $\delta z_{\text{ph}} \lesssim 0.013$. Значимость максимальных пиков в спектре мощности для выделенных направлений при $k_{\text{max}} \approx (0.04 - 0.06) h \text{ Мпк}^{-1}$ составляет $\gtrsim (4-5)\sigma$.

4. Сильная зависимость значимости квазипериодической компоненты от точности фотометрических измерений δz_{ph} открывает возможность дополнительного контроля точности методик определения фотометрических z_{ph} .

5. Общий размер аномалии вдоль выделенного направления составляет $\sim 2500 h^{-1} \text{ Мпк}$.

Следует отметить, что оценка значимости пиков в спектре мощности должна быть сопоставлена со статистической оценкой анизотропии углового распределения пиков. Такая оценка дает значительно более скромные значения уровней значимости $\sim (3-4) \sigma$ выделенных направлений и, по-видимому, является более реалистичной оценкой для всего явления квазипериодической анизотропии. Работа на эту тему готовится к публикации.

Подчеркнем, что для обнаружения данной аномалии нами используется метод проекций на выделенную ось X , т.е. интегральный метод, собирающий информацию с большого количества скоплений, рассредоточенных в пространстве. Мы предполагаем, что рассматриваемая здесь анизотропная структура очень слабо проявляется в пространственном распределении скоплений галактик, в отличие от значительно более заметных квазирегулярных образований, обнаруженных в распределении сверхскоплений при $z \lesssim 0.12$ (Эйнасто и др., 1997a,b, 2016; Эйнасто, 2014; Саар и др., 2002). Возможно, что используемый здесь метод одномерных проекций приводит к относительному усилению квазипериодической составляющей и к увеличению ее значимости. При этом можно предположить, что существует связь между особенностями пространственных распределений галактик и скоплений галактик, с одной стороны, и сверхскоплениями — с другой, хотя это предположение требует дальнейшего исследования.

Рассмотренное здесь возможное существование аномалии, распространяющейся на оба полушария, может согласовываться также и с результатами серии работ (Бродхарст и др., 1990; Салей и др., 1993; Ку и др., 1993), в которых в одномерных распределениях галактик вдоль узких проколов в направлении северного и южного галактических полюсов бы-

ла обнаружена квазирегулярная последовательность ступеней и разрежений с характерным масштабом $\sim 130 h^{-1} \text{ Мпк}$. Суммарный масштаб такой квазирегулярной неоднородности составлял $\sim 2000 h^{-1} \text{ Мпк}$. Более поздние симуляции (Ёсида и др., 2001) показали, что вероятность случайного происхождения таких одномерных квазипериодических распределений значительно меньше 10^{-3} , что для эквивалентной значимости гауссовских процессов превышает 3σ .

Распределение галактик в узких проколах принципиально отличается от распределения проекций больших массивов объектов (в данном случае — скоплений галактик) на выделенную ось X_0 . Тем не менее оба типа одномерной квазипериодичности могут быть взаимно связаны как два различных способа зондирования одной сложной квазирегулярной структуры. Отметим только, что узкий пучок направлений (рис. 1б и 1в) с высоким уровнем значимости пиков в спектрах мощности повернут на угол $\sim 20^\circ - 30^\circ$ по прямому восхождению α относительно оси, соединяющей северный и южный галактические полюса ($\alpha_{\text{ngp}} = 192.86^\circ$, и $\alpha_{\text{sgp}} = 12.86^\circ$ (372.86°)). Это означает, что направления осей X_0 , обсуждаемые в настоящей работе, заметно отличаются от среднего направления узких проколов, ориентированных на галактические полюса. С другой стороны, наклонение δ близко к наклонению северного ($\delta_{\text{ngp}} = 27.13^\circ$) и южного ($\delta_{\text{sgp}} = -27.13^\circ$) полюсов соответственно, что лучше согласуется с гипотезой о взаимной связи указанных аномалий.

Отметим также, что указанный выше интервал квазипериодов включает характерные пространственные масштабы $\sim (100-110) h^{-1} \text{ Мпк}$, соответствующие основному максимуму барионных акустических осцилляций (БАО) в спектре мощности флуктуаций плотности вещества во Вселенной (см., например, Эйзенштейн и др., 2007, Алам и др., 2017). Можно предположить, что есть связь между явлением БАО и рассмотренными в данной работе квазипериодами в пространственном распределении скоплений галактик. Однако сделанная в работе Рябинкова, Каминкера (2019) попытка выявить такую связь с помощью моделирования радиальных распределений привела к низкой оценке, соответствующей статистической значимости. Тем не менее мы продолжаем работу по 3-мерному моделированию возможного анизотропного распределения БАО, не противоречащего наблюдениям и согласующийся с результатами данного анализа.

В заключение следует подчеркнуть, что само существование рассмотренной анизотропной квазипериодической аномалии, так же как и ее характеристики, остаются гипотетическими, требующими дальнейшего подтверждения и тщательной проверки, в том числе с использованием моделирования.

Работа выполнена в рамках темы Государственного задания ФТИ им. А.Ф. Иоффе, номер FFUG-2025...

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алам и др. (S. Alam, M. Ata, S. Bailey, et al.), MNRAS **470**, 2617 (2017).
2. Бардин и др. (J.M. Bardeen, J.R. Bond, N. Kaiser, and A.S. Szalay), Astrophys. J. **304**, 15 (1986).
3. Болтон и др. (A.S. Bolton, D.J. Schlegel, E. Aubourg, et al.), Astrophys. J. **144**, 144 (2012).
4. Бродхарст и др. (T.J. Broadhurst, R.S. Ellis, D.C. Koo, and A.S. Szalay), Nature **343**, 726 (1990).
5. Вэнь и др. (Z.L. Wen, J.L. Han, and F.S. Liu), Astrophys. J. Suppl. Ser. **199**, 34 (2012).
6. Вэнь, Хань (Z.L. Wen and J.L. Han), MNRAS **500**, 1003 (2021).
7. Вэнь, Хань (Z.L. Wen and J.L. Han), MNRAS **513**, 3946 (2022).
8. Динс (S.R. Deans), *The Radon transform and some of its applications* (N.Y.: Dover Publ., Inc., 2007).
9. Дженкинс, Уоттс (G.M. Jenkins and D.G. Watts), *Спектральный анализ и его приложения* (М.: Мир, 1971).
10. Ёсида и др. (N. Yoshida, J. Colberg, S.D.M. White, A.E. Evrard, et al.), MNRAS **325**, 803 (2001).
11. Кайзер и др. (R. Kayser, P. Helbig, and T. Schramm), Astron. Astrophys. **318**, 680 (1997).
12. Ку и др. (D.C. Koo, N. Ellman, R.G. Kron, J.A. Munn, A.S. Szalay, T.J. Broadhurst, and R.S. Ellis), in *Observational Cosmology*; Chincarini G.L., Iovino A., Maccacaro T., Maccagni D., eds., ASP Conf. Ser. **51**, 112 (1993).
13. Лэнди и др. (S.D. Landy, S.A. Shectman, H. Lin, R.P. Kirshner, A.A. Oemler, and D. Tucker), Astrophys. J. (Lett.) **456**, L1 (1996).
14. Ломб (N.R. Lomb), Astrophys. and Space Sci. **39**, 447 (1976).
15. Рябинков, Каминкер (A.I. Ryabinkov and A.D. Kaminker), Astrophys. and Space Sci. **364**, 129 (2019).
16. Рябинков, Каминкер (A.I. Ryabinkov and A.D. Kaminker), Universe **7**, 289 (2021).
17. Рябинков, Каминкер (A.I. Ryabinkov and A.D. Kaminker), MNRAS **527**, 1813 (2024).
18. Саар и др. (E. Saar, J. Einasto, O. Toomet, et al.), Astron. Astrophys. **393**, 1 (2002).
19. Скаргл (J.D. Scargle), Astrophys. J. **263**, 835 (1982).
20. Салей и др. (A.S. Szalay, T.J. Broadhurst, N. Ellman, D.C. Koo, and R.S. Ellis), Proc. Natl. Acad. Sci. USA **90**, 4853 (1993).
21. Фельдман и др. (H.A. Feldman, N. Kaiser, and J.A. Peacock), Astrophys. J. **426**, 23 (1994).
22. Фрескура и др. (F.A.M. Frescura, C.A. Engelbrecht, and B.S. Frank), MNRAS **388**, 1693 (2008).
23. Хогг (D.W. Hogg), astro-ph/9905116, (1999).
24. Эйнасто и др. (J. Einasto, M. Einasto, S. Gottlöber, et al.), Nature **385**, 139 (1997a).
25. Эйнасто и др. (J. Einasto, M. Einasto, P. Frisch, et al.), MNRAS **289**, 801 (1997b).
26. Эйнасто и др. (J. Einasto, G. Hütsi, E. Saar, et al.), Astron. Astrophys. **531**, A75 (2011).
27. Эйнасто (J. Einasto), Dark Matter and Cosmic Web Story. *Advanced Series in Astrophysics and Cosmology* (Ed: Remo Ruffini). World Scientific (2014).
28. Эйнасто и др. (M. Einasto, P. Heinämäki, L.J. Liivamägi, et al.), Astron. Astrophys. **587**, A116 (2016).
29. Эйзенштейн и др. (D.J. Eisenstein, H.-J. Seo, and M. White), Astrophys. J. **664**, 660 (2007).