
НАДЕЖНОСТЬ, ПРОЧНОСТЬ, ИЗНОСОСТОЙКОСТЬ МАШИН И КОНСТРУКЦИЙ

УДК: 621.833.22

СИНТЕЗ ВНУТРЕННЕГО КОНИЧЕСКОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ

© 2024 г. М. А. Халтурин

*Кузбасский государственный аграрный университет имени В.Н. Полецкого, Кемерово, Россия
e-mail: l-air@internet.ru*

Поступила в редакцию 19.03.2023 г.

После доработки 30.11.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

Представлена методика синтеза внутреннего конического зацепления по коэффициентам смещения профилей зубьев и межосевому углу. Выведены формулы для расчета качественных показателей: коэффициентов удельного скольжения, коэффициентов удельного давления и коэффициента перекрытия. Отмечено, что внутреннее коническое зацепление по сравнению с внешним характеризуется лучшими значениями качественных показателей. Приведенные расчетные зависимости положены в основу работы программы Internal bevel gears x64 для генерирования макросов моделирования такой передачи. Проектируемые детали можно изготовить на трех-, четырех- или пятикоординатном станке, а также на 3D-принтере.

Ключевые слова: коническая передача, внутреннее коническое зацепление, коэффициенты смещения, коэффициенты удельного скольжения, коэффициенты удельного давления, коэффициент перекрытия

DOI: 10.31857/S0235711924020054, EDN: QWHAML

Анализ современного состояния рассматриваемой проблемы. Внутреннее коническое зацепление представляет собой неортогональную угловую передачу. Главное преимущество такой передачи состоит в возможности компоновки валов под достаточно малым углом друг к другу.

Согласно рис. 1 и ГОСТ 19624–74 внешнее коническое зацепление существует в диапазоне межосевых углов 0–170°. При этом, начиная от 120° и выше, диапазон передаточных чисел такой передачи сокращается до 1.0–1.25 ввиду некоторых математических свойств эвольвенты, что делает из нее не редуктор, а передаточный механизм. Внутреннее коническое зацепление позволит решить такой недостаток, поскольку его ориентировочному рабочему диапазону 0–90°, отсчитываемому с диаметрально противоположной стороны, соответствуют углы расположения валов от 180° до 90°. Кроме того, такие передачи по аналогии с внутренними цилиндрическими передачами обладают лучшими качественными показателями. Диапазоны возможных передаточных чисел внутреннего конического зацепления являются достаточно широкими.

Внутреннее коническое зацепление ввиду неортогональности применяют в конструкциях прецессирующих и нутационных редукторов [1–3]. Также эти передачи могут использоваться для создания сложных движений, например, в робототехнике [3]. Альтернативой таким передачам являются плоскоконические, цилиндрикоконические [4] и другие неэвольвентные передачи. Тем не менее эвольвентные конические

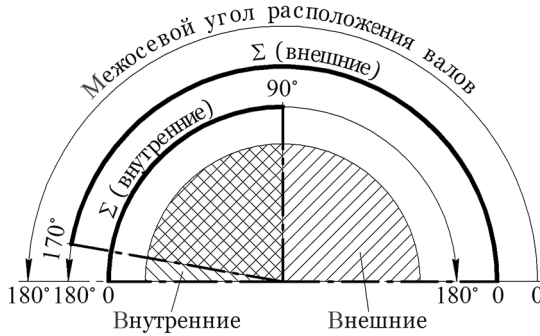


Рис. 1. Ориентировочные границы существования конических передач внешнего и внутреннего зацеплений в зависимости от межосевого угла Σ .

передачи внутреннего и внешнего зацеплений в большинстве случаев не уступают им в силовых и кинематических показателях, а при качественном проектировании — могут превзойти их по износостойкости.

Обоснование актуальности рассматриваемой проблемы. Одна из трудностей применения внутреннего конического зацепления заключается в сложности изготовления конического колеса (рис. 2, деталь 2) на стандартном оборудовании, поскольку зубострогальные станки для изготовления таких колес выпускались в основном только в США. Решением здесь может являться использование четырех- и пятикоординатных станков, позволяющих изготавливать детали со сложными поверхностями, в том числе и рассматриваемые колеса. Колеса с большим углом раствора начального конуса можно изготовить на трехкоординатных станках. Кроме того, изготовление таких колес небольшого размера возможно методом штамповки.

Другая проблема внутреннего конического зацепления состоит в его недостаточной изученности и практически полном отсутствии литературных сведений о нем.

Таким образом, изучение, математическое моделирование и проектирование внутреннего конического зацепления является актуальной проблемой.

Постановка задачи. Главной задачей является написание и вывод формул для расчета геометрических параметров и качественных показателей внутреннего кони-

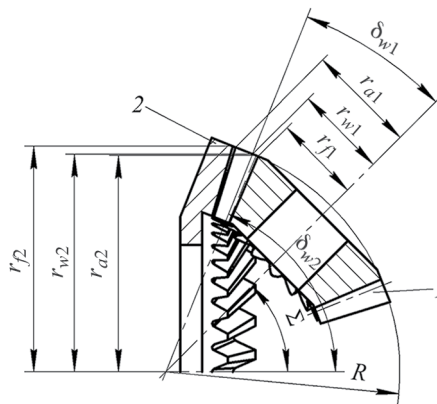


Рис. 2. Геометрические параметры внутреннего конического зацепления: 1 — шестерня; 2 — колесо.

ческого зацепления. Дополнительной задачей является рассмотрение вопросов его силового расчета и 3D-моделирования.

Изложение существа решения задачи. Проектирование внутреннего конического зацепления возможно с использованием специального приложения из САПР КОМПАС-3D. Однако эта функция доступна лишь в коммерческой версии. Кроме того, процесс проектирования такой передачи является закрытым и не располагает ее качественной оценкой.

Другие известные методы [5–7] проектирования конических передач не располагают профилированием внутреннего конического зацепления и являются не вполне доступными с практической точки зрения.

Тем не менее, следуя результатам изучения внешнего конического зацепления [8], можно получить математическую модель внутреннего конического зацепления.

Исходными данными для математического моделирования, как правило, являются (рис. 2): модуль m , мм; межосевой угол Σ , град; количество зубьев шестерни $1 - z_1$ и колеса $2 - z_2$; коэффициенты смещения профилей зубьев шестерни x_1 и колеса x_2 .

Первоначальной задачей является расчет таких показателей, как: радиусов оснований начальных конусов шестерни r_{w1} , мм, и колеса r_{w2} , мм; половин углов начальных конусов шестерни δ_{w1} , град, и колеса δ_{w2} , град; делительного конусного расстояния R , мм; радиусов оснований конусов впадин шестерни r_{f1} , мм, и колеса r_{f2} , мм; радиусов оснований конусов вершин шестерни r_{a1} , мм, и колеса r_{a2} , мм.

Указанные параметры можно найти следующим образом:

$$r_{w1} = \frac{0.5m(z_2 - z_1) \cos \alpha}{\left(\frac{z_2}{z_1} - 1\right) \cos \alpha_w},$$

где $\alpha = 20^\circ$ – угол профиля нормального исходного контура; α_w – фактический угол зацепления, который определяется по известной методике из эвольвентной функции $\text{inw } \alpha_w$;

$$\text{inw } \alpha_w = \text{inw } \alpha + \frac{2(x_2 - x_1) \tan \alpha}{z_2 - z_1},$$

где $\text{inw } \alpha = 0.0149044$ – эвольвентная функция стандартного угла зацепления, равного 20° ;

$$\delta_{w1} = \arctan \left(\sin \Sigma \left(\frac{z_2}{z_1} - \cos \Sigma \right)^{-1} \right),$$

$$\delta_{w2} = \Sigma + \delta_{w1},$$

$$R = \frac{r_{w1}}{\sin \delta_{w1}}, r_{w2} = R \sin \delta_{w2}.$$

Радиусы оснований конусов впадин можно определить по аналогии с внешним коническим зацеплением:

$$r_{f1} = r_1 + (x_1 - 1.25)m \cos \delta_{w1},$$

$$r_{f2} = r_2 + (x_2 + 1.25)m \cos \delta_{w2},$$

где $r_1 = 0.5mz_1$ и $r_2 = 0.5mz_2$ – радиусы оснований делительных конусов шестерни и колеса, мм.

Расчет радиусов оснований конусов вершин должен обеспечивать сохранение зазора в зацеплении $0.25m$ на поверхности обратного конуса:

$$r_{a1} = \sqrt{E^2 + F^2} \sin \left[\arctan \left(\frac{F}{E} \right) - \Sigma \right], \quad (1)$$

$$r_{a2} = \sqrt{G^2 + H^2} \sin \left[\arctan \left(\frac{H}{G} \right) + \Sigma \right], \quad (2)$$

где $E = R \cos \delta_{w2} - (r_{f2} - r_{w2} - 0.25m \cos \delta_{w2}) \tan \delta_{w2}$; $F = r_{f2} - 0.25m \cos \delta_{w2}$,
 $G = R \cos \delta_{w1} + (r_{w1} - r_{f1} - 0.25m \cos \delta_{w1}) \tan \delta_{w1}$; $H = r_{f1} + 0.25m \cos \delta_{w1}$.

При равенстве коэффициентов смещения

$$x_1 = x_2 \quad (3)$$

радиусы оснований конусов вершин можно определить по более простым зависимостям:

$$r_{a1} = r_1 + (x_1 + 1)m \cos \delta_{w1},$$

$$r_{a2} = r_2 + (x_2 - 1)m \cos \delta_{w2}.$$

Зная радиусы, можно выполнить сферическую эвольвенту зуба внешнего и внутреннего зацеплений по координатам ее точек (рис. 3):

$$x_{\text{Эе}} = a \cos \delta_{w1} + b \sin \delta_{w1} \sin \alpha_w,$$

$$y_{\text{Эе}} = a \sin \delta_{w1} \sin \theta + b \cos \alpha_w \cos \theta - b \sin \theta \cos \delta_{w1} \sin \alpha_w,$$

$$z_{\text{Эе}} = -a \sin \delta_{w1} \cos \theta + b \cos \alpha_w \sin \theta + b \cos \theta \cos \delta_{w1} \sin \alpha_w,$$

где $a = \sqrt{R^2 - b^2}$ и $b = R \sin \left(\frac{P\widehat{N}_i \cos \alpha_w}{R} \right)$ – отрезки, указывающие точки эвольвенты на рис. 3 (a_0 и b_0 – на крайнюю нижнюю точку, a_n и b_n – на крайнюю верхнюю точку);

$\theta = -\arctan \left(\frac{y_N}{z_N} - \frac{\alpha_{Sw}}{2} \right)$ – угол между плоскостями, проходящими через ось X (прямую OO_1) и точки P и N_i соответственно (здесь y_N и z_N – координаты точки N_i в системе $OXYZ$; α_{Sw} – толщина зуба шестерни I при профилировании эвольвенты как шестерни I , так и колеса 2 , поскольку толщина впадины между зубьями на колесе равна толщине зуба шестерни).

Величины для расчета угла θ :

$$y_N = -r_{w1} \sin \left(\frac{P\widehat{N}_i}{r_{w1}} \right),$$

$$z_N = r_{w1} \cos \left(\frac{P\widehat{N}_i}{r_{w1}} \right),$$

$$\alpha_{Sw} = 2 \left[\frac{m (0.5\pi + 2x_1 \tan \alpha)}{2r_1} + \text{inw } \alpha - \text{inw } \alpha_w \right].$$

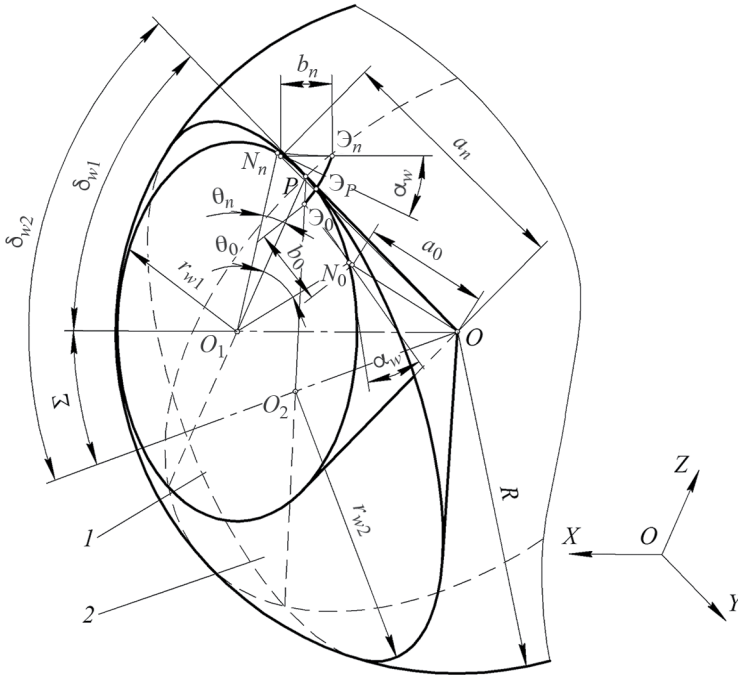


Рис. 3. Образование сферической эвольвенты внутреннего конического зацепления: 1 – шестерня; 2 – колесо.

Следующим важным этапом является расчет качественных показателей проектируемой передачи: коэффициентов удельного скольжения $\lambda_{1\max}$, $\lambda_{2\max}$, $\lambda_{1\min}$, $\lambda_{2\min}$; коэффициентов удельного давления ϑ_1 , ϑ_2 ; коэффициента перекрытия ϵ .

Зависимости для определения этих показателей можно получить из рассмотрения механизма зацепления. На рис. 4 показано образование точек A и B , которые являются касательными точками поверхности S радиуса R к основаниям конусов эволют радиусами r_{b1} и r_{b2} . Из этих точек отмеряется радиус кривизны эвольвенты шестерни и колеса. При нахождении контакта зубьев в полюсе зацепления P радиусы кривизны эвольвенты шестерни AP и колеса BP будут определяться по формулам

$$AP = R \arccos \left(\cos \delta_{w1} \left[1 - \left(\frac{r_{b1}}{R} \right)^2 \right]^{-0.5} \right),$$

$$BP = R \arccos \left(\cos \delta_{w2} \left[1 - \left(\frac{r_{b2}}{R} \right)^2 \right]^{-0.5} \right),$$

где основания конусов эволют шестерни и колеса определяются стандартным способом:

$$r_{b1} = r_1 \cos \alpha, \quad r_{b2} = r_2 \cos \alpha.$$

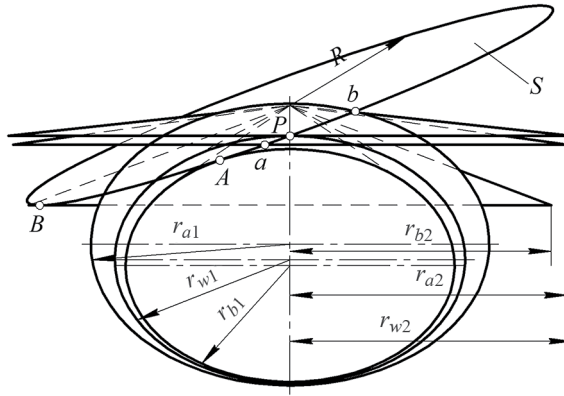


Рис. 4. Образование радиусов кривизны эвольвент и траектории зацепления ab .

В местах пересечения поверхности S с основанием конусов вершин колеса и шестерни образуются точки: a – точка начала (конца) контакта зубьев; b – точка конца (начала) контакта зубьев. Дуга ab по аналогии с цилиндрической зубчатой передачей представляет собой траекторию зацепления. Радиусы кривизны эвольвент в этих точках будут определяться как

$$Ba = R \arccos \left(\cos \left[\arctan \left(\frac{H}{G} \right) + \Sigma \right] \cos^{-1} \left[\arcsin \left(\frac{r_{b2}}{R} \right) \right] \right),$$

$$Ab = R \arccos \left(\cos \left[\arctan \left(\frac{F}{E} \right) - \Sigma \right] \cos^{-1} \left[\arcsin \left(\frac{r_{b1}}{R} \right) \right] \right),$$

где H, G, F, E – элементы формул (1) и (2):

$$Aa = |Ba - AB|, Bb = AB + Ab,$$

где $AB = BP - AP$ при δ_{w2} меньше 90° ; $AB = AP + BP$ при δ_{w2} больше 90° .

Коэффициенты удельного скольжения:

$$\lambda_{1\max} = \left(1 - \frac{1}{U} \right) \frac{Ba - BP}{Aa},$$

$$\lambda_{2\max} = (1 - U) \frac{Ab - AP}{Bb},$$

$$\lambda_{1\min} = \left(1 - \frac{1}{U} \right) \frac{Ab - AP}{Ab},$$

$$\lambda_{2\min} = (1 - U) \frac{Ba - BP}{Ba},$$

где $U = \frac{z_2}{z_1}$ – передаточное число.

Коэффициенты удельного давления можно представить в виде

$$\vartheta_1 = m \frac{Ba - Aa}{Ba \cdot Aa}, \vartheta_2 = m \frac{Bb - Ab}{Bb \cdot Ab}.$$

Коэффициент перекрытия

$$\varepsilon = \frac{Ab - Aa}{\pi m \cos \alpha}.$$

Обсуждение результатов в научном и прикладном аспектах. Представленная методика реализована в программе Internal bevel gears x64¹, написанной в рамках настоящего исследования. Эта программа использовалась при 3D-моделировании.

В качестве объекта моделирования было принято внутреннее коническое зацепление с числом зубьев шестерни $z_1 = 17$ и колеса $z_2 = 34$; модуль зацепления $m = 2$ мм; угол передачи $\Sigma = 60^\circ$. Результаты расчета приведены в табл. 1.

Выбор таких параметров объясняется тем, что здесь половина угла раствора начального конуса колеса δ_{w2} становится равной 90° . Поэтому возникает множество проблем при создании проекций эскизов, поскольку косинус 90° равен 0. Тем не менее программа Internal bevel gears x64 запрограммирована соответствующим образом на выполнение поставленной задачи.

Таблица 1. Геометрические и качественные показатели исследуемых передач

Деталь	Шестерня/колесо
Модуль m , мм	2
Межосевой угол Σ , град	60
Числа зубьев z_1/z_2	17/34
Коэффициенты смещения профилей зубьев x_1/x_2	0.5/0.5
Делительное конусное расстояние R , мм	34
Диаметры оснований начальных конусов d_{w1}/d_{w2} , мм	34/68
Половины углов раствора начальных конусов δ_{w1}/δ_{w2} , град	30/90
Фактический угол зацепления α_w , град	20
Диаметры оснований конусов эволют d_{b1}/d_{b2} , мм	31.95/63.899
Диаметры оснований конусов впадин d_{f1}/d_{f2} , мм	31.402/68.0
Диаметры оснований конусов вершин d_{a1}/d_{a2} , мм	39.196/68.0
Коэффициенты удельного скольжения $\lambda_{1\max}/\lambda_{2\max}$	-0.395/0.246
Коэффициенты удельного скольжения $\lambda_{1\min}/\lambda_{2\min}$	0.058/-0.107
Коэффициент перекрытия ε	1.58
Коэффициенты удельного давления ϑ_1/ϑ_2	0.501/0.12

¹ Доступна по ссылке: <https://disk.yandex.ru/d/dR94MdQfdDsHzA>

Коэффициенты смещения для внутреннего конического зацепления рекомендуется принимать положительными и равными друг другу (3). В табл. 2 приведены рекомендуемые значения коэффициентов смещения, полученные в целях минимизации значений коэффициентов удельного скольжения λ_{1max} , λ_{2max} , λ_{1min} , λ_{2min} . Для рассматриваемого случая рекомендуемые коэффициенты смещения x_1 и x_2 составили 0.5.

Согласно предлагаемой методике, колесо внутреннего конического зацепления существует при значениях половины угла раствора начального конуса δ_{w2} до 90° . При переходе через эту отметку такое колесо становится колесом внешнего зацепления.

Из анализа результатов (табл. 1) можно сделать вывод о целесообразности применения внутреннего конического зацепления, поскольку оно обладает сравнительно низкими абсолютными значениями коэффициентов удельного скольжения λ_{1max} , λ_{2max} , λ_{1min} , λ_{2min} (для передач внешнего конического зацепления значения коэффициентов удельного скольжения обычно всегда выше единицы). Максимальные значения коэффициентов удельного давления также ниже в сравнении с внешним коническим зацеплением, что говорит о невысоких контактных напряжениях.

Таблица 2. Ориентировочные значения коэффициентов смещения для внутреннего конического зацепления

Межосевой угол Σ , град	Число зубьев z_1	Ориентировочные коэффициенты смещения $x_1 = x_2$ при передаточном числе U						
		1.25	1.6	2	2.5	3.15	4	5
15	12	0.5	–	–	–	–	–	–
	14	0.5	0.4	0.4	–	–	–	–
	16–20	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
30	12	0.5	0.4	–	–	–	–	–
	14	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
	16–20	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
45	12	0.4	0.5	0.4	–	–	–	–
	14	0.4	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4
	16	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	20	0.3	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
60	12	–	0.5	0.4	0.4	–	–	–
	14	0.3	0.5	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4
	16–20	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
75	12	–	0.5	–	–	–	–	–
	14	–	0.4	0.5	0.4	0.4	0.4	0.4
	16	–	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	20	0.2	0.4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5

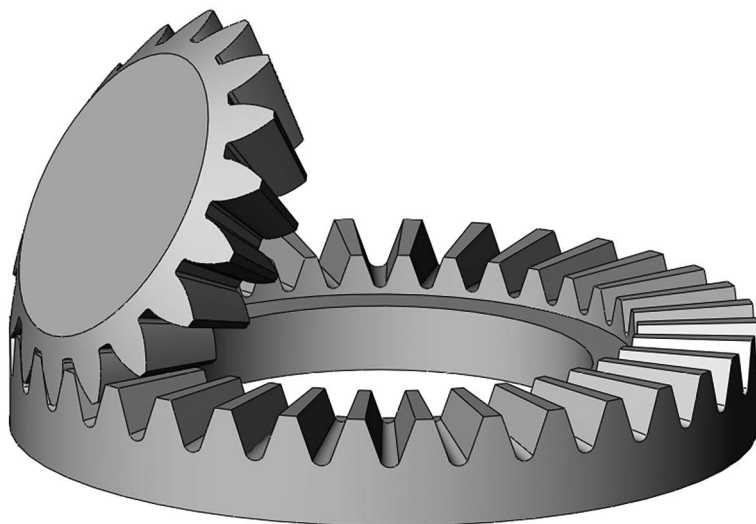


Рис. 5. 3D-модель внутреннего конического зацепления.

Последние можно рассчитать по формуле Герца, адаптированной под внутреннее коническое зацепление

$$\sigma_H = 1.18 \sqrt{\frac{T_1 K_H E_{\text{ПР}} (\cos \delta - \cos \delta U^{-1})}{\theta_H [d_{w1} (R - 0.5b) R^{-1}]^2 b \sin 2\alpha_w}},$$

где $\theta_H = 0.85$ – опытный коэффициент; K_H – коэффициент величины нагрузки; b – ширина зацепления, м; $E_{\text{ПР}}$ – приведенный модуль упругости, МПа; T_1 – крутящий момент на валу шестерни.

Дальнейшим этапом является проверка полученного значения на соответствие допускаемым контактным напряжениям по общеизвестной методике

$$\sigma_H \leq [\sigma_H].$$

3D-модель² рассматриваемой передачи приведена на рис. 4.

Выводы. 1. Представлена оригинальная методика синтеза внутреннего конического зацепления. Выведены формулы для расчета основных геометрических и качественных показателей рассматриваемой передачи. Приведена таблица рекомендуемых коэффициентов смещения. **2.** Согласно полученным данным, внутреннее коническое зацепление характеризуется низкими коэффициентами удельного скольжения (менее единицы), что является одним из главных его преимуществ. Кроме того, для такой передачи характерно достижение значительных передаточных чисел во всем рабочем диапазоне (табл. 2). **3.** Предложена программа для расчета

² Методика 3D-моделирования визуально продемонстрирована:
<https://zen.yandex.ru/id/62484be80e870f43abcb18cb>

и 3D-моделирования такой передачи, что делает представленную методику доступной. 4. Недостатком рассматриваемой передачи является невозможность изготовления колеса внутреннего зацепления на стандартном оборудовании, однако его можно изготовить на трех-, четырех- или пятикоординатном станке.

Финансирование. Данная работа финансировалась за счет средств бюджета Кузбасского государственного аграрного университета имени В.Н. Полецкого. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным конкретным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lin Z., Yao L., Xie Z.* Dynamic modal analysis of double-sided meshing nutation drive with double circular arc spiral bevel gears // *Mechanical Sciences*. 2020. V. 11. № 1. P. 115. <https://doi.org/10.5194/ms-11-115-2020>
2. *Zhang D., Wang Z., Yao L., Xie D.* Mathematical modeling and machining of the internal double-arc spiral bevel gear by finger milling cutters for the nutation drive mechanism // *Machines* 2022. V. 10. № 663. P. 1. <https://doi.org/10.3390/machines10080663>
3. *Cai Y., Yao L., Zhang J., Xie Z., Hong J.* Feasibility analysis of using a two-stage nutation drive as joint reducer for industrial robots // *J. of Mechanical Science and Technology*. 2019. V. 33. № 4. P. 1799. <https://doi.org/10.1007/s12206-019-0332-z>
4. *Lopatin B. A., Zaynetdinov R. I.* Cutting teeth of non-involute gears of the cylinder-conical internal transmission of internal gearing // *Proceedings of the 4th International conference on industrial engineering ICIE2018: Lecture notes in mechanical engineering*, Москва, 15–18 мая 2018 г., 2019. P. 1201. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_125
5. *Chen M., Xiong X., Zhuang W.* Design and Simulation of Meshing Performance of Modified Straight Bevel Gears // *Metals*. 2021. V. 11 (1). P. 33. <https://doi.org/10.3390/met11010033>
6. *Jiang J., Liu Z., Liu H.* Design and analysis for straight bevel gears with easy-off flank modification based on minimal wear // *Hsi-An Chiao Tung Ta Hsueh*. 2020. V. 54 (6). P. 115. <https://doi.org/10.7652/xjtuxb202006013>
7. *Acinapura A., Fragomeni G., Greco P. F., Mundo D., Carbone G., Danieli G.* Design and Prototyping of Miniaturized Straight Bevel Gears for Biomedical Applications // *Machines*. 2019. V. 7 (2). P. 1. <https://doi.org/10.3390/machines7020038>
8. *Fuentes-Aznar A., Gonzalez-Perez I., Pasapula H. K.* Computerized Design of Straight Bevel Gears with Optimized Profiles for Forging, Molding, or 3D Printing // *Thermal Processing*. <https://thermalprocessing.com/computerized-design-of-straight-bevel-gears-with-optimized-profiles-for-forging-molding-or-3d-printing>