
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 539.3: 624.04

**К 85-ЛЕТИЮ ИМАШ РАН
300-ЛЕТИЮ РАН****АНАЛИЗ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ
В НЕУПРУГОЙ ОБЛАСТИ
ДЛЯ УПРОЧНЯЮЩИХСЯ И РАЗУПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ****© 2024 г. Н. А. Махутов***Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия
e-mail: safety@imash.ru*

Поступила в редакцию 29.09.2023 г.

После доработки 01.12.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

Анализируются процессы упругого и упругопластического деформирования в зонах концентрации при различных уровнях номинальных напряжений и сопротивления пластическим деформациям. На основе расчетных и экспериментальных данных показано, что с уменьшением показателя упрочнения в неупругой области неоднородность распределения деформаций увеличивается; при этом коэффициенты концентрации деформаций растут, а коэффициенты концентрации напряжений падают. Рассмотрены особые случаи, когда последние оказываются меньше единицы. Это имеет важное значение для обоснования прочности, ресурса, живучести и безопасности для новых объектов техносферы, которые изготавливаются из специальных конструкционных материалов и эксплуатируются в экстремальных условиях термомеханического нагружения, в том числе для атомных энергетических установок в штатных режимах и аварийных ситуациях.

Ключевые слова: напряжения, деформации, коэффициент концентрации, показатель упрочнения, напряженно-деформированное состояние, предельное состояние

DOI: 10.31857/S0235711924020012, **EDN:** QWNTLU

Постановка проблемы. Проблемы взаимоувязанного обоснования ресурса, живучести и безопасности уникальных объектов техносферы с использованием комплекса обобщенных закономерностей процессов деформирования и разрушения являются актуальными для современной постановки вопросов обеспечения безопасной эксплуатации высокорисковых объектов техносферы [1]. Фундаментальные закономерности процессов деформирования и разрушения исследуются в рамках линейной и нелинейной механики деформируемых твердых тел, а прикладные результаты этих исследований имеют прямое отношение к оценке работоспособности уникальных объектов атомной и термоядерной энергетики, ракетно-космического комплекса, современной авиационной техники, высокоскоростного наземного, водного, воздушного транспорта, шельфовых инфраструктур и оборонных отраслей.

Одной из базовых целей в указанных научных исследованиях и прикладных разработках были и остаются решения краевых задач о напряженно-деформированных

состояниях несущих элементов уникальных потенциально опасных объектов с широкой вариацией концентрации напряжений, действующих усилий, механических свойств конструкционных материалов.

В этих решениях широко используются аналитические, численные и экспериментальные методы. Учитывая исключительно высокую вариативность постановки и сложность решения задач с учетом конструкторско-технологических и эксплуатационных факторов возможности численных и, тем более, экспериментальных методов, большое значение имели и имеют точные и приближенные аналитические методы. Они уже получили отражение в ряде методических и нормативно-технических документов, в том числе по проектированию атомных реакторов, жидкостных ракетных двигателей и летательных аппаратов.

Возникновение и развитие поврежденных состояний с их переходом в аварии и катастрофы на высокорисковых объектах в значительной, а в ряде случаев в решающей степени определяются локальными напряжениями и деформациями в зонах концентрации несущих элементов.

Методы анализа концентрации напряжений и деформаций. Фундаментальные исследования по теории концентраций напряжений на стадии упругого деформирования были выполнены в XX в. Результаты аналитических решений краевых задач теории упругости отражены в основополагающих монографиях Н.И. Мусхелишвили [2], Г.Н. Савина [3], Г. Нейбера [4]. Эти решения в дальнейшем были распространены на случаи упругопластического деформирования [5] и деформирования в условиях ползучести [6]. В конце XX — начале XXI в. существенное развитие получили численные решения (методами конечных элементов, конечных разностей, интегральных уравнений и др.); они ориентированы на конкретные постановки задач — способы нагружения, геометрические формы деформируемых тел и зон концентрации, механические свойства материалов в упругой и неупругой области.

Особую актуальность проблемы концентрации напряжений и деформаций приобрели в последнее время для объектов атомной [7] и ракетно-космической [8] техники, когда расчеты и обоснование прочности, ресурса и безопасности стали осуществляться в общей нелинейной постановке с переходом от силовых критериев (в экстремальных локальных напряжениях $\sigma_{\max}$) к деформационным (в экстремальных локальных деформациях $e_{\max}$). Учитывая многообразие конструктивных форм, условий термомеханического нагружения и механического поведения материалов, свою актуальность вновь приобрели аналитические [9, 10], численные [11] и экспериментальные [12] решения нелинейных краевых задач концентрации напряжений и деформаций в наиболее нагруженных и повреждаемых зонах. В основу наиболее эффективных аналитических решений была положена [9] формула Нейбера [4] для случая нелинейной степенной аппроксимации диаграммы деформирования. При такой постановке характер перераспределения напряжений и деформаций в зонах концентрации и коэффициенты концентрации определяются на основе ряда исходных гипотез: сохранения подобия распределения деформаций при переходе от упругой стадии деформирования к упругопластической [3, 5]; сохранения общей энергии упругопластических деформаций при развитии пластических деформаций [13, 14].

По результатам выполненных исследований на рис. 1 (кривая 1) показано распределение и перераспределение напряжений $\sigma(x)$ и деформации $e(x)$ по опасному сечению x в бесконечной пластике с отверстием радиусом r при действии номинальных растягивающих напряжений σ_n .

Для упругого материала с линейной диаграммой деформирования (рис. 2, линия 1) теоретический коэффициент концентрации напряжений принимается равным

$$\alpha_{\sigma} = \sigma_{\max} / \sigma_n. \quad (1)$$

При этом характер распределения напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $e(x)$ одинаков, а теоретические коэффициенты концентрации деформаций α_e и напряжений α_σ равны:

$$\alpha_e = e_{\max} / e_n = \alpha_\sigma. \quad (2)$$

Величины σ_n , $\sigma_{\max}$ и e_n , $e_{\max}$ связаны законом Гука:

$$\sigma_n = e_{en} E, \quad \sigma_{\max} = e_{\max} E, \quad (3)$$

где E – модуль продольной упругости.

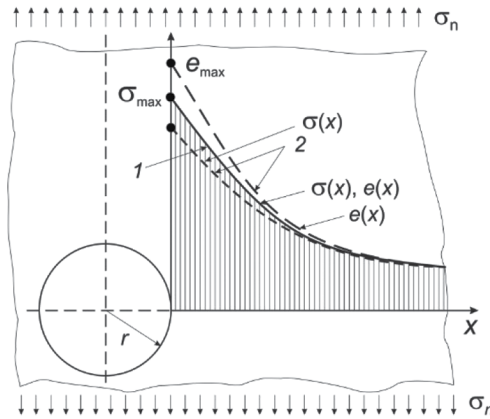


Рис. 1. Распределение напряжений $\sigma(x)$ и деформаций $e(x)$ по сечению x :
1 – упругое решение; 2 – неупругое решение.

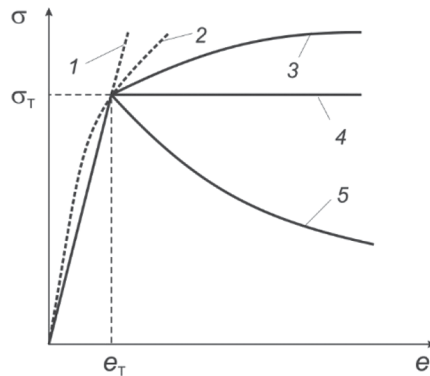


Рис. 2. Виды диаграмм деформирования материалов с различной степенью упрочнения и разупрочнения: 1 – упругое деформирование; 2 – деформирование по степенному закону из исходного состояния; 3 – упругое и неупругое деформирование с упрочнением по степенному закону; 4 – идеальное упругопластическое деформирование; 5 – упругое и неупругое деформирование с разупрочнением по степенному закону.

Для неупругого материала со степенным упрочнением во всем диапазоне деформации (рис. 2, линия 2) и константами материала K, n ($0 \leq n \leq 1$), когда деформации невелики ($0 \leq e \leq 0.03$)

$$\sigma_n = Ke_n^n; \quad \sigma_{\max} = Ke_{\max}^n = K_{\max}e_n^n, \quad (4)$$

где $K_n, K_{\max}$ — коэффициенты, зависящие от α_σ и n .

Для такого материала в работе Г. Нейбера [5] получено выражение

$$\frac{K_\sigma K_e}{\alpha_\sigma^2} = 1, \quad (5)$$

где K_σ, K_e — коэффициенты концентрации напряжений и деформаций при неупругом деформировании ($K_\sigma = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_n}, K_e = \frac{e_{\max}}{e_n}$).

Для большинства традиционных конструкционных материалов научно обоснована и используется диаграмма деформирования с двумя участками:

- упругое деформирование по закону (3) при $\sigma \leq \sigma_T$ (σ_T — предел текучести);
- нелинейное деформирование по степенному закону

$$\sigma = \sigma_T (e / e_T)^m \text{ при } \sigma \geq \sigma_T \text{ или } \bar{\sigma} = \bar{e}^m, \quad (6)$$

где m — показатель упрочнения для диаграммы деформирования в истинных напряжениях и деформациях ($0 \leq m \leq 1$); $\bar{\sigma}$ и $\bar{e}$ — относительные напряжения ($\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T$) и деформации ($\bar{e} = e / e_T$).

Для большого числа широко применяемых металлических конструкционных материалов (сталей и сплавов) $0.05 \leq m \leq 0.35$. Условие $m = 0$ относится к идеально упругопластическому материалу (рис. 2, линия 4) или материалу с выраженной площадкой текучести.

Для ряда новых и перспективных материалов (специальных жаростойких сплавов на основе вольфрама и молибдена, сверхвысокопрочных мартенситных сталей, высокопрочных композитов на металлической и неметаллической основе), а также для материалов, упрочненных и поврежденных взрывом и высокой радиацией, характерна ниспадающая (при $\sigma \geq \sigma_T$) диаграмма деформирования степенного типа (рис. 2, линия 5 при $-0.2 \leq m \leq 0$). Такой же характер диаграммы деформирования может иметь место для традиционных конструкторских материалов при экстремально высоких температурах, превышающих 0.6–0.7 от температуры плавления, что связано с проявлением интенсивной ползучести. Для таких разнотупрочняющихся материалов и их состояний с отрицательным значением m анализ эффектов концентрации напряжений и деформаций практически не проводился.

Для основных типов упрочняющихся конструкционных материалов (рис. 2, диаграммы деформирования 3, 4) широкого диапазона деформаций ($e_T \leq e \leq 0.5$) и коэффициентов концентрации ($1 \leq \alpha_\sigma \leq 5$) выражение (5) при положительных m было модифицировано в форме

$$\frac{K_\sigma K_e}{\alpha_\sigma^2} = F(\bar{\sigma}_n, m, \alpha_\sigma). \quad (7)$$

Обобщение целого ряда расчетных и экспериментальных данных для кривых деформирования (рис. 2) в относительных координатах $\bar{\sigma} = \sigma / \sigma_T$, $\bar{e} = e / e_T$ (когда при упругом деформировании $\bar{\sigma} \leq 1$ и $\bar{\sigma}_n = \bar{e}_n$, $\bar{\sigma}_{\max} = \bar{e}_{\max}^m$, а при упругопластическом

деформировании $\bar{\sigma} \geq 1$ и $\bar{\sigma}_n = \bar{\epsilon}_n^m$, $\bar{\sigma}_{\max} = \bar{\epsilon}_{\max}^m$) позволило записать следующее выражение для функционала F в выражении (7):

$$F = 1 / (\alpha_\sigma \bar{\sigma}_n)^{n(1-m)[1-(\bar{\sigma}_n-1/\alpha_\sigma)]}, \quad (8)$$

где n – константа ($n \approx 0.5$).

Для упругого материала при $m = 1$ и $\bar{\sigma}_n \leq 1$ функционал $F = 1$ и $K_\sigma = K_\epsilon = \alpha_\sigma$.

На рис. 3 приведены расчетные (линии) и экспериментальные (точки) данные для функционала F при различных уровнях номинальных напряжений $\bar{\sigma}_n$, теоретических коэффициентов концентрации α_σ , условных местных упругих напряжений $\alpha_\sigma \bar{\sigma}_n$ и показателей упрочнения m .

Для идеально упругопластического материала ($m = 0$) при $\bar{\sigma}_n = 1$ концентрация напряжений отсутствует ($K_\sigma = 1$), и тогда указанное выше допущение о сохранении распределения упругих и упругопластических деформаций ($\alpha_\sigma = K_\epsilon$) по выражению (8) дает самые низкие значения F :

$$F = 1 / \alpha_\sigma. \quad (9)$$

Функционал F в виде кривой 2 по выражению (8) учитывает следующие факторы упругопластического деформирования в широком диапазоне деформаций $\bar{\epsilon}$ (вплоть до разрушающих $\bar{\epsilon}_k$): 1) изменение геометрии в зоне концентрации, ведущее к снижению эффектов концентрации (снижение $F \leq 0.8$ при $1 \leq (\alpha_\sigma \bar{\sigma}_n) \leq 4$ с образованием начальных пластических деформаций); 2) уменьшение несущего сечения в области развития пластических деформаций, ведущее к росту $0.8 \geq F \geq 1$ за счет увеличения истинных номинальных напряжений.

Выражения (7) и (8) позволяют расчетом (рис. 3, кривая 2) определить коэффициенты концентрации напряжений K_σ и деформаций K_ϵ для любых заданных $\bar{\sigma}_n$, α_σ и m . Для упрочняющихся материалов с увеличением $\bar{\sigma}_n$ при $\bar{\sigma}_n \geq 1 / \alpha_\sigma$ и уменьшением показателя упрочнения m коэффициент концентрации напряжений K_σ

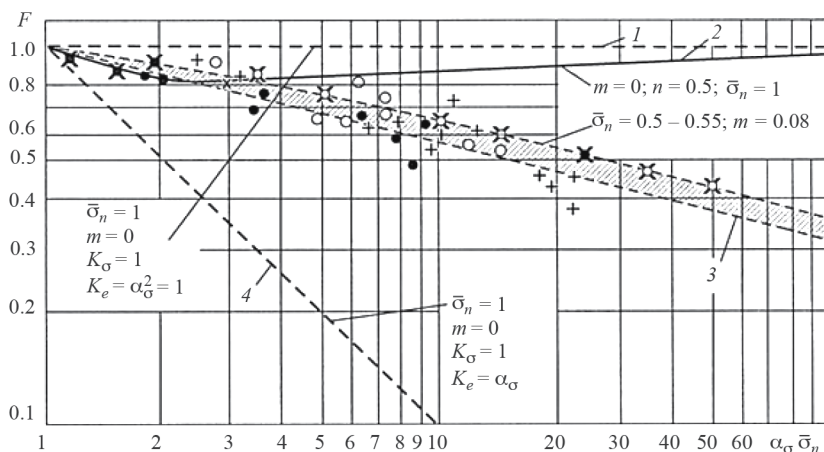


Рис. 3. Зависимости функционала F от номинальных напряжений, концентрации напряжений и показателя упрочнения материала: точки из эксперимента, линии – расчет; 1 – расчет по выражению (5), 2 – расчет по выражению (8), 3 – эксперимент и расчет по выражению (8), 4 – расчет по выражению (9).

снижается, приближаясь к единице, ($\alpha_\sigma \geq K_\sigma \geq 1$), а коэффициент концентрации deformаций K_e увеличивается, приближаясь к α_σ^2 ($\alpha_\sigma = \alpha_e \leq K_e \leq \alpha_\sigma^2$) или превосходя его при $\bar{\sigma}_n > 1$.

Анализ эффектов перераспределения напряжений и деформаций при неупругом деформировании в зонах концентрации и в зонах трещин с учетом градиентов напряжений, объемности напряженного состояния и многоосности напряжения был проведен в работах [7–16].

Особенности эффектов концентрации для разупрочняющихся материалов. Для традиционных упрочняющихся материалов (рис. 2, кривые 2, 3, 4, $m \geq 0$) исследованные эффекты концентрации представлены на рис. 3. Для новых разупрочняющихся материалов (рис. 2, кривая 5, $m \leq 0$) или специальных экстремальных условий нагружения изменение коэффициентов концентрации напряжений K_σ и деформаций K_e имеет свои чрезвычайно важные особенности. Для зоны концентрации в пластине с отверстием по рис. 1 с теоретическим коэффициентом концентрации $\alpha_\sigma = 3$ на рис. 4 представлено различие эффектов концентрации в неупругой области для упрочняющихся ($m > 0$) и разупрочняющихся материалов ($m < 0$).

Это различие на рис. 4 представлено для двух характерных расчетных случаев: 1) используемая в энергомашиностроении низколегированная теплоустойчивая сталь с небольшим упрочнением в упругопластической области ($m = +0.08$), работающая при температурах 20–320 °С и имеющая диаграмму деформирования типа 3 (рис. 2); 2) специальный сплав для современного энергомашиностроения, разупрочняющийся ($m = -0.08$) при высокой температуре (до 1200–1400 °С) и имеющий диаграмму деформирования типа 5 (рис. 2).

С увеличением относительных номинальных напряжений $\bar{\sigma}_n$ от 0 до 0.33 справедливо решение краевой упругой задачи о концентрации по выражениям (1)–(3) ($\alpha_\sigma = K_\sigma$, $\alpha_e = \alpha_\sigma = K_e$).

Для упрочняющихся ($m = +0.08$) и разупрочняющихся ($m = -0.08$) материалов при $\bar{\sigma}_n > 0.33$ коэффициенты концентрации деформаций K_e по выражениям (5) и (8) увеличиваются ($K_e \geq \alpha_\sigma$), а коэффициенты концентрации напряжений K_σ снижаются ($K_\sigma \leq \alpha_\sigma$). Однако для разупрочняющегося сплава ($m = -0.08$) при увеличении $\bar{\sigma}_n$ рост K_e оказывается существенно большим (до 1.5 раз), чем для упрочняющейся стали ($m = +0.08$). Согласно деформационному критерию прочности [1, 7–9] это ука-

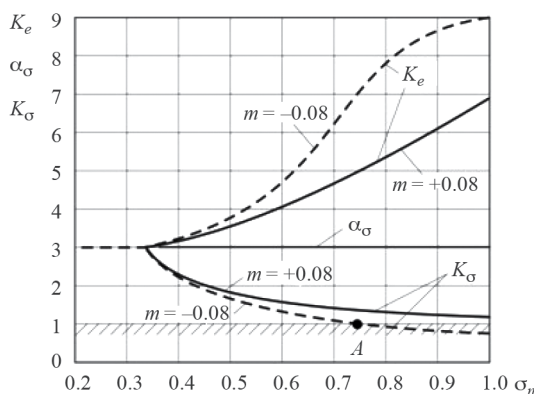


Рис. 4. Изменение коэффициентов концентрации напряжений α_σ , K_σ и деформаций K_e при увеличении номинальных напряжений $\bar{\sigma}_n$ и при упругопластическом деформировании со степенным упрочнением ($m = +0.08$) и разупрочнением ($m = -0.08$).

зывает на повышение опасности достижения предельных состояний в зоне концентрации деформаций при применении разупрочняющихся материалов ($m \leq 0$).

В области нелинейного деформирования (при $\bar{\sigma}_n > 1/\alpha_\sigma$) коэффициенты концентрации напряжений K_σ для двух рассматриваемых материалов отличаются меньше (не более чем в 1.2 раза). Это указывает на относительно невысокую чувствительность материалов к концентрации напряжений в неупругой области и ограниченную применимость силового (в напряжениях) критерия прочности [5–19].

Принципиально новой и важной особенностью концентрации напряжений для разупрочняющегося материала ($m = -0.08$) является то обстоятельство, что в точке A при определенном уровне номинальных напряжений ($\bar{\sigma}_n = 0.75$ по рис. 4) величина K_σ становится равной единице, и при дальнейшем увеличении $\bar{\sigma}_n$ максимальные напряжения $\sigma_{\max}$ в зоне концентрации по выражениям (7) и (8) оказываются меньше номинальных напряжений σ_n ($\bar{\sigma}_{\max} \leq \sigma_n$). В этой связи общепринятые расчеты прочности в максимальных местных (локальных) напряжениях ($\bar{\sigma}_{\max} = K_\sigma \bar{\sigma}_n$) теряют смысл. В таком случае для разупрочняющегося материала (при $m \leq 0$) в упруго-пластической области при $\bar{\sigma}_n \geq 1/\alpha_\sigma$ научно обоснованным, более информативным и практически значимым становятся как расчет в максимальных местных деформациях ($\bar{e}_{\max} = K_e \bar{e}_n$) по деформационным критериям прочности и локальным деформациям, так и экспериментальные исследования локальных напряжений для объектов новой техники (атомная и термоядерная энергетика, ракетно-космические системы, высокорисковые объекты в экстремальных аварийных и катастрофических ситуациях).

Заключение. При проектировании, создании и эксплуатации новых и перспективных объектов и инфраструктуры повышенного риска с заданными параметрами прочности, ресурса, живучести и безопасности существенное значение приобретают методы аналитического, численного и экспериментального анализа кинетики напряженно-деформированных состояний в зонах концентрации. С учетом того, что для таких условий точные аналитические решения краевых задач пока не получены, а численные и экспериментальные невозможны в силу бесконечно большого набора реальных частных вариантов постановки этих задач, особую важность приобретают приближенные аналитические методы определения локальных напряжений $\sigma_{\max}$ и деформаций $e_{\max}$ в зонах концентрации с использованием выражений типа (6)–(8). Реализация таких расчетов основывается на исходном решении упругой краевой задачи с оценкой теоретического коэффициента концентрации α_σ и определением базовых механических свойств конструкционного материала (предела текучести σ_T и показателя упрочнения m). На базе этой исходной информации (α_σ , σ_T , m) расчетом при заданном уровне номинальных напряжений σ_n можно получить коэффициенты концентрации напряжений K_σ и деформаций K_e в упругопластической области, а по ним величины $\sigma_{\max}$ и $e_{\max}$.

В расчетном анализе подтверждаются ранее установленные закономерности роста коэффициента концентрации локальных деформаций K_e ($K_e \geq \alpha_\sigma$) и снижения коэффициента концентрации локальных напряжений K_σ ($K_\sigma \leq \alpha_\sigma$) по мере увеличения номинальных напряжений σ_n и снижения показателя упрочнения m для упрочняющих традиционных конструкционных материалов ($0 \leq m \leq 1$).

Вместе с тем для разупрочняющихся материалов при отрицательных значениях показателя упрочнения m ($m < 0$) наряду с наблюдаемым более интенсивным увеличением коэффициентов концентрации деформаций имеет место принципиально новый эффект – коэффициент концентрации напряжений на контуре зоны концентрации может оказаться меньше единицы ($\alpha_\sigma < K_\sigma < 1$).

Для таких материалов расчеты прочности, ресурса и живучести по силовым критериям (в напряжениях) не могут быть использованы, а обоснование приемлемости проектов новых и перспективных объектов техносферы повышенного риска должны проводиться по деформационным критериям [20].

Финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 20-19-00769-П).
Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Махутов Н. А.* Обобщенные закономерности процессов деформирования и разрушения // Вестник Российской академии наук. 2017. № 5. С. 407.
2. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
3. *Савин Г. Н.* Справочник по концентрации напряжений. Киев: Вища шк., 1976. 412 с.
4. *Нейбер Г.* Концентрация напряжений. М.: Гостехиздат, 1947. 204 с.
5. *Нейбер Г.* Теория концентрации касательных напряжений призматических тел при произвольной нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями // Труды АОИМ. Серия Е. Прикладная механика. 1961. № 4. С. 71.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
7. Анализ риска и повышение безопасности водо-водяных энергетических реакторов. Серия «Исследования напряжений и прочности ядерных реакторов» / Под ред. Н. А. Махутова и М. М. Гаденина. М.: Наука, 2009. 499 с.
8. Прочность и ресурс ЖРД. Серия «Исследование напряжений и прочности ракетных двигателей» / Под ред. Н. А. Махутова и В. С. Рачука. М.: Наука, 2011. 525 с.
9. *Махутов Н. А.* Прочность и безопасность. Фундаментальные и прикладные исследования. Новосибирск: Наука, 2008. 528 с.
10. *Матвиенко Ю. Г.* Основы физики и механики разрушения // Машиностроение и инженерное образование. 2022. № 1 (68). С. 48.
11. *Морозов Е. М., Левин В. А., Вершинин А. В.* Прочностной анализ. Фидесис в руках инженера. М.: URSS, сор. 2015. 399 с.
12. *Разумовский И. А.* Экспериментальные методы исследования напряженно-деформированного состояния: история, проблемы, перспективы развития // Машиностроение и инженерное образование. 2018. № 2 (55). С. 17.
13. *Molski K., Glinka G.* A method of elastic-plastic stress and strain calculation of a notch root // Material Science and Engineering. 1981. V. 50. P. 93.
14. *Ye D., Matsuoka S., Suzuki M., Maeda Y.* Further Investigation of Neuters rule and the Equivalent Strain Energy Density (ESED). Method // Int. J. of Fatigue. 2004. V. 26. P. 447.
15. *Hutchinson J. M.* Plastic stress and strain fields at a crack tip // J. of Mechanic and Physics Solids. 1968. № 16. P. 337.
16. *Aifantis E. C.* On the role of gradients in the localization of deformation and fracture // J. of Engineering Science. 1992. № 10. P. 1279.
17. *Новопашин М. Д., Сукнев С. В., Иванов А. М.* Упругопластическое деформирование и предельное состояние элементов конструкций с концентраторами напряжений. Новосибирск: Наука, 1995. 111 с.
18. *Локощенко А. М.* Ползучесть и длительная прочность металлов. М.: Физматгиз, 2016. 489 с.
19. *Романов А. Н.* Сопротивление деформированию конструкционных материалов при циклическом нагружении // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 4. С. 54.
20. *Махутов Н. А.* Безопасность и риски: системные исследования и разработки. Новосибирск: Наука, 2017. 724 с.