
МЕХАНИКА МАШИН

УДК 534.1

**КОЛЕБАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ, СОСТОЯЩИХ
ИЗ ОДИНАКОВЫХ ПОДСИСТЕМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ**© 2023 г. Л. Я. Банах^{1,2,*}, И. С. Павлов²¹*Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия*²*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород, Россия***e-mail: banl@inbox.ru*

Поступила в редакцию 15.02.2023 г.

После доработки 30.03.2023 г.

Принята к публикации 20.04.2023 г.

Исследуются колебания и волны в периодических системах, образованных одинаковыми подсистемами, имеющими произвольную структуру. Найдены спектральные закономерности для таких систем. Показано, что их дисперсионные кривые состоят из ветвей, каждая из которых отвечает своей форме упругих колебаний подсистемы. Выявлено наличие в таких системах полос непропускания гармонического сигнала, найдены их границы. Получены формы колебаний в различных частотных диапазонах. Показано, что в системе возникают модулированные волны за счет модуляции низшими частотами, которые соответствуют колебаниям системы без учета упругих свойств составляющих подсистем.

Ключевые слова: периодические системы, подсистемы произвольной структуры, дисперсионные свойства, частотный спектр, полосы непропускания, модулированные волны

DOI: 10.31857/S0235711923040053, **EDN:** XVDRJH

Постановка задачи. Широкое применение в механике имеют периодические структуры, составленные из одинаковых подсистем (включений). Структура самих подсистем может быть как периодической или симметричной, так и произвольной. Периодические системы с периодическими и симметричными подсистемами широко используются в технических приложениях, например, в многодисковых роторных системах, погружных насосах [1, 2]. Еще одним примером таких структур являются метаматериалы — искусственно созданные материалы, обладающие уникальными физико-механическими свойствами, обусловленными их микроструктурой. Основной широко востребованной на практике особенностью такого класса систем является наличие в них полос непропускания, в которых волны в материале распространяться не могут. Вследствие этого они обладают очень хорошими звуко- и виброизоляционными свойствами. В работе [3] продемонстрирована возможность снижения шума и вибрации конструкции приборной панели автомобиля за счет добавления к основной структуре субволновых локальных резонаторов. Благодаря динамическому поглощению в повторяющейся структуре резонаторов такой материал имеет полосу непропускания частот. В [4] рассмотрен акустический метаматериал, представляющий собой цепочку “консолей в массе”. В результате численного эксперимента подтверждена эффективность гашения волн деформации на определенной резонансной частоте. В [5] предложено несколько вариантов конструкции нового акустического метаматериала с необычными волновыми свойствами. Одним из вариантов является полосо-

вой фильтр, в полосе пропускания которого фазовая скорость нормальной волны отрицательна. В другом варианте имеется две полосы пропускания: в одной полосе фазовая скорость положительна, в другой — отрицательна. Поэтому в нем могут наблюдаться необычные физические явления, в частности двойное лучепреломление особого вида и комбинированный эффект Доплера.

Системы, представляющие собой периодические системы с периодическими и симметричными подсистемами, были исследованы в [6–10]. Для них было установлено, что они имеют полосы непропускания гармонического сигнала. В [9] найдено, что дисперсионная кривая разделяется на ряд ветвей, каждая из которых соответствует своей форме упругих колебаний подсистемы. Формы колебаний разделяются на группы с одинаковой длиной волны, но разными частотами, что обуславливает появление модулированных волн. Эти закономерности справедливы также и для класса фрактальных динамически-самоподобных структур, которые, как было доказано в [11], имеют частотный спектр аналогичный спектру периодических структур.

Однако периодические структуры могут состоять также из несимметричных или непериодических подсистем и подсистемы могут иметь произвольную структуру. К структурам такого класса относятся, например, многосекционные роторные системы с различными дисками, приводы станков [1]. Также это могут быть метаматериалы типа цепочек “масса в массе” с пружинами и массами нескольких видов. Такие системы обладают одной [6] или тремя [7] зонами непропускания. Включения, имеющие произвольную структуру, могут также возникать в реальных конструкциях в результате технологических погрешностей при изготовлении элементов системы, вследствие чего нарушается периодичность подсистем, входящих в структуру.

Вынужденные колебания двумерных почти периодических структур, включающих подструктуры со слегка изменяющимися геометрическими свойствами были рассмотрены в обзоре [12]. Кроме того, были исследованы резонансные метаматериалы — периодические структуры, в которых субструктуры обладают локальными резонансами [8] — например, слоистые субструктуры, включающие мягкие слои и тяжелые слои/ядро. Было показано, что энергия колебаний локализуется около источников возбуждений.

Целью настоящей статьи является исследование собственных колебаний и структуры частотного спектра в широком диапазоне частот для периодических систем, образованных одинаковыми подсистемами произвольной структуры, что является определенным обобщением полученных ранее результатов [9]. Несмотря на разнообразие технических применений и расчетных моделей, динамические свойства такого класса систем достаточно хорошо прогнозируемы и могут быть получены в аналитическом виде. В качестве иллюстрации рассматриваемого класса структур приведен рис. 1. Периодическая структура рис. 1 состоит из одинаковых повторяющихся подсистем. Подсистемы соединены между собой упругими элементами с коэффициентом жесткости k_0 , имитирующим жесткость участка вала и подшипников, s — номер подсистемы. Подсистемы представляют собой ротор с дисками, которые имеют различные упруго-инерционные параметры: $k_{r, r+1}$ — коэффициент жесткости упругой связи между r и $r+1$ дисками. Таким образом, структура самих подсистем является произвольной, в общем случае подсистема может состоять из n дисков ($r = 1, \dots, n$).

При выборе расчетной модели многомассовых систем достаточно часто используется континуальная расчетная модель с распределенными параметрами. Однако при этом исчезают свойства, характерные для высокочастотного диапазона, такие как возникновение полос непропускания гармонического сигнала. Поэтому необходимо исследовать характер колебаний и спектральные свойства для дискретной модели, что позволит получить достоверные результаты для многомассовой структуры в широком диапазоне частот.

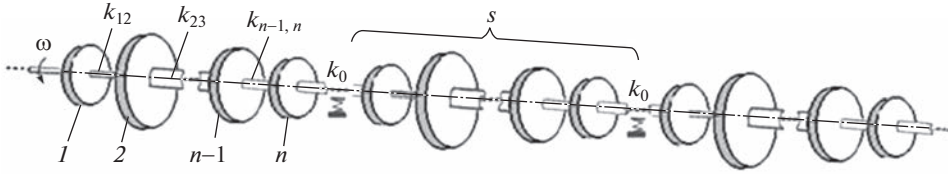


Рис. 1. Периодическая система, состоящая из подсистем с произвольной структурой: s – номер подсистемы, $k_r, r+1$ – коэффициенты жесткости между r и $r+1$ дисками; k_0 – коэффициент жесткости между подсистемами.

Дисперсионное уравнение периодических систем с подсистемами произвольной структуры. Общий вид уравнений, описывающих колебания периодических цепных систем, составленных из одинаковых подсистем произвольной структуры, имеет вид

$$-\mathbf{K}_{s-1,s}\mathbf{X}_{s-1} + (\mathbf{K}_{s,s} - \lambda\mathbf{M}_{s,s})\mathbf{X}_s - \mathbf{K}_{s,s+1}\mathbf{X}_{s+1} = 0, \quad \mathbf{K}_{s-1,s} = \mathbf{K}_{s,s+1} = \mathbf{K}_{12}, \quad (1)$$

где $\mathbf{K}_{ss} = \mathbf{K}_{11}$ – матрица, описывающая колебания s -й подсистемы; $\mathbf{K}_{s,s+1}$ – матрица связи между s -й и $(s+1)$ -й подсистемой; λ – квадрат собственной частоты. Уравнение (1) можно переписать в матричном виде

$$\mathbf{D} = \mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{D}_{11} & -\mathbf{K}_{12} \\ & -\mathbf{K}_{12}^T & \ddots & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

где $[\mathbf{D}_{11}] = \mathbf{K}_{11} - \lambda\mathbf{M}_{11}$; “ T ” означает транспонирование матриц.

Уравнения (1), (2) допускают решение вида $\mathbf{X}_r = \mathbf{C}e^{i(\omega t - \mu r)}$. Тогда получим из (2) уравнение

$$\mathbf{K}_{21}e^{-i\mu} + \mathbf{D}_{11} + \mathbf{K}_{12}e^{i\mu} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение можно рассматривать как дисперсионное уравнение периодической системы без учета упругих свойств составляющих подсистем. Поэтому можно ожидать, что в многосекционной системе с повторяющимися подсистемами, в том числе и с подсистемами произвольной структуры, возникнут колебания, которые будут модулироваться частотами такой периодической системы.

В рассматриваемой системе каждому элементу (диску) можно присвоить двойную нумерацию: номер подсистемы и номер диска внутри подсистемы. Поэтому данный класс структур можно также отнести к иерархическим. В этом случае решение можно искать в виде произведения волн, что и определяет возникновение модулированных колебаний.

Покажем далее, что уравнение (3) имеет волновое решение, даже, несмотря на то, что составляющие подсистемы сами по себе не являются периодическими и не имеют волнового решения. Для этого рассмотрим без нарушения общности, систему (рис. 2), составленную из подсистем с тремя дисками $n = 3$. Исследуем крутильные колебания такой системы.

Аналогично [13] разделим переменные в системе рис. 1 на группы в соответствии с числом степеней свободы в s -й подсистеме: $3s-2$, $3s-1$, $3s$ ($s = 1, \dots$). Такая нумерация представлена на рис. 2. Тогда уравнение движения s -й подсистемы

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\phi}_{3s-2} + (k_{12} + k_0)\phi_{3s-2} - k_0\phi_{3s-3} - k_{12}\phi_{3s-1} &= 0, & 3s-2 &= 1, 4, \dots, \\ J_2\ddot{\phi}_{3s-1} + (k_{12} + k_{23})\phi_{3s-1} - k_{23}\phi_{3s} - k_{12}\phi_{3s-2} &= 0, & 3s-1 &= 2, 5, \dots, \\ J_3\ddot{\phi}_{3s} + (k_{23} + k_0)\phi_{3s} - k_{23}\phi_{3s-1} - k_0\phi_{3s+1} &= 0, & 3s &= 3, 6, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

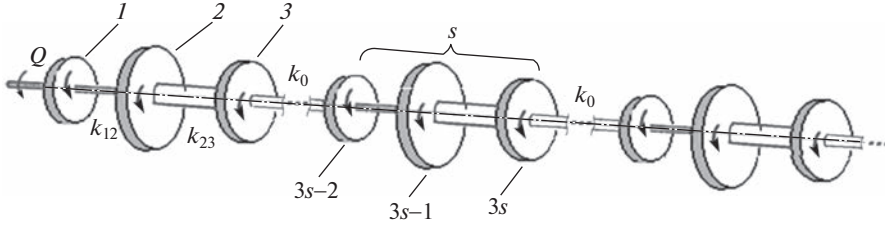


Рис. 2. Периодическая система из одинаковых трехдисковых подсистем с произвольной структурой.

где J_r – момент инерции r -го диска ($r = 1, 2, 3$), остальные обозначения приведены выше (рис. 1). Положим решение (4) в виде

$$\varphi_{3s} = a_1 e^{i(\omega t - (3s)\mu)}, \quad \varphi_{3s-1} = a_2 e^{i(\omega t - (3s-1)\mu)}, \quad \varphi_{3s-2} = a_3 e^{i(\omega t - (3s-2)\mu)}, \quad (5)$$

где μ – постоянная распространения. Такой вид решения для периодических включений использует теорему Флоке [13, 14], однако, как увидим ниже, такое решение справедливо и для общего случая непериодических подсистем. Характеристическое уравнение после умножения (4) на $e^{i\mu}$ примет вид

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} B_1 & -k_{12}e^{-i\mu} & -k_0e^{i\mu} \\ -k_{12}e^{i\mu} & C & -k_{23}e^{-i\mu} \\ -k_0e^{-i\mu} & -k_{23}e^{i\mu} & B_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (6)$$

где $B_1 = -J_1\omega^2 + (k_{12} + k_0)$; $i = 1, 3$; $C = -J_2\omega^2 + (k_{12} + k_{23})$; $B_3 = -J_3\omega^2 + (k_{23} + k_0)$.

Раскрывая (6), найдем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} B_1 B_2 C - k_{12} k_{23} k_0 (e^{i3\mu} + e^{-i3\mu}) - k_0^2 C - (k_{12}^2 B_2 + k_{23}^2 B_1) = \\ = B_1 B_2 C - 2k_{12} k_{23} k_0 \cos 3\mu - k_0^2 C - (k_{12}^2 B_2 + k_{23}^2 B_1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Это уравнение периодическое с периодом $\pi/3$ и поэтому предельная длина волны $L_{\lim}$ составляет $\mu = \pi/3$. Прямые $\mu = 0$ (ось ординат) и $\mu = \pi/3$ являются предельными для дисперсионной кривой. Для каждой длины волны μ имеются три частоты ω и, следовательно, дисперсионная кривая состоит из трех ветвей, между которыми находятся зоны непропускания гармонического сигнала.

Найдем теперь предельные точки дисперсионной кривой на осях $\mu = 0$ и $\mu = \pi/3$. При $\mu = 0$ и $\mu = \pi/3$ получим, что дисперсионное уравнение (7) отвечает определителю

$$\det = \begin{bmatrix} B_1 & -k_{12} & \mp k_0 \\ -k_{12} & C & -k_{23} \\ \mp k_0 & -k_{23} & B_2 \end{bmatrix} = 0, \quad (8)$$

где знак “–” соответствует $\mu = 0$, а “+” значению $\mu = \pi/3$.

Таким образом, уравнение (8) дает возможность получить предельные точки дисперсионных кривых и найти границы областей непропускания гармонического сигнала для всей системы. При этом порядок уравнения равен числу степеней свободы образующей подсистемы. Обозначим предельные точки на оси $\mu = 0$ через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, а предельные точки на оси $\mu = \pi/3$ через $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$. Можно убедиться непосредственно, что $\omega_1 = 0$.

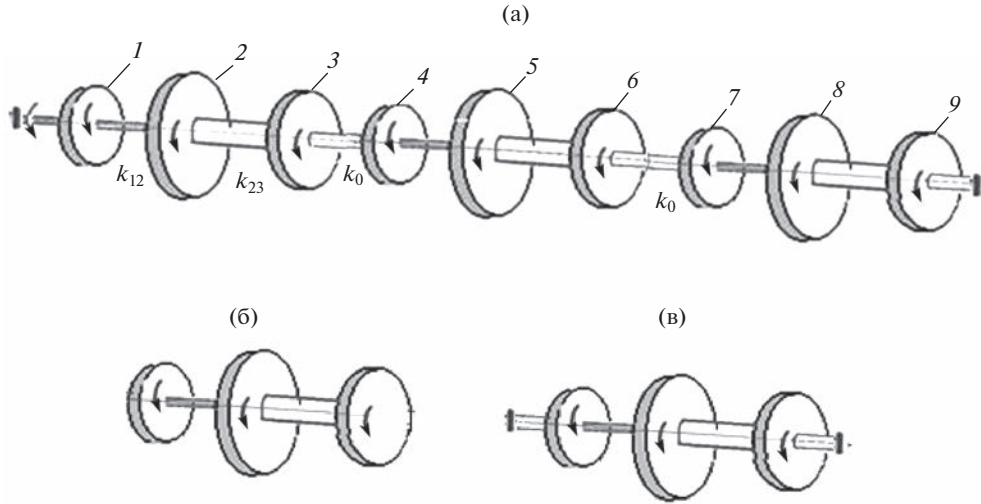


Рис. 3. Система, состоящая из 3-х одинаковых подсистем произвольной структуры – (а); подсистема со свободными концами – (б); подсистема с закрепленными концами – (в).

Очевидно, что предложенная процедура составления дисперсионного уравнения справедлива и для общего случая, когда число дисков в подсистемах $n > 3$. Тогда переменные в уравнении движения (4) будут разделены на следующие n групп: $ns - (n - 1)$; ...; $n(s - 1)$; ns . Таким образом, каждая группа переменных объединяет идентичные элементы (диски) в подсистемах.

Пример расчета периодической системы, состоящей из трех подсистем произвольной структуры. Для определения собственных частот и форм колебаний такой системы необходимо еще учесть граничные условия. Рассмотрим в качестве примера систему с закрепленными концами (рис. 3а), число подсистем $N = 3$, число дисков в каждой подсистеме $n = 3$.

Параметры системы следующие: $k_{12} = 2 \times 10^5$ Нм, $k_{23} = 3 \times 10^5$ Нм, $k_0 = 1 \times 10^5$ Нм, $J_1 = 0.1$ кг м² = 0.1 Нм с², $J_2 = 0.3$ кг м² = 0.3 Нм с², $J_3 = 0.2$ кг м² = 0.2 Нм с². Собственные частоты рассчитывались с помощью программы Matrix calculator.

Предельные точки дисперсионной кривой следующие (табл. 1):

– на оси μ ($\omega_i \times 10^3$ рад/с): $\omega_1 = 0$; $\omega_2 = 5.50$; $\omega_3 = 6.01$;

– на оси $\mu = \pi/3$ ($\omega_i^* \times 10^3$ рад/с): $\omega_1^* = 2.24$; $\omega_2^* = 4.24$; $\omega_3^* = 6.60$.

Полученные результаты позволяют построить дисперсионную кривую (рис. 4).

Дисперсионная кривая (8) представлена на рис 4, точками показаны собственные частоты. Дисперсионная кривая состоит из трех ветвей 1–3, между которыми расположены области непропускания гармонического сигнала. Количество ветвей n равно числу степеней свободы подсистемы и каждая из них отвечает своей форме колебаний изолированной подсистемы. В нашем случае области непропускания находятся в следую-

Таблица 1. Собственные частоты системы рис. 3а

№ частоты колебаний	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\omega \times 10^3$ рад/с	0.83	1.57	2.08	4.45	4.91	5.31	6.11	6.33	5.50

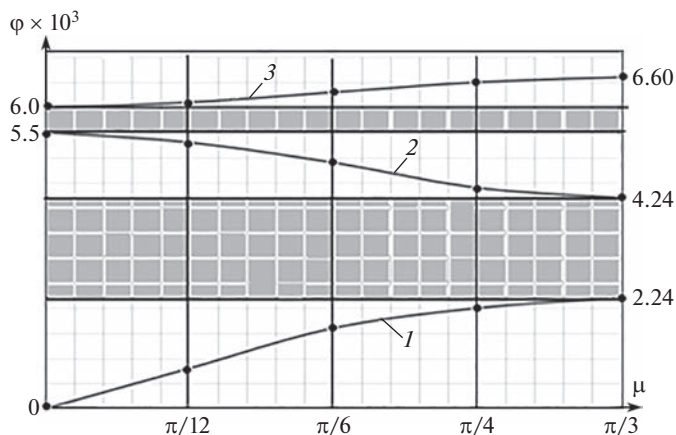


Рис. 4. Дисперсионная кривая системы рис. 3: 1, 2, 3 – ветви дисперсионной кривой; полосы непропускания гармонического сигнала выделены серым цветом.

сих частотных областях: $2.24 \times 10^3 < \omega < 4.24 \times 10^3$ рад/с и $5.5 \times 10^3 < \omega < 6.0 \times 10^3$ рад/с, на рис. 4 они выделены серым цветом. Как видим, ширина областей непропускания уменьшается с увеличением частоты. В этих областях происходит затухание гармонического сигнала при любых граничных условиях.

Вертикальные линии на рис. 4 соединяют частоты, соответствующие формам колебаний с одинаковой длиной волны, но различными частотами. Это и объясняет возникновение модулированных колебаний за счет модуляции низшими частотами. Количество таких линий N совпадает с числом подсистем.

Собственные формы колебаний, соответствующие каждой из ветвей дисперсионной кривой, представлены на рис. 5–7. На этих рисунках амплитуды A колебаний дисков $n = 1, 2, \dots, 9$ выделены точками. На рис. 5 показана форма колебаний на частоте $\omega_2 = 1.57 \times 10^3$ рад/с, расположенной на первой ветви дисперсионной кривой. Как видно, колебания дисков 1–2–3, 4–5–6, 7–8–9 в каждой из подсистем происходят в фазе, т.е. по первой форме колебаний.

На рис. 6 представлена форма колебаний системы на частоте $\omega_4 = 4.45 \times 10^3$ рад/с, расположенной на второй ветви дисперсионной кривой. Она соответствует второй одноузловой форме колебаний дисков в подсистемах.

Форма колебаний системы при наивысшей, девятой, частоте $\omega_9 = 6.50 \times 10^3$ рад/с, расположенной на третьем участке дисперсионной кривой, приведена на рис. 7. Она соответствует третьей двухузловой форме колебаний в каждой подсистеме.

Собственные частоты изолированных подсистем при различных граничных условиях следующие:

- для подсистемы со свободными концами (рис. 3б): $\omega_i \times 10^3$ рад/с: 0; 4.2; 5.8;
- для подсистемы с закрепленными концами (рис. 3в): $\omega_i \times 10^3$ рад/с: 1.73; 4.9; 6.2.

Отсюда видно, что в случае подсистем произвольной структуры предельные точки не совпадают с частотами подсистем со свободными и закрепленными концами, что отличает их от подсистем с регулярной структурой (периодической и симметричной).

Структура спектра собственных частот для общего случая подсистем произвольной структуры во многом аналогична структуре спектра для подсистем периодической и симметричной структуры. Действительно, как показывает анализ рис. 4–8: 1) соб-

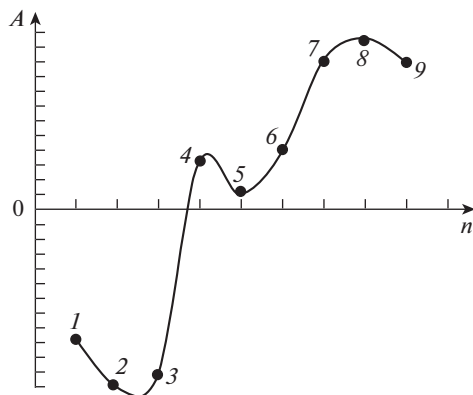


Рис. 5. Форма колебаний на частоте $\omega_2 = 1.57 \times 10^3$ рад/с, расположенной на первой ветви дисперсионной кривой. Она соответствует первой безузловой форме колебаний образующих подсистем.

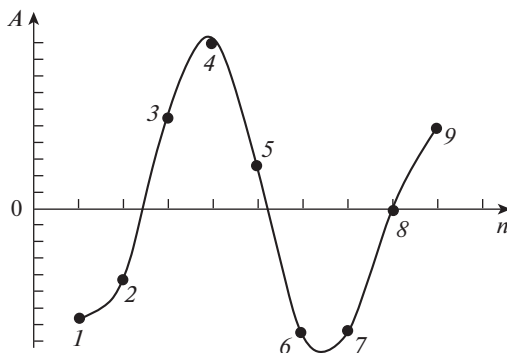


Рис. 6. Форма колебаний на частоте $\omega_4 = 4.45 \times 10^3$ рад/с, расположенной на второй ветви дисперсионной кривой. Она соответствует второй одноузловой форме колебаний образующих подсистем.

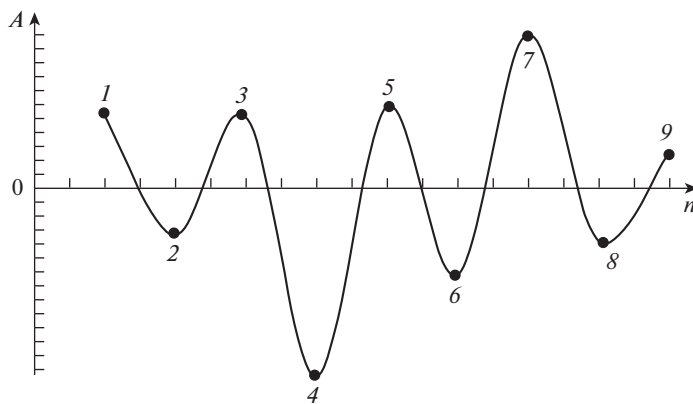


Рис. 7. Форма колебаний на частоте $\omega_9 = 6.50 \times 10^3$ рад/с, расположенной на третьей ветви дисперсионной кривой. Она соответствует третьей двухузловой форме колебаний образующих подсистем.

ственные частоты разделяются на группы, с одинаковой длиной волны, но разными частотами. Число таких групп равно количеству подсистем N . В нашей системе это группы частот (1, 6, 9), (2, 5, 8), (3, 4, 7); 2) дисперсионная кривая распадается на n ветвей по числу степеней свободы подсистемы. Каждая из ветвей соответствует своей форме колебаний изолированной подсистемы. В нашей системе это группы частот: (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9).

Дисперсионная кривая получена без расчета всей системы, имеющей $n \times N$ степеней свободы, а лишь на основе анализа уравнения (8), порядок которого равен числу степеней свободы n отдельной подсистемы.

Выводы. Проведенный анализ спектральных свойств и собственных форм колебаний периодических многомассовых систем с подсистемами произвольной структуры позволил выявить следующие закономерности: **1.** Такой класс периодических систем имеет волновое решение, несмотря на то, что составляющие подсистемы (включения) сами по себе не имеют волнового решения. **2.** Собственные частоты распадаются на группы, формы колебаний в которых имеют одинаковую длину волны, но разные частоты. Число таких групп равно количеству подсистем. Это определяет возникновение модулированных колебаний за счет модуляции низшими частотами, соответствующими колебаниям системы без учета упругих свойств составляющих подсистем. **3.** Дисперсионная кривая исследуемой системы состоит из n ветвей по числу степеней свободы подсистемы. Каждая из ветвей отвечает своей форме колебаний подсистемы. **4.** Для системы с подсистемами произвольной структуры предельные точки дисперсионной кривой на осях $\mu = 0$, $\mu = \pi/n$ не совпадают с частотами подсистем со свободными и закрепленными концами, в отличие от подсистем с регулярной структурой (периодической и симметричной). **5.** Дисперсионная кривая такой системы получена без расчета всей системы в целом, а лишь на основе динамических параметров изолированной подсистемы.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Поддержано грантом РФФ № 21-19-00813.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике. Справочник. Т. 3, 4. М.: Машиностроение, 1980.
2. Бармина О.В., Волоховская О.А. Методика расчета вибраций в многоступенчатых погружных насосах для нефтедобычи // Машиностроение и инженерное образование. 2011. Т. 26. № 1. С. 7.
3. Jung J., Kim H.-G., Goo S., Chang K.-J., Wang S. Realization of a locally resonant metamaterial on the automobile panel structure to reduce noise radiation // Mech. Syst. Signal Process. 2019. V. 122. P. 206.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.11.050>
4. Qureshi A., Li B., Tan K. Numerical investigation of band gaps in 3D printed cantilever-in-mass metamaterials // Sci. Rep. 2016. V. 6. P. 28314.
<https://doi.org/10.1038/srep28314>
5. Bobrovnikskii Y.I. An Acoustic Metamaterial With Unusual Wave Properties // Acoustical Physics. 2014. V. 60. № 4. P. 371.
6. Huang H.H., Sun C.T., Huang G.L. On the negative effective mass density in acoustic metamaterials // Int. J. of Engineering Science. 2009. V. 47. P. 610.
<https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.12.007>

7. *Hu G., Tang L., Das R., Gao Sh., Liu H.* Acoustic metamaterials with coupled local resonators for broadband vibration suppression // *AIP Advances*. 2017. V. 7. Iss. 2: 025211.
<https://doi.org/10.1063/1.4977559>
8. *Zhou X., Wang J., Wang R., Lin J.* Band gaps in grid structure with periodic local resonator subsystems // *Modern Physics Letters B*. 2017. V. 31 (25): 1750225.
<https://doi.org/10.1142/S0217984917502256>
9. *Банах Л.Я., Бармина О.В., Волоховская О.А.* Колебания и волны в многосекционных роторных системах // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2021. № 5. С. 23.
<https://doi.org/10.31857/S0235711921050060>
10. *Kaluba Ch., Zingoni A.* Group-Theoretic Buckling Analysis of Symmetric Plane Frames // *Journal of Structural Engineering*, 2021 V. 147. № 10. P. 04021153.
[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0003131](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0003131)
11. *Банах Л.Я.* Распространение упругих волн в динамически-самоподобных структурах (динамических фракталах) // *Акустический журнал*. 2020. Т. 66. № 3. С. 265.
12. *Mencik J.-M., Duhamel D.* Dynamic analysis of periodic structures and metamaterials via wave approaches and finite element procedures // 8th Int. Conf. on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, 28–30 June 2021. P. 42.
<https://doi.org/10.7712/120121.8462.19149>
13. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
14. *Пейн Г.* Физика колебаний и волн. М.: Мир, 1979. 390 с.