Научная статья

УДК 551.465
EDN: BNHCDW

# Конечно-разностная аппроксимация уравнения потенциальной завихренности для стратифицированной несжимаемой жидкости и пример его использования при расчете циркуляции Черного моря

## Часть II. Дискретное уравнение потенциальной завихренности в квазистатическом приближении и пример его использования для расчета циркуляции Черного моря 2011 года *

**С. Г. Демышев**

*Морской гидрофизический институт РАН*, *Севастополь*, *Россия*
✉ *demyshev@gmail.com*

Поступила в редакцию 09.06.2023; одобрена после рецензирования 25.07.2023;
принята к публикации 15.03.2024.

*Аннотация*
*Цель.* Выведено конечно-разностное уравнение потенциальной завихренности трехмерной бароклинной жидкости с учетом диффузии и вязкости в квазистатическом приближении. Его слагаемые рассчитаны и проанализированы при численном моделировании циркуляции Черного моря для двух периодов – зимы и лета 2011 года.
*Методы и результаты.* Для системы дискретных уравнений динамики моря в приближении гидростатики и с учетом вязкости, диффузии, втока рек, водообмена через проливы и атмосферного воздействия получено конечно-разностное уравнение потенциальной завихренности стратифицированной несжимаемой жидкости. Показано, что основной вклад в потенциальную завихренность вносит ее вертикальная компонента. Горизонтальные составляющие преобладают в областях стока рек и водообмена через проливы. Вертикальная компонента потенциальной завихренности за исключением зон стока рек определяется величиной и структурой абсолютного вихря. В верхнем слое моря адвекция потенциальной завихренности вносит основной вклад в прибрежной области моря, в северо-западной части и вдоль Анатолийского побережья. На нижних горизонтах ее наибольшие значения наблюдаются в районе вдольбереговой полосы с более ярко выраженным характером у южного берега моря.
*Выводы.* Анализ уравнения потенциальной завихренности показал, что величина адвективных слагаемых определяется дивергенцией от произведения нелинейных слагаемых в уравнениях движения и градиента плотности. Главный вывод: локально сумма вертикальной и горизонтальной адвекции потенциальной завихренности на два порядка меньше, чем каждая по отдельности.

* См. Часть I: *Демышев С. Г.* Конечно-разностная аппроксимация уравнения потенциальной завихренности для стратифицированной несжимаемой жидкости и пример его использования при расчете циркуляции Черного моря. Часть I. Дифференциально-разностное уравнение потенциальной завихренности идеальной жидкости // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40, № 2. С. 165–179. EDN BCKKBN.

**Ключевые слова:** численное моделирование, кинетическая энергия, дискретные уравнения, Черное море, циклоническая циркуляция, антициклонические вихри, вихрь, потенциальная завихренность, инвариант Эртеля

**Благодарности**: работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда 23-27-00141.

**Для цитирования:** *Демышев С. Г.* Конечно-разностная аппроксимация уравнения потенциальной завихренности для стратифицированной несжимаемой жидкости и пример его использования при расчете циркуляции Черного моря. Часть II. Дискретное уравнение потенциальной завихренности в квазистатическом приближении и пример его использования для расчета циркуляции Черного моря 2011 года // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40, № 3. С. 353–370. EDN BNHCDW.

Original article

# Finite-Difference Approximation of the Potential Vorticity Equation for a Stratified Incompressible Fluid and an Example of its Application for Modeling the Black Sea Circulation

## Part II. Discrete Equation of Potential Vorticity in a Quasi-Static Approximation and an Example of its Application for Simulation the Black Sea Circulation in 2011

**S. G. Demyshev**

*Marine Hydrophysical Institute, Russian Academy of Sciences, Sevastopol, Russia*
✉ *demyshev@gmail.com*

*Abstract*
*Purpose*. The study is purposed at deriving a finite-difference equation of potential vorticity for a three-dimensional baroclinic fluid with regard for diffusion and viscosity in a quasi-static approximation. Its terms are calculated and analyzed in numerical modeling of the Black Sea circulation for two periods – winter and summer 2011.
*Methods and Results*. A finite-difference equation for the potential vorticity of a stratified incompressible fluid is obtained for a system of discrete equations of sea dynamics in the hydrostatic approximation allowing for viscosity, diffusion, river inflow, water exchange through the straits and atmospheric forcing. It is shown that the main contribution to the potential vorticity is made by its vertical component. The horizontal components are predominant in the areas of river inflow and water exchange through the straits. The vertical component of potential vorticity, except for the river inflow zones, is conditioned by the magnitude and structure of an absolute eddy. The main contribution in the sea upper layer of the coastal region, its northwestern part and along the Anatolian coast is made by the advection of potential vorticity. At the lower horizons, its highest values are observed in the coastal strip, at that its character is more pronounced near the southern coast of the sea.
*Conclusions*. Analysis of the potential vorticity equation has shown that the value of the advective terms is conditioned by the divergence of the product of nonlinear terms in the motion equations and density gradient. The main conclusion consists in the following: locally, the sum of vertical and horizontal advection of potential vorticity is two orders of magnitude less than each of them separately.

**Keywords:** numerical modeling, kinetic energy, discrete equations, Black Sea, cyclonic circulation, anticyclonic eddies, eddy, potential vorticity, Ertel invariant

**Acknowledgments:** The study was carried out with financial support of the Russian Science Foundation grant 23-27-00141.

**For citation:** Demyshev, S.G., 2024. Finite-Difference Approximation of the Potential Vorticity Equation for a Stratified Incompressible Fluid and an Example of its Application for Modeling the

Black Sea Circulation. Part II. Discrete Equation of Potential Vorticity in a Quasi-Static Approximation and an Example of its Application for Simulation the Black Sea Circulation in 2011. *Physical Oceanography*, 31(3), pp. 319-335.

## Введение

Для исследования циркуляции в атмосфере и океане анализ потенциальной завихренности (англ. *potential vorticity*, сокр. *PV*) имеет принципиальное значение, так как *PV* характеризует роль нелинейных процессов в динамике жидкости. В поле потенциальной массовой силы при отсутствии вязкости и диффузии плотности (идеальная жидкость) *PV* является инвариантом [1], и поэтому его структура определяет траекторию движения частиц жидкости, сохраняющих потенциальную завихренность. Трудность заключается в том, что в реальности вышеперечисленные условия не выполняются или выполняются в приближенном виде, поскольку трение, диффузия и диабатичность меняют *PV* частиц морской воды. При анализе уравнения потенциальной завихренности стратифицированной жидкости можно оценить влияние нелинейных и диффузионных факторов на ее эволюцию.

Важности теоремы Эртеля для исследований в области физической океанографии посвящена работа [2]. В ней подчеркивается, что для крупномасштабных движений воды подходящей формой завихренности является именно потенциальная завихренность, которая включает в себя такие физически разные элементы, как вихрь скорости и плотность морской воды. Теорема Эртеля, из которой следует большинство других теорем о завихренности, определяет динамическую эволюцию потенциальной завихренности. В свою очередь, отсутствие потенциальной завихренности означает инерционно-гравитационный режим движения, который зависит от стратификации океана. Поскольку теорема Эртеля не зависит от конкретного вида лагранжева инварианта, то могут использоваться модифицированные формулы потенциальной завихренности. В качестве примера можно указать на работу [3], в которой вводится «оптимальная» потенциальная завихренность. В результате используемый подход позволяет количественно оценить степень неравновесности атмосферных климатических процессов.

Исследования динамики течений в атмосфере и океане на основе анализа потенциальной завихренности немногочисленны. Видимо, это связано с двумя факторами. Во-первых, потенциальная завихренность по Эртелю – это кинематическая величина [4], по которой нельзя определить интенсивность вихревой структуры течений и даже знак вращения. Во-вторых, часто достаточно рассмотреть потенциальную завихренность по Россби [5] в квазигеострофическом приближении, которая является динамической характеристикой [4] и содержит необходимую информацию о динамике течений.

Для анализа атмосферных прогнозов большую роль играет работа [6], в которой анализируются возможности использования изоэнтропических карт потенциальной завихренности для представления некоторых динамических процессов в атмосфере. Приведены примеры из оперативного анализа погоды и из идеализированных теоретических моделей для иллюстрации этого подхода и его связи с классическими синоптическими концепциями. Обсуждаются структура, причины формирования и устойчивости циклонов и блокирующих антициклонов, физических механизмов распространения волн Россби, бароклинной и баротропной неустойчивости в пространстве и во времени.

В работе [4] анализируется понятие «потенциальная завихренность» и рассматриваются основные соотношения, по которым проводятся ее расчеты, исследуются подходы Россби и Эртеля. В качестве примера приводятся оценки по данным наблюдений потенциальной завихренности для квазипостоянного антициклонического Лофотенского вихря Норвежского моря. Авторами показано, что потенциальная завихренность по Эртелю является кинематической характеристикой, а потенциальная завихренность по Россби в квазигеострофическом приближении – динамической.

Анализ уравнения потенциальной завихренности по Эртелю позволяет оценить вклад нелинейных и диффузионных эффектов в баланс сил, определяющих эволюцию $PV$. Данная работа является продолжением исследований [7]. Цель ее – получить дискретное уравнение потенциальной завихренности стратифицированной жидкости в квазистатическом приближении как следствие исходной конечно-разностной системы уравнений модели динамики Черного моря и на примере черноморской циркуляции с реалистическими атмосферными условиями для 2011 г. провести анализ полученного уравнения потенциальной завихренности.

## Уравнение потенциальной завихренности стратифицированной несжимаемой жидкости в квазистатическом приближении

В приближении Буссинеска и квазистатики в декартовой системе координат движение жидкости в области $\mathbf{\Omega}$ с границей $\partial\Omega$ в форме Громеки – Лэмба описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \vec{U}_H}{\partial t} + \vec{\xi} x \vec{U}_H = -\frac{1}{\rho_0}\nabla(P+E) + \overline{F}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\rho, \quad (2)$$

$$\nabla \vec{U} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T\vec{U}) = (\kappa^T T_z)_z - \kappa^H \nabla^4 T, \quad (4)$$

$$\frac{dS}{dt} + \operatorname{div}(S\vec{U}) = (\kappa^S S_z)_z - \kappa^H \nabla^4 S, \quad (5)$$

$$\rho = \Phi\,(T, S). \quad (6)$$

Введены обозначения: $\overrightarrow{U} = (\overrightarrow{U}_H, w) = (u, v, w)$ – компоненты вектора скорости течения по осям ($x$, $y$, $z$), направленным на восток, север и вертикально вниз соответственно; $\overline{F} = (F^u, F^v)$, $\vec{g} = (0, 0, g)$ – ускорение свободного падения; ($T$, $S$, $P$, $\rho$) – температура, соленость, давление и плотность морской воды; $\rho_0$ = 1 г/см$^3$ (здесь и в дальнейшем полагаем давление и плотность нормированными на $\rho_0$); $\vec{f} = (0, 0, f^z)$ – параметр Кориолиса, где $f^z = 2\omega \sin\varphi$; $\omega$ – угловая скорость вращения Земли; $\varphi$ – широта.

В уравнении (1) с учетом квазистатического приближения введены абсолютный вихрь скорости и кинетическая энергия движения:

$$\dot{\xi} = (\xi^x, \xi^y, \xi^z), \text{ где } \xi^x = -\frac{\partial v}{\partial z}, \xi^y = \frac{\partial u}{\partial z}, \xi^z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f^z = \xi^r + f^z,$$

$$F^u = (\mu^{\text{ver}} u_z)_z - \mu^{\text{hor}} \nabla^4 u, \quad F^v = (\mu^{\text{ver}} v_z)_z - \mu^{\text{hor}} \nabla^4 v, \quad \overline{F} = (F^u, F^v),$$

$$E = \rho_0 \frac{u^2 + v^2}{2},$$

где $\mu^{\text{ver}}$, $\mu^{\text{hor}}$ – коэффициенты вертикального и горизонтального обмена количеством движения.

На поверхности при z = 0

$$\nu_V u_z = -\tau^x, \nu_V v_z = -\tau^y, \; w = -\varsigma_t, \; \kappa^T T_z = Q^T, \; \kappa^S S_z = \frac{Ev - \text{Pr}}{\rho_1} S_0; \tag{7}$$

на дне при $z = H(x, y)$

$$u = v = w = 0, T_z = S_z = 0. \tag{8}$$

Использованы следующие обозначения: $(\tau^x, \; \tau^y)$ – касательное напряжение трения ветра; $Q^T$ – поток тепла; $Ev$ – испарение морской воды; $Pr$ – осадки; $S_0$ – модельная соленость на поверхности моря; $\rho_1$ – плотность морской воды на поверхности моря.

Функции $\mu^{ver}, \kappa^T, \kappa^S$ рассчитывались в соответствии с параметризацией Меллора – Ямады [6].

На твердых боковых стенках
для меридиональных участков границы:

$$u = \nabla^2 u = v_x = \nabla^2 v_x = 0, \quad T_x = (\nabla^2 T)_x = S_x = (\nabla^2 S)_x = 0, \tag{9}$$

для зональных участков границы:

$$v = \nabla^2 v = u_y = \nabla^2 u_y = 0, \quad T_y = (\nabla^2 T)_y = S_y = (\nabla^2 S)_y = 0. \tag{10}$$

На участках границы, где вода втекает, используются следующие условия:
для меридиональных участков

$$u = u^p, \nabla^2 u = v_x = \nabla^2 v_x = 0, \quad T = T^p, \; S = S^p, (\nabla^2 T)_x = (\nabla^2 S)_x = 0, \tag{11}$$

для зональных участков

$$v = v^p, \nabla^2 v = u_y = \nabla^2 u_y = 0, T = T^p, S = S^p, (\nabla^2 T)_y = (\nabla^2 S)_y = 0. \tag{12}$$

Для верхнебосфорского течения и для Керченского пролива, когда течение направлено из Черного моря в Азовское,

$$v = v^s, \nabla^2 v = u_y = \nabla^2 u_y = 0,\ T_y = 0, S_y = 0,\ (\nabla^2 T)_y = (\nabla^2 S)_y = 0. \qquad (13)$$

При $t = t^0$ задаются следующие начальные условия:

$$u = u^0(x,y,z),\quad v = v^0(x,y,z),\quad \varsigma = \varsigma^0(x,y),\quad T = T^0(x,y,z),\quad S = S^0(x,y,z). \qquad (14)$$

Исходя из системы уравнений (1)–(6), выведем уравнение Эртеля. Применяя соответствующую операцию из соотношений (1)–(2), с учетом уравнения неразрывности (3) получаем уравнение для $\vec{\xi}$

$$\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{U}(\nabla \vec{\xi}) - \vec{\xi} \nabla \vec{U} = \nabla \times (\vec{g}\rho + \vec{F}^{\xi}), \qquad (15)$$

где $\vec{F}^{\xi} = (F^u, F^v, 0)$.

Следствием уравнений (4), (5) является уравнение для плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}\rho) = \Phi(D^T, D^S), \qquad (16)$$

в котором введены обозначения

$$D^T = (\kappa^T T_z)_z - \kappa^H \nabla^4 T, \quad D^S = (\kappa^S S_z)_z - \kappa^H \nabla^4 S. \qquad (17)$$

Потенциальная завихренность несжимаемой жидкости в квазистатическом приближении имеет вид

$$\omega = \dot{\xi}\, \nabla \rho = -\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y} + [(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) + f^z]\,\frac{\partial \rho}{\partial z}. \qquad (18)$$

Тогда из уравнений (15), (16) с учетом выражений (3), (17) и (18) следует уравнение Эртеля в квазистатическом приближении для вязкой жидкости

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{U}\omega) = \Phi^{\omega}, \qquad (19)$$

где

$$\Phi^{\omega} = (\dot{\xi}\nabla)\Phi + [(\nabla \times \dot{F}^{\xi})\nabla]\rho. \qquad (20)$$

## Дискретное уравнение потенциальной завихренности в квазистатическом приближении

В соответствии с введенными в работе [7] разностными операторами выпишем дифференциально-разностные уравнения модели (1)–(6) (дифференциальные по времени):

$$\frac{du_{i+1/2,j,k}}{dt} - \left[v, \xi^z\right]_{i+1/2,j,k} + \left[w, \xi^y\right]_{i+1/2,j,k} = -\delta_x(E_{i+1/2,j/k} + P_{i+1/2,j,k}) + F^u_{i+1/2,j,k}, \qquad (21)$$

$$\frac{dv_{i,j+1/2,k}}{dt}+\left[u,\xi^z\right]_{i,j+1/2,k}-\left[w,\xi^x\right]_{i,j+1/2,k}=-\delta_y(E_{i,j+1/2,k}+P_{i,j+1/2,k})+F^v_{i,j+1/2,k}, \quad (22)$$

$$\delta_z P_{i,j,k+1/2}=g\rho_{i,j,k+1/2}, \quad (23)$$

$$\delta_x u_{i,j,k}+\delta_y v_{i,j,k}+\delta_z w_{i,j,k}=0, \quad (24)$$

$$\frac{dT_{i,j,k}}{dt}+\delta_x(u_{i,j,k}T_{i,j,k})+\delta_y(v_{i,j,k}T_{i,j,k})+\delta_z(w_{i,j,k}T_{i,j,k})=$$
$$=\delta_z(\kappa^T_{i,j,k}\delta_z T_{i,j,k})-\kappa^H\nabla^2_{xy}(\nabla^2_{xy}T_{i,j,k}), \quad (25)$$

$$\frac{dS_{i,j,k}}{dt}+\delta_x(u_{i,j,k}S_{i,j,k})+\delta_y(v_{i,j,k}S_{i,j,k})+\delta_z(w_{i,j,k}S_{i,j,k})=$$
$$=\delta_z(\kappa^S_{i,j,k}\delta_z S_{i,j,k})-\kappa^H\nabla^2_{xy}(\nabla^2_{xy}S_{i,j,k}), \quad (26)$$

$$\rho_{i,j,k}=\rho_0+\alpha_1^T T_{i,j,k}+\alpha_1^S S_{i,j,k}+\alpha_2^T T^2_{i,j,k}+\alpha^{ST}S_{i,j,k}T_{i,j,k}. \quad (27)$$

В квазистатическом приближении компоненты вихря скорости (рис. 1) имеют вид

$$\xi^x_{i,j+1/2,k+1/2}=-\delta_z v_{i,j+1/2,k+1/2}, \qquad \xi^y_{i+1/2,j,k+1/2}=\delta_z u_{i+1/2,j,k+1/2},$$
$$\xi^z_{i+1/2,j+1/2,k}=\delta_x v_{i+1/2,j+1/2,k}-\delta_y u_{i+1/2,j+1/2}+f^z_{j+1/2}. \quad (28)$$

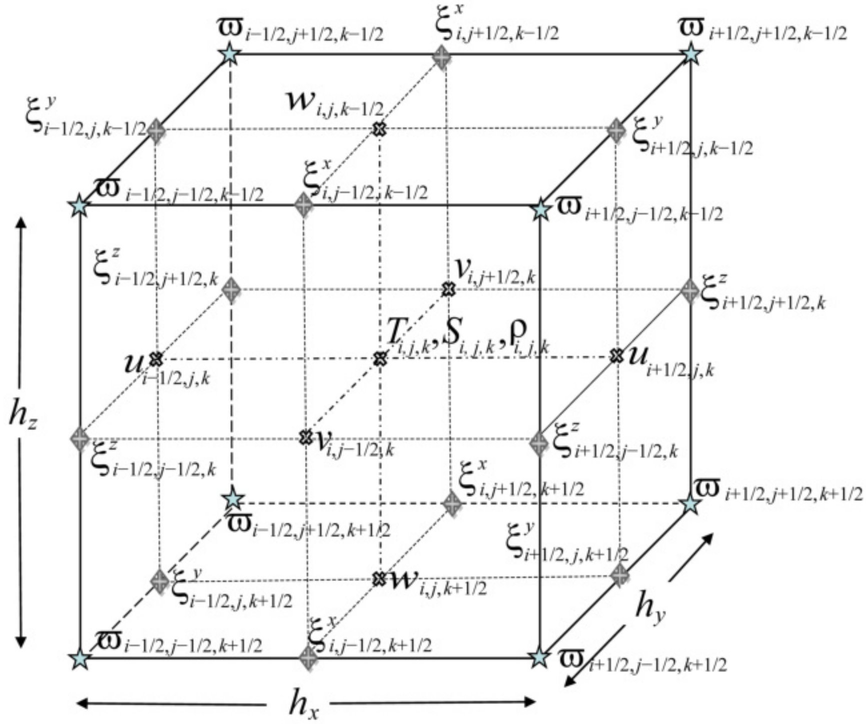
Из представления (28) следует, что в вершинах бокса ($i,j,k$) (рис. 1) выполняется важное соотношение

$$\delta_x\xi^x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}+\delta_y\xi^y_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}+\delta_z\xi^z_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}=0.$$

Полагаем, что слагаемые в квадратных скобках в левой части уравнений (21)–(22) записываются в виде, обеспечивающем сохранение энстрофии и энергии [9] для приближения мелкой воды, и соответствуют формулам (32) работы [10].

Уравнения для компонентов абсолютного вихря скорости (аналог уравнения (15)) – для $\xi^x$ в точке $i, j+1/2, k+1/2$, для $\xi^y$ в точке $i+1/2, j, k+1/2$ и для $\xi^z$ в точке $i+1/2, j+1/2, k$ – с учетом вязкости следуют из соотношений (21)–(24) и имеют вид

$$\frac{d\xi^x}{dt}+\delta_z([w,\xi^x])-\delta_z([u,\xi^z])=g\delta_y\overline{\rho}^z-\delta_z F^v,$$
$$\frac{d\xi^y}{dt}+\delta_z([w,\xi^y])-\delta_z([v,\xi^z])=-g\delta_x\overline{\rho}^z+\delta_z F^u, \quad (29)$$
$$\frac{d\xi^z}{dt}+\delta_x([u,\xi^z])+\delta_y([v,\xi^z])-\delta_x([w,\xi^x])-\delta_y([w,\xi^y])=\delta_x F^v-\delta_y F^u.$$




**Р и с. 1.** Распределение переменных в боксе ($i, j, k$). В вершинах бокса, обозначенных звездочкой, определена $PV$ (ω), на его ребрах – компоненты абсолютного вихря скорости $\xi^x, \xi^y, \xi^z$

**F i g. 1.** Distribution of variables in box ($i, j, k$). At the box vertices indicated by asterisks, $PV$ (ω) is determined, and on its edges – the components of absolute vortex velocity

Введем обозначения:

$$\Lambda^x_{i,j+1/2,k+1/2} = -\delta_z F^v_{i,j+1/2,k+1/2}\,,$$

$$\Lambda^y_{i+1/2,j,k+1/2} = \delta_z F^u_{i+1/2,j,k+1/2}\,,$$

$$\Lambda^z_{i+1/2,j+1/2,k} = \delta_x F^v_{i,j+1/2,k+1/2} - \delta_y F^u_{i+1/2,j+1/2,k}\,.$$

Уравнение плотности в точке ($i, j, k$) является следствием соотношений (25)–(27) и записывается следующим образом:

$$\frac{d\rho}{dt} + \delta_x(u\rho) + \delta_y(v\rho) + \delta_z(w\rho) = D^\rho_V + \kappa^H D^\rho_H = D^\rho, \tag{30}$$

где

$$D^\rho_V = \alpha^T_1 \delta_z[\kappa^V(\delta_z T)] + \alpha^S_1 \delta_z[\kappa^V(\delta_z S)] + 2\alpha^T_2[\delta_z[\kappa^V \overline{T}^z(\delta_z T)] +$$
$$+ \alpha^{TS}\Big[T\delta_z[\kappa^V(\delta_z S)] + S\delta_z[\kappa^V(\delta_z T)]\ \Big],$$

$$D^\rho_H = \alpha^T_1 \nabla^2_{xy} T + \alpha^S_1 \nabla^2_{xy} S + 2\alpha^T_1 T\nabla^2_{xy} T + \alpha^{TS}[T\nabla^2_{xy} S + S\nabla^2_{xy} T].$$

Проводя аналогичные [5] преобразования с уравнениями (29), (30), получаем в точке $i+1/2,\ j+1/2,\ k+1/2$ уравнение потенциальной завихренности в квазистатическом приближении

$$\frac{d\omega}{dt}+\delta_x(\Upsilon^x\bar{\rho}^{yz}+\xi^x R^x)+\delta_y(\Upsilon^y\bar{\rho}^{xz}+\xi^y R^y)+\delta_z(\Upsilon^z\bar{\rho}^{xy}+\xi^z R^z)=\overline{\Lambda^x}^x\delta_x(\bar{\rho}^{yz})+$$
$$+\overline{\Lambda^y}^y\delta_y(\bar{\rho}^{xz})+\overline{\Lambda^z}^z\delta_z(\bar{\rho}^{xy})+\overline{\xi^x}^x\delta_x(\overline{D^\rho}^{yz})+\overline{\xi^y}^y\delta_y(\overline{D^\rho}^{xz})+\overline{\xi^z}^z\delta_z(\overline{D^\rho}^{xy}),\quad(31)$$

где правая часть уравнения (31) является разностным аналогом выражения (20). С учетом квазистатического приближения и уравнений (29) приняты следующие обозначения:

$$\Upsilon^x_{i,j+1/2,k+1/2}=\delta_z([w,\xi^x])_{i,j+1/2,k}-\delta_z([u,\xi^z])_{i,j+1/2,k},$$

$$\Upsilon^y_{i+1/2,j,k+1/2}=\delta_z([w,\xi^y])_{i+1/2,j,k+1/2}-\delta_z([v,\xi^z])_{i+1/2,j,k+1/2},$$

$$\Upsilon^z_{i+1/2,j+1/2,k}=\delta_x([u,\xi^z])_{i+1/2,j+1/2,k}+\delta_y([v,\xi^z])_{i+1/2,j+1/2,k}-$$
$$-\delta_x([w,\xi^x])_{i+1/2,j+1/2,k}-\delta_y([w,\xi^y])_{i+1/2,j+1/2,k},$$

$$\overline{\bar{\rho}^{yz}_{i,j+1/2,k+1/2}}^x=\overline{\bar{\rho}^{xz}_{i+1/2,j,k+1/2}}^y=\overline{\bar{\rho}^{xy}_{i+1/2,j+1/2,k}}^z=\overline{\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}^{xyz},$$

$$\overline{R^x_{i,j+1/2,k+1/2}}^x=\overline{R^y_{i+1/2,j,k+1/2}}^y=\overline{R^z_{i+1/2,j+1/2,k}}^z=\overline{\delta_x(u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2})+}^{xyz}$$
$$\overline{+\delta_y(v_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2})+\delta_z(w_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}\rho_{i+1/2,j+1/2,k+1/2})}^{xyz}.$$

Разностный аналог потенциальной завихренности Эртеля имеет вид

$$\varpi_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}=\overline{\xi^x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}^x\delta_x\bar{\rho}^{yz}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}+\overline{\xi^y_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}^y\delta_y\bar{\rho}^{xz}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}+$$
$$+\overline{\xi^z_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}}^z\delta_z\bar{\rho}^{xy}_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}=\varpi^x+\varpi^y+\varpi^z,\quad(32)$$

где обозначения $\varpi^x,\varpi^y,\varpi^z$ очевидны.

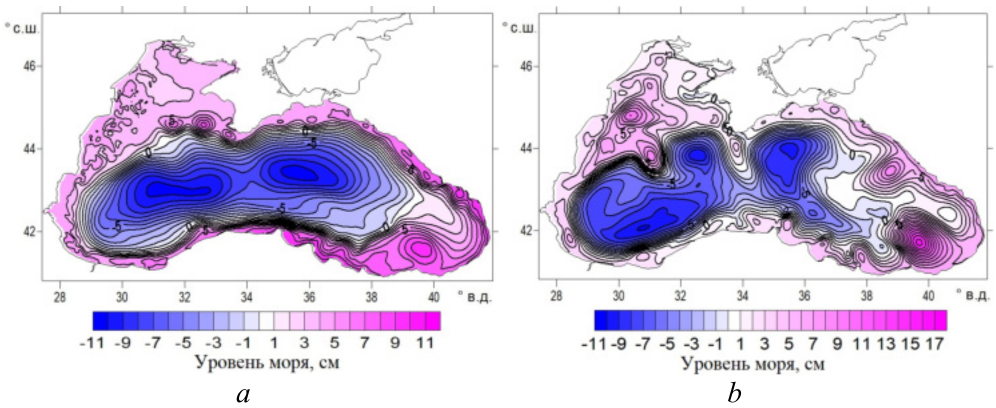
Отличие уравнения (31) от уравнения (45) в [7] состоит не только в том, что учтена вязкость и диффузия, но и в том, что компоненты абсолютного вихря скорости имеют вид (28).

## Численный анализ компонентов уравнения потенциальной завихренности по результатам расчета циркуляции с атмосферными условиями для 2011 г.

В численных прогностических экспериментах задавались следующие параметры. Расчеты проводились с равномерным шагом по горизонтальным координатам 1,6 км, по вертикали использовались 27 горизонтов со сгущением в верхнем слое моря. Учет стока причерноморских рек и расходы через Босфорский и Керченский проливы (условия (9)–(13)) соответствовали данным работы [11]. Температура воды в устьях рек (условия (11)–(12)), кроме рек Турции, задавалась из [11]. Предполагалось, что температура рек Турции равна температуре прибрежных вод моря. В верхнебосфорском течении температура и соленость принимались теми же, что и в море, в соответствии с условиями (11). В нижнебосфорском потоке соленость принималась равной 35 ‰, а температура 16 °С.

Для задания атмосферного воздействия в уравнениях (7), (8) использовались данные *SKIRON* за 2011 г. [12], вертикальное перемешивание описано на основе теории Меллора – Ямады [8]. Начальные условия (14) в этом расчете соответствовали 1 января 2011 г. Расчет был проведен на год модельного времени, его параметры и результаты подробно описаны в [13].

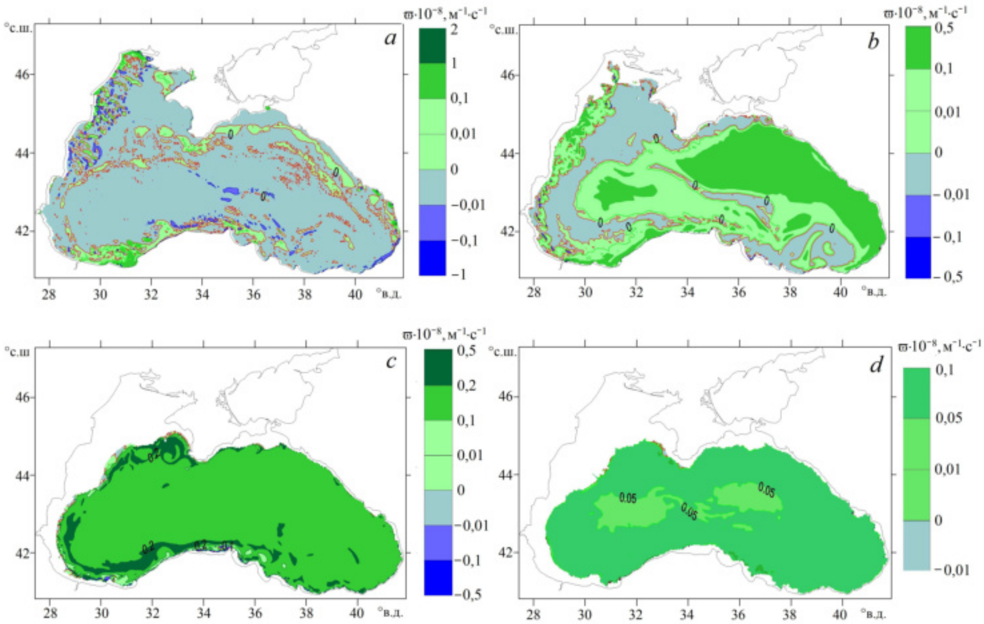
В качестве примера рассмотрим $PV$ (формула (32)) для двух моментов времени – зимнего (рис. 2, *a*) и летнего (рис. 2, *b*) периода, в которые структура циркуляции заметно различается.




**Р и с. 2.** Приведенный уровень моря на 1 февраля (*a*) и 1 августа (*b*) 2011 г.
**F i g. 2.** Spesified/Stated sea level on February 1 (*a*) and August 1 (*b*), 2011

На 1 января 2011 г. приведенный уровень моря представлял собой обширный циклонический круговорот с двумя синоптическими вихрями – Севастопольским и юго-западным антициклонами. В отличие от зимней циркуляции, в летний сезон (рис. 2, *b*) циклонический круговорот распадается на два. В западной части бассейна вдоль свала глубин Основное Черноморское течение распространяется в виде узкого струйного течения (рис. 2, *a*). Зимой вдоль северной периферии северо-западного шельфа образуются мощные меандры, а в юго-восточном углу моря формируется интенсивный антициклон.

Зимней циркуляции соответствует потенциальная завихренность, представленная на рис. 3, *a* – *d*. Наблюдаются качественные различия в ее структуре по глубине. В верхнем 30-метровом слое большие значения $PV$ концентрируются в двух областях (рис. 3, *a*, *b*). Первая – северо-западная часть моря, ограниченная приблизительно координатами 44°–46° с. ш., 29°–31° в. д., в которой динамика вод во многом определяется стоком рек, в первую очередь Дуная. Поэтому имеют место большие пространственные градиенты в поле плотности, что и обусловливает значения $\varpi$ в этой зоне моря. Вторая область – свал глубин, где выделяется Анатолийское побережье и южная периферия северо-западного шельфа (рис. 3, *b*).

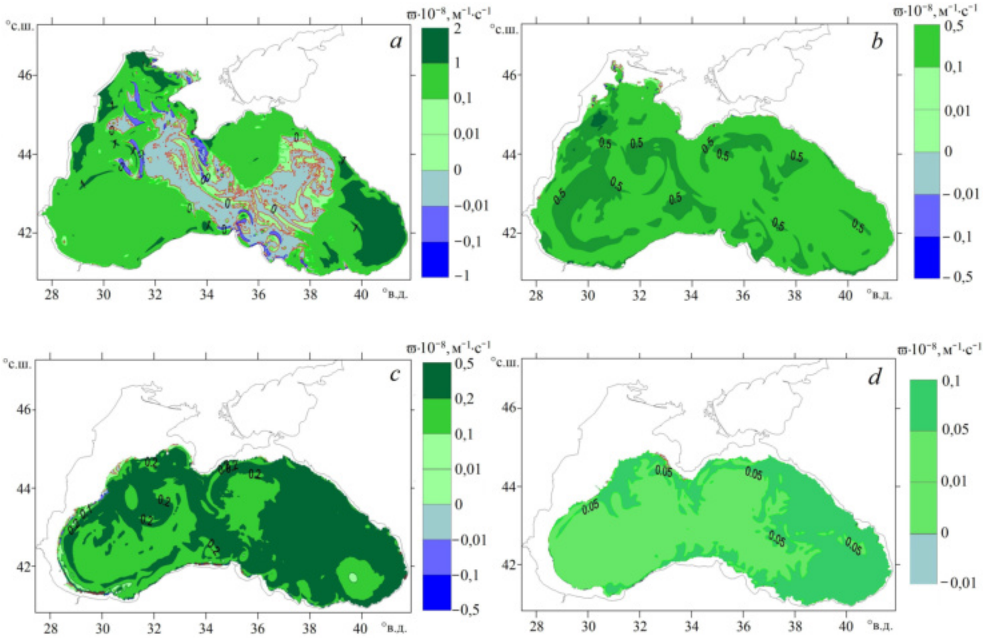


**Р и с. 3.** *PV* на горизонтах 3,75 (*a*), 35 (*b*), 106,25 (*c*) и 350 м (*d*) на 1 февраля 2011 г.
**F i g. 3.** *PV* at horizons 3.75 (*a*), 35 (*b*), 106.25 (*c*) and 350 m (*d*) on February 1, 2011

В области Севастопольского и юго-западного вихря экстремальных значений $\varpi$ не наблюдается. Объясняется это тем, что $\varpi$ является скалярной величиной, равной произведению градиента плотности и абсолютного вихря скорости, и поэтому большая его величина не означает обязательного увеличения завихренности и, более того, его знак не определяет знак вращения вихря [2]. Ниже верхнего 50-метрового слоя наибольшие значения $\varpi$ наблюдаются в прибрежной полосе (рис. 3, *c*, *d*). Локальные максимумы сосредоточены в относительно малых зонах (~ 10 км), которые отчетливо проявляются на глубине 100 м (рис. 3, *c*). В центральной части моря структура *PV* довольно однородна по пространству.

Показательной иллюстрацией для анализа *PV* является его расчет для летнего периода, когда циркуляция носит менее регулярный характер и ее вихревая структура выражена более ярко (см. рис. 2, *b*). Две особенности проявляются в структуре потенциальной завихренности в августе 2011 г. Полоса малых значений $\varpi$ в верхнем слое (рис. 4, *a*, *b*) соответствует области наибольшего перемешивания по вертикали поля плотности, то есть значение $\delta_z\bar{\rho}^{xy}$ очень мало – на два – три порядка меньше, чем вертикальные градиенты плотности окружающей воды. Вторая особенность заключается в однородной структуре и малых значениях *PV* в областях, примерно соответствующих ядрам юго-восточного антициклона, юго-западного и восточного круговоротов. Эти особенности также определяются структурой $\delta_z\bar{\rho}^{xy}$, которая незначительно меняется по пространству. Такой вид потенциальной завихренности в центральных частях круговоротов согласуется с выводами работы

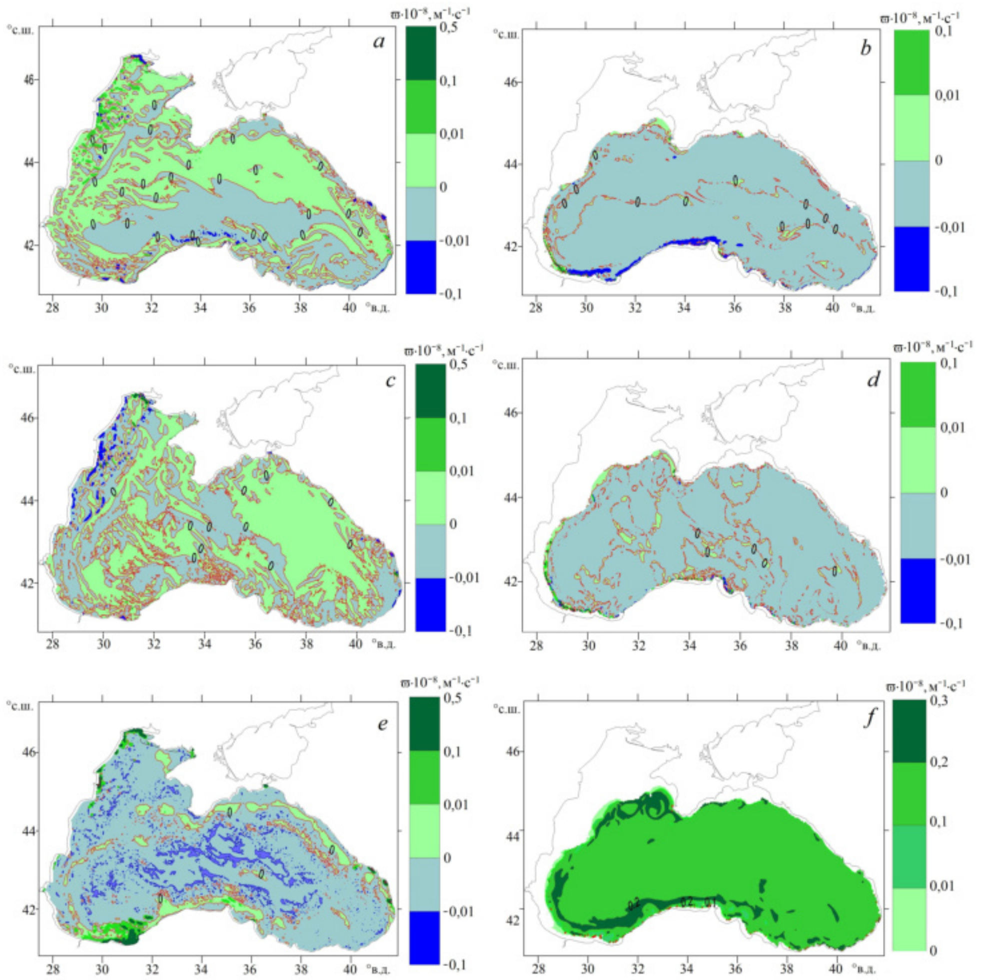
[4], в которой *PV*, восстановленный по данным наблюдений, в области Лофотенского круговорота имеет аналогичную структуру. На нижних горизонтах (рис. 4, *c*, *d*) вдоль границы области вследствие перепадов в рельефе дна имеет место узкая полоса неоднородных значений $\delta_z \overline{\rho}^{xy}$, в центральной части наблюдается малая пространственная изменчивость этой величины.




**Р и с. 4.** *PV* на горизонтах 3,75 (*a*), 35 (*b*), 106,25 (*c*) и 350 м (*d*) на 1 августа 2011 г.
**F i g. 4.** *PV* at horizons 3.75 (*a*), 35 (*b*), 106.25 (*c*) and 350 m (*d*) on August 1, 2011

Основной вклад в структуру вихря, как правило, вносит составляющая $\varpi^z$ [4], величина которой определяется квазигеострофическим характером движения и вертикальной стратификацией морской воды. В областях, где имеет место вток пресных (устья рек) или соленых (проливы) вод моря, преобладающее значение могут иметь горизонтальные составляющие потенциальной завихренности. В качестве примера на рис. 5 приведены значения $\varpi^x$, $\varpi^y$, $\varpi^z$ на горизонтах 3,75 и 106,25 м.

Сопоставление рис. 5, *a*, *c*, *e* и 3, *a* показывает, что горизонтальная составляющая $\varpi^x$ (рис. 5, *a*) вносит основной вклад в зоне втока пресных вод Дуная в северо-западной части моря, в остальной области – структуру вихря определяет $\varpi^z$ (рис. 5, *e*).




**Р и с. 5.** Составляющие *PV*: $\varpi^x$ на горизонтах 3,75 (*a*), 106,25 м (*b*), $\varpi^y$ на горизонтах 3,75 (*c*), 106,25 м (*d*), $\varpi^z$ на горизонтах 3 (*e*), 106,25 м (*f*) на 1 февраля 2011 г.

**F i g. 5.** *PV* components: $\varpi^x$ at horizons 3.75 (*a*) and 106.25 m (*b*); $\varpi^y$ at horizons 3.75 (*c*) and 106.25 m (*d*); $\varpi^z$ at horizons 3 (*e*) and 106.25 m (*f*) on February 1, 2011

На горизонте 106,25 м (рис. 5, *b*, *d*, *f*) вертикальная составляющая на порядок больше $\varpi^x$ (рис. 5, *b*), $\varpi^y$ (рис. 5, *d*), поэтому она (рис. 5, *f*) довольно точно определяет вид потенциальной завихренности на горизонте 106,25 м (см. рис. 3, *c*).

Прямыми вычислениями устанавливается, что в верхнем слое моря вид составляющей $\varpi^z$ качественно соответствует $\delta_z \overline{\rho}^{xy}$, но она по абсолютной величине на несколько порядков меньше, чем $\overline{\xi^z}^z$. В свою очередь структура абсолютного вихря довольно однородна и положительна, поэтому при умножении $\delta_z \overline{\rho}^{xy}$ на $\overline{\xi^z}^z$ структуру потенциальной завихренности характеризует $\delta_z \overline{\rho}^{xy}$, а ее количественное значение зависит от $\overline{\xi^z}^z$. Величина $\xi^z$ определяется двумя слагаемыми – относительной и планетарной завихренностью. Если оценивать вклад $f^z$ в абсолютный вихрь, то $f^z$ сравнимо по величине с относительным вихрем и увеличивает значения $\xi^r$. По величине $\xi^z$ в среднем больше на два порядка, чем $\delta_z \overline{\rho}^{xy}$. В этот период года в результате зимней конвекции сомножитель, обусловленный градиентом плотности по вертикали, в верхнем слое моря мал, за исключением области стока рек, где его величина может быть значима.

На горизонте 106,25 м (рис. 5, *f*) оба сомножителя положительные и $\overline{\xi^z}^z$ в среднем меньше на несколько порядков. Изменчивость $PV$ наблюдается во вдольбереговой полосе, в центральной части моря $PV$ однородна. Отметим, что, во-первых, на нижних горизонтах (приблизительно ниже глубины 50 м) относительный вихрь по абсолютной величине на порядок меньше $f^z$. Во-вторых, так как интеграл по горизонтальной поверхности от $\xi^r$, отличие от нуля которого определяется стоком рек и обменом воды через проливы, мал, то в структуре $\xi^r$ имеют место зоны циклонического и антициклонического вращения вод. В то же время планетарная завихренность положительная и больше $\xi^r$, и поэтому именно она определяет количественные значения $PV$ с поправками, вносимыми относительным вихрем, на качественную структуру потенциальной завихренности на глубинных горизонтах.

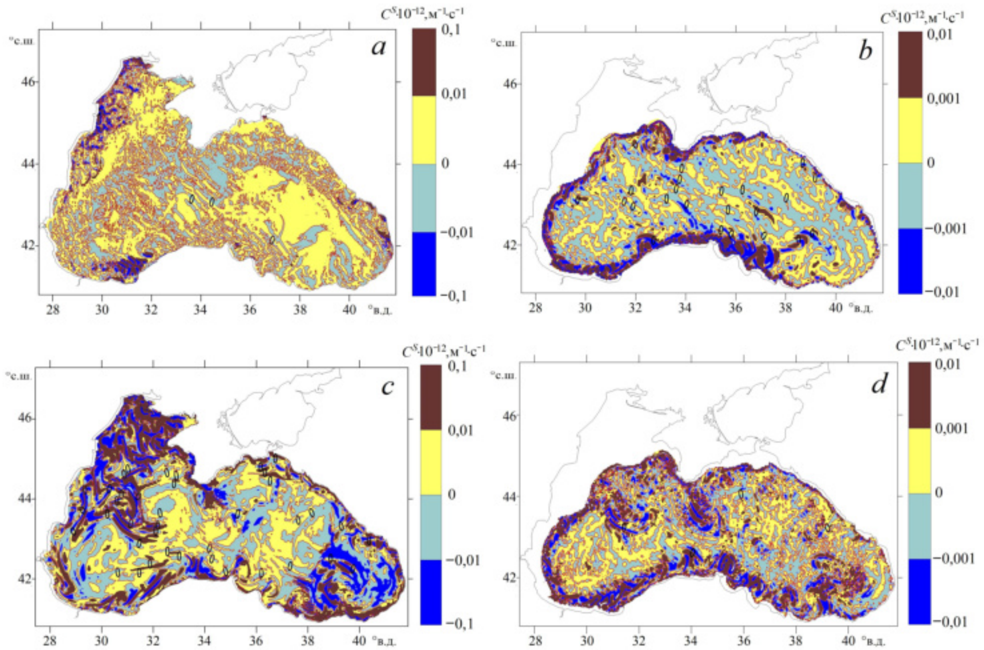
Рассмотрим вклад нелинейных сил в эволюцию $\varpi$. Введем обозначения

$$C^x = \delta_x(\Upsilon^x \overline{\rho}^{yz}) + \delta_x(\xi^x R^x) = C_1^x + C_2^x, \quad C^y = \delta_y(\Upsilon^y \overline{\rho}^{xz}) + \delta_y(\xi^y R^y) = C_1^y + C_2^y,$$

$$C^z = \delta_z(\Upsilon^z \overline{\rho}^{xy}) + \delta_z(\xi^z R^z) = C_1^z + C_2^z, \qquad C^S = C^x + C^y + C^z.$$

Основной вклад во временную эволюцию $PV$ нелинейные силы в верхнем слое вносят в прибрежной области моря (рис. 6, *a*, *b*). Их вклад для различных областей неодинаков: больше в северо-западной части (рис. 6, *a*) и вдоль Анатолийского побережья (рис. 6, *b*). Оценки показывают, что их количественные различия по абсолютной величине между центральной частью моря и его периферией составляют несколько порядков. На нижних горизонтах (рис. 6, *c*, *d*) наибольшие значения нелинейных слагаемых в уравнении Эртеля концентрируются в виде узкой вдольбереговой полосы с более ярко выраженным характером у южного берега моря.

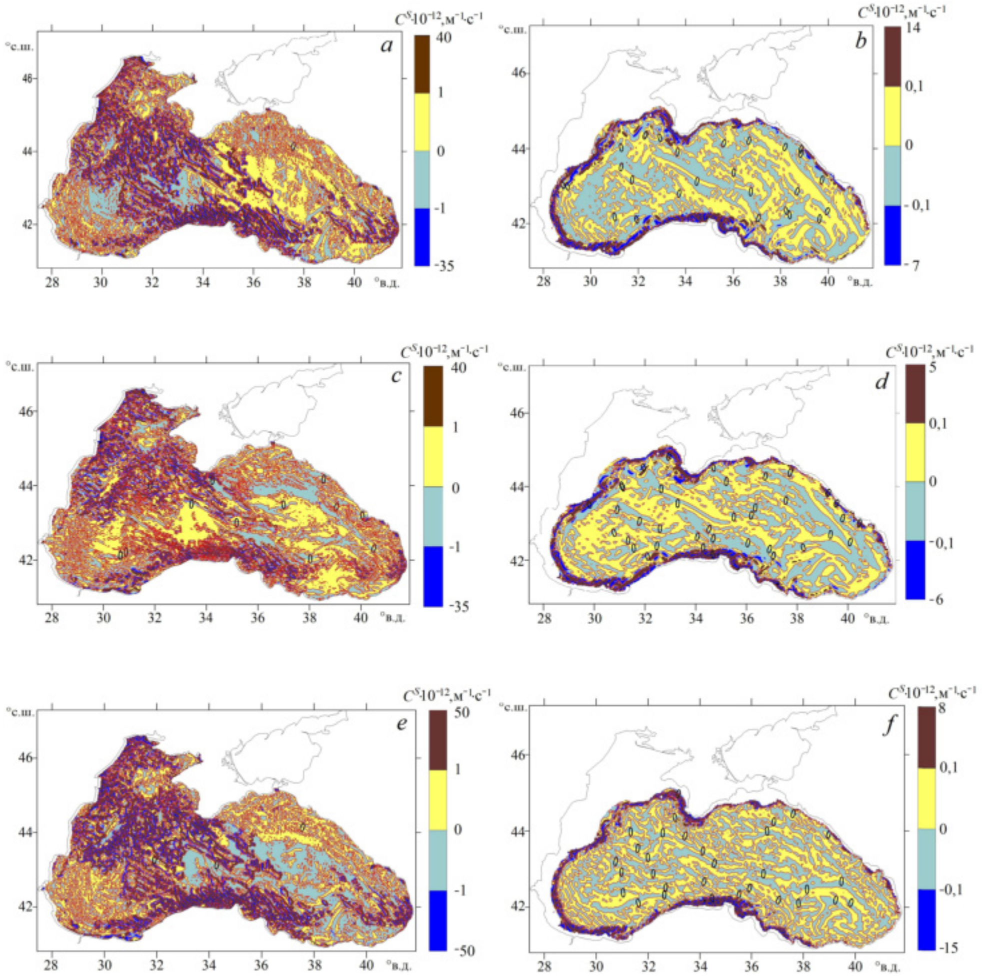
Рассмотрим вклад слагаемых отдельных слагаемых $C^x$, $C^y$, $C^z$ в $C^S$.




**Р и с. 6.** $C^S$ на 1 февраля 2011 г. на горизонтах 3 (*a*), 106.25 м (*b*) и на 1 августа 2011 г. 3,75 (*c*), 106.25 м (*d*)

**F i g. 6.** $C^S$ at horizons 3 (*a*) and 106.25 m (*b*) on February 1, 2011, and at horizons 3.75 (*c*) and 106.25 m (*d*) on August 1, 2011

В верхнем слое (рис. 7, *a*, *c*, *e*) зоны больших по абсолютной величине значений $C^x, C^y, C^z$ имеют сходную структуру. В юго-восточном углу бассейна и в северо-восточной части моря, ограниченной координатами 42°–44° с. ш., 37°–39° в. д., наблюдаются области значений $C^x, C^y, C^z$, близких к нулю. Вычисленные средние и максимальные значения $C^x, C^y, C^z$ (рис. 7, *a*, *c*, *e*) в сопоставлении с $C^S$ (рис. 6, *a*) свидетельствуют о том, что экстремальные значения различаются на порядок, средние – на два порядка. Это означает, что $C^x, C^y, C^z$ взаимно компенсируются и в результате получается структура, представленная на рис. 6, *a*. Прямыми вычислениями устанавливается, что основной вклад в нелинейные слагаемые $C^x, C^y, C^z$ в верхнем слое дают $C_1^x, C_1^y, C_1^z$ соответственно, то есть $\delta_x(\Upsilon^x \overline{\rho}^{yz}), \delta_y(\Upsilon^y \overline{\rho}^{xz}), \delta_z(\Upsilon^z \overline{\rho}^{xy})$. Оценка порядка величин показывает, что $C^S$ по величине в среднем на два порядка меньше каждого из слагаемых $C^x, C^y, C^z$.




**Р и с. 7.** Составляющие $C^S$: $C^x$ на горизонтах 3,75 м (*a*), 106.25 м (*b*), $C^y$ на горизонтах 3.75 м (*c*), 106.25 м (*d*), $C^z$ на горизонтах 3,75 м (*e*), 106,25 м (*f*) на 1 февраля 2011 г.

**F i g. 7.** Components: at horizons 3.75 (*a*) and 106.25 m (*b*), at horizons 3.75 (*c*) and 106.25 m (*d*), and at horizons 3.75 (*e*) and 106.25 m (*f*) on February 1, 2011

Аналогичная ситуация имеет место и для рассчитанных полей на 1 августа 2011 г.

## Заключение

Для системы дискретных уравнений динамики моря в приближении гидростатики и с учетом вязкости, диффузии, втока рек, водообмена через проливы и атмосферного воздействия как ее следствие получено конечно-разностное уравнение потенциальной завихренности стратифицированной несжимаемой жидкости. Так же, как и в более общем случае, оно имеет дивергентный вид и отличается от своего дифференциального аналога. Поскольку используется нелинейное состояние для расчета плотности, полученное дискретное уравнение для $PV$ не является точным следствием конечно-разностных уравнений модели. Для оценки влияния нелинейного характера уравнения состояния на полученные результаты необходимы дополнительные исследования.

Анализ величины самой потенциальной завихренности подтвердил полученные ранее результаты, что ее вертикальная компонента является основной. Горизонтальные составляющие вносят заметный вклад в областях стока рек, водообмена через проливы и в зонах резких градиентов поля плотности. Качественный вид *PV* в верхнем слое моря имеет аналогичные особенности, зафиксированные по данным наблюдений. Однородная структура для центральной части вихревых образований и интенсивный характер в области больших поперечных градиентов в поле плотности во фронтальных зонах определяют структуру потенциальной завихренности. В глубинных слоях моря ее наибольшие значения концентрируются в виде узкой вдольбереговой полосы, в остальной части моря значения *PV* малы.

Расчет составляющих $\varpi^z$ в зимний период на верхних горизонтах показал, что в верхних слоях моря, за исключением прибрежных зон стока рек, определяется $\xi^z$, который является суммой относительного вихря и $f^z$ (величины примерно одного порядка). В нижних слоях моря количественные значения *PV* в большей степени определяет планетарная завихренность, а ее качественные особенности обусловлены структурой относительного вихря.

Из анализа нелинейных слагаемых в уравнении *PV* следует, что в верхнем слое моря основной вклад в адвекцию потенциальной завихренности $C^S$ вносится в северо-западной части и вдоль Анатолийского побережья. На нижних горизонтах наибольшие значения $C^S$ наблюдаются вдоль береговой полосы с более ярко выраженным характером у южного берега моря, что соответствует структуре *PV*.

Расчет слагаемых $C^x, C^y, C^z$ для зимнего и летнего периодов позволил установить два факта. Во-первых, величина каждого $C^x, C^y, C^z$ определяется $\delta_x(\Upsilon^x \overline{\rho}^{yz})$, $\delta_y(\Upsilon^y \overline{\rho}^{xz})$, $\delta_z(\Upsilon^z \overline{\rho}^{xy})$, то есть дивергенцией от произведения нелинейных слагаемых в уравнениях движения и плотности. Во-вторых, $C^S$ на полтора – два порядка по величине меньше, чем каждая из составляющих $C^x, C^y, C^z$, то есть локально полная сумма вертикальной и горизонтальной адвекции потенциальной завихренности на два порядка меньше, чем каждая по отдельности. Возможное объяснение такого результата заключается в следующем. Предположим, что конечно-разностные аналоги нелинейных слагаемых в уравнении *PV* близки к дифференциальному виду $\mathrm{div}(\vec{U}\omega)$. Тогда, представляя $\omega = \omega^S + \varpi^*$, где $\omega^S$ – величина, осредненная по пространству, в каждой точке области имеем $\mathrm{div}(\vec{U}\omega^S) = \omega^S \mathrm{div}(\vec{U}) = 0$ или близко к нулю. Поскольку изменчивость во времени потенциальной завихренности в преобладающей степени зависит от $\mathrm{div}(\vec{U}\omega^*)$ и происходит взаимная компенсация нелинейных составляющих по $x$, $y$, $z$ при расчете адвекции *PV*.

Насколько полученные результаты имеют общий характер – вопрос дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ertel H.* Ein neuer hydrodynamischer Wirbelsatz // Meteorologische Zeitschrift. 1942. Vol. 59, no. 9. S. 277–281.
2. *Müller P.* Ertel's potential vorticity theorem in physical oceanography // Reviews of Geophysics. 1995. Vol. 33, iss. 1. P. 67–97. https://doi.org/10.1029/94rg03215
3. *Kurgansky M. V., Pisnichenko I. A.* Modified Ertel’s Potential Vorticity as a Climate Variable // Journal of the Atmospheric Sciences. 2000. Vol. 57, iss. 6. P. 822–835. https://doi.org/10.1175/1520-0469(2000)057<0822:MESPVA>2.0.CO;2
4. *Жмур В. В., Новоселова Е. В., Белоненко Т. В.* Потенциальная завихренность в океане: подходы Эртеля и Россби с оценками для Лофотенского вихря // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2021. Т. 57, № 6. С. 721–732. EDN SRKASA. https://doi.org/10.31857/S0002351521050151
5. *Rossby C.-G.* Planetary flow patterns in the atmosphere // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1940. Vol. 66, iss. S1. P. 68–87. https://doi.org/10.1002/j.1477-870X.1940.tb00130.x
6. *Hoskins B. J., McIntyre M. E., Robertson A. W.* On the use and significance of isentropic potential vorticity maps // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. 1985. Vol. 111, iss. 470. P. 877–946. https://doi.org/10.1002/qj.49711147002
7. *Демышев С. Г.* Конечно-разностная аппроксимация уравнения потенциальной завихренности для стратифицированной несжимаемой жидкости и пример его использования при расчете циркуляции Черного моря. Часть I. Дифференциально-разностное уравнение потенциальной завихренности идеальной жидкости // Морской гидрофизический журнал. 2024. Т. 40, № 2. С. 165–179. EDN BCKKBN.
7. *Mellor G. L., Yamada T.* Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Reviews of Geophysics. 1982. Vol. 20, iss. 4. P. 851–875. https://doi.org/10.1029/RG020i004p00851
9. *Arakawa A., Lamb V. R.* A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations // Monthly Weather Review. 1981. Vol. 109, iss. 1. P. 18–36. https://doi.org/10.1175/1520-0493(1981)109<0018:APEAEC>2.0.CO;2
10. *Демышев С. Г.* Численные эксперименты по сопоставлению двух конечно-разностных схем для уравнений движения в дискретной модели гидродинамики Черного моря // Морской гидрофизический журнал. 2005. № 5. С. 47–59.
11. Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. IV. Черное море. Выпуск 1. Гидрометеорологические условия. С.-П. : Гидрометеоиздат, 1991. 428 с.
12. The regional weather forecasting system SKIRON: an overview / G. Kallos [et al.] // Proceedings of the Symposium on Regional Weather Prediction on Parallel Computer Environments, Athens, Greece, 15–17 October 1997. Athens : University of Athens, 1997. P. 109–122.
13. *Demyshev S. G., Dymova O. A.* Numerical analysis of the Black Sea currents and mesoscale eddies in 2006 and 2011 // Ocean Dynamics. 2018. Vol. 68, iss. 10. P. 1335–1352. https://doi.org/10.1007/s10236-018-1200-6

*Об авторе:*

**Демышев Сергей Германович**, зав. отделом теории волн, главный научный сотрудник, Морской гидрофизический институт РАН (299011, Россия, г. Севастополь, ул. Капитанская, 2), доктор физико-математических наук, **Scopus Author ID: 6603919865**, **SPIN-код: 1848-2350**, **IstinaResearcherID (IRID): 17369115**, **ResearcherID: C-1729-2016**, **ORCID ID: 0000-0002-5405-2282**, demyshev@gmail.com