

СВЯЗАННАЯ ГЕНЕРАЦИЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ТРОПОСФЕРНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

© 2023 г. С. П. Кшевецкий^{1, 3, 4*}, Ю. А. Курдяева^{2, 3}, Н. М. Гаврилов³

¹Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград, Россия

²Калининградский филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова Российской академии наук, Калининград, Россия

³Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

⁴Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: SPKshev@gmail.com

Поступила в редакцию 31.05.2023;

после доработки 17.06.2023;

принята в печать 20.06.2023

Теоретически исследуются генерация акустико-гравитационных волн метеорологическими источниками тепла в тропосфере и распространение этих волн до высот верхней атмосферы. Выведены уравнения, описывающие по отдельности генерацию и распространение акустической и гравитационной волн локальным источником тепла. Тепловой источник волн представлен в виде парциальных источников гравитационных и акустических волн. Получена оценка мощности этих парциальных источников и показано, что их мощности различаются примерно вдвое, независимо от формы, размеров и частоты теплового источника. Показано, что генерация гравитационных волн не может происходить без соответствующей генерации акустических: эти волны генерируются только совместно. Разделение задачи о волнах от источника тепла на две отдельные (от гравитационного и акустического источников) проиллюстрировано прямым моделированием этих волн. Обсуждается применение полученных результатов к проблеме параметризации акустико-гравитационных волн в моделях общей циркуляции и климатических моделях.

Ключевые слова: внутренние гравитационные волны, акустические волны, верхняя атмосфера, тропосфера, метеорология.

DOI: 10.31857/S0207401X23100096, **EDN:** PGOETF

1. ВВЕДЕНИЕ

Современные исследования [1–9] вариаций волн и параметров ионосферы показывают, что атмосферные волны, генерируемые различными тропосферными источниками, достигая высот верхней атмосферы, могут отдавать свой импульс и энергию атмосферному газу. Они существенно влияют на динамические процессы в верхних слоях атмосферы и ионосферы. Диссипирующие волны могут создавать струйные течения, а также влиять на тепловой баланс верхних слоев атмосферы [5, 10, 11].

Процессы выделения/поглощения тепла при фазовых переходах воды в атмосфере при образовании и эволюции облаков и других метеорологических явлениях являются мощными энергетическими источниками акустико-гравитационных волн (АГВ). Нагрев атмосферного газа при конвективном тепловыделении может вызывать движение атмосферного газа с локальным нарушением условия статической устойчивости атмо-

сферы и последующим развитием волновых процессов вследствие развития неустойчивости.

Несмотря на то, что генерация волн тропосферными тепловыми источниками является процессом обычным, элементарная физика процесса генерации волн тепловым источником все еще недостаточно изучена. Такой процесс имеет некоторые особенности, которые могут быть критическими для понимания механизмов формирования волновой картины в атмосфере и проявлении различных эффектов. Особенности генерации волн тепловыми источниками важно также учитывать для правильной интерпретации экспериментальных наблюдений волн в атмосфере и ионосфере и при численном моделировании.

Численное моделирование АГВ является сложной задачей, с которой, однако, неплохо справляются современные модели атмосферных нестационарных процессов высокого разрешения, например, AtmoSym [12]. Недостатком таких моделей является вычислительная трудоемкость.

Для численного исследования глобальных атмосферных процессов обычно применяют крупномасштабные модели, как менее требовательные к вычислительным ресурсам. В глобальных численных моделях атмосферы влияние внутренних гравитационных волн (ВГВ) на верхние слои атмосферы учитывается путем параметризации волновых эффектов. Так, например, глобальная модель WACCM (Whole Atmosphere Community Climate Model) [13] включает в себя параметризацию стационарных орографических внутренних гравитационных волн и параметризацию фронтальных и конвективных гравитационных волн [14]. Однако эта параметризация содержит неточности, связанные с отсутствием детального понимания волн, генерируемых фронтальными системами, и воздействия этих волн на атмосферу. Модель SMLTM (Spectral mesosphere/lower thermosphere model) [15] учитывает сезонные колебания фоновой температуры и содержит дискретную многокомпонентную параметризацию гравитационных волн. Авторы работы [16], моделирующие приливные волны, генерируемые в тропосфере и стратосфере с помощью SMLTM, отмечают, что климатологические исследования спектров гравитационных волн дают информацию о сезонных изменениях общего волнового воздействия на атмосферу, но эта информация не может быть напрямую использована в параметризациях дискретного спектра гравитационных волн. Для разработки более эффективных параметризаций действия АГВ в моделях общей циркуляции атмосферы необходимо более глубокое понимание особенностей генерации и распространения этих волн. Теоретическому изучению особенностей генерации акустических и гравитационных волн посвящены, в частности, работы [17–19].

В данной работе выполнено аналитическое исследование общей задачи о генерации АГВ локальным источником тепла на тропосферных высотах. Теоретически показано, что генерация внутренних гравитационных волн источником тепла не может происходить без генерации акустических волн (АВ) тем же источником. Для лучшего понимания процесса генерации волн исходная задача о генерации волн тепловым источником разделена на две — о генерации гравитационных волн и о генерации акустических волн по отдельности. По заданному произвольному источнику тепла вычислены парциальные источники акустических и гравитационных волн. Показано, что мощности этих парциальных источников имеют один порядок величины, независимо от частоты и формы источника тепла. С целью исследования амплитуд и энергий, генерируемых акустических и гравитационных волн, выполнено численное моделирование генерации и распространения этих волн по отдельности.

Показано, что парциальные источники акустических и гравитационных волн не являются чисто тепловыми, а содержат также источники

массы. Последние для акустических и гравитационных волн имеют противоположные знаки и в сумме равны нулю, т.е. закон сохранения массы выполняется. Но эти источники массы простираются до больших высот, несмотря на то, что тепловой источник локализован на тропосферных высотах. То есть, парциальные источники акустических и гравитационных волн не являются локализованными, простираются до больших высот, что создает некоторые физические эффекты, интересные для изучения.

Полученные в расчетах формулы для парциальных источников акустических и гравитационных волн, генерируемых тропосферными тепловыми источниками, позволяют оценить эффективность генерации волн каждого типа по отдельности. Анализ формул показывает, что эти волны всегда возникают вместе и параметры их взаимосвязаны.

2. ГЕНЕРАЦИЯ АГВ ТЕПЛОВЫМИ ИСТОЧНИКАМИ

Математическая постановка задачи о распространении АГВ от тепловых источников в тропосфере

Рассмотрим вопрос о генерации АВ и ВГВ тропосферными источниками тепла. В теоретическом исследовании мы будем использовать двумерные гидродинамические уравнения, описывающие распространение волн от источника тепла. Двумерные формулы более компактны, но это упрощение не оказывает существенного влияния на качественные результаты.

В нижней атмосфере амплитуды волн обычно малы из-за высокой плотности газа, поэтому можно использовать уравнения линейной волновой теории [20] и записать рассматриваемую систему в виде

$$\begin{aligned}(\rho_0 \Psi)_t + (\rho_0 U)_x + (\rho_0 W)_z &= 0, \\ (\rho_0 U)_t + \rho_0 g H (\Psi + \Phi)_x &= 0, \\ (\rho_0 W)_t + (\rho_0 g H (\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi &= 0, \\ (\rho_0 \Phi)_t + (\gamma - 1)((\rho_0 U)_x + (\rho_0 W)_z) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 W &= \\ &= \rho_0 Q_\Phi(x, z, t),\end{aligned}\quad (1)$$

где $\Psi = \frac{\rho(x, z, t) - \rho_0(z)}{\rho_0(z)}$ и $\Phi = \frac{T(x, z, t) - T_0(z)}{T_0(z)}$ — относительные отклонения плотности и температуры от фоновой плотности атмосферы $\rho_0(z) = \frac{\rho_0(z)}{H(z)} \exp\left(\int_0^z \frac{dz}{H(z)}\right)$ и фоновой температуры $T_0(z)$, соответственно; $H(z) = \frac{RT_0(z)}{g\mu(z)}$ — высота

однородной атмосферы, характеризующая масштаб стратификации плотности (R – универсальная газовая постоянная, $\mu(z)$ – молекулярный вес); γ – показатель адиабаты; g – ускорение свободного падения; U и W – компоненты массовой скорости газа вдоль горизонтальной оси x и вертикальной оси z ; $\alpha = \left(\gamma - 1 + \gamma \frac{dH(z)}{dz} \right)$. В правую часть последнего уравнения системы (1) входит величина, связанная со скоростью нагрева/охлаждения, $Q_\Phi(x, z, t)$. Эта величина (далее – источник) может учитывать нагрев и охлаждение газа вследствие фазовых переходов воды в атмосфере.

Дополним систему уравнений (1) стандартным нижним граничным условием на поверхности Земли:

$$W(x, z = 0, t) = 0. \quad (2)$$

Введем функцию-столбец

$$\lambda(x, z, t) = \begin{pmatrix} \Psi(x, z, t) \\ U(x, z, t) \\ W(x, z, t) \\ \Phi(x, z, t) \end{pmatrix}.$$

Для удобства запишем систему уравнений (1) в виде одного матричного уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial \lambda}{\partial t} + \rho_0 \hat{L} \lambda = \rho_0(z) Q(x, z, t), \quad (3)$$

где

$$\hat{L} \lambda = \begin{pmatrix} (\rho_0 U)_x + (\rho_0 W)_z \\ \rho_0 g H (\Psi + \Phi)_x \\ (\rho_0 g H (\Psi + \Phi))_z + \rho_0 g \Psi \\ (\gamma - 1)((\rho_0 U)_x + (\rho_0 W)_z) + \frac{\alpha}{H} \rho_0 W \end{pmatrix},$$

$$Q(x, z, t) = \begin{pmatrix} Q_\Psi \\ Q_U \\ Q_W \\ Q_\Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_\Phi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотрим λ просто как функцию пространственных переменных x и z . Введем скалярное произведение двух произвольных функций-столбцов:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ U_1 \\ W_1 \\ \Phi_1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} \Psi_2 \\ U_2 \\ W_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix},$$

которое определяется формулой

$$\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho_0(z) (U_1 U_2 + W_1 W_2 + g H(z) \times \\ \times \frac{(\Psi_1 + \Phi_1)(\Psi_2 + \Phi_2)}{\gamma}) dz dx + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \rho_0(z) g H(z) \times \\ \times \frac{(\Phi_1 - (\gamma - 1) \Psi_1)(\Phi_2 - (\gamma - 1) \Psi_2)}{\gamma \alpha(z)} dz dx.$$

Обозначим гильбертово функциональное пространство, порожденное скалярным произведением (5), как Σ . Все элементы гильбертова пространства Σ , в силу определения этого функционального пространства, удовлетворяют условию $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle < \infty$ [21]. Соответственно, $\|\lambda\| = \langle \lambda, \lambda \rangle^{1/2}$.

Рассмотрим столбцы-функции $\lambda(x, z, t)$ и введем норму

$$\|\lambda\|_M = \left(\int_0^{\infty} \left(\|\lambda\|^2 + \left\| \frac{\partial \lambda}{\partial t} \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\rho_0(z)} \hat{L} \lambda \right\|^2 \right) dt \right)^{1/2}.$$

Пусть M – Банахово пространство [21] столбцов-функций $\lambda(x, z, t)$ с нормой $\|\lambda\|_M$, удовлетворяющих нижнему граничному условию (2). Задача о генерации и распространении АГВ в атмосфере математически ставится следующим образом: в Банаховом пространстве M ищется элемент $\lambda(x, z, t)$, удовлетворяющий в слабом смысле уравнению (3).

Понятие слабого решения изложено, например, в работе [21]. Для данной задачи слабое решение определяется следующим образом. Ищется $\lambda(x, z, t) \in M$, удовлетворяющий интегральному соотношению

$$\langle \lambda_s(x, z, t = 0), \lambda(x, z, t = 0) \rangle + \\ + \int_0^{\infty} \left\langle \lambda(z, z, t), \left(\frac{\partial \lambda_s(x, z, t)}{\partial t} + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{L} \lambda_s(x, z, t) + Q(x, z, t) \right) \right\rangle dt = 0 \quad (6)$$

для любой дифференцируемой по всем переменным функции-столбца $\lambda_s(x, z, t)$, удовлетворяющей граничному условию (2) и обращающейся в ноль при $t \rightarrow \infty$ и отличной от нуля только в конечной области пространства, зависящей от $\lambda_s(x, z, t)$.

Поскольку мы интересуемся генерацией волн, то начальное условие возьмем в виде $\lambda(x, z, t = 0) = 0$; это условие соответствует отсутствию волн в начальный момент времени. Детали исследования гидродинамических уравнений для стратифицированного газа, доказательство существования решения и численные методы решения имеются в работе [20] для случая конечной области атмосферы и без внешних источников. Результаты этой работы легко обобщаются на случай полубеско-

нечной атмосферы, и с внешними источниками. Решения уравнения (1) можно также рассматривать как параметрически зависящую от времени t кривую в гильбертовом пространстве Σ . Известное выражение для волновой энергии [22] можно записать в удобном виде $E = \frac{1}{2} \langle \lambda, \lambda \rangle$.

Условие $E(t) = \frac{1}{2} \langle \lambda(t), \lambda(t) \rangle < \infty$ будет выполнять роль верхнего граничного условия в поставленной полубесконечной задаче о генерации и распространения волн. Нижнее граничное условие содержится в определении Банахова пространства M , в котором ищется решение.

Случай бесконечной изотермической атмосферы. Аналитическое решение задачи о генерации и распространении АГВ

Рассмотрим случай бесконечной изотермической атмосферы, т.е. $H = \text{const}$ и $\rho_0(z) = \rho_0(0) \times \exp(-z/H)$. В рамках такой модели было впервые выведено дисперсионное соотношение для АГВ и возникли основные понятия об атмосферных акустических и гравитационных волнах. Поэтому весь анализ можно выполнить строго.

Задача о распространении волн в бесконечной атмосфере ставится аналогично задаче о распространении волн в полубесконечной атмосфере из предыдущего раздела. Только в выражении (5) интеграл по переменной z берется в пределах от $(-\infty)$ до ∞ и нижнее граничное условие (2) в этом случае не требуется, поскольку условие $E(t) = \frac{1}{2} \langle \lambda, \lambda \rangle < \infty$ выполняет роль верхнего и нижнего граничных условий, а также роль граничных условий на бесконечности по горизонтали.

В случае бесконечной изотермической атмосферы можно выполнить обобщенное преобразование Фурье по пространственным переменным и перейти от $\lambda(x, z, t)$ к фурье-образу $\hat{\lambda}(k_x, k_z, t)$, определяемому формулой

$$\hat{\lambda}(k_x, k_z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(x, z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} e^{-z/2H} dx dz, \quad (7)$$

где k_x, k_z — горизонтальная и вертикальная компоненты волнового вектора k соответственно.

Тогда уравнение (3) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$i \frac{d\hat{\lambda}(k_x, k_z, t)}{dt} + \hat{L}(k_x, k_z) \hat{\lambda}(k_x, k_z, t) = \tilde{Q}(k_x, k_z, t). \quad (8)$$

Уравнения (8) эквивалентны уравнениям (3) и описывают эволюцию волн в k -пространстве или k -представлении. Здесь $\hat{L}(k_x, k_z)$ — матричный

4×4 оператор, получающийся из выражения (4) при фурье-преобразовании. В правые части уравнений (8) входит величина, $\tilde{Q}(k_x, k_z, t)$, которая представляет собой фурье-образ источника в выражении (3) и определяется формулой

$$\tilde{Q}(k_x, k_z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q(x, z, t) e^{i(k_x x + k_z z)} e^{-z/2H} dx dz, \quad (9)$$

аналогичной формуле (7).

Изучим задачу на собственные значения

$$\hat{L}(k_x, k_z) \Pi = \omega \Pi \quad (10)$$

для матрицы $\hat{L}(k_x, k_z)$. Собственные значения ω матрицы $\hat{L}(k_x, k_z)$ действительны, различны и совпадают с корнями $\pm \omega_A, \pm \omega_G$ дисперсионного соотношения для АГВ [22, 23]. Нижние индексы “A”, “G” отмечают решения для акустических и внутренних гравитационных волн.

Собственные векторы $\Pi_A^\pm, \Pi_G^\pm$ матрицы $\hat{L}(k_x, k_z)$ линейно независимы и образуют базис в пространстве четырехмерных столбцов. Они совпадают с поляризационными соотношениями для акустической и гравитационной волн:

$$\begin{aligned} \Pi_A^\pm &= \begin{pmatrix} a_1(k_x, k_z) \\ \pm a_2(k_x, k_z) \\ \pm a_3(k_x, k_z) \\ a_4(k_x, k_z) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{H}{g} \begin{pmatrix} (-iHK_z + 1)\omega_A^2 - (\gamma - 1)k_x^2 gH \\ \mp \omega_A g k_x H (i\gamma K_z H - 1) \\ \pm \omega_A H (-\omega_A^2 + Hk_x^2 g\gamma) \\ -(\gamma - 1)H (i\omega_A^2 K_z - k_x^2 g) \end{pmatrix}, \\ \Pi_G^\pm &= \begin{pmatrix} b_1(k_x, k_z) \\ \pm b_2(k_x, k_z) \\ \pm b_3(k_x, k_z) \\ b_4(k_x, k_z) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{H}{g} \begin{pmatrix} (-iHK_z + 1)\omega_G^2 - (\gamma - 1)k_x^2 gH \\ \mp \omega_G g k_x H (i\gamma K_z H - 1) \\ \pm \omega_G H (-\omega_G^2 + Hk_x^2 g\gamma) \\ -(\gamma - 1)H (i\omega_G^2 K_z - k_x^2 g) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $K_z = k_z - \frac{i}{2H}$. В соотношениях (11) частоты ω_A, ω_G предполагаются явно выраженными через k_x, k_z , при этом $\omega_A > 0, \omega_G > 0$.

Общее решение системы уравнений (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 \lambda(k_x, k_z, t) &= \hat{\lambda}_A(k_x, k_z, t) + \hat{\lambda}_G(k_x, k_z, t). \\
 \hat{\lambda}_A(k_x, k_z, t) &= A^+(k_x, k_z, t) \Pi_A^+(k_x, k_z) + \\
 &\quad + A^-(k_x, k_z, t) \Pi_A^-(k_x, k_z), \\
 \hat{\lambda}_G(k_x, k_z, t) &= G^+(k_x, k_z, t) \Pi_G^+(k_x, k_z) + \\
 &\quad + G^-(k_x, k_z, t) \Pi_G^-(k_x, k_z).
 \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь функции $A^\pm(k_x, k_z, t)$, $G^\pm(k_x, k_z, t)$ – решения обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dA^\pm(k_x, k_z, t)}{dt} \pm i\omega_A(k_x, k_z) A^\pm(k_x, k_z, t) &= \\
 &= \tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t),
 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dG^\pm(k_x, k_z, t)}{dt} \pm i\omega_G(k_x, k_z) G^\pm(k_x, k_z, t) &= \\
 &= \tilde{Q}_G^\pm(k_x, k_z, t).
 \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку уравнение (13) содержит частоту акустических волн $\omega_A(k_x, k_z)$, но не содержит частоты гравитационных волн, то мы можем интерпретировать выражение (13) как уравнение для акустических волн. Аналогично, уравнение (14) содержит частоту гравитационных волн $\omega_G(k_x, k_z)$, но не содержит частоты акустических волн, и мы можем интерпретировать выражение (14) как уравнение для гравитационных волн.

При выводе уравнений (13) и (14) в их правых частях этих уравнений появляются функции $\tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t)$ и $\tilde{Q}_G^\pm(k_x, k_z, t)$, которые можно рассматривать в качестве источников акустических и гравитационных волн соответственно. Для источников, $\tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t)$ и $\tilde{Q}_G^\pm(k_x, k_z, t)$, АВ и ВГВ волн справедливы следующих выражения:

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{b_4 \tilde{Q}_\Psi - b_1 \tilde{Q}_\Phi}{a_1 b_4 - a_4 b_1} \pm \frac{b_3 \tilde{Q}_U - b_2 \tilde{Q}_W}{a_2 b_3 - a_3 b_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-b_1 \tilde{Q}_\Phi}{a_1 b_4 - a_4 b_1}, \\
 \tilde{Q}_G^\pm(k_x, k_z, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_4 \tilde{Q}_\Psi - a_1 \tilde{Q}_\Phi}{b_1 a_4 - b_4 a_1} \pm \frac{b_3 \tilde{Q}_U - b_2 \tilde{Q}_W}{b_2 a_3 - b_3 a_2} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-a_1 \tilde{Q}_\Phi}{b_1 a_4 - b_4 a_1}.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Решения уравнений (15) имеют вид

$$\begin{aligned}
 A^\pm(k_x, k_z, t) &= \\
 &= \exp(\mp i\omega_A t) \int_0^t \exp(\pm i\omega_A t') \tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t') dt', \\
 G^\pm(k_x, k_z, t) &= \\
 &= \exp(\mp i\omega_G t) \int_0^t \exp(\pm i\omega_G t') \tilde{Q}_G^\pm(k_x, k_z, t') dt'.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Из формул (15) и (16) видно, что источники $\tilde{Q}_A^\pm$ и $\tilde{Q}_G^\pm$ акустических и гравитационных волн, соответственно, одного и того же порядка. Это связано со сходством поляризационных соотношений $\Pi_A^\pm$, $\Pi_G^\pm$ для акустических и гравитационных волн. Этот вывод не зависит от частоты теплового источника $Q_\Phi(x, z, t)$. Далее приводится строгое вычисление мощностей источников акустических и гравитационных волн. Будет показано, что мощности этих источников всегда не сильно различаются.

Из факта, что мощности источников АВ и ВГВ одного порядка, все же не следует, что амплитуды или энергии генерируемых акустических и гравитационных волн являются величинами одного порядка и не зависят от частоты теплового источника. Действительно, если энергия теплового источника $Q_\Phi(x, z, t)$ обусловлена метеорологическими процессами, то он имеет характерное время изменения τ , заведомо большее, чем обратная частота Вейселя–Брента, N , [23], т.е. выполняется соотношение $\tau N \gg 1$. Соответственно, характерное время τ изменения источника заведомо больше частоты акустической отсечки Ω_A и $\tau \Omega_A \gg 1$. Несложно показать, что в этом случае значение интеграла выражении (16) для акустических волн “зарезается” быстро осциллирующим множителем $\exp(\pm i\omega_A t')$ в подынтегральном выражении в формуле (16), и, таким образом, амплитуды генерируемых акустических волн меньше амплитуд гравитационных волн и зависят от частоты источника.

Физически это объясняется следующим образом. Каждая гармоника акустических волн быстро осциллирует со временем и постоянно изменяет знак. Во время положительной фазы волна растет под воздействием источника, но затем наступает отрицательная фаза, и источник работает против волны и гасит ее. В результате акустическая волна значительной амплитуды при медленно изменяющемся источнике образоваться не может.

В качестве простейшего примера рассмотрим выражение для источника в виде

$$\tilde{Q}_A^\pm(k_x, k_z, t) = C \exp(i\sigma_1 t) \exp(-\sigma_2 t),$$

где $\sigma_1 = 1/\tau$ характерная частота источника и σ_2 – скорость затухания источника. Предполагается, что $\sigma_1 \gg \sigma_2$. Вычисляя интеграл в выражении (16), получаем

$$A_A^\pm(k_x, k_z, t) = \frac{-iC}{(\pm\omega_A - \sigma) + i\sigma_2} \left[e^{(i\sigma_1 - i\sigma_2)t} - e^{\mp i\omega_A t} \right]. \quad (17)$$

Из формулы (17) видно, что низкочастотный источник возбуждает как вынужденное возмущение, $\frac{-iC}{(\pm\omega_A - \sigma) + i\sigma_2} e^{(i\sigma_1 - i\sigma_2)t}$, на частоте источни-

ка, так и свободно распространяющуюся акустическую волну, $\frac{-iC}{(\pm\omega_A - \sigma) + i\sigma_2} e^{\mp i\omega_A t}$, остающуюся после выключения источника. Вынужденное возмущение мы относим к акустическим возмущениям потому, что оно удовлетворяет уравнению (13) для АВ. Вынужденное возмущение всегда появляется в паре со свободно распространяющейся акустической волной и исчезает после выключения источника, в то время как свободно распространяющаяся волна остается и после выключения источника.

Мы также видим, что спектр свободно распространяющихся акустических волн, генерируемых низкочастотным источником, широкий. Амплитуда генерируемых гармоник акустических волн медленно затухает с ростом частоты гармоник. Амплитуда генерируемых АВ оценивается как амплитуда источника, $\tilde{Q}_A^{\pm}(k_x, k_z, t')$, умноженная на

$$\left| \frac{1}{\omega_A - \sigma} \right|, \text{ где } \sigma - \text{характерная частота источника,}$$

амплитуда которого равна $\frac{\max |\tilde{Q}_A^{\pm}(k_x, k_z, t')|}{\omega_A + \sigma}$.

Если частота источника попадает в диапазон частот внутренних гравитационных волн, то амплитуда ВГВ, $G^{\pm}(k_x, k_z, t)$, линейно растет со временем, пока источник активен. Реальные метеорологические конвективные источники обычно непериодичны и амплитуда гравитационной волны оценивается как произведение амплитуды источника на время его активности. Тепловые метеорологические источники с частотами ниже частоты Вайсяля–Брента генерируют в основном внутренние гравитационные волны. Но они также обязательно генерируют и инфразвуковые волны, амплитуда которых меньше амплитуды гравитационных волн.

Выше выполнен анализ решения уравнений в k -представлении. Для перехода к обычному, координатному представлению необходимо выполнить обратное преобразование Фурье. Тогда из уравнений (13) и (14) следуют уравнения для акустических и гравитационных волн по отдельности в обычном, координатном представлении, а выражение (16) даст аналитические решения этих уравнений в координатном представлении.

Акустические и внутренние гравитационные волны в терминах поляризационных соотношений

Рассмотрим выражения (12) для акустических и гравитационных волн. В этих выражениях функции $A^+(k_x, k_z, t)$, $A^-(k_x, k_z, t)$, $G^+(k_x, k_z, t)$, $G^-(k_x, k_z, t)$ определяются начальным условием и

внешними источниками. Поляризационные соотношения $\Pi_A^{\pm}$ и $\Pi_G^{\pm}$ показывают, что гидродинамические переменные (колебания температуры, плотности, компоненты гидродинамической скорости) у волны связаны между собой, причем эта связь зависит от типа волны. Из формул (12) следуют уравнения, связывающие гидродинамические переменные в акустической и гравитационной волнах:

$$\begin{cases} a_4(k_x, k_z) \tilde{\Psi}_A(k_x, k_z, t) = a_1(k_x, k_z) \tilde{\Phi}_A(k_x, k_z, t) \\ a_3(k_x, k_z) \tilde{U}_A(k_x, k_z, t) = a_2(k_x, k_z) \tilde{W}_A(k_x, k_z, t), \\ b_4(k_x, k_z) \tilde{\Psi}_G(k_x, k_z, t) = b_1(k_x, k_z) \tilde{\Phi}_G(k_x, k_z, t) \\ b_3(k_x, k_z) \tilde{U}_G(k_x, k_z, t) = b_2(k_x, k_z) \tilde{W}_G(k_x, k_z, t). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь $\tilde{\Psi}_A(k_x, k_z, t)$, $\tilde{\Psi}_G(k_x, k_z, t)$, $\tilde{\Phi}_A(k_x, k_z, t)$, $\tilde{\Phi}_G(k_x, k_z, t)$, $\tilde{U}_A(k_x, k_z, t)$, $\tilde{U}_G(k_x, k_z, t)$, $\tilde{W}_A(k_x, k_z, t)$, $\tilde{W}_G(k_x, k_z, t)$ – фурье-образы функций $\Psi_A(x, z, t)$, $\Psi_G(x, z, t)$, $\Phi_A(x, z, t)$, $\Phi_G(x, z, t)$, $U_A(x, z, t)$, $U_G(x, z, t)$, $W_A(x, z, t)$, $W_G(x, z, t)$, которые можно вычислить. Сумма акустической и гравитационной волн должна давать полную наблюдаемую АГВ, поэтому дополним систему уравнений (18) соответствующими соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_A(k_x, k_z, t) + \tilde{\Psi}_G(k_x, k_z, t) = \tilde{\Psi}(k_x, k_z, t), \\ \tilde{\Phi}_A(k_x, k_z, t) + \tilde{\Phi}_G(k_x, k_z, t) = \tilde{\Phi}(k_x, k_z, t), \\ \tilde{U}_A(k_x, k_z, t) + \tilde{U}_G(k_x, k_z, t) = \tilde{U}(k_x, k_z, t), \\ \tilde{W}_A(k_x, k_z, t) + \tilde{W}_G(k_x, k_z, t) = \tilde{W}(k_x, k_z, t). \end{cases} \quad (19)$$

Система уравнений (18) и (19) вместе дает замкнутую систему уравнений, позволяющую выделить в гидродинамических полях вклад акустических и гравитационных волн по отдельности. Для этого нужно совместно решить уравнения (18), (19).

Производя обратное фурье-преобразование соотношений (18), приходим к уравнениям связи гидродинамических переменных для волн различных типов в обычных, пространственных переменных:

$$\begin{cases} \hat{l}_{4A} \Psi_A(x, z, t) = \hat{l}_{1A} \Phi_A(x, z, t) \\ \hat{l}_{3A} U_A(k_x, k_z, t) = \hat{l}_{2A} W_A(x, z, t), \\ \hat{l}_{4G} \Psi_G(x, z, t) = \hat{l}_{1G} \Phi_G(x, z, t) \\ \hat{l}_{3G} U_G(x, z, t) = \hat{l}_{2G} W_G(x, z, t). \end{cases} \quad (20)$$

Уравнения (20) сложные и являются псевдодифференциальными, так как в a_i и b_i входят частоты $\omega_A(k_x, k_z)$, $\omega_G(k_x, k_z)$, которые содержат корни квадратные от сложных алгебраически функций переменных k_x, k_z . Операторы $\hat{l}_{1A}$, $\hat{l}_{2A}$, $\hat{l}_{3A}$, $\hat{l}_{4A}$, $\hat{l}_{1G}$, $\hat{l}_{2A}$, $\hat{l}_{3G}$, $\hat{l}_{4G}$ здесь явно не выписаны, поскольку они

громоздкие, но их несложно вычислить исходя из (18) и (11).

Если мы хотим использовать уравнения (20) для выделения вкладов АВ и ВГВ в гидродинамических полях, то должны добавить к ним естественные уравнения, аналогичные (19):

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_A(x, z, t) + \tilde{\Psi}_G(x, z, t) &= \tilde{\Psi}(x, z, t), \\ \tilde{\Phi}_A(x, z, t) + \tilde{\Phi}_G(x, z, t) &= \tilde{\Phi}(x, z, t), \\ \tilde{U}_A(x, z, t) + \tilde{U}_G(x, z, t) &= \tilde{U}(x, z, t), \\ \tilde{W}_A(x, z, t) + \tilde{W}_G(x, z, t) &= \tilde{W}(x, z, t).\end{aligned}\quad (21)$$

Тогда получается замкнутая система уравнений, позволяющая в любой момент времени t по известным волновым полям $\Phi(x, z, t)$, $\Psi(x, z, t)$, $U(x, z, t)$, $W(x, z, t)$ вычислить вклад акустических и гравитационных волн по отдельности в общую волновую картину.

Точные уравнения (20), в которых явно выписаны операторы $\hat{L}_{iA}$ и $\hat{L}_{iG}$, сложны и громоздки. В частных случаях они существенно упрощаются. Например, в работах [24–27] изучалась связь гидродинамических переменных в АВ и ВГВ в приближении длинных волн, когда $k_x^2 \ll k_z^2 + 1/4H^2$. Было показано, что в этом случае скалярные переменные в акустической волне связаны простым приближенным соотношением вида

$$\frac{\partial f_A}{\partial z} - \rho_0 \Psi_A = 0, \quad f_A = \frac{H}{\alpha} \rho_0 [\Phi_A - (\gamma - 1) \Psi_A]. \quad (22)$$

Во внутренней гравитационной волне в этом же приближении скалярные переменные связаны следующим соотношением:

$$\frac{\partial P_G}{\partial z} - \rho_0 \Psi_G = 0, \quad P_G = \rho_0 g [\Phi_G + \Psi_G]. \quad (23)$$

Соотношение (23) часто называют приближением квазистатики, оно широко применяется в моделировании внутренних гравитационных волн. Соотношение (22) приведено в работах [24–27]. Соотношение (23) можно также вывести из требования ортогональности, в смысле скалярного произведения (5), гидродинамических переменных АВ к переменным ВГВ. Ортогональность переменных акустической волны к переменным внутренней гравитационной волны следует из самосопряженности оператора $\hat{L}$, определенного в выражении (4), по отношению к скалярному произведению (5).

Упрощенные уравнения, связывающие компоненты гидродинамической скорости у волны каждого типа, аналогичные соотношениям (22), (23), но для скоростей, также представлены в работах [24–27]. В данной работе они нам не интересны, и поэтому здесь не рассматриваются.

Решение задачи о генерации и распространении акустико-гравитационных волн можно рассматривать как параметризованную временем t кривую $\lambda(t)$ в гильбертовом пространстве Σ , введенном ранее. Соотношения (20) выделяют в Σ инвариантные ортогональные подпространства Σ_A и Σ_G , соответствующие акустическим и гравитационным волнам. Это можно трактовать как расщепление пространства Σ на инвариантные ортогональные подпространства (Σ_A и Σ_G). Акустическая волна в такой интерпретации есть кривая $\lambda_A(t)$ в Σ_A , а гравитационная волна — кривая $\lambda_G(t)$ в Σ_G . То есть, математически разделение задачи о распространении акустико-гравитационных волн на отдельные задачи о распространении акустических и гравитационных волн можно трактовать как разделение исходной задачи на отдельные задачи на инвариантных ортогональных подпространствах Σ_A и Σ_G .

Разделение задачи о генерации волн тепловым источником на задачу о генерации АВ и задачу о генерации ВГВ; парциальные источники АВ и ВГВ

Изложенный алгоритм выделения вкладов акустических и гравитационных волн в общей волновой картине, основанный на уравнениях (20), (21), можно применить к внешним источникам волн и выделить части, ответственные за генерацию акустических и гравитационных волн, по отдельности. В этом случае в уравнения (20), (21) подставляются соответствующие источники для каждой из гидродинамических переменных. Мы будем называть эти вычисляемые источники парциальными источниками акустических и гравитационных волн, поскольку в сумме они равны заданным внешним источникам.

Если вместо уравнений (20) использовать приближенные соотношения (22) и (23) и применить их к тепловому источнику $Q_\Phi(x, z, t)$, то для парциальных источников акустических и гравитационных волн получаем выражения:

$$\begin{aligned}Q_{A,\Phi}(x, z, t) &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} Q_\Phi(x, z, t), \\ Q_{G,\Phi}(x, z, t) &= \frac{1}{\gamma} Q_\Phi(x, z, t), \\ Q_{A,\Psi}(x, z, t) &= -Q_{G,\Psi}(x, z, t) = \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(Q_\Phi(x, z, t) - \frac{1}{H} \int_{-\infty}^z Q_\Phi(x, z', t) dz' \right).\end{aligned}\quad (24)$$

Соотношения (24) выведены для безграничной атмосферы, тем не менее можно считать, что $Q_\Phi(x, z, t) = 0$ при $z \leq 0$, и что $Q_\Phi(x, z, t)$ “исчезает” несколько выше поверхности Земли. Тогда форму-

лы можно применить и к полубесконечной атмосфере. Очевидно, что $Q_{A,\Phi}(x, z, t) + Q_{G,\Phi}(x, z, t) = Q_\Phi(x, z, t)$, $Q_{A,\Psi}(x, z, t) + Q_{G,\Psi}(x, z, t) = 0$.

Обратим внимание, что изначально задан источник тепла $Q_\Phi(x, z, t)$, но при этом вычисленные парциальные источники акустических и гравитационных волн содержат также источники массы $Q_{A,\Psi}(x, z, t)$ и $Q_{G,\Psi}(x, z, t)$, которые в сумме равны нулю. Появление этих источников массы обусловлено тем, что колебания плотности в акустической и гравитационной волнах согласованы с колебаниями температуры. Поскольку $Q_{A,\Psi}(x, z, t) + Q_{G,\Psi}(x, z, t) = 0$, то нарушения закона массы не происходит, несмотря на появления источников массы.

Сравнительная оценка мощностей парциальных источников акустических и гравитационных волн

Поскольку для парциальных источников АВ и ВГВ имеются явные формулы (3), то можно оценить и сравнить мощности этих источников. Изменение энергии волны $\lambda(x, z, t)$ внешними источниками, определенными в столбце $Q(x, z, t)$, за одну секунду характеризуется выражением $|\langle \lambda, Q \rangle|$ и зависит не только от источника Q , но и от волнового поля в момент времени t . Если начальное волновое возмущение отсутствует, то, на небольших временах, $\lambda = Qt$, и выражение для мощности приобретает особенно простой вид $-\langle Q, Q \rangle$. Мы будем применять это выражение, $|\langle Q, Q \rangle|$, для оценки мощностей источников в любой момент времени, а не только при малых t , потому что оно характеризует именно источники, и не зависит от волнового поля.

Таким образом, для оценки мощностей парциальных источников можно предложить следующие формулы:

$$\begin{aligned} N_A &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \langle Q_A, Q_G \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{gH^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \left(\frac{Q_{A,\Phi}^2}{\gamma-1} + Q_{A,\Psi}^2 \right) dx dz, \\ N_G &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{H}{g}} \langle Q_G, Q_G \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{gH^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \left(\frac{Q_{G,\Phi}^2}{\gamma-1} + Q_{G,\Psi}^2 \right) dx dz. \end{aligned} \quad (25)$$

Размерности в формулах (25) для мощностей отрегулированы с помощью множителей $\sqrt{\frac{H}{g}}$. Поскольку интерес представляют сравнительные мощности, то эти, введенные в формулы общие

множители, не влияют на относительные величины, и не важны.

Нет необходимости вычислять интегралы в выражении (25), поскольку можно привлечь очевидную дополнительную формулу:

$$N = N_A + N_G = \frac{1}{2} \sqrt{gH^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0 \left(\frac{Q_\Phi^2}{\gamma-1} \right) dx dz. \quad (26)$$

В результате совместного рассмотрения выражений (24), (25) и (26) приходим к формулам

$$N_A = \frac{(\gamma-1)}{\gamma} N, \quad N_G = \frac{1}{\gamma} N, \quad \frac{N_A}{N_G} = (\gamma-1). \quad (27)$$

Таким образом, для случая тепловых внешних источников мощности парциальных источников акустических и гравитационных волн всегда различаются примерно вдвое, и это не зависит от их формы и частоты. Применим полученные формулы (24) для численного расчета раздельной генерации акустических и гравитационных волн, создаваемых тропосферным источником тепла $Q_\Phi(x, z, t)$.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕНЕРАЦИИ АКУСТИЧЕСКИХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ТРОПОСФЕРНЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Модельный тропосферный источник тепла

Для численного раздельного расчета генерации и распространения акустических и гравитационных волн, создаваемых тропосферным источником тепла, применим численную модель атмосферных процессов высокого разрешения “AtmoSym”, основанную на решении системы нелинейных гидродинамических уравнений для атмосферного газа в поле тяжести. Уравнения модели приведены в статье [28]. Хотя модель “AtmoSym” нелинейная, но на высотах ниже 100 км амплитуда рассматриваемых волн мала, и нелинейность уравнений практически не сказывается.

Поскольку формулы (24) выведены для изотермической атмосферы, то будем задавать в “AtmoSym” фоновую температуру постоянной до высоты 120 км, а выше — используем модель стратификации с ростом температуры. На рис. 1 представлена зависимость $H(z) = \frac{RT_0}{g\mu(z)}$ для используемой в расчетах модели стратификации.

Модельный тропосферный источник тепла в расчетах задан гауссовой функцией в виде

$$Q_{\Phi}(x, z, t) = A \exp \left\{ -\left(\frac{x - x_c}{l_x} \right)^2 - \left(\frac{z - z_c}{l_z} \right)^2 \right\} \sin(\omega t) \times \begin{cases} 1, & \text{если } t < t_0 \\ \exp\left(-\frac{t_0 - t}{\tau}\right), & \text{если } t \geq t_0 \end{cases} \quad (28)$$

Здесь A — амплитуда источника, которая специально выбрана малой, чтобы, по крайней мере, до высоты, не превышающей 100 км, обеспечить как малые амплитуды волн, так и выполнение принципа линейной суперпозиции. Частота источника составляет $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где $T = 0.5$ ч; параметры $l_x = 8$ км, $l_z = 2$ км. Они определяют размеры рассматриваемого источника и выбраны так, чтобы примерно соответствовали небольшому облаку. Параметр x_c определяет положение центра источника относительно горизонтальной оси X , z_c — положение центра источника относительно вертикальной оси Z и равен $z_c = 6$ км. Параметр $t_0 = 1$ ч задает характерное время работы источника, $\tau = 10$ мин определяет скорость выключения источника.

Тепловые источники с более сложным поведением можно построить путем сложения нескольких источников вида (28) с различными параметрами. Поскольку амплитуда волн в нижней атмосфере мала, то волновую картину для сложных источников можно получить сложением волновых картин от источников вида (28). Следовательно, для изучения волн от разнообразных тепловых источников на тропосферных высотах (28) достаточно формул (27) и (28).

В расчетах ниже используются парциальные источники акустических и гравитационных волн, вычисленные в выражении (24) по источнику тепла $Q_{\Phi}(x, z, t)$, описанного формулой (28). Результаты расчетов представлены далее.

Волновые поля для акустических и гравитационных волн на высотах ниже 50 км

Рассмотрим распространение волн вверх из тропосферы в верхнюю атмосферу на высотах ниже 50 км. Волны на таких высотах практически не подвержены действию нелинейности и диссипации, и поэтому для них выполняется принцип линейной суперпозиции и возможно разделение теплового источника на сумму источников, излучающих ВГВ и АВ по отдельности.

На рис. 2 представлены волновые возмущения температуры на высотах ниже 50 км, создаваемые

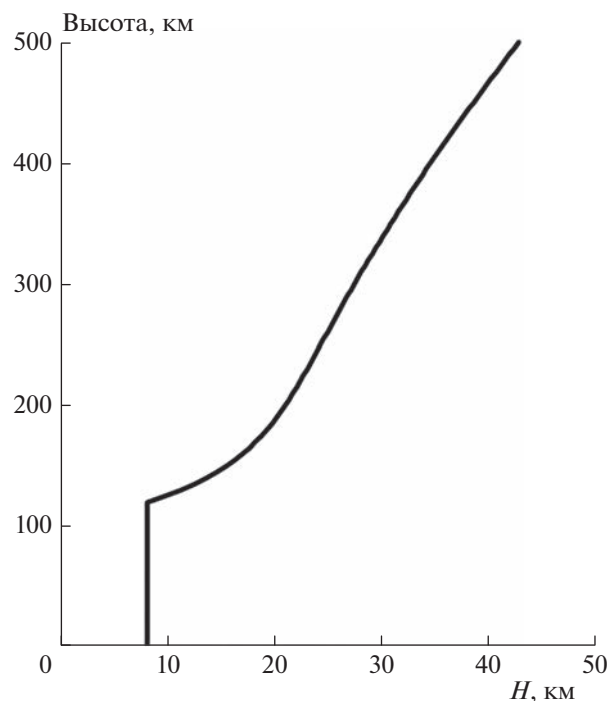


Рис. 1. Высота однородной атмосферы H в зависимости от высоты z для используемой в расчетах модели стратификации.

парциальными источниками гравитационных и акустических волн, соответственно, для следующих моментов времени: $t = 10$ мин, 40 мин, 1 ч, 2 ч.

Формулы (24) для разделения теплового источника на источники акустических и гравитационных волн приближенные и выведены в предположении, что горизонтальный масштаб волн значительно больше вертикального. Обсудим качество произведенного приближенного разделения волн. На рис. 2а–г мы видим типичную картину распространения гравитационных волн, когда они распространяются вдоль “лучей”, выходящих из источника под углом к горизонту в некотором диапазоне углов. На рис. 2д–з видна волновая картина, типичная для акустических волн: волновой фронт примерно перпендикулярен направлению распространения волн. Скорость распространения АВ на рис. 2 близка к скорости звука. К моменту времени $t = 1$ ч АВ “достигают” горизонтальных границ области интегрирования уравнений, и частично “уходят” через горизонтальные границы; используемые граничные условия на горизонтальных границах это допускают.

При $t > 1$ ч в центре картин акустических волн появились структуры, похожие на гравитационные волны. Акустические волны к этому времени уже почти “покинули” расчетную область, и ам-

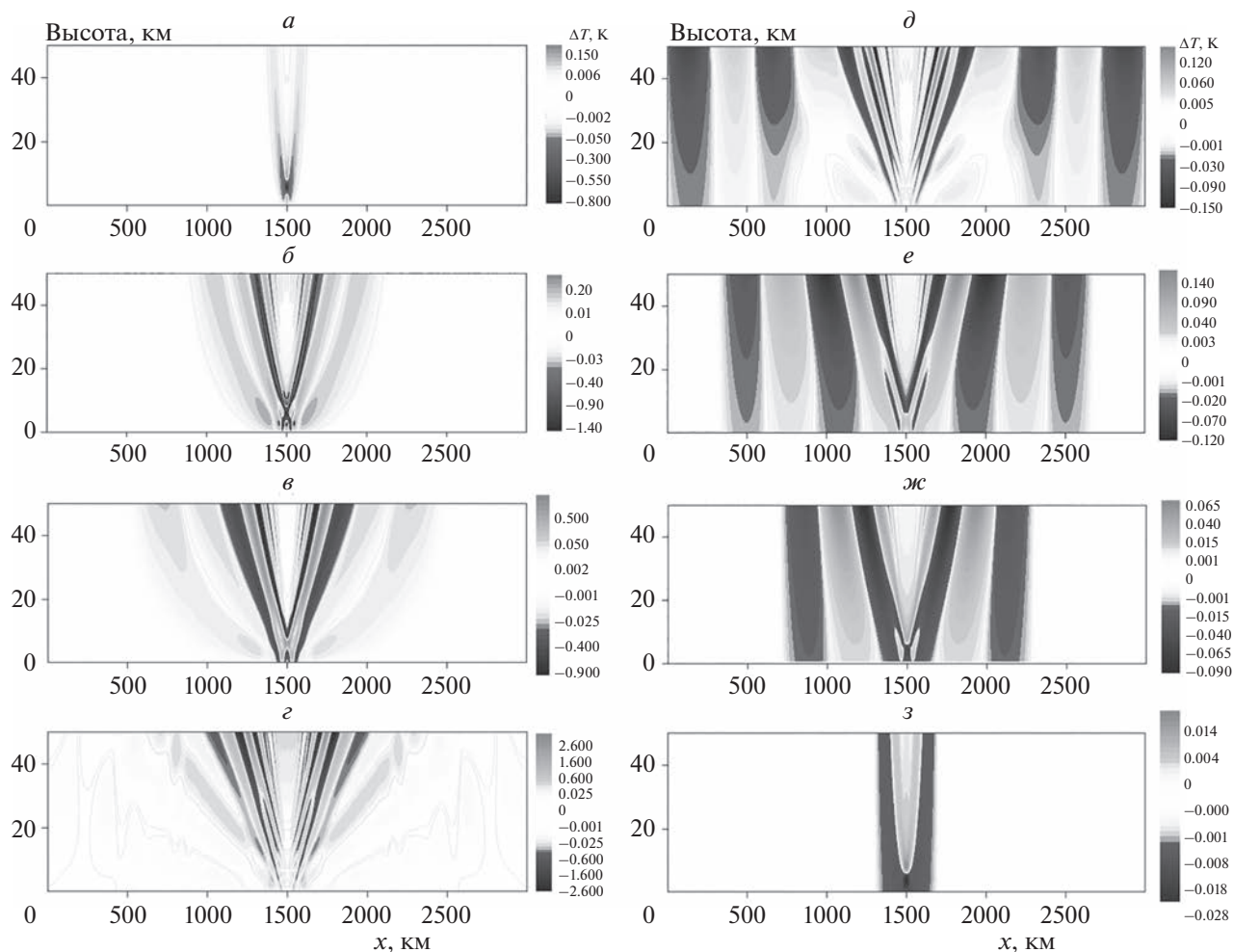


Рис. 2. Поля волновых возмущений температуры атмосферы (K) в интервале высот 0–50 км для следующих моментов времени: $t = 10$ мин (а, з), 40 мин (б, ж), 1 ч (в, е), 2 ч (г, д). Слева — для источника, излучающего гравитационные волны; справа — для акустического источника (см. формулы (28)).

плитуды волн в правой колонке меньше амплитуд волн в левой колонке более чем на порядок; следовательно, этот эффект может быть проигнорирован без обсуждения. Можно сделать вывод, что разделение гравитационных и акустических волн выполнено успешно. Мы допускаем что, на рис. 2 для гравитационных волн, могут присутствовать также акустические волны, но они не видны по причине крайней малости амплитуд этих волн.

Рисунок 2 показывает, что амплитуды генерируемых гравитационных волн, по крайней мере, на порядок превышают амплитуды акустических волн. Это заключение верно и для трехмерного случая.

Сравним энергии генерируемых волн. Энергии волн пропорциональны квадрату их амплитуд. Амплитуды гравитационных волн — на порядок большие, но область пространства, занимаемая акустическими волнами, в несколько раз

больше. Можно примерно оценить по графикам для $t = 1$ ч области пространства, занимаемые гравитационными и акустическими волнами по отдельности. Получается, что энергии гравитационных волн примерно на порядок больше энергий акустических волн.

Проведенное сравнение амплитуд вычисленных волн подтвердило теоретический вывод о том, что низкочастотные источники могут генерировать акустические волны лишь небольшой амплитуды. Простые соображения показывают, что сравнительная оценка энергий генерируемых волн справедлива и для трехмерного случая.

Можно заметить, что АВ и ВГВ возникают не только в области локализации источника, но и несколько выше теплового источника (28). Это также видно из формул (24) для парциальных источников волн.

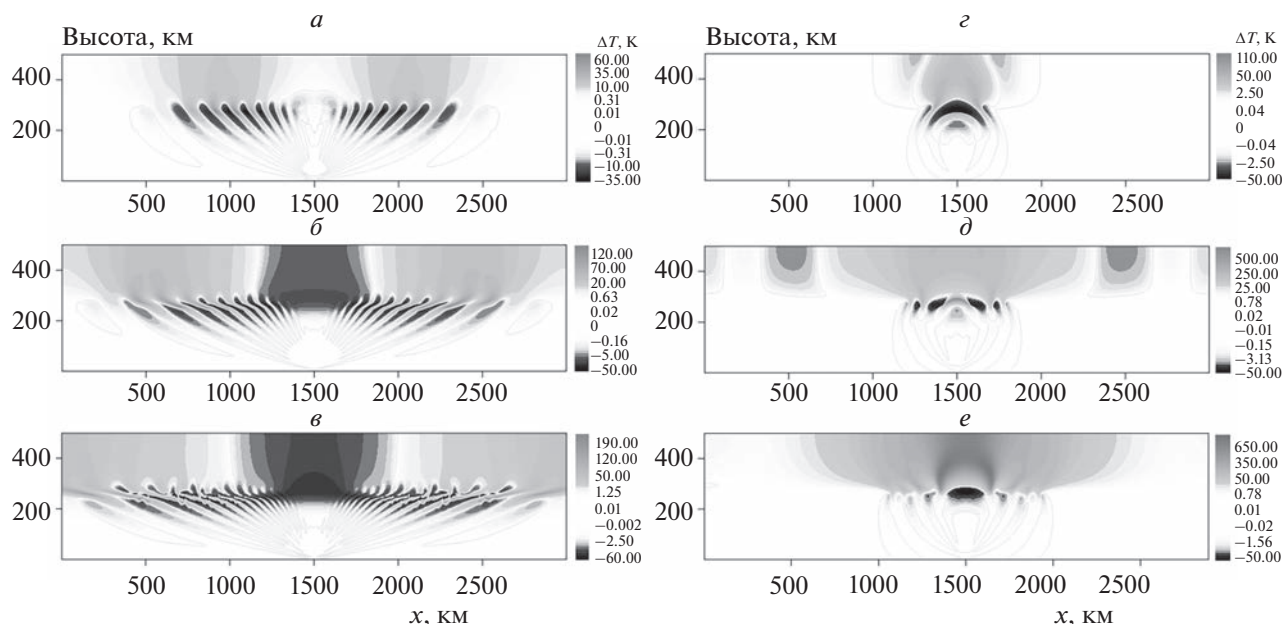


Рис. 3. Поля волновых возмущений температуры атмосферы (К) в интервале высот 0–500 км. Слева – для гравитационных волн в следующие моменты времени: $t = 55$ мин (а), 1 ч 13 мин (б), 1 ч 34 мин (в); справа – для акустических волн в следующие моменты времени: $t = 16$ мин (г), 20 мин (д), 26 мин (е). Источники волн характеризуются формулами (28).

Волновые поля для акустических и гравитационных волн на высотах ниже 500 км

Волны в изотермической атмосфере

На рис. 3 представлены результаты раздельного расчета распространения АВ и ВГВ от теплового источника в изотермической атмосфере. Поскольку модель “AtmoSym” нелинейная, то на больших высотах (выше 250 км) существенно проявляют себя нелинейные эффекты, где волны разрушаются, диссипируют и нагревают атмосферу. Из рис. 3 для гравитационных волн видны области охлаждения атмосферы на больших высотах, возникающие после “ухода” волн. Следует заметить, что в реальной атмосфере температура растет с ростом высоты выше 100 км, а плотность убывает с высотой не так сильно, как в изотермическом случае. Поскольку с увеличением высоты амплитуда волн растет примерно обратно пропорционально $\rho^{1/2}$, то в изотермической атмосфере на больших высотах нелинейные эффекты проявляются значительно сильнее, чем в реальной атмосфере. Расчеты распространения акустических волн (рис. 3г–е) выполнены только до момента времени $t = 26$ мин. Это обусловлено тем, что на больших временах и на больших высотах волны “разрушаются”, и приходится использовать очень малые шаги по времени, что делает дальнейшие расчеты неэффективными.

Ниже 200–250 км амплитуды волн невелики, и наблюдаются типичные картины распростране-

ния ВГВ и АВ по отдельности. Гравитационные волны распространяются вдоль направления “лучей”, выходящих из источника, под углом к горизонту. Фазовый фронт акустических волн примерно перпендикулярен направлению распространения этих волн.

Общая картина распространения волн от теплового источника, находящегося на высотах ниже 200–250 км образуется просто суммированием волновых картин для гравитационных и акустических волн. По результатам мы можем заключить, что разделение исходного теплового источника на источники ВГВ и АВ выполнено успешно.

Также отметим, что рис. 3а–в справа демонстрируют распространение акустических, и только акустических, волн от низкочастотного источника (24). Таким образом, построена модель (24) низкочастотного источника, который генерирует только акустические волны, несмотря на низкую частоту источника, и не излучает гравитационные волны. Уменьшение частоты построенного источника не изменит этого его свойства. Однако источник (24) сложный, и содержит как источник тепла, так и источник массы.

На высотах ниже 50 км амплитуды акустических волн, генерируемых низкочастотным источником, были, по крайней мере, на порядок меньше амплитуд гравитационных волн, что давало основания пренебрегать акустическими волнами. Однако выше 50 км амплитуды акустических волн все же сравниваются с амплитудами грави-

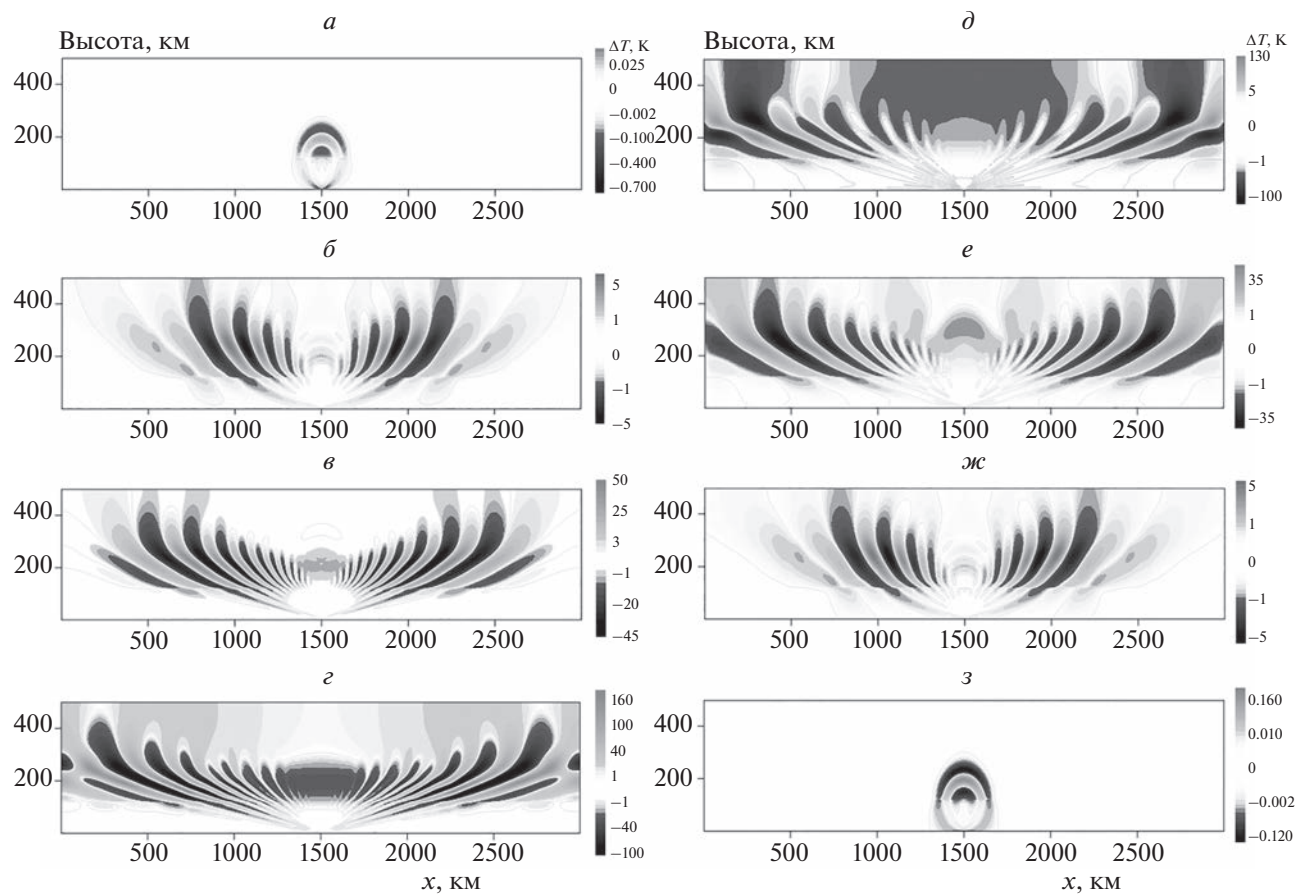


Рис. 4. Поля волновых возмущений температуры атмосферы (К) в интервале высот 0–500 км для следующих моментов времени: $t = 10$ мин (а, з), 40 мин (б, ж), 1 ч 20 мин (в, е), 2 ч (г, д). Слева — для источника, излучающего гравитационные волны; справа — для акустического источника (см. формулы (28)).

тационных волн, и нагрев атмосферы АВ не уступает нагреву ВГВ, причем нагрев акустическим волнами происходит над источником. В то же время гравитационные волны, распространяясь на большие расстояния, воздействуют на атмосферу на расстояниях порядка 1000 км и более от источника. Следовательно, суммарная передача энергии атмосфере от гравитационных волн может быть больше.

Волны в неизотермической атмосфере с реалистичной стратификацией

На рис. 4 представлены результаты расчета распространения волн от построенных парциальных источников волн (24) в неизотермической атмосфере. Зависимость H от z для используемой модели атмосферы приведена на рис. 1. В этой модели стратификация — изотермическая до высоты 120 км, но выше — фоновая температура растет.

Общая картина распространения волн от теплового источника на высотах ниже 200 км образуется просто суммированием волновых картин

рис. 4. Выше 200 км существенную роль играют нелинейные эффекты, и общую волновую картину простым сложением не получить.

На высотах ниже 50 км амплитуды АВ, генерируемых низкочастотным источником, были, по крайней мере, на порядок меньше амплитуд ВГВ, что давало основания пренебрегать акустическими волнами. Однако мы видим, что на высотах >150 км амплитуды волн от парциальных акустического и гравитационного источников практически сравнялись. Более того, волновые картины (например, при $t = 20$ мин) на высотах >120 км похожи, несмотря на то, что ниже распространение волн от различных источников сильно различается.

Рисунок 4 показывает, что неизотермичность значительно влияет на свойства волн и их распространение. На высотах ниже 120 км (где атмосфера в модели — изотермическая) волны, излучаемые построенными парциальными источниками (24) для акустических и гравитационных волн существенно различаются, и наблюдаемые волновые картины типичны для гравитационных и акустических волн. Амплитуда АВ примерно на

порядок меньше амплитуды ВГВ. На высотах >120 км это существенное отличие волн от построенных источников АВ и ВГВ стирается. И, несмотря на малость амплитуд акустических волн на высотах источника, ситуация меняется при достижении волнами верхней атмосферы, где пренебрегать акустическими волнами уже нельзя.

Необходимо добавить важное замечание, что разделение (27) теплового источника на парциальные источники акустических и гравитационных волн не учитывает неизотермичность атмосферы выше 120 км. Формулы (24) для парциальных источников показывают, что компоненты $Q_{A,\Psi}(x, z, t)$, $Q_{G,\Psi}(x, z, t)$ этих источников не равны нулю на больших высотах, и при $z \rightarrow \infty$

$$Q_{A,\Psi}(x, z, t) = -Q_{G,\Psi}(x, z, t) \rightarrow \frac{1}{\gamma} \left(\frac{-1}{H} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\Phi}(x, z', t) dz' \right). \quad (29)$$

То есть, эти компоненты парциальных источников не локальны. Таким образом, учет неизотермичности атмосферы может повлиять на $Q_{A,\Psi}(x, z, t)$ и $Q_{G,\Psi}(x, z, t)$ на больших высотах. Это может быть важным для более точного разделения АВ и ВГВ в неизотермической атмосфере. Однако в задачу настоящей работы изучение этого вопроса не входит.

В данном исследовании не учитывалось влияние ветра на распространение волн. Ветер может препятствовать проникновению инфразвуковых волн в верхнюю атмосферу.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что метеорологические процессы являются одним из основных источников акустико-гравитационных волн в тропосфере. Достигая высот верхней атмосферы, АВ влияют на тепловой баланс и общую циркуляцию атмосферы. Эти волны обычно учитываются в глобальных и климатических моделях посредством параметризаций.

Процессы выделения/поглощения тепла при фазовых переходах воды являются основными источниками энергии в метеорологических процессах. С целью более детального изучения процессов генерации волн тепловыми метеорологическими источниками на тропосферных высотах рассмотрена общая задача о генерации волн источниками тепла. В случае волн малой амплитуды в изотермической атмосфере задача о генерации волн решена аналитически; показано, что тепловой источник всегда генерирует гравитационные и акустические волны одновременно. Явно выделены в решении вклады АВ и ВГВ.

Показано, что у акустических волн колебания плотности и температуры связаны некоторым соотношением. У гравитационной волны колебания температуры и плотности связаны другим соотношением. Эта связь гидродинамических переменных у волны каждого типа приводит к тому, что генерация ВГВ источником тепла невозможна без одновременной генерации инфразвуковых волн и наоборот. Источник тепла может генерировать волны только парами: гравитационные и акустические волны вместе.

Выведенные соотношения, связывающие гидродинамические переменные у волны каждого типа, позволяют в произвольно заданном источнике волн выделить вклады, парциальные источники, ответственные за генерацию акустических и гравитационных волн по отдельности. В частности, по модели теплового источника волн построены парциальные источники, ответственные за генерацию акустических и гравитационных волн по отдельности. Оценены мощности парциальных источников АВ и ВГВ; они различаются примерно вдвое, независимо от частоты, формы и масштабов метеорологических источников.

Показано также что, несмотря на то, что тепловые источники локализованы на тропосферных высотах, парциальные источники акустических и гравитационных волн не являются локализованными, и содержат составляющие источники массы, отличные от нуля на всех высотах выше теплового источника. Последние в парциальных источниках акустических и гравитационных волн в сумме равны нулю, и в общем масса сохраняется. Такой механизм генерации АВ и ВГВ позволяет объяснить эффект быстрого появления гравитационных волн на больших высотах, противоречащий известному факту медленного вертикального распространения этих волн. Формулы для парциальных источников показывают, что гравитационные волны генерируются тепловым тропосферным источником сразу и на больших высотах. При этом производимое ВГВ возмущение параметров атмосферы на больших высотах полностью компенсируется возмущением, производимым акустическими волнами, которые тоже генерируются тропосферным тепловым источником, в том числе и на больших высотах. Вследствие этой взаимной компенсации генерируемых волн волновые возмущения сначала не наблюдаются. Позже взаимная компенсация волновых возмущений (АВ и ВГВ) нарушается в результате быстрого распространения акустических волн от места их возникновения, и мы наблюдаем быстрое появление гравитационных волн на значительных высотах.

С помощью численных экспериментов проведена сравнительная оценка амплитуды и энергии гравитационных и акустических волн, генерируе-

мых тепловыми источниками. Показано, что если характерное время изменения источника больше периода Вайсяля—Брента, то на небольших высотах амплитуды и энергии гравитационных волн более чем на порядок превышают амплитуды генерируемых инфразвуковых волн. Тем не менее, когда волны распространяются в верхнюю атмосферу, то амплитуды акустических и гравитационных волн примерно сравниваются. Поэтому игнорирование вклада инфразвуковых волн при интерпретации экспериментальных результатов может приводить к неверным выводам о динамических процессах.

Полученные результаты также могут быть полезны для улучшения параметризации нагрева верхней атмосферы волнами, распространяющимися с тропосферных высот, и для улучшения параметризаций передаваемого атмосфере волнами импульса. При построении параметризационных схем необходимо принимать во внимание не только гравитационные, но и акустические волны, даже если тропосферные тепловые источники волн — низкочастотные.

Работа выполнена при поддержке Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2021-583).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Artru J., Ducic V., Kanamori H. et al.* // *Geophys. J. Int.* 2005. V. 160. № 3. P. 840; <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02552.x>
2. *Borchevskina O., Karpov I., Karpov M.* // *Atmosphere.* 2020. V. 11. № 9. P. 1017; <https://doi.org/10.3390/atmos11091017>
3. *Chernigovskaya M.A., Shpynev B.G., Ratovsky K.G.* // *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 2015. V. 136. № 3. P. 235; <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2015.07.006>
4. *Fritts D.C., Vadas S.L., Wan K. et al.* // *Ibid.* 2006. V. 68. № 3—5. P. 247; <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2005.04.010>
5. *Plougonven R., Zhang F.* // *Rev. Geophys.* 2014. V. 52. № 1. P. 1; <https://doi.org/10.1002/2012RG000419>
6. *Plougonven R., Snyder Ch.* // *J. Atmos. Sci.* 2007. V. 64. № 7. P. 2502; <https://doi.org/10.1175/JAS3953.1>
7. *Гаврилов Н.М., Коваль А.В., Погорельцев А.И. и др.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2013. Т. 49. № 4. С. 401; <https://doi.org/10.7868/S0002351513040032>
8. *Голубков Г.В., Адамсон С.О., Борчевкина О.П. и др.* // *Хим. физика.* 2022. Т. 41. № 5. С. 531; <https://doi.org/10.31857/S0207401X22050053>
9. *Бахметьева Н.В., Григорьев Г.И., Калинина Е.Е.* // *Хим. физика.* 2023. Т. 42. № 4. С. 73; <https://doi.org/10.31857/S0207401X23040039>
10. *Karpov I., Kshevetskii S.* // *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 2017. V. 164. P. 89; <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2017.07.019>
11. *Kshevetskii S.P., Gavrilov N.M.* // *J. Atmos. Sol. Terr. Phys.* 2005. V. 67. № 11. P. 1014; <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2005.02.013>
12. *Кшевецкий С.П., Гаврилов Н.М.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2014. Т. 50. № 1. С. 76; <https://doi.org/10.7868/S0002351513050040>
13. *Gettelman A., Mills M.J., Kinnison D.E. et al.* // *J. Geophys. Res. Atmos.* 2019. V. 124. P. 12380; <https://doi.org/10.1029/2019JD030943>
14. *Richter J.H., Sassi F., Garcia R.R.* // *J. Atmos. Sci.* 2010. V. 67. P. 136; <https://doi.org/10.1175/2009JAS3112.1>
15. *Akmaev R.A., Forbes J.M., Hagan M.E.* // *Geophys. Res. Lett.* 1996. V. 23. № 16. P. 2173; <https://doi.org/10.1029/96GL01977>
16. *Akmaev R.A., Yudin V.A., Ortland D.A.* // *Ann. Geophys.* 1997. V. 15. № 9. P. 1187; <https://doi.org/10.1007/s00585-997-1187-7>
17. *Кшевецкий С.П., Курдяева Ю.А., Гаврилов Н.М.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 2023. Т. 59. № 1. С. 44; <https://doi.org/10.31857/S0002351523010078>
18. *Бахметьева Н.В., Григорьев Г.И., Калинина Е.Е.* // *Хим. физика.* 2022. Т. 41. № 5. С. 441; <https://doi.org/10.31857/S0207401X22050028>
19. *Лебедь И.В.* // *Хим. физика.* 2022. Т. 41. № 4. С. 81; <https://doi.org/10.31857/S0207401X22040045>
20. *Кшевецкий С.П.* // *Журн. вычисл. математики и мат. физики.* 2001. Т. 41. № 2. С. 295.
21. *Richtmayer R.D.* *Principles of advanced mathematical physics.* V. 1. New York: Springer-Verlag, 1978.
22. *Gossard E.E., Hooke W.H.* *Waves in the atmosphere.* N.Y.: Elsevier Scientific Publ. Co., 1975.
23. *Дикий Л.А.* *Теория колебаний земной атмосферы.* Л.: Гидрометеиздат, 1969.
24. *Брежнев Ю.В., Кшевецкий С.П., Лебле С.Б.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1994. Т. 30. № 1. С. 86.
25. *Кшевецкий С.П.* // *Изв. РАН. Физика атмосферы и океана.* 1992. Т. 28. № 5. С. 558.
26. *Кшевецкий С.П.* // *Гидромеханика.* 1992. № 65. С. 29.
27. *Кшевецкий С.П.* *О длинных акустико-гравитационных волнах в атмосфере с произвольной стратификацией плотности.* М.: Деп. ВИНТИ № 4746-B91. 1991.
28. *Kshevetskii S.P., Kurdayeva Y.A., Gavrilov N.M.* // *Adv. Space Res.* 2022. V. 70. № 11. P. 3706; <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.08.034>