

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РАМЫ НА ДЕЙСТВИЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СИЛ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

А. Н. Потапов, Н. А. Зямбаев✉

*Кафедра строительного производства и теории сооружений,
ziambaevna@susu.ru; ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет
(национальный исследовательский университет)», Челябинск, Россия*

Ключевые слова: напряжение; однопролетная балка; рама; пластическая зона; предел текучести; упругопластические деформации.

Аннотация: Разработан аналитический подход к упругопластическому расчету рам на действие горизонтальных сил методом перемещений с линейным упрочнением материала. Для однопролетной статически неопределимой балки введены две упрощающие предпосылки, согласно которым нелинейная область с текучестью волокон разбита на специальные зоны: упругопластическую и пластическую. При моделировании упругопластической зоны зависимость между интенсивностями напряжений и деформаций подчиняется диаграмме Прандтля, при моделировании пластической зоны (ПЗ) – линейному упрочнению материала. При единичных воздействиях построены эпюры моментов в стандартных статически неопределимых балках, используемые в основной системе метода перемещений. Расчетные усилия балок содержат балочные пластические функции (БПФ), учитывающие влияние ПЗ. Создана расчетная схема нелинейного анализа рам, представляющая пошаговую процедуру последовательных нагружений для уравнений метода перемещений, записанных в приращениях. Нелинейная задача разбита на ряд последовательных линейных задач, решаемых на каждой ступени для фиксированных значений БПФ по схеме упругой задачи. Переход к следующей ступени нагружения сопровождается возрастанием длины ПЗ l_{pi} с последующей корректировкой БПФ. Процесс расчета завершается при условии, когда значения текущей и заданной длин ПЗ становятся равными в пределах погрешности. Рассмотрен пример расчета стальной двухэтажной рамы на горизонтальную нагрузку.

Введение

В последние десятилетия появилось много работ, посвященных изучению напряженно-деформированного состояния каркасных зданий с учетом пластических зон (ПЗ), возникающих в концевых частях ригелей и колонн. Данная проблема особенно актуальна для сейсмических районов, где здания подвергаются значительным динамическим воздействиям. Ввиду сложности моделирования такой задачи подавляющее большинство исследований носит экспериментальный характер.

В научной литературе понятие «пластическая зона» (*Plastic Hinge Length*) впервые введено в работе [1] при расчете железобетонных (ЖБ) сейсмостойких каркасов, где отмечалось, что появление пластических деформаций оказывает положительный эффект в конструкции, вследствие повышения ее деформативно-

сти. Способность нагруженных конструктивных элементов к поглощению и диссипации энергии в целом обеспечивает снижение сейсмического воздействия на каркас. Конструкция, таким образом, помимо своего основного назначения, работает еще как энергопоглотитель.

В ряде работ изучаются вопросы, связанные с параметрами ПЗ, такими как длина зоны l_p , место ее расположения в конструкции, количество ПЗ и др. Большая часть этих исследований посвящена особенностям проектирования ПЗ в железобетоне [2 – 7] и металлических [8 – 12] конструкциях, в основном, применительно к циклическим нагрузжениям конструкций, моделирующих сейсмические воздействия. Разработки, связанные с использованием ПЗ, получили закрепление в нормативных документах (кодах) США и других стран [13 – 15].

Для того чтобы преодолеть такие слабые стороны бетонных зданий, как хрупкое разрушение и отсутствие пластичности материала, ведутся разработки для создания новых материалов. В работе [2] показано использование армированного волокнистого цементного композита HPFRCC с повышенной пластичностью материала и высокой способностью к поглощению энергии.

В статье [3] для изгибаемых элементов конструкции проведен численный анализ поведения пластических шарниров с использованием вычислительного программного обеспечения DIANA. Построена калиброванная модель FEM (*Finite Element Method*), исследованы протяженность зоны текучести арматуры, зоны разрушения бетона, зоны локализации кривизны и реальная длина пластического шарнира (ПШ).

В статьях [4 – 7] обсуждались вопросы исследования длины пластического шарнира ЖБ-колонн. В работе [4] для четырех- и семиэтажных плоских каркасов приведены результаты по исследованию в нелинейной версии программы SAP2000 8, где свойства ПШ задаются по умолчанию в соответствии с документом ATC-40 [14]. Пластические зоны определялись на обоих концах балок и колонн. На примере численного эксперимента показано, что длина ПЗ оказывает большое влияние на относительные горизонтальные перемещения верха каркаса и зависит от расчетной формулы для длины l_p . В статье [5] исследована длина ПШ при циклическом и монотонном нагружении ЖБ-колонн на основе 3D-метода конечных элементов. Длины зон ПШ включают зоны текучести арматуры, дробления бетона и эквивалентный ПШ колонн. Показано, что для циклически нагруженных колонн эта длина больше, чем при монотонных нагружениях. Отмечено, что существенное влияние оказывает схема нагружения, определяемая числом циклов, отношение длины колонны к ее ширине и модуль упрочнения арматуры.

В статье [6] рассмотрены аналогичные проблемы, что и в [5], но с учетом использования полимера, усиленного волокном FRP (*Fiber Reinforced Plastic*). Для откалиброванной модели FEM сначала проведены параметрические исследования длины ПШ, затем предложена улучшенная модель для FRP в ЖБ-колоннах. В работе [7] обсуждается проблема назначения длины ПЗ в колонне при циклическом действии боковой силы и осевой нагрузки. Учтено влияние на длину ПЗ геометрических размеров колонны, физико-механических свойств арматуры и бетона, количество и диаметр продольных арматуры и других параметров. Отмечена роль главной арматуры и особенно той ее части, которая деформируется за пределом текучести в области упрочнения.

При проектировании ПЗ в металлических конструкциях в [8] разработан двухузловой суперэлемент с обобщенными ПШ для статического и циклического анализа каркасных конструкций. Используется модель с двумя обобщенными ПШ, расположенными по концам упругого балочного элемента и моделируемыми набором осевых и вращательных упругопластических пружин, воспроизводящих пластические свойства в продольном и угловом направлении элемента. Изме-

ние длины ПШ вдоль продольной оси стержня и угла поворота элемента создает условия для взаимодействия между продольными силами и изгибающими моментами в зоне ПШ. В статье [9] эти идеи использованы при анализе ударной нагрузки.

Для анализа каркасных трубчатых конструкций разработан ряд пластических механизмов, которые позволяют использовать один и тот же циклический формат пластичности [10]. Каждый пластический механизм определен функцией энергии и поверхностью текучести. Это позволяет создавать набор функций, регламентирующий упругие и пластические характеристики модели пластического механизма.

При анализе стальных каркасов, изготовленных по принципу проектирования «сильные колонны – слабые балки», после землетрясения, как отмечено в статье [11], наблюдаются большие зоны текучести и, как следствие, разрушения концов стальных балок. В связи с этим предложено устройство для соединения композитной балки со стальной колонной, включающее демпфер трения. Композитная балка состоит из стальной основы и расположенного в верхней части слоя сверхвысокопрочного бетона (*Ultra High Performance Concrete (UHPC)*). Ожидаемая область ПШ ограничена в пределах допустимого уровня, регламентируемого конструктивными особенностями соединения ($l_p = 120, 240$ мм). Выходная сила, создающая текучесть в композитном UHPC-слое фиксировалась на пяти экспериментальных моделях в момент проскальзывания демпфера трения. Авторами статьи [12] продолжены экспериментальные и аналитические исследования сейсмических характеристик предложенного устройства, в частности, отмечалось устойчивость устройства к повреждениям при длине ПЗ на концах балки, равной $l_p = 120$ мм. Для обозначенной области ПЗ рекомендуется слой UHPC толщиной 100 мм и стальной лист толщиной 20 мм.

Метод исследования

В статье предложен аналитический подход к упругопластическому расчету статически неопределимых рам с линейным упрочнением материала на основе метода перемещений (МП) при статическом действии горизонтальных сил [16], моделирующих сейсмическое воздействие.

Реализация подхода требует решения ряда теоретических проблем:

- разработки модели НДС стержня в зоне упругопластических деформаций на основе введения упрощающих предпосылок;
- выполнения расчетов стандартных статически неопределимых балок на единичные воздействия с учетом специальных зон (ПЗ, упругопластической зоны (УПЗ) и зоны усиления) и построения балочных пластических функций (БПФ);
- построения расчетной схемы нелинейного анализа статически неопределимых рам МП с использованием процедуры метода последовательных нагружений [17].

Для области нелинейных деформаций стержня длиной l с кривой 1 (пунктир) [16], отделяющей упругие деформации от пластических, приняты две предпосылки, по которым данная область разбита на две зоны – УПЗ длиной d и ПЗ длиной l_p (фрагмент стержня с нелинейным участком деформирования показан на рис. 1). Согласно *первой* предпосылке в УПЗ, содержащей малый процент волокон текучести, принят закон деформирования материала по теории идеально-упругопластического тела с переменным модулем упругости E_x . Так как в этом случае кривая 2 имеет вид параболы [18], где $x_1 \in [0, d]$, то величину E_x удобно назначить изменяющейся по квадратичной зависимости, то есть пропорциональной отношению упругого ядра сечения $2y$ к высоте h . По *второй* предпосылке для ПЗ, где преобладает большой процент волокон текучести, напряжения во всей

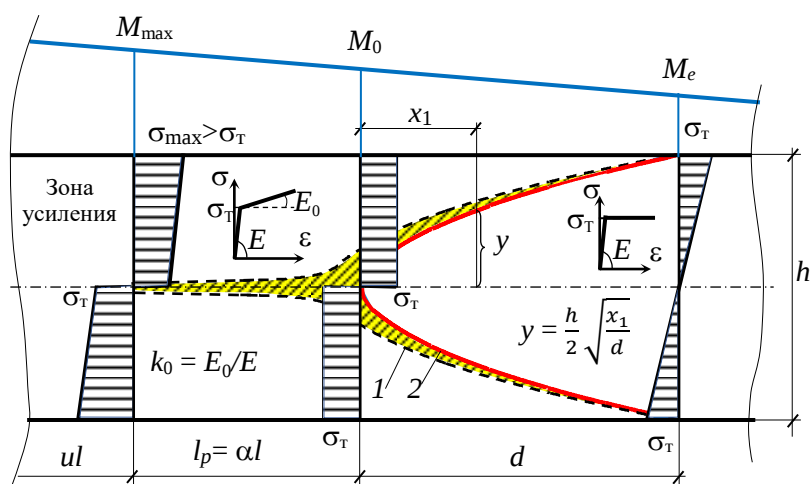


Рис. 1. Преобразование нелинейного участка деформирования стержня в две самостоятельные зоны: УПЗ длиной d и ПЗ длиной l_p

области приняты $\sigma \geq \sigma_T$ с законом деформирования материала по билинейной диаграмме с постоянным модулем упрочнения E_0 . В результате такого моделирования в области, помеченной желтым цветом (см. рис. 1), проведена замена упругих деформаций (с напряжениями $\sigma < \sigma_T$) на пластические.

Кроме того, в целях преобразования ПЗ в зону равного сопротивления закон для момента инерции сечения в ПЗ принят по линейной зависимости, согласованной с характером эпюры моментов.

Результаты и обсуждение

Введенные зависимости для модуля упругости в УПЗ и момента инерции в ПЗ позволили в аналитическом виде выполнить расчеты стандартных балок на единичные воздействия и получить безразмерные БПФ $f_j(\alpha)$, учитывающие поправки к линейному расчету, где $\alpha = l_p/l$ – относительная длина ПЗ, l – длина балки.

В таблице 1 приведены схемы однопролетных статически неопределимых балок с одной пластической зоной и эпюры изгибающих моментов.

Балочные пластические функции, учитывающие влияние пластических зон:

– балочные пластические функции:

$$f_1(\alpha) = \frac{1}{\psi_{11}^0}; \quad f_2(\alpha) = \frac{1}{\Delta} (3\psi_{22} + \psi_{11} - 3\psi_{12});$$

$$f_3(\alpha) = \frac{1}{\Delta} (3\psi_{21} - 2\psi_{11}); \quad f_4(\alpha) = \frac{1}{\Delta} (2\psi_{22} - \psi_{12});$$

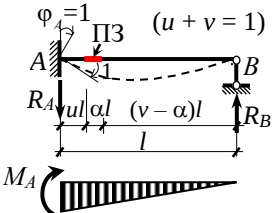
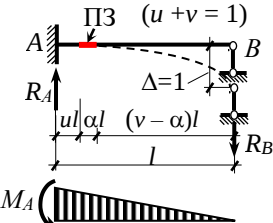
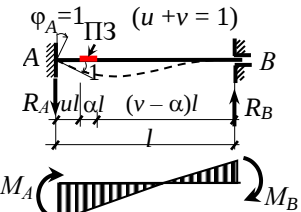
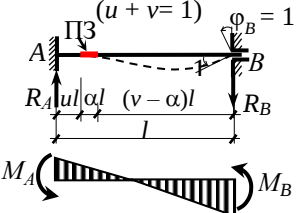
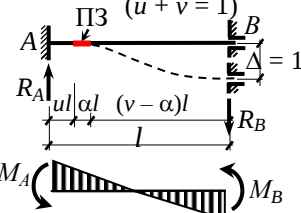
$$f_5(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \psi_{12}; \quad f_6(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \psi_{11}; \quad f_7(\alpha) = \frac{1}{\Delta} \psi_{22};$$

– вспомогательные нелинейные функции:

$$\psi_{11}^0 = \frac{(1-v^3)}{\xi} + \frac{3\alpha}{k_0} (v-\alpha) \left(v - \frac{\alpha}{2} \right) + (v-\alpha)^3 \left[1 + 3m - m^2 + \frac{1}{5}m^3 \right];$$

Таблица 1

Расчетные схемы однопролетных статически неопределимых балок с одной пластической зоной

Расчетные схемы балок и эпюры изгибающих моментов	Расчетные формулы усилий в балках с учетом БПФ
	$M_A = \frac{3EI}{l} f_1(\alpha);$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^2} f_1(\alpha)$
	$M_A = \frac{3EI}{l^2} f_1(\alpha);$ $R_A = R_B = \frac{3EI}{l^3} f_1(\alpha)$
	$M_A = \frac{4EI}{l} f_2(\alpha);$ $M_B = \frac{2EI}{l} f_3(\alpha);$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2} f_4(\alpha)$
	$M_A = \frac{2EI}{l} f_3(\alpha);$ $M_B = \frac{4EI}{l} f_6(\alpha);$ $R_A = R_B = \frac{6EI}{l^2} f_5(\alpha)$
	$M_A = \frac{6EI}{l^2} f_4(\alpha);$ $M_B = \frac{6EI}{l^2} f_5(\alpha);$ $R_A = R_B = \frac{12EI}{l^3} f_7(\alpha)$

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= \frac{(1-v^3)}{\xi} + \frac{3(v-\alpha)^3}{8k_0} \left[\frac{1}{2} \mu^2 + 2\mu - 2,5 + \ln \mu \right] + n(v-\alpha)^3 \left[6 - 4n + \frac{6}{5} n^2 \right] + (v-\alpha)^3 (1-n)^3; \\ \psi_{12} &= \psi_{21} = \frac{(1-v^2)}{\xi} + \frac{(v-\alpha)}{k_0} \left[\alpha + \frac{(v-\alpha)}{2} \ln \mu \right] + (v-\alpha)^2 \left(1 + 2n - \frac{1}{3} n^2 \right); \\ \psi_{22} &= \frac{1-v}{\xi} + \frac{(v-\alpha)}{2k_0} \ln \mu + (v-\alpha)(1+n); \end{aligned}$$

$$\Delta = 4\psi_{11}\psi_{22} - 3\psi_{12}\psi_{21},$$

где $\alpha = l_p / l$ – относительная длина ПЗ; $n = m / (1 + M_B / M_0)$; $m = 1 - M_e / M_0$; $k_0 = E_0 / E$; $\mu = (v + \alpha) / (v - \alpha)$; $v = 1 - u$, где $ul \leq 1,5h$ (h – высота поперечного сечения); M_e, M_0 – предельно-упругий и предельный пластический моменты соответственно; M_B – изгибающий момент на правом конце жестко защемленной балки (см. табл. 1); ξ – коэффициент жесткости в зоне усиления.

Далее приведены некоторые свойства и частные случаи функций ψ_{kl} и БПФ $f_j(\alpha)$. Балочные пластические функции учитывают нелинейные свойства системы и зависят от коэффициентов k_0 ($0 < k_0 < 1$), n ($0 \leq n < 1$) и $\xi > 1$. Первые два коэффициента оказывают свое влияние на развитие пластических деформаций в ПЗ (коэффициент k_0) и в УПЗ (коэффициент n); коэффициент ξ обеспечивает безопасный уровень напряжений в зоне усиления.

Вспомогательные функции ψ_{kl} всегда положительны ($\psi_{kl} > 0$) при любых состояниях однопролетных статически неопределимых балок, независимо от наличия / отсутствия тех или иных специальных зон и вида единичного воздействия.

При $\xi = k_0 = 1$ ($\alpha = n = 0$) следует чисто упругое решение, при котором все специальные зоны отсутствуют. В этом случае все вспомогательные функции и БПФ равны единице: $\psi_{kl} = f_j(0) = 1$ ($k, l = 1, 2; j = 1, \dots, 7$), и тогда опорные реакции (силы и моменты) будут такими же, как в стандартных балках, используемых в основной системе метода перемещений при упругом расчете.

При $k_0 = 1$ ($\alpha = n = 0$) и $\xi > 1$ в системе отсутствуют пластические деформации. Функции ψ_{kl} сформированы для упругой системы с учетом зон усиления:

$$\psi_{11}^0 = \psi_{11} = \frac{(1-v^3)}{\xi} + v^3; \quad \psi_{12} = \psi_{21} = \frac{(1-v^2)}{\xi} + v^2; \quad \psi_{22} = \frac{(1-v)}{\xi} + v.$$

Такие функции удобно использовать на предварительном этапе нелинейного расчета, когда внешние силы еще не вызывают пластических деформаций.

При $k_0 < 1$, $\alpha = 0$ внешняя нагрузка достигает такого уровня, когда на границе зоны усиления и УПЗ нормальные напряжения становятся равными предельным пластическим напряжениям, то есть пластические деформации уже появились в УПЗ, но ПЗ еще не образовалась ($l_p = 0$). Вспомогательные функции ψ_{kl} имеют вид:

$$\psi_{11}^0 = \frac{(1-v^3)}{\xi} + v^3 \left(1 + 3m - m^2 + \frac{1}{5} m^3 \right);$$

$$\psi_{11} = \frac{(1-v^3)}{\xi} + v^3 \left(1 + 3n - n^2 + \frac{1}{5}n^3 \right);$$

$$\psi_{11} = \psi_{21} = \frac{(1-v^2)}{\xi} + v^2 \left(1 + 2n - \frac{1}{3}n^2 \right);$$

$$\psi_{22} = \frac{(1-v)}{\xi} + v(1+n).$$

В расчетной схеме нелинейного анализа использована пошаговая процедура метода последовательных нагружений, позволяющая в итерационном процессе разбить сложную задачу на ряд последовательных линейных задач [17]. На каждой i -й ступени проводится упругий анализ для системы канонических уравнений МП, записанных в приращениях с учетом фиксированных значений БПФ. С ростом длины ПЗ l_{pi} , переходя от одной ступени к другой, проводится корректировка поправочных БПФ $f_j(\alpha)$. Процесс нагружений продолжается до тех пор, пока найденная величина l_{pi} не достигнет расчетной l_p в пределах заданной точности вычислений ε : $(l_p - l_{pi}) \leq \varepsilon$, после чего определяются предельные усилия M_p и нагрузка F_p .

Для иллюстрации предложенного подхода приведен пример расчета стальной двухэтажной рамы на действие горизонтальных сил, моделирующих сейсмическое воздействие (рис. 2).

Исходные данные: ригели первого и второго этажей – двутавры № 40 ($I_x = 19062 \text{ см}^4$) и № 36 ($I_x = 13380 \text{ см}^4$); стойки первого и второго этажей – сдвоенные швеллеры № 33 ($I_x = 15\,960 \text{ см}^4$) и № 30 ($I_x = 11\,620 \text{ см}^4$). Материал – С345 ($R_{yn} = 34,5 \text{ кН/см}^2$; $R_B = 49 \text{ кН/см}^2$), $E = 2,1 \cdot 10^4 \text{ кН/см}^2$, $\delta_{02} = 1,643 \cdot 10^{-3}$, $\delta_B = 0,21$; модуль упругости $E_0 = 69,592 \text{ кН/см}^2$; $k_0 = E_0/E = 0,0033$.

Отношение пластического момента сопротивления к осевому принято равным $W_0/W_x = 1,17$. Предельный пластический и предельно-упругий моменты для ригелей первого этажа равны соответственно $M_0 = 381,43 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_e = 328,82 \text{ кН}\cdot\text{м}$, для стоек первого этажа – $M_{01} = 387,39 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_{e1} = 333,96 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Эшора предельных моментов M_p и соответствующая ей нагрузка $F_p = 119,7 \text{ кН}$ получены для заданной длины ПЗ, равной $l_p = 20 \text{ см}$ (рис. 3).

Первые пластические деформации появились при предельном пластическом значении силы $F_{p0} = 104,9 \text{ кН}$ в правой стойке нижнего этажа. Они характеризовались интенсивным развитием ПЗ вплоть до длины $l_{pi} = 10,14 \text{ см}$ (при $F_{pi} = 115,5 \text{ кН}$), пока не появилась ПЗ в левой стойке, после чего скорость развития пластических деформаций в правой стойке снизилась и в обеих зонах скорости стали одинаковыми (рис. 4).

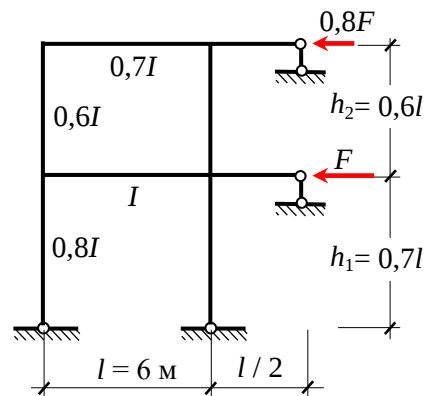


Рис. 2. Расчетная схема стальной двухэтажной рамы

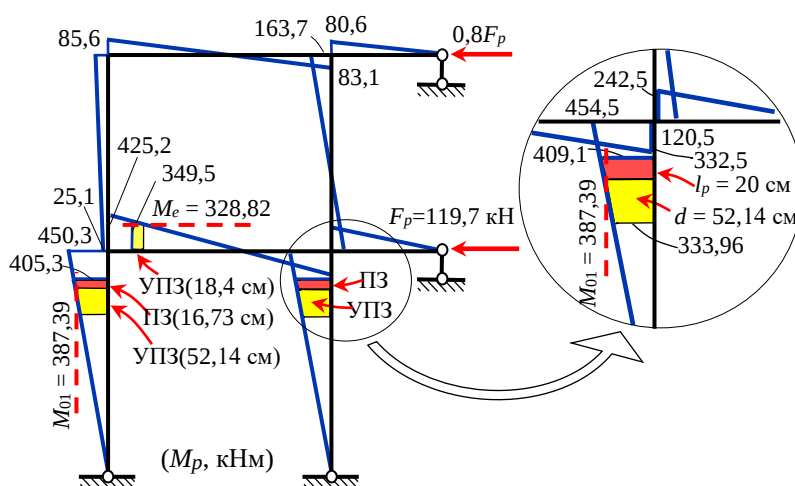


Рис. 3. Эпюра предельных моментов M_p в раме с ПЗ
длиной $l_p = 20$ см (в правой стойке) и $l_p = 16,73$ см (в левой стойке)

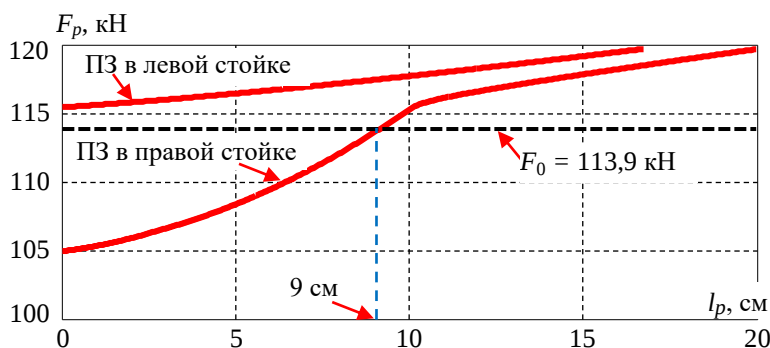


Рис. 4. Зависимости предельной нагрузки от длины пластических зон,
возникающих в нижних стойках каркаса

Максимальные напряжения в наиболее нагруженных элементах конструкции не превосходят величину предела текучести, так как в этих элементах создаются регулируемые по длине пластические зоны равного сопротивления, задаваемые до расчета. Для сравнения приведена разрушающая нагрузка F_0 по методу предельного равновесия (пунктир, см рис. 4). Пластический механизм бокового смещения строился для двух пластических шарниров, расположенных в стойках первого этажа между УПЗ, в которой появилось предельное пластическое напряжение, и зоной усиления длиной $uh_1 = 0,42$ м ($u = 0,1$, коэффициент жесткости $\xi = 1,5$).

Заключение

Предложен новый аналитический подход к статическому расчету стержневых каркасов с учетом пластических зон на основе метода перемещений при действии горизонтальных сил. Разработаны модели напряженно-деформированного состояния стержня в зоне упругопластических деформаций в рамках линейной теории упрочнения материала. Решены задачи расчета стандартных статически неопределимых балок на единичные воздействия, учитывающие наличие специ-

альных зон, включая ПЗ. Построен расчетный алгоритм нелинейного анализа с пошаговой процедурой метода последовательных нагружений.

При моделировании НДС стержня введены две упрощающие предпосылки, согласно которым область физически-нелинейных деформаций стержня разбивается на две зоны (УПЗ и ПЗ). В результате получены зависимости для модуля упругости материала в УПЗ и момента инерции сечения в ПЗ. При выполнении расчетов статически неопределимых балок на единичные воздействия выведены безразмерные БПФ, учитывающие влияние специальных зон.

Сложная нелинейная задача разбита на ряд последовательных линейных задач. На каждой i -й ступени нагружения проводится анализ как для упругой системы с каноническими уравнениями метода перемещений, записанными в приращениях с учетом фиксированных значений БПФ.

Представленная схема статического нелинейного расчета рам с учетом упрочнения материала, базирующаяся на построении БПФ, может быть использована в сейсмическом расчете путем встраивания данной схемы в алгоритм математических моделей по расчету и колебаний сейсмостойких каркасов, в концевых элементах которых (ригелях и колоннах) возникают ПЗ.

Разработанная методика упругопластического расчета рам, вычислительные алгоритмы и программы могут быть использованы в учебном процессе при изучении дисциплины «Нелинейные задачи строительной механики».

Список литературы

1. Paulay, T. Shear Effect on Plastic Hinges of Earthquake Resisting Reinforced Concrete Frames / T. Paulay, I. N. Bull // *Comite Euro-International du beton. Bulletin d'Information*. – 1979. – No. 132. – P. 165 – 172.
2. Ehsani, R. E. Ductility and Moment Redistribution Capacity of Two-Span RC Beams / R. E. Ehsani, M. K. Sh. Sharbatdar, A. Kh. Kheyroddin // *Magazine of Civil Engineering*. – 2019. – Vol. 90, No. 6. – P. 104 – 118. doi: 10.18720/MCE.90.10
3. Plastic Length in Reinforced Concrete Flexural Members / X. Zhao, Y.-F. Wu, A. Yt. Leung, H. F. Lam // *Procedia Engineering*. – 2011. – Vol. 14. – P. 1266 – 1274. doi: 10.1016/j.proeng.2011.07.159
4. Inel, M. Effects of Plastic Hinge Properties in Nonlinear Analysis Reinforced Concrete Buildings / M. Inel, H. B. Ozmen // *Journal of Engineering Structures*. – 2006. – Vol. 28. – P. 1494 – 1502. doi: 10.1016/j.engstruct.2006.01.017
5. Yuan, F. Effect of Load Cycling on Plastic Hinge Length in RC Columns / F. Yuan, Y.-F. Wu // *Journal of Engineering Structures*. – 2017. – Vol. 147. – P. 90 – 102. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.05.046
6. Yuan, F. Modelling Plastic Hinge of FRP-Confined RC Columns / F. Yuan, Y.-F. Wu, C.-Q. Li // *Journal of Engineering Structures*. – 2017. – Vol. 131. – P. 651 – 668. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.10.018
7. Megalooikonomou, K.G. Effect of Yield Penetration on Column Plastic Hinge Length / K. G. Megalooikonomou, S. P. Tastani, S. J. Pantazopoulou // *Journal of Engineering Structures*. – 2018. – Vol. 156. – P. 161 – 174. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.11.003
8. Co-Rotational Planar Beam Element with Generalized Elasto-Plastic Hinges / A. Alhasawi, P. Heng, M. Hjiaj, S. Guezouli, J.-M. Battini // *Journal of Engineering Structures*. – 2017. – Vol. 151. – P. 188 – 205. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.07.085
9. Co-Rotating Rigid Beam with Generalized Plastic Hinges for the Nonlinear Dynamic Analysis of Planar Framed Structures Subjected to Impact Loading / P. Heng, A. Alhasawi, J.-M. Battini, M. Hjiaj // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2019. – Vol. 157. – P. 38 – 49. doi: 10.1016/j.finel.2018.11.003

10. Tidemann, L. A Robust Frame Element with Cyclic Plasticity and Local Joint Effects / L. Tidemann, S. Krenk // *Journal of Engineering Structures*. – 2018. – Vol. 168. – P. 191 – 204. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.04.041
11. Numerical Study on a Fully-Prefabricated Damage-Tolerant Beam to Column Connection for an Earthquake-Resilient Frame / K. Deng, T. Wang, M. Kurata, C. Zhao, K. Wang // *Journal of Engineering Structures*. – 2018. – Vol. 159. – P. 320 – 331. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.01.011
12. Experimental and Analytical Study of Fully Prefabricated Damage-Tolerant Beam to Column Connection for Earthquake-Resilient Frame / K. Deng, D. Zheng, C. Yang, T. Xu // *ASCE Journal of Structural Engineering*. – 2019. – Vol. 145, No. 3. – P. 04018264(10). doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002270
13. ATC-40 Seismic Evaluation and Retrofit of Concrete Buildings. – California. USA, 1996. – 334 p.
14. NZS 3101. Part 2. 2. 2006. Code of Design Practice for the Design of Concrete Structures. – New Zealand Standards Association. – Wellington. – 17 p.
15. Eurocode 8 (EUR 25204 EN – 2012): Seismic Design of Buildings. – Worked examples. – 522 p.
16. Потапов, А. Н. Моделирование напряженно-деформированного состояния стержня при упругопластическом изгибе / А. Н. Потапов, С. В. Штурмин // *Эксперт: теория и практика*. – 2022. – № 4(19). – С. 55 – 59.
17. Петров, В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В. В. Петров. – М. : Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
18. Соколовский, В. В. Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высшая школа, 1969. – 608 с.

Elastic-Plastic Calculation of a Frame for the Action of Horizontal Forces Using the Displacement Method

A. N. Potapov, N. A. Zyambaev✉

*Department of Construction Production and Theory of Structures,
ziambaevna@susu.ru; South Ural State University (National Research University),
Chelyabinsk, Russia*

Keywords: tension; single-span beam; frame; plastic zone; yield strength; elastic-plastic deformations.

Abstract: An analytical approach has been developed to the elastic-plastic calculation of frames under the action of horizontal forces by the displacement method with linear strengthening of the material. For a single-span statically indeterminate beam, two simplifying premises are introduced, according to which the nonlinear region with the fluidity of fibers is divided into special zones: elastic-plastic and plastic. When modeling an elastic-plastic zone, the relationship between stress and strain intensities obeys the Prandtl diagram; when modeling a plastic zone (PZ), it obeys the linear hardening of the material. For single impacts, diagrams of moments in standard statically indeterminate beams, used in the main system of the displacement method, have been constructed. The calculated beam forces contain beam plastic functions (BPFs) that take into account the influence of the PZ. A calculation scheme for nonlinear analysis of frames has been created, representing a step-by-step procedure of successive loadings for the displacement method equations written in increments.

The nonlinear problem is divided into a number of sequential linear problems solved at each stage for fixed BPF values according to the elastic problem scheme. The transition to the next loading stage is accompanied by an increase in the length of the l_{pi} zone with subsequent adjustment of the BPF. The calculation process is completed when the values of the current and specified PZ lengths become equal within the error limits. An example of calculating a steel two-story frame for a horizontal load is considered.

References

1. Paulay T., Bull I.N. Shear Effect on Plastic Hinges of Earthquake Resisting Reinforced Concrete Frames, *Comite Euro-International du beton. Bulletin d'Information*, 1979, no. 132, pp. 165-172. (In Fran.)
2. Ehsani R.E., Sharbatdar M.K.Sh., Kheyroddin A.Kh. Ductility and moment redistribution capacity of two-span RC beams, *Magazine of Civil Engineering*, 2019, vol. 90, no. 6, pp. 104-118. doi: 10.18720/MCE.90.10
3. Zhao X., Wu Y.-F., Leung A.Yt., Lam H.F. Plastic length in reinforced concrete flexural members, *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 1266-1274. doi: 10.1016/j.proeng.2011.07.159
4. Inel M., Ozmen H.B. Effects of plastic hinge properties in nonlinear analysis reinforced concrete buildings, *Journal of Engineering Structures*, 2006, vol. 28, pp. 1494-1502. doi: 10.1016/j.engstruct.2006.01.017
5. Yuan F., Wu Y.-F. Effect of load cycling on plastic hinge length in RC columns, *Journal of Engineering Structures*, 2017, vol. 147, pp. 90-102. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.05.046
6. Yuan F., Wu Y.-F., Li C.-Q. Modelling plastic hinge of FRP-confined RC columns, *Journal of Engineering Structures*, 2017, vol. 131, pp. 651-668. doi: 10.1016/j.engstruct.2016.10.018
7. Megalooikonomou K.G., Tastani S.P., Pantazopoulou S.J. Effect of yield penetration on column plastic hinge length, *Journal of Engineering Structures*, 2018, vol. 156, pp. 161-174. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.11.003
8. Alhasawi A., Heng P., Hjiat M., Guezouli S., Battini J.-M. Co-rotational planar beam element with generalized elasto-plastic hinges, *Journal of Engineering Structures*, 2017, vol. 151, pp. 188-205. doi: 10.1016/j.engstruct.2017.07.085
9. Heng P., Alhasawi A., Battini J.-M., Hjiat M. Co-rotating rigid beam with generalized plastic hinges for the nonlinear dynamic analysis of planar framed structures subjected to impact loading, *Finite Elements in Analysis and Design*, 2019, vol. 157, pp. 38-49. doi: 10.1016/j.finel.2018.11.003
10. Tidemann L., Krenk S. A robust frame element with cyclic plasticity and local joint effects, *Journal of Engineering Structures*, 2018, vol. 168, pp. 191-204. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.04.041
11. Deng K., Wang T., Kurata M., Zhao C., Wang K. Numerical study on a fully-prefabricated damage-tolerant beam to column connection for an earthquake-resilient frame, *Journal of Engineering Structures*, 2018, vol. 159, pp. 320-331. doi: 10.1016/j.engstruct.2018.01.011
12. Deng K., Zheng D., Yang C., Xu T. Experimental and analytical study of fully prefabricated damage-tolerant beam to column connection for earthquake-resilient frame, *ASCE Journal of Structural Engineering*, 2019, vol. 145, no. 3, pp. 04018264(10). doi: 10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002270
13. ATC-40 Seismic Evaluation and retrofit of concrete buildings. California. USA, 1996, 334 p.

14. NZS 3101. Part 2. 2. 2006. Code of design practice for the design of concrete structures. New Zealand Standards Association. Wellington, 17 p.
15. Eurocode 8 (EUR 25204 EN – 2012): Seismic design of buildings. Worked examples, 522 p.
16. Potapov A.N., Shturmin S.V. [Modeling the stress-strain state of a rod during elastoplastic bending], *Ekspert: teoriya i praktika* [Expert: theory and practice], 2022, vol. 4, no. 19, pp. 55-59. (In Russ., abstract in Eng.)
17. Petrov V.V. *Nelineynaya inkremental'naya stroitel'naya mekhanika* [Nonlinear incremental structural mechanics], Moscow: Infra-Inzheneriya, 2014, 480 p. (In Russ.)
18. Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti* [Plasticity theory], Moscow: Vysshaya shkola, 1969, 608 p. (In Russ.)
-

Elastisch-plastische Berechnung des Rahmens auf die Wirkung horizontaler Kräfte nach Verschiebungsmethode

Zusammenfassung: Es ist ein analytischer Ansatz zur elastisch-plastischen Berechnung von Rahmen unter Einwirkung horizontaler Kräfte nach der Verschiebungsmethode mit linearer Verstärkung des Materials entwickelt. Für einen einfeldrigen statisch unbestimmten Träger sind zwei vereinfachende Prämissen eingeführt, nach denen der nichtlineare Bereich mit der Fließfähigkeit der Fasern in spezielle Zonen unterteilt ist: elastisch-plastische und plastische. Bei der Modellierung der elastisch-plastischen Zone folgt die Abhängigkeit zwischen Spannungs- und Dehnungsintensitäten dem Prandtl-Diagramm, während sie bei der Modellierung der plastischen Zone (PZ) der linearen Verfestigung des Materials folgt. Für Einzelstöße sind Diagramme der Momente in statisch unbestimmten Standardträgern konstruiert, die im Hauptsystem der Verschiebungsmethode verwendet werden. Die Bemessungskräfte der Träger enthalten plastische Trägerfunktionen (BPFs), die den Einfluss von PZ berücksichtigen. Es ist ein Berechnungsschema für die nichtlineare Rahmenanalyse aufgestellt, das ein schrittweises sequenzielles Belastungsverfahren für die inkrementell geschriebenen Gleichungen der Verschiebungsmethode darstellt. Das nichtlineare Problem ist in eine Reihe sequentieller linearer Probleme unterteilt, die in jeder Phase für feste BPF-Werte gemäß dem elastischen Problemschema gelöst werden. Der Übergang zur nächsten Belastungsstufe geht mit einer Vergrößerung der Zonenlänge l_{pi} mit anschließender Anpassung der BPF begleitet. Der Berechnungsprozess ist abgeschlossen, wenn die Werte der aktuellen und der angegebenen PZ-Länge innerhalb der Fehlergrenzen gleich sind. Es ist ein Beispiel für die Berechnung des zweistöckigen Stahlrahmens auf die horizontale Belastung betrachtet.

Calcul élastoplastique d'un cadre sur l'action des forces horizontales par la méthode de déplacement

Résumé: Est élaboré l'approche analytique du calcul élasto-plastique des ossatures sous l'action d'efforts horizontaux par la méthode du déplacement avec renforcement linéaire du matériau. Pour une poutre à travée unique statiquement indéterminée, deux prémisses simplificatrices sont introduites, selon lesquelles la région non linéaire avec la fluidité des fibres est divisé en zones spéciales: élastoplastique et plastique. Lors de la modélisation d'une zone élastoplastique, la relation entre les intensités de contrainte et de déformation est soumise au diagramme de Prandtl; lors de la modélisation d'une zone plastique (ZP), elle est soumise au renforcement linéaire du

matériau. Pour les impacts uniques sont construits des diagrammes de moments dans des poutres standard statiquement indéterminées, utilisées dans le système principal de la méthode de déplacement. Les forces calculées des poutres contiennent des fonctions plastiques de poutre (FPP) qui prennent en compte l'influence de ZP. Est créé le schéma de calcul pour l'analyse non linéaire des cadres, représentant une procédure étape par étape de chargement séquentiel pour les équations de la méthode de déplacement, écrites par incréments. Le problème non linéaire est divisé en un certain nombre de problèmes linéaires séquentiels résolus à chaque étape pour des valeurs FPP fixes selon le schéma de problème élastique. Le passage à l'étape de chargement suivante s'accompagne d'une augmentation de la longueur de la zone l_{pi} avec ajustement ultérieur de la FPP. Le processus de calcul est terminé lorsque les valeurs des longueurs ZP actuelles et spécifiées deviennent égales dans les limites d'erreur. Est examiné un exemple de calcul d'une charpente en acier à deux étages sur une charge horizontale.

Авторы: *Потапов Александр Николаевич* – доктор технических наук, член-корреспондент Российской академии архитектуры и строительных наук (РААСН), профессор кафедры строительного производства и теории сооружений; *Замбаев Никита Александрович* – старший преподаватель кафедры строительного производства и теории сооружений, ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)», Челябинск, Россия.