

УДК 584.736

**ОБ ОДНОМ ФУНДАМЕНТАЛЬНОМ СВОЙСТВЕ КОНТАКТА (УДАРА)
ЖЕСТКИХ УПРУГИХ ТЕЛ****© 2024 г. Шевченко В. Я., Орыщенко А. С., Перевислов С. Н.***НИЦ «Курчатовский институт» – ЦНИИ КМ «Прометей»,
Россия, 191015, Санкт-Петербург, Шпалерная ул., 49
e-mail: shevchenko@isc.nw.ru*

Поступила в редакцию 12.02.24

После доработки 10.07.24

Принята к публикации 11.07.24

Если мы предположим, что два тела касаются и изменяется только давление между ними, то деформация материала изменяется пропорционально кубическому корню из этого нашего давления (Генрих Герц, 1884¹).

Сближение упругих тел пропорционально давлению в степени 2/3, а не давлению в первой степени (М.С. Лейбензон, 1947²).

Укажем, что зависимость вида $h = \text{const } F^{2/3}$ или $F = \text{const } h^{3/2}$ имеет место не только для шаров, но и при соприкосновении других конечных тел (Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц, 1954³).

DOI: 10.31857/S0132665124040028, EDN: QCLKWZ

Прочность характеризует способность твердых тел сохранять целостность под действием внешних механических нагрузок. Однако нередко термин «прочность» звучит и при определении деформации тела под нагрузкой. Очевидно, что эти два процесса взаимосвязаны. Учение о прочности развивалось первоначально на основе теории упругости и пластичности в рамках механики сплошных сред. Известно много различных теорий и представлений за последние 300–400 лет (более ранние свидетельства не сохранились). Многообразие практических задач привело к построению большого количества математических моделей, отражающих ту или иную сторону процесса деформации и разрушения при различных начальных условиях. Перечислить главные из них не представляется возможным. Базовые принципы этих представлений изложены в известном труде Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. «Механика сплошных сред».

Важным этапом развития представлений о прочности является переход к анализу атомно-молекулярных взаимодействий и расчеты энергий атомного взаимодействия.

Общее определение динамической фрагментации охватывает любой процесс, который разделяют массу материала на дискретные области, например, фрагментация из-за хрупкого разрушения при ударной нагрузке. Предсказание размера фрагмента является необходимым условием для понимания процесса. Площадь

¹ Hertz Н. Ueber die Berührung fester elastischer Körper // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1882. V. 92. P. 156–171.

² Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. – Москва, 1947. 173 с.

³ Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. – Гостехиздат, 1953. 676 с.

поверхности или границы раздела, создаваемые в процессе фрагментации, определяются равновесным балансом энергии поверхности или границы раздела и локальной инерциальной или кинетической энергией. Размер фрагмента связан с площадью поверхности раздела. Концепция энергетического баланса ненова. Одним из первых исследователей проблемы контакта жестких упругих тел был Г. Герц [1]. Он установил, что если два данных тела соприкасаются и изменяется только давление между ними, то деформация материала изменяется пропорционально кубическому корню из этого полного давления.

Последующие затем многочисленные теоретические и экспериментальные работы (часть этих работ приведены в ссылках эпиграфа) позволили автору [2] построить теорию на мезоуровне. Для размера фрагмента d получено

$$d = \left(\frac{r_0^{1/2} \cdot K_{1C}}{\rho \cdot c \cdot \varepsilon} \right)^{2/3} \quad (1)$$

где ε — скорость деформации, K_{1C} — вязкость разрушения материала.

На атомном уровне это проблема для металлов была исследована в [3]. На основе теоретических расчетов было показано, что соотношение энергия связи — расстояние можно количественно описать в терминах простого двухпараметрического масштабирования универсальной функции уравнения состояния и универсального объема на атом.

Была определена характерная длина l , которая описывает район сильного атомного взаимодействия. Экспериментальные данные могут быть преобразованы в универсальную функцию F , которая связана с давлением P и объемом V как

$$F \mu V^{2/3} \times \rho(V) \quad (2)$$

и является универсальным соотношением (для металлов при сжатии). Масштаб длины l , характеризующий диапазон, в котором действуют сильные силы, входит в соотношение атомного размера ячейки r_{wse} (ячейка Вагнера—Зейтца).

$$h = r_{wse}/l, \quad (3)$$

которая определяет меру ангармоничности кристалла и может служить оценкой порога разрушения. Практически одновременно, в том же 1984 г., вышла работа [4], в которой исследована связь предельной упругой деформации с энергией диссоциации. Для решения общей задачи исследовали потенциал Морзе.

$$U(r) = D_{cv} \times \exp[K(r - r_m)] \times \{\exp[K(r - r_m)]\}^{-3/2} \quad (4)$$

$D_{cv} = Q_{cp}$ — энергия диссоциации, r_m — равновесная длина связи, $K = \sqrt{\frac{K_r}{r D_{cv}}}$.

Силовая постоянная K характеризует растяжение связи [5]. Опуская детали расчетов из [4] и принимая во внимание, что сила взаимодействия необходимая для разрушения связи F_{max} , равна:

$$F_{max} = \left(\frac{d(U)}{dr_m} \right) / dr_m, \quad (5)$$

а модуль Юнга

$$E = \frac{dF}{dr} \times r_{\max}, \text{ (где } r = r_{\max} \text{)}, \quad (6)$$

получаем

$$F_{\max} = 0,25 \left(\frac{U_l}{r_m} \right) \sqrt{\lambda \cdot m \cdot D_{\text{св}}} \quad (7)$$

$$E = \left(\frac{U_l^2}{r_m} \right) \cdot m \quad (8)$$

$$\varepsilon_p = (\ln r / U_l) \sqrt{\lambda \cdot m \cdot D_{\text{св}}} \quad (9)$$

где ε_p — предельная деформация до разрушения, m — средняя масса атомов, U_l — продольная скорость звука в веществе.

Из приведенной модели следует:

$$\sigma_p = 0,25 \cdot U_l \cdot \rho \sqrt{\lambda \cdot m \cdot D_{\text{св}}} \quad (10)$$

$$E = \rho \cdot U_l^2 \quad (11)$$

$$\varepsilon_p = (\ln r / U_R) \sqrt{\lambda \cdot D_{\text{св}} / m} \quad (12)$$

где σ_p — прочность на разрушение, ρ — плотность вещества, а $M = 1$ г/моль вещества.

Замечательно, что результаты расчетов, полученных по макромодели (механика твердого тела) и микромоделю (из энергии межатомного взаимодействия) качественно коррелируют и приводят к одним и тем же аналитическим зависимостям сближения (линии разрушения) от давления на границе соприкосновения. Этот вывод справедлив для хрупких тел и соответствует базовому принципу теории Гриффитса, согласно которому трещина станет лавинообразно расширяться, если скорость освобождения упругой деформации превышает прирост поверхностной энергии трещины [6]. Формула Гриффитса для прочности упругого тела с трещиной длины l позволяет оценить теоретическую прочность $s_{\max}$, если рассматривать длину трещины до размеров среднего межатомного расстояния a_0 .

Тогда

$$\sigma_{\max} = \lambda \sqrt{E \cdot \gamma / a_0} \quad (13)$$

где λ — коэффициент формы, а g — поверхностное натяжение.

Важно, что согласно методу Гриффитса прочность хрупкого тела на одностороннее и всестороннее растяжение одинакова. Используем это соотношение в виде:

$$\sigma \sqrt{a_0} = \lambda \sqrt{E \cdot \gamma} \quad (14)$$

$$\sigma \sqrt{a_0} = \text{const} \quad (15)$$

В таком виде это соотношение хорошо соблюдается для хрупких и квазихрупких материалов и называется коэффициентом интенсивности напряжений K_{IC} и имеет размерность силы, деленный на длину в степени трех вторых [7]. Понятно, что в реальных условиях коэффициент интенсивности напряжений будет

зависеть от формы тела, внешних нагрузок, распределения и размера трещин и их состава (химического). Очевидна эквивалентность двух подходов, что указывает на прямую зависимость между теорией Гриффитса и современными представлениями теории разрушения. Подробное изучение процессов, благодаря которым материалы оказывают сопротивление растрескиванию, приводит к разработке новых сверхпрочных материалов.

Существует множество подходов, в которых уделяется внимание тому или иному явлению, или отдельно деталям процесса разрушения (в действительности имеются тысячи практических задач и, соответственно, граничных условий), которые могут быть главными в процессе разрушения. Поэтому в сочетании с подходами базовой механики разрушения, и как дополнение к ней, указанные подходы представляют большую ценность [8]. Рассмотрим основные среди них [9].

Критерий Стиглица включает несколько параметров:

$$G = EH_k/\rho, \quad (16)$$

где G — модуль сдвига, E — модуль упругости, H_k — твердость по Кнуппу, ρ — плотность керамической преграды.

Известен также критерий Суи-Кил Чанга, по которому оценивают баллистическое качество брони как отношение прочности к коэффициенту трещиностойкости K_{lc} . Из этих представлений следует, что минимальный размер фрагмента разрушения равен:

$$a = \frac{6 \cdot (1 - \mu^2) \cdot K_{lc}^2}{\sigma_{np}^2 \cdot \Psi} \quad (17)$$

где μ — коэффициент Пуассона, σ_{np}^2 — предел прочности при одноосном сжатии, Ψ — коэффициент порядка единицы. Эмпирический критерий Нешпора, способности керамического материала к поглощению и рассеянию энергии ударника:

$$E_{уд} = \frac{0,36 \cdot H_V \cdot C_l \cdot E}{K_{lc}^2} \quad (18)$$

где H_V — твердость по Виккерсу, C_l — скорость распространения звуковой волны, E — модуль Юнга.

Существенным недостатком вышеперечисленных критериев является использование для расчетов измеряемых величин не физических моделей, а экспериментальных корреляций, что позволяет делать только качественные оценки. Кроме того результаты измерений твердости связаны с условиями измерения (величина нагрузки, тип пирамиды, состояние поверхности и т.п.) и могут сильно различаться. Важно также и то, что различные керамические вещества довольно заметно отличаются по упруго пластическим свойствам. В зависимости от диаграммы состояния Р—Т—х переход от хрупкого разрушения к пластическому может происходить при разных давлениях и температурах. Для пластических тел сопротивление прониканию, согласно теории Алексеевского—Тейта [10]:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \rho_{np} \cdot V_y^2 + R \quad (19)$$

где ρ — плотность преграды, V_y — скорость ударника, R — прочностное сопротивление преграды, соответствующее динамической прочности H_d .

Более детально с учетом упруго-пластических свойств керамики проблема разрушения рассмотрена в [11]. Для области упруго-трещинообразующей, что и соответствует большинству керамик (B_4C , BN , AlB_{12} , «Идеал» и т.п.) зависимость размеров каверны в относительных единицах равняется:

$$\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} = 9 \cdot (1 - \mu) \cdot \frac{T}{E} \quad (20)$$

или

$$R_t = 2 \cdot T \left[E \cdot 9 \cdot (1 - \mu) \cdot T \right]^{2/3} \quad (21)$$

где E — модуль Юнга, s — прочность на растяжение, μ — коэффициент Пуассона, T — температура, R — прочностное сопротивление преграды.

Большинство предложенных расчетов связаны с неопределенностью формулировок некоторых «констант» механики, таких параметров как твердость, прочность на разрыв и т.п., а также существенным влиянием на результаты измерений условий измерений. Для многих критериев очевиден эмпирический характер, мало связанный с физической моделью разрушения конкретного материала.

Практическая ценность развития физических представлений определяется возможностью получить оценку поведения различных материалов при динамическом нагружении, исходя из представлений [4]. В самом деле, для длинного, тонкого, недеформированного стержня (длина l_c), энергия которого расходуется на диссоциацию (разрыв межатомных связей) вещества найдены:

$$l_n = l_c \cdot a \sqrt[3]{\frac{\rho \cdot c \cdot V_c^2}{\rho \cdot V_l^2}} \quad (22)$$

где $a = (\ln 2)^{3/2}$, другие обозначения из [12].

Полученное выражение позволяет построить ряд материалов по их способности противостоять нагружению. Приведенное выше выражение вызвало сомнение у ряда исследователей, например в [13]. Следует отметить, что скептический комментарий авторов связан с неверно прочитанной формулой, т.к. на самом деле она отражает отношение глубины пробития к длине стержня, а не с давлением в зоне контакта.

Много усилий было потрачено на развитие физических представлений о процессе удара во всем диапазоне скоростей нагружения и упруго-пластических свойств преграды. Частичный обзор этих работ приведен в [13].

К настоящему времени сложилось сложная многостадийная картина проникновения ударника в преграду в широком диапазоне скоростей нагружения и механизмов диссипации энергии на каждой стадии. Большую роль в сопротивлении удару играет скорость звука, т.к. многие процессы диссипации связаны с ней, и определяются через комбинацию упругого разгрузки волны Рэлея, скорость распространения трещины, диссоциацию. Впервые эти идеи были развиты в [3, 4] и в последующем активно развивались в [14]. Эти работы в основном опирались на представления, развитые в [10, 11] для высоких скоростей нагружения металлических (пластических) материалов. Однако ряд материалов (прежде всего керамики) существенно отличается по свойствам от металлов и других веществ, высокой прочностью, модулем Юнга, модулем сдвига и способностью к хрупкому разрушению без этапа пластического течения. Собственно общепринятые определения хрупкости и означают нарушение целостности объекта без пластических сдвигов [7].

Поверхностную энергию g можно вычислить из энергии связи между атомами. Согласно [7]:

$$g = U_c \frac{m_o S_o}{\rho n}, \quad (23)$$

где m_o — масса одного атома; S_o — общее число связей в твердом теле объема V_1 ; n — число ближайших соседей (координационное число). Эта оценка позволяет определить верхний предел возможностей прочности твердых тел.

Формула Гриффитса для прочности упругого тела с трещиной длиной l позволяет оценить теоретическую прочность, если экстраполировать формулу (15) на трещины с размером порядка среднего межатомного расстояния $l-a_o$. Тогда

$$s_{\max} = l_1 \times \sqrt{E\gamma / a_o}. \quad (24)$$

При определенной внешней нагрузке в бесконечно малой окрестности некоторой точки O контура трещины произошло местное разрушение, в результате которого контур трещины переместился в новое положение. Напряжение, деформация и смещение вблизи точки O описываются уравнениями, в которые входят в качестве параметров коэффициенты интенсивности напряжений K_I , K_{II} , K_{III} , описывающие различные разрушения, сдвиг, смещение, разрыв. Начало разрушения определяется только этими параметрами, т.е. существует замкнутая поверхность

$$f(K_I, K_{II}, K_{III}) = 0 \quad (25)$$

такая, что как только конец вектора (K_I, K_{II}, K_{III}) попадает на эту поверхность, в точке O происходит локальное разрушение [7]. Для трещин основных типов критерий локального разрушения принимает вид

$$K_I = K_{IC}; K_{II} = 0, K_{III} = 0.$$

Для трещин нормального разрыва зависимость разрушающей нагрузки p от длины l будет [7]:

$$p = K_{IC} / \sqrt{\pi \cdot l}. \quad (26)$$

Росту трещин отвечает увеличение силы p , что свидетельствует об устойчивом квазистатическом увеличении трещин.

Большинство важнейших конструкционных материалов относится к композиционным материалам, состоящих из нескольких компонентов. В этом плане можно выделить сплавы металлов, стеклопластики, ситаллы, металлы и керамику, вещества, содержащие в себе графит, фуллерены, углеродные нити и т.п. Принято [7] для описания разрушения таких веществ — композитов вводить понятие структурной ячейки, т.е. элемента объема характерного по свойствам и периодически повторяющийся во всем объеме тела. Свойства материала естественно, будут определяться одинаково во всем объеме числом таких структурных элементов, тогда:

$$K_{IC} = 1 \times s_o \sqrt{d_o}, \quad (27)$$

где s_o — средняя прочность на разрыв структурной ячейки с характерным размером d_o , 1 — множитель порядка единицы.

Для большинства хрупких тел наблюдается эффект «самоподдерживающегося разрушения». Если некий объем хрупкого тела подвергнуть всестороннему сжатию (начальных сдвиговых напряжений не наблюдается), а затем освободить поверхность образца от нагрузки, то вглубь материала начнет распространяться волна разгрузки. Если запасенная телом потенциальная энергия упругого сжатия достаточно велика, то сдвиговые микротрещины, находящиеся в фронте разгрузки, становятся неустойчивыми и их динамическое развитие приводит к разрушению тела. Необходимый запас упругой энергии может быть создан технологически — остаточные напряжения при отжиге, росте кристаллов, обработки поверхности и т.п. Разрушенный материал представляет собой множество отдельных частиц, движущихся со скоростью относительно поверхности покоящегося неразрушенного тела. Самоподдерживающееся разрушение сопровождается сильным звуком и разбрасыванием разрушенного вещества. При самоподдерживающемся разрушении хрупкого тела в поверхностную энергию переходит лишь некоторая часть упругой энергии тела, а остальная часть переходит в кинетическую энергию осколков и энергию образования этих осколков.

Эффективная поверхностная энергия (поверхностное натяжение шаровидной частицы радиуса r) будет равна $4\pi r^2$, а распределение частиц по размерам радиуса r_o , определяемого как [7]

$$r_o = 3g/(r \times \Pi), \quad (28)$$

будет

$$D^2 = \frac{3\gamma - (\rho_o \Pi r_o)}{(3\rho_o r_o \Pi) - 3\gamma} r_o^2. \quad (29)$$

Волна разрушения возникает в том случае, когда удельная энергия образца превзойдет величину D , т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial V} \geq D. \quad (30)$$

Здесь ∂U изменение упругой энергии тела на всем изменении объема ∂V . Условие (30) является естественным обобщением условия Гриффитса на объемное разрушение.

В 1881 г. Генрих Герц решил проблему квазистатического соударения двух различных упругих эллипсоидов. Позднее А. Динник в 1909 г. [14] проверил экспериментально это решение [7] и показал, что для хрупких материалов решение Герца перестает быть справедливым, как только на плоскости контакта появляются первые крупные трещины. В.Я. Шевченко в 2020 г. [12] показал, что при определенных граничных условиях наблюдается «обратный» конус Герца. В соответствии с экспериментальными наблюдениями процесс разрушения можно представить так. В начале контактная площадка увеличивается с ростом силы N и вес величины можно найти из решения Герца. Первые определенные трещины появляются вдоль контура площадки диаметром d_o , как только напряжение s достигнет значений прочности материала на разрыв. Следовательно, требуется некоторый запас упругой энергии, чтобы могла возникнуть достаточно глубокая коническая трещина. Края области контакта разрушаются, и вся энергия начинает действовать на объем с характерным радиусом a_o , где и формируется главная коническая область. Таким образом, создается запас упругой энергии для возникновения самоподдерживающегося разрушения. Тогда диаметр

конической трещины будет зависеть от a , N , K_{IC} и коэффициента Пуассона ν , следовательно [7]:

$$d = \left(\frac{N}{K_{IC}} \right)^{2/3} j_1 \left(\frac{a K_{IC}^{2/3}}{N^{2/3}}, \nu \right), \quad (31)$$

где j_1 – произвольная функция своих аргументов.

Экспериментально наблюдаются для хрупких тел и звездистые магистральные трещины. По аналогии с [15] приведем результат:

$$K_{IC} = 3ns\sqrt{\pi \cdot l}, \quad (32)$$

при $n^3 \gg 10$, $f(n) = 2\sqrt{n}$, где n – число магистральных трещин, l – длина трещины, s – напряжение на разрыв.

Влиянием масштабного эффекта можно пренебречь только в том случае, когда его размер существенно меньше размера пластической области вблизи конца большой (макроскопической) трещины, находящийся в предельном состоянии). Существует оптимальная толщина пластины n_0 при которой вязкость разрушения, a , следовательно, и прочность, будет максимальной при прочих равных условиях. Поэтому, если монолитный образец толщиной n заменить многослойным образцом той же толщины (слои склеенный каким-либо связующим), то для заданной толщины будет достигнута максимально возможная прочность. Таким образом, создание многослойных конструкций является одним из путей повышения удельной прочности и надежности.

В керамических материалах под воздействием девиаторных напряжений происходит разрушение практически без пластической деформации. Деформация хрупких материалов сопровождается также увеличением объема в результате растрескивания. В нормальных условиях растрескивание начинается при напряжениях сжатия порядка $1/3$ – $2/3$ предела упругости [16]. При дальнейшем увеличении сдвиговых напряжений происходит распространение трещин, материал разрушается. В области разрушенных состояний материал ведет себя подобно песку. При этом сопротивление сдвигу контролируется трением и возрастает пропорционально действующему давлению.

Таким образом, совокупность экспериментальных и расчетных данных указывает на возможность образования волн разрушения при ударном сжатии однородных хрупких материалов. Скорость этой волны является около звуковой и убывает по мере распространения.

Проведенное рассмотрение отдельных аспектов прочности хрупких тел (керамик) подтверждает универсальную зависимость деформации от давления, вытекающую из фундаментальных особенностей межатомного взаимодействия и переходящего в микро- и макроскопический масштаб. Полученные выводы весьма полезны и плодотворны для создания реальных конструкций с оптимальными свойствами.

Работа по анализу взаимосвязи между теорией Гриффитса и современными представлениями теории разрушения выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда «Новые физические и химические принципы технологии металлических, металлокерамических и керамических материалов с управляемой макро-, микро- и наноструктурой и уникальными служебными

характеристиками» (№ 21-73-30019); работа по формированию волн разрушения при ударном сжатии однородных хрупких материалов проведена за счет финансовой поддержки гранта Российского научного фонда «Материалы для бронезащиты нового поколения на основе реакционно-диффузионных процессов Тьюринга для синтеза алмаз-карбидкремниевых композитов со структурой трижды периодических поверхностей минимальной энергии» (№ 20-13-00054-П).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hertz H.* Ueber die Berührung fester elastischer Körper // *Journal für die reine und angewandte Mathematik.* 1882. V. 92. P. 156–171.
2. *Grady D.E.* Local inertial effects in dynamic fragmentation // *Journal of Applied Physics.* 1982. V. 53. № 1. P. 322–325.
3. *Rose J.H., Smith J.R., Guinea F., Ferrante J.* Universal features of the equation of state of metals // *Physical Review B.* 1984. V. 29. № 6. P. 2963–2969.
4. *Шевченко В.Я., Изотов А.Д., Лазарев В.Б., Жаворонков Н.М.* Энергия диссоциации и предельная упругая деформация в модели двухчастичного взаимодействия // *Неорганические материалы.* 1984. Т. 20. № 6. С. 1047–1052.
5. *Бартенев Г.М.* Сверхпрочные и высокопрочные неорганические стекла // М.: Стройиздат. — 1974. 240 с.
6. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solids // *Philosophical transactions of the royal society of london. Series A, containing papers of a mathematical or physical character.* 1921. V. 221. № 582–593. P. 163–198.
7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. Наука, Москва. 1974. 640 с.
8. *Irwin G.R.* Fracture. *Encyclopaedia of Physics*, Vol. VI // Springer-Verlag. 1958. V. 1. № 168. P. 9.
9. *Гаршин А.П., Гропянов В.М., Зайцев Г.П., Семенов С.С.* Керамика для машиностроения // М.: Научтехлитиздат. 2003. 329 с.
10. *Tate A.A.* A theory for the deceleration of long rods after impact // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* 1967. V. 15. № 6. P. 387–399.
11. *Forrestal M.J., Longcope D.B.* Target strength of ceramic materials for high-velocity penetration // *Journal of Applied Physics.* 1990. V. 67. № 8. P. 3669–3672.
12. *Shevchenko V.Y., Oryshchenko A.S., Perevislov S.N., Sil'nikov M.V.* About the criteria for the choice of materials to protect against the mechanical dynamic loading // *Glass Physics and Chemistry.* 2021. V. 47. P. 281–288.
13. *Isbell W.M., Anderson C.E., Asay J.R., Bless S.J., Grady D.E.* Penetration mechanics research in the former Soviet Union // *Science Application International Corp, San Diego, CA, USA.* 1992. 251 p.
14. *Динник А.Н.* Удар и сжатие упругих тел, Киев: Типография С.В. Кульженко. 1909. VIII. 120 с.
15. *Партон В.З., Черепанов Г.П.* Механика разрушения, в книге *Механика в СССР за 50 лет*, М.: Издательство «Наука». 1972. Т. 3. С. 362–464.
16. *Канель Г.И., Фортков В.Е., Разоренов С.В.* Ударные волны в физике конденсированного состояния. // *Успехи физических наук.* 2007. Т. 177. № 8. С. 809–830.