

УДК 004.4

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСОВ NUT3D, VIC3D, ЭГАК И МИМОЗА ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В ГАЗОВЫХ СИСТЕМАХ С КОНТАКТНОЙ ГРАНИЦЕЙ В ВИДЕ ШЕВРОНА

М. Д. Брагин^а, Н. В. Змитренко^а, В. В. Змушко^б, П. А. Кучугов^{а, *}, Е. В. Левкина^б,
К. В. Анисифоров^б, Н. В. Невмержицкий^б, А. Н. Разин^б, Е. Д. Сеньковский^б,
В. П. Стаценко^б, В. Ф. Тишкин^а, Ю. В. Третьяченко^б, Ю. В. Янилкин^б

^аФедеральное государственное учреждение “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук”,

125047 Москва, Миусская пл., д. 4, Россия

^бРоссийский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,

607188 Нижегородская обл., Саров, пр. Мира, 37, Россия

*E-mail: pkuchugov@gmail.com

Поступила в редакцию: 18.07.2023

После доработки: 25.07.2023

Принята к публикации: 30.07.2023

В работе представлены расчетные и экспериментальные исследования эволюции турбулентного перемешивания в трехслойных газовых системах при развитии гидродинамических неустойчивостей Рихтмайера-Мешкова и Кельвина-Гельмгольца под действием ударных волн. Одна из контактных границ газов была плоской, вторая — с изломом в виде шеврона. Численные расчеты выполнены как без начальных возмущений контактных границ веществ, так и в присутствии возмущений. Показано, что шероховатость контактной границы существенно влияет на ширину зоны перемешивания.

Ключевые слова: турбулентное перемешивание, математическое моделирование, гидродинамические неустойчивости, ударная труба

DOI: 10.31857/S0132347424010061 **EDN:** НКМРЕМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидродинамические неустойчивости Рихтмайера-Мешкова (НРМ) [1, 2], Кельвина-Гельмгольца (НКГ) [3], Рэлея-Тейлора (НРТ) [4] и вызванное ими турбулентное перемешивание веществ (ТП) могут приводить к диссипативным потерям и к нарушению симметрии схождения мишеней управляемого термоядерного синтеза (ИТС), что в итоге не позволяет получить зажигание горючего [5]. Поэтому исследования этих сложнейших течений в настоящее время интенсивно проводятся как экспериментально, так и численно во многих научных центрах. Разрабатываемые математические коды всегда требуют экспериментальной проверки.

На начальном этапе имеющиеся на контактной границе веществ малые возмущения под действием неустойчивостей начинают расти и довольно быстро выходят на насыщение и нелинейную стадию, на которой происходит взаимодействие и разрушение различных мод и формирование зоны турбулентного перемешивания. Законы развития этой зоны пере-

мешивания, а также варианты ее взаимодействия с классическими сильными и слабыми разрывами представляют существенный интерес [6–8]. На протяжении десятилетий одним из основных вопросов остается вопрос о влиянии начальных (случайных или детерминированных) возмущений на переход к развитому перемешиванию.

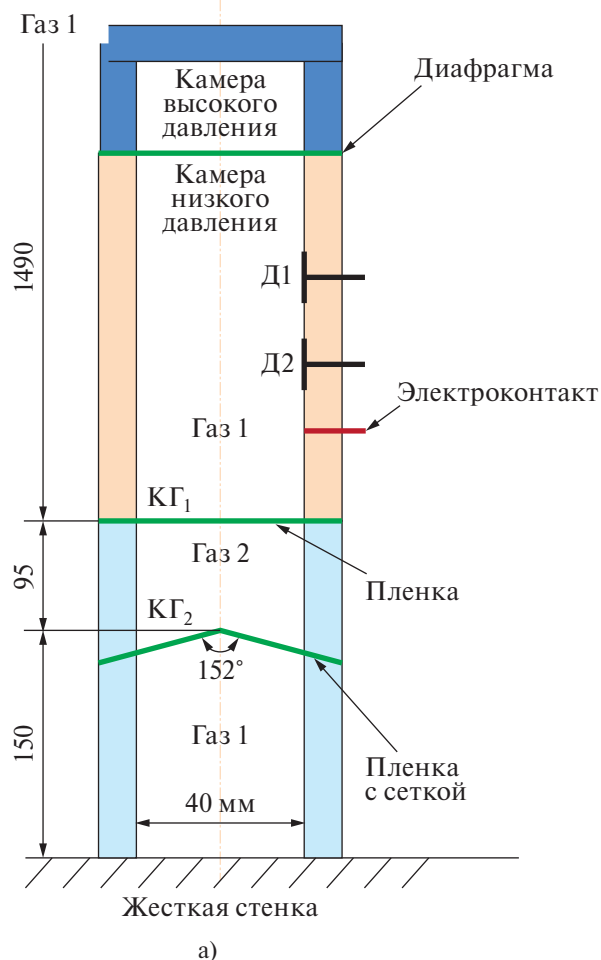
Ориентируясь на задачи ИТС, значительный интерес представляют многослойные системы, в которых возможно не только развитие НРМ, НКГ, но также взаимодействие вторичных волн с зонами перемешивания, развитие вторичных неустойчивостей и т.д. Такой комплексной задачей являются, например, трехслойные газовые системы в ударной трубе. Контактные границы между газами могут иметь различную форму, газы могут иметь различное соотношение плотностей (воздух-SF₆, воздух-He, воздух-Xe), конец трубы может быть закрыт или открыт (прошедшая ударная волна отражается от стенки и повторно взаимодействует с зонами перемешивания). Все эти вариации приводят к суще-

ственно различающимся волновым картинам и реализуют различные режимы роста начальных возмущений. Исследованию этих задач посвящено большое число работ [9–19], где экспериментально и численно изучаются различные аспекты реализующегося течения.

В данной работе представлены задачи этого типа, которые можно рассматривать как хорошую возможность взаимной проверки диагностических данных, получаемых в натурных экспериментах и численных кодах, использующихся для моделирования гидродинамических неустойчивостей.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Эксперименты проводились на ударной трубе в РФЯЦ-ВНИИЭФ (рис. 1). Техника эксперимента и диагностические методики подробно описаны в предыдущих сходных работах [9, 15, 16]. Ударная труба имеет сечение внутреннего канала 40×40 мм, состоит из камеры высокого давления (драйвера), камеры низкого давления и измерительной секции,



состоящей из двух оптически прозрачных отсеков, между которыми в ряде опытов устанавливалась 3D- или 2D-сетка из медной проволоочки или из полихлорвиниловых нитей. Контактная граница, на которую накладывалась сетка ($КГ_2$), имела угол излома 152° . На сетку накладывалась тонкая (34 мкм) полимерная пленка. Размер ячейки 3D-сетки составлял $5 \times 5 \text{ мм}$, толщина медных проволоочек — $0,1 \text{ мм}$, толщина нитей ПВХ — $0,06 \text{ мм}$. В 2D-сетке поперечный ряд проволоочек отсутствовал, расстояние между проволоочками составляло 5 мм .

Верхний отсек измерительной секции ($КГ_1$) отделялся от камеры низкого давления трубы тонкой ($3\text{--}4 \text{ мкм}$) плоской полимерной пленкой. Камеры высокого и низкого давления трубы разделялись между собой диафрагмой из лавсана толщиной $\sigma \approx 0,1 \text{ мм}$. Камера высокого давления заполнялась сжатым гелием или сжатым воздухом до определенного избыточного давления. В камере низкого давления и в нижнем отсеке измерительной секции находился воздух при атмосферном давлении. Верхний отсек измерительной секции заполнялся либо гелием, либо SF_6 при атмосферных условиях. Нижний торец измерительной секции в ряде опытов был закрыт жесткой горизонтальной стенкой из оргстекла толщиной 20 мм . В вертикальных стенках ударной трубы располагались отметчики времени (пьезокерамические датчики давления Д1, Д2) для определения скорости падающей ударной волны.

Ударная труба работала следующим образом. Саморазрыв диафрагмы, отделяющей камеру высокого от камеры низкого давления, происходил, когда при заполнении драйвера сжатым газом давление превышало критическое. По камере низкого давления (по воздуху) распространялась ударная волна, которая при выходе на $КГ_1$ инициировала развитие

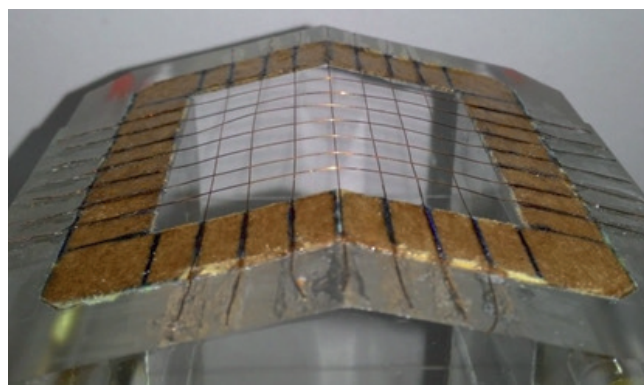


Рис. 1. Схема постановки опытов.

а) схема ударной трубы; б) фотография измерительной секции с 3D-сеткой $5 \times 5 \text{ мм}$; Д1, Д2 — отметчики времени; $КГ_1$, $КГ_2$ — контактные границы

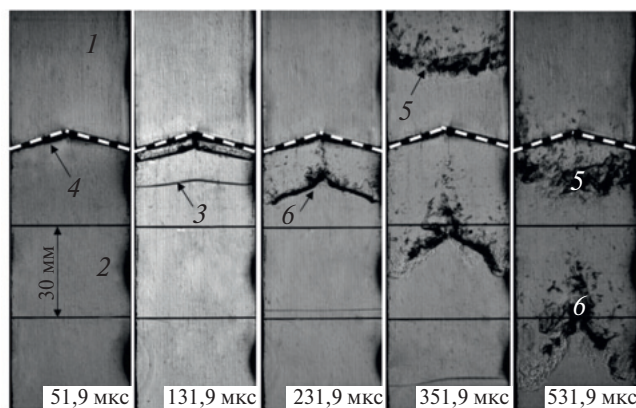
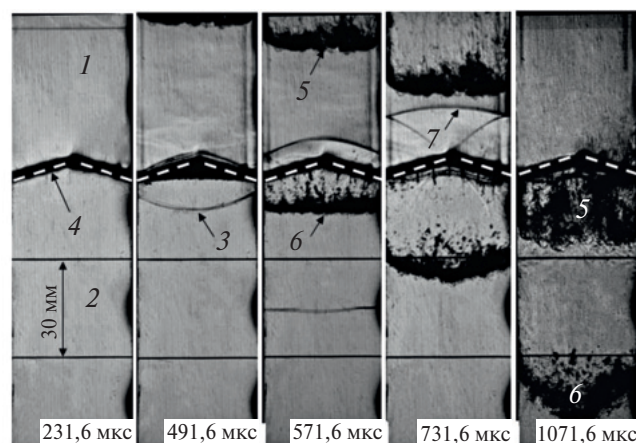
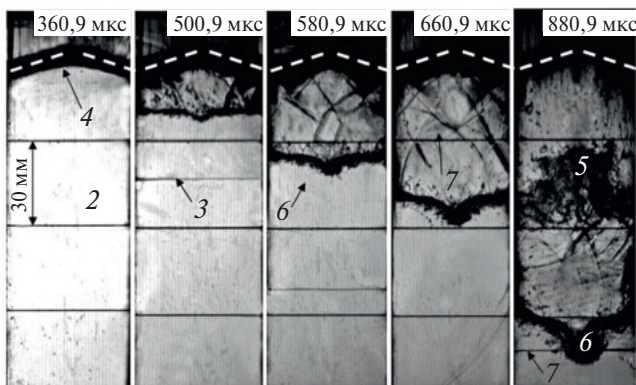


Рис. 2. Кинограмма течения в опыте № 1 со слойкой воздух-гелий-воздух ($M = 1,25$).

1 — гелий; 2 — воздух; 3 — ударная волна; 4 — $KГ_2$; 5 — ZTP_1 на $KГ_1$; 6 — ZTP_2 на $KГ_2$; время отсчитывается от прихода падающей ударной волны на $KГ_1$



а)



б)

Рис. 3. Кинограмма течения в опытах со слойкой воздух-SF₆-воздух.

а) опыт № 6 с 3D-сеткой, $M = 1,2$; б) опыт № 25 без сетки, $M = 1,4$.

1 — SF₆; 2 — воздух; 3 — ударная волна; 4 — $KГ_2$; 5 — ZTP_1 на $KГ_1$; 6 — ZTP_2 на $KГ_2$; 7 — отраженная от жесткой стенки волна; время отсчитывается от прихода падающей ударной волны на $KГ_1$

НРМ. Со временем ударная волна достигала $KГ_2$ и инициировала совместное развитие НРМ и НКГ (из-за излома $KГ_2$), приводящих к турбулентному перемешиванию газов. Регистрация течения проводилась скоростной видеокамерой шлирен-методом, которая запускалась от электроконтакта.

На рис. 2 и 3 представлены кинограммы некоторых экспериментов. На кинограммах M — число Маха падающей на $KГ_1$ ударной волны.

По кинограммам видно, что при проходе УВ из гелия в воздух возмущение от излома $KГ_2$ не переворачивается (рис. 2), при проходе УВ из SF₆ в воздух — переворачивается (рис. 3). Кроме этого, при отсутствии сетки на $KГ_2$ из углового возмущения растет ярко выраженный пузырь (локальное возмущение), при наличии сетки пузырь менее выражен. Это говорит о том, что интенсивно развивающаяся из-за сетки зона ТП частично поглощает локальное возмущение. Ширина зоны ТП при наличии сетки больше, чем без сетки, т.е. увеличение шероховатости КГ приводит к увеличению ширины зоны турбулентного перемешивания (ЗТП).

3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПО ПРОГРАММАМ NUT3D И VIC3D

Численное моделирование опыта № 1 в ИПМ РАН было выполнено с использованием двух программных комплексов NUT3D [20–22] и VIC3D [23–26], реализующих две различные численные методики. Методики включают в себя численное решение уравнений невязкой газодинамики в форме Эйлера.

Моделирование проводится без привлечения каких-либо дополнительных моделей турбулентности для описания пульсационных составляющих характеристик течения — так называемый неявный метод крупных вихрей. Данный подход подразумевает, что используемая численная схема действует подобно явной подсеточной модели в классическом методе крупных вихрей, определяя масштаб, на котором происходит диссипация турбулентных пульсаций и пренебрегая вкладом от более мелких масштабов.

3.1. Постановка задачи

Общая длина ударной трубы составляла 1730 мм, что при масштабе амплитуды начальных возмущений порядка 0,1 мм и использовании однородной сетки привело бы к числу сеточных элементов порядка 10^9 и значительным вычислительным ресурсам. По этой причине для трехмерного моделиро-

вания был выбран только участок ударной трубы от нижнего торца до координаты по вертикали чуть выше КГ₁, а именно, $z = 360$ мм. В части трубы $z > 260$ мм задавались параметры течения, соответствовавшие зафиксированной в экспериментах скорости ударной волны. Кроме того, базовый размер ячеек в поперечном направлении (x, y) составлял $\Delta_1 = 0,4$ мм, а в вертикальном направлении (z) — $\Delta_2 = 0,2$ мм. В вертикальной области от 120 мм до 240 мм сетка имела уплотнение с размером ячеек $\Delta_3 = 0,1$ мм. Таким образом, максимальное число ячеек составляло $2,4 \cdot 10^7$, что позволило существенно ослабить требования к вычислительным ресурсам и выполнить большее число расчетов с различными вариантами начальных возмущений.

Параметры газов соответствовали давлению 1 атм и температуре 20 °С. Скорость ударной волны, инициированной драйвером, составляла 429 м/с.

При прохождении падающей ударной волны через пленку, разделяющую изначально газы, происходит ее разрушение на фрагменты различной величины, которые отвечают за мелкомасштабные начальные возмущения. Разрушение пленки определяется ее внутренним состоянием и в гидродинамическом расчете не моделируется, поэтому возникает необходимость задания реалистичных мелкомасштабных возмущений, имитирующих разрушение пленки. Как известно, от вида начальных возмущений достаточно сильно зависит переход к перемешиванию [27], поэтому желательно задать их наиболее приближенными к эксперименту. Из опытов приблизительно известны диапазон длин волн и амплитуда, определяемые по размерам фрагментов пленки. Следуя работам [13, 28], для имитации разрушения пленки будем задавать случайное возмущение контактных поверхностей в виде:

$$\zeta(x, y) = S \sum_{m, n=1}^N \begin{pmatrix} a_{mn} \cos(k_{xm}x) \cos(k_{yn}y) + \\ b_{mn} \cos(k_{xm}x) \sin(k_{yn}y) + \\ c_{mn} \sin(k_{xm}x) \cos(k_{yn}y) + \\ d_{mn} \sin(k_{xm}x) \sin(k_{yn}y) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где Фурье-коэффициенты $a_{mn}, \dots, d_{mn}$, выбираются случайным образом на основе нормального распределения, а затем нормируются для получения желаемого среднеквадратичного отклонения амплитуды, S — нормировочный множитель. Волновые векторы определяются выражениями $k_{xm} = 2\pi m/L_x$ и $k_{yn} = 2\pi n/L_y$, L_x и L_y — поперечные размеры ударной трубы. Суммирование в (1) проводится по допустимому диапазону длин волн, которым будут соответ-

ствовать определенные пары волновых чисел m и n . Посредством варьирования спектра начальных возмущений возможно добиться лучшего согласия между численными и экспериментальными данными. Численные расчеты для выбранного опыта были выполнены как в присутствии начальных возмущений на контактных границах, так и без них.

3.2. Физико-математическая модель

В качестве основной физико-математической модели выступала модель многокомпонентной невязкой нетеплопроводной газовой динамики. Соответствующая система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho C_\alpha) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho C_\alpha v_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho E v_i + p v_i) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где ρ — массовая плотность, v_i — компоненты скорости, C_α — массовая концентрация, p — давление, E — удельная полная энергия: $E = \varepsilon + v_k v_k / 2$. По повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Замыкающие уравнения состояния записываются в модели идеального газа: $p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1) \rho_\alpha \varepsilon_\alpha$, где ρ_α — фазовые или парциальные плотности веществ, γ_α — показатели адиабаты, ε_α — удельная внутренняя энергия компоненты α . В предположении термодинамического равновесия различных компонент для идеальных газов можно аналитически получить выражение для связи термодинамических параметров смеси, а именно, $p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon$, где

$$\gamma = 1 + \frac{1}{C_V} \sum_{\alpha} C_\alpha C_{V\alpha} (\gamma_\alpha - 1), \quad C_V = \sum_{\alpha} C_\alpha C_{V\alpha},$$

C_V — теплоемкость вещества при постоянном объеме. Использование данной модели физически оправдано и не требует каких-либо дополнительных приближений, так как в качестве исследуемых веществ используются легкие газы. Систему (2) удобно записать в векторном виде, удобном для дальнейшего использования при описании используемых численных схем:

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{U}) = 0, \quad (3)$$

где $\mathbf{U}$ — вектор консервативных переменных, $\mathbf{F}^i(\mathbf{U})$ — соответствующие потоковые функции вдоль координатных направлений.

3.3. Численный метод

NUT3D — это трехмерный параллельный программный комплекс, ориентированный на решение задач физики высоких плотностей энергии. Помимо модуля расчета газодинамики (2), NUT3D содержит модули расчета переноса тепла в диффузионном приближении, а также работает с любыми полными термодинамически согласованными уравнениями состояния. Моделирование может вестись в одной из ортогональных систем координат: декартовой, цилиндрической или сферической.

Для получения дискретных аналогов исходных дифференциальных уравнений (2) используется метод конечных разностей. Для этого область моделирования представляется в виде численной ортогональной сетки. Таким образом, дискретная система уравнений может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{(U_{ijk}^{n+1} - U_{ijk}^n)V_{ijk}}{\Delta t_n} + \\ & + \left(F_{i+1/2jk}^1 S_{i+1/2jk}^1 - F_{i-1/2jk}^1 S_{i-1/2jk}^1 \right) + \dots + \\ & + \left(F_{ijk+1/2}^3 S_{ijk+1/2}^3 - F_{ijk-1/2}^3 S_{ijk-1/2}^3 \right) = R_{ijk} V_{ijk}, \end{aligned} \quad (4)$$

где U — вектор консервативных переменных, F — потоки через грани ячеек, S — соответствующие площади граней ячейки, V — объем ячейки. Вычисление потоков через грани ячеек происходит как значений функций, зависящих от решения задачи о распаде произвольного разрыва. В соответствии с работой [29] для определения левых и правых значений вектора переменных на грани используется линейная интерполяция с применением ограничителей антидиффузионных потоков [30]. Решение задачи о распаде разрыва может происходить как точно, так и приближенно. Точное решение задачи о распаде разрыва возможно при использовании УРС идеального газа, а также задействует итерационные методы нахождения корня нелинейного уравнения для давления, вырабатывающегося в результате распада разрыва. По этой причине в расчетах с другими УРС, а также достаточно ресурсоемких, предпочтительнее использовать приближенные методы решения задачи о распаде разрыва. В NUT3D основным методом решения задачи о распаде разрыва является HLLC [31].

В соответствии с методом расщепления по физическим процессам на следующем этапе при необходимости численно решается уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon(T)}{\partial t} + \nabla q_T = 0, \quad (5)$$

где $q_T = -\kappa(T) \nabla T$. Численное решение уравнения (5) происходит в соответствии с работой [32], в которой предложен итерационный процесс по нелинейности в коэффициенте теплопроводности. Соответствующая численная схема выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\varepsilon(T_{ijk}^s) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}(T_{ijk}^s)(T_{ijk}^{s+1} - T_{ijk}^s) - \varepsilon(T_{ijk}^n) \right) \rho_{ijk} V_{ijk}}{\Delta t_n} + \\ & + \left(q_{i+1/2jk}^1 S_{i+1/2jk}^1 - q_{i-1/2jk}^1 S_{i-1/2jk}^1 \right) + \dots + \\ & + \left(q_{ijk+1/2}^3 S_{ijk+1/2}^3 - q_{ijk-1/2}^3 S_{ijk-1/2}^3 \right) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $q_{i+1/2jk}^1 = -\kappa(T^*) \frac{T_{i+1jk}^{s+1} - T_{ijk}^{s+1}}{\Delta x_{ijk}^1}$, T^* на грани в со-

ответствии с работой [33] дается выражением

$$T^* = \frac{\kappa(T_{i+1jk}^s) \Delta x_{i-1jk}^1 T_{i+1jk}^s + \kappa(T_{i-1jk}^s) \Delta x_{i+1jk}^1 T_{i-1jk}^s}{\kappa(T_{i+1jk}^s) \Delta x_{i-1jk}^1 + \kappa(T_{i-1jk}^s) \Delta x_{i+1jk}^1}.$$

Остальные потоки тепла аппроксимируются аналогичным образом. Таким образом, получается система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно вектора переменных T^{s+1} .

При расщеплении по координатным направлениям возможно решение исходной СЛАУ (6) последовательным обращением соответствующего количества трехдиагональных матриц методом прогонки. Данный подход может способствовать выделению какого-либо приоритетного направления, поэтому необходимо чередовать последовательность обработки координатных направлений. Также возможно решение исходной СЛАУ (6) каким-либо итерационным методом, например методом сопряженных градиентов с предобуславливателем.

Для вычисления термодинамических параметров в смешанных ячейках используется pT -приближение, предполагающее, что за время гидродинамического шага давление и температура различных компонент смеси успевают выровняться и достигнуть термодинамического равновесия. Также предполагается, что движение всех компонент описывается одной средней скоростью смеси. Кроме того, предполагается, что между компонентами в смешанной ячейке имеется контактная граница. В этом случае массовые и объемные концентрации вводятся выражениями: $C_\alpha = m_\alpha / m$ и $f_\alpha = V_\alpha / V$. Плотности

компонент по определению $\rho_\alpha = m_\alpha / V_\alpha = C_\alpha / f_\alpha \rho$. Таким образом, возникает следующая система уравнений для нахождения равновесного давления, температуры и плотностей компонент (или объемных концентраций) по известным внутренней энергии и плотности смеси после решения задачи о распаде разрыва:

$$\begin{cases} \varepsilon = \sum C_\alpha \varepsilon_\alpha(\rho_\alpha, T); \\ \frac{1}{\rho} = \sum \frac{C_\alpha}{\rho_\alpha}; \\ p = p_\alpha(\rho_\alpha, T). \end{cases} \quad (7)$$

Данная система содержит $N_\alpha + 2$ уравнений, где N_α — число компонент в ячейке, при необходимости число уравнений может быть уменьшено до N_α .

Для решения системы (7) используется комбинация метода деления отрезка пополам и метода Ньютона. В связи с тем, что решение данной системы зачастую лежит близко к асимптотам, то использование метода деления отрезка пополам является обязательным условием для поиска начального приближения для метода Ньютона. В результате в большинстве случаев выполняется два и более (в зависимости от числа компонент) циклов итераций, что при большом числе смешанных ячеек негативно сказывается на общей производительности программы.

Отметим, что если в качестве независимых термодинамических переменных выбрать p и T вместо ρ и T , тогда система, аналогичная (7), содержала бы всего 2 уравнения, что является более приемлемым вариантом с вычислительной точки зрения.

Возможно использование другого подхода к описанию состояния в смешанных ячейках, при котором каждая компонента смеси занимает весь объем ячейки (кинетический подход). В этом случае система уравнений для определения равновесного давления и температуры выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon = \sum C_\alpha \varepsilon_\alpha(\rho_\alpha, T); \\ \rho_\alpha = C_\alpha \rho; \\ p = \sum p_\alpha(\rho_\alpha, T). \end{cases} \quad (8)$$

При известных ρ , ε и C_α данная система требует решения только уравнения для нахождения равновесной температуры.

ВІС3D — это параллельный программный комплекс для численного решения трехмерных эволюционных гиперболических систем законов сохранения по бикompактным схемам из [23–26].

Предполагается, что расчетная область имеет форму параллелепипеда. Пространственная бикompактная аппроксимация четвертого порядка строится на декартовой сетке, дополненной вспомогательными узлами с полуцелыми индексами:

$$\Omega = \Omega_1^x \times \Omega_1^y \times \Omega_1^z = \{(x_j, y_k, z_l)\};$$

$$\Omega_1^d = \{d_0 < d_{1/2} < d_1 < d_{3/2} < d_2 < \dots < d_{N_d}\};$$

$$h_{d,i} = d_{i+1} - d_i - \text{шаг по } d, i = 0, 1, \dots, N_d - 1. \quad (9)$$

На временной оси вводятся слои t_n , $n = 0, 1, \dots$; $t = \tau_n = t_{n+1} - t_n$ — шаг по t . Численное решение представляется в виде сеточной функции $U_{i,j,k}^n$, значения которой аппроксимируют значения точного решения $U(x, y, z, t)$ в узлах сетки Ω в моменты времени $t = t_n$.

В бикompактных схемах из [23, 24] используется локально-одномерное расщепление по пространству. Помимо него, осуществляется потоковое расщепление Лакса—Фридрихса—Русанова (ЛФР). Совместное применение этих расщеплений означает, что при каждом переходе со слоя на слой трехмерная система (2) разбивается на шесть одномерных подсистем вида

$$\partial_t U + \partial_d F^{d,\pm}(U) = 0, \quad (10)$$

где $F^{d,\pm}(U) = 0.5 F^d(U) \pm C_2^d U$ (формула для C_2^d будет приведена позднее). Одномерные подсистемы (2) решаются при помощи одномерных бикompактных схем вдоль линий сетки — прямых, проходящих через узлы сетки Ω параллельно координатным осям. Обозначим оператор послойного перехода всякой одномерной бикompактной схемы для (2) как $S_B^{d,\pm}(\tau)$. Введем операторы $S_B^d(\tau) = S_B^{d,-}(\tau) S_B^{d,+}(\tau)$. Результирующая локально-одномерная бикompактная схема для исходной системы (2) имеет оператор послойного перехода

$$S_B(\tau) = S_B^x\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B^y\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B^z(\tau) S_B^y\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B^x\left(\frac{\tau}{2}\right). \quad (11)$$

Заметим, что точность пространственного расщепления повышена по методу Марчука—Стрэнга.

Аппроксимация по времени в бикompактных схемах строится при помощи чисто неявных и неявно-явных методов Рунге—Кутты (РК). В ВІС3D реализованы методы РК обоих типов от первого до четвертого порядков включительно. Временные дискретизации четных порядков лучше подходят для счета гладких решений, нечетных — для счета разрывных решений. Неявно-явные бикompактные схемы экономичнее, так как в них исключены ньютоновские итерации; чисто неявные бикompактные схемы точнее и генерируют меньшие осцилляции у фронтов сильных разрывов.

В расчетах, результаты которых представлены в следующем разделе, операторы $S_B^{d,\pm}(\tau)$ отвечали неявно-явной схеме BiC4-IMEX3 из [24]. Эта схема имеет четвертый и третий порядки аппроксимации по пространству и времени соответственно.

Для подавления эффекта Гиббса в бикомпактных схемах повышенного порядка аппроксимации по времени применяется метод консервативной монотонизации [25]. Он имеет один настраиваемый параметр $C_1 \geq 0$. При $C_1 = 0$ монотонизация отсутствует, при $C_1 \rightarrow \infty$ она максимальна (от численного решения в каждой ячейке остается лишь интегральное среднее). Метод [25] основан на сравнении решения высокоточной схемы (B , в данном случае бикомпактной) с решением монотонной схемы-партнера (A). В BiC3D в качестве схемы A выбран и реализован локально-одномерный “явный уголок” с расщеплением ЛФР. Оператор послойного перехода этой схемы имеет вид:

$$S_A(\tau) = S_A^z(\tau) S_A^y(\tau) S_A^x(\tau). \quad (12)$$

Здесь $S_A^d(\tau) = S_A^{d,-}(\tau) S_A^{d,+}(\tau)$, где $S_A^{d,\pm}(\tau)$ – операторы послойного перехода одномерного “явного уголка” для (2).

Коэффициенты C_2^d и шаг τ задаются перед каждым переходом со слоя на слой по формулам

$$\begin{aligned} C_2^d &= (0.5 + \delta) V_{\max}^d; \\ \tau &= \frac{\kappa}{1 + \delta} \min_d \frac{\min_i h_{d,i}}{V_{\max}^d}; \\ V_{\max}^d &= \max_{\Omega} V^d(\mathbf{U}_{j,k,l}^n), \end{aligned} \quad (13)$$

где $V^d(\mathbf{U})$ – мажоранты для модулей собственных значений матриц $\mathbf{A}^d(\mathbf{U}) = \partial_{\mathbf{U}} \mathbf{F}^d(\mathbf{U})$, $\delta > 0$ – коэффициент запаса, $\kappa > 0$ – число Куранта.

3.4. Программная реализация

BiC3D реализован на языке C++ в рамках технологии MPI и предназначен для использования на многопроцессорных вычислительных системах. В соответствии со структурой численного подхода (см. предыдущий раздел), а именно, использование локально одномерного расщепления по координатным направлениям, в качестве идеологии распараллеливания используется геометрический параллелизм. В этом случае в пределах одной стадии такого расщепления вычисления на параллельных линиях сетки не связаны между собой, и потому могут осуществляться одновременно. Метод консервативной монотонизации из [25] также легко распараллеливается: для построения монотонизированного ре-

шения в каждом узле нужны данные лишь от ячеек, которым он принадлежит.

Пусть число процессов равно n_p . Разобьем всю совокупность ячеек сетки на n_p горизонтальных слоев равной толщины $M_z = N_z/n_p$ (в ячейках) и n_p вертикальных слоев равной толщины $M_x = N_x/n_p$. Ради простоты записи мы полагаем, что N_z, N_x делятся нацело на n_p . Процесс ранга $r = 0, n_p - 1$ имеет дело не со всей сеткой Ω , а лишь с ее подмножествами

$$\begin{aligned} \omega_r &= \Omega_1^x \times \Omega_1^y \times \{z_l : 0 \leq l - rM_z \leq M_z\}; \\ \omega'_r &= \{x_j : 0 \leq j - rM_x \leq M_x\} \times \Omega_1^y \times \Omega_1^z. \end{aligned} \quad (14)$$

Соответственно, процесс ранга r оперирует двумя сеточными функциями (массивами) решения, определенными на сетках ω_r, ω'_r .

Опишем алгоритм перехода со слоя t_n на слой t_{n+1} с точки зрения процесса ранга r .

1. Найти $\max_{\omega_r} V^d(\mathbf{U}_{j,k,l}^n)$. Если $r \neq 0$, то отправить эти максимумы процессу ранга 0 и в ответ получить величины $V_{\max}^d$. Если $r = 0$, то собрать данные от остальных процессов, вычислить величины $V_{\max}^d$ и разослать их остальным процессам. Вычислить C_2^d и τ по формулам (4).

2. Рассчитать на ω_r промежуточное решение

$$\mathbf{Y}^B = S_B^y\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B^x\left(\frac{\tau}{2}\right) \mathbf{U}^n.$$

Действие, например, $S_B^{x,+}(\tau/2)$ на $\mathbf{U}^n$ реализуется так: с помощью одномерной бикомпактной схемы для всех $0 \leq k \leq N_y, 0 \leq l - rM_z \leq M_z$ решить подсистему (2) с индексами $(x, +)$ вдоль прямой $y = y_k, z = z_l$ при половинном временном шаге, используя в качестве начальных данных $\mathbf{U}^n$.

3. Разбить массив решения $\mathbf{Y}^B$ на ω^r сообразно разбиению множества ячеек на вертикальные слои; полученные части этого массива разослать по соответствующим процессам (рис. 1); собрать данные, присланные другими процессами. Как результат, у данного процесса в распоряжении окажется все то же решение $\mathbf{Y}^B$, но теперь уже на ω'_r .

4. Рассчитать на ω'_r промежуточное решение $\tilde{\mathbf{Y}}^B = S_B^z(\tau) \mathbf{Y}^B$.

5. Выполнить операцию, обратную (симметричную по x, z) операции из шага 3. У данного процесса получится решение $\tilde{\mathbf{Y}}^B$ на ω^r .

6. Рассчитать на ω^r финальное решение схемы B на слое t_{n+1} : $\mathbf{U}^B = S_B^x\left(\frac{\tau}{2}\right) S_B^y\left(\frac{\tau}{2}\right) \tilde{\mathbf{Y}}^B$.

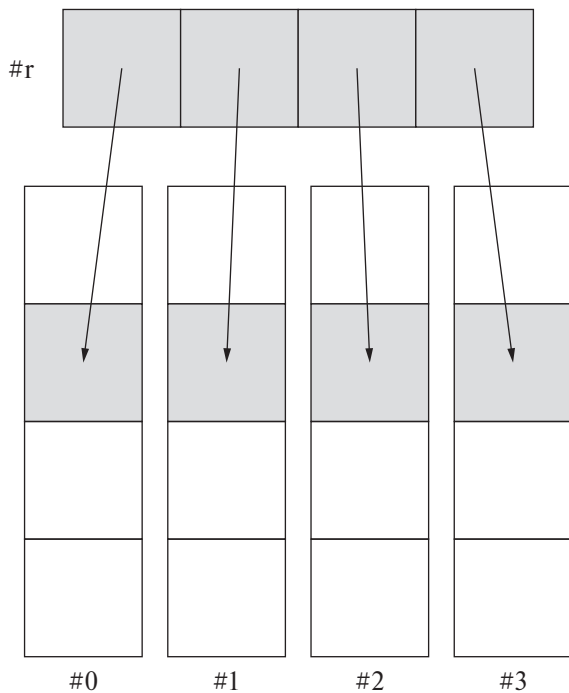


Рис. 4. Рассылка решения с горизонтального слоя ($n_p = 4, r = 2$).

7. Получить на ω^r вспомогательное решение U^A , повторяя шаги 2–5 для схемы A , учитывая при этом формулу (3) для ее оператора послойного перехода.

8. Провести монотонизацию решения U^B при помощи решения U^A по методу из [22]. При исполнении этой операции необходимо обмениваться с процессами $r \pm 1$ данными с плоскостей $l = rM_z, l = (r+1)M_z$.

9. Искомое решение U^{n+1} на ω^r найдено, переход на слой t_{n+1} завершен.

Барьерные синхронизации процессов выполняются в начале каждого перехода со слоя на слой и перед операциями обменов. Ясно, что при $C_1 = 0$ из алгоритма исключаются шаги 7, 8.

В работе [26] было проведено исследование BIC3D на эффективность распараллеливания: она составляет от 70% при условии $n_p \leq (\min_d N_d)/2$.

В завершение дадим практические рекомендации по работе с BIC3D. При использовании комплекса пользователь задает:

- Физическую модель — функции $F^d(U)$ и $V^d(U)$. Решение задачи Римана (Riemann solver) специфицировать не нужно из-за глобального расщепления ЛФР.
- Пространственную сетку Ω через задание сеток Ω_1^d (как массивов узлов).
- Начальные условия в виде функции для вычисления начальных значений либо уже готового

файла данных, содержащего эти значения (очевидно, размеры файла должны соответствовать сетке Ω).

- Типы условий на всех границах расчетной области. Поддерживаются: условия первого рода (для них необходимо дополнительно задать функции для вычисления граничных значений), условия отражения, условия свободного выхода и периодические условия.
- Параметры δ, κ, C_1 . Рекомендуемые значения: $C_1 = 0$ и любое κ при счете гладких решений, $C_1 = 10, \kappa \geq 0.6$ при счете разрывных решений (диссипация в бикompактных схемах нечетного порядка растет с увеличением κ), $\delta = 0.5$. При $\kappa > 1$ шаг по времени в схеме A автоматически дробится так, чтобы она сохранила устойчивость.

Численный код NUT3D в последовательном варианте реализован на языке С. Параллельная версия, использовавшаяся для моделирования в данной работе, была получена с помощью набора инструментальных средств, созданных в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН и упрощающих процесс распараллеливания. Применение этих инструментов состоит из нескольких этапов. На первом этапе программа на языке Fortran или С подается на вход системе автоматизированного распараллеливания (далее системе SAPFOR [34, 35]). Блок анализа системы переводит программу во внутреннее представление. Программа анализируется с помощью различных алгоритмов статического анализа, в результате которого выявляются особенности программы, влияющие на ее распараллеливание. Затем на втором этапе происходит подбор подходящих схем распараллеливания программы. Отбор подходящих схем распараллеливания осуществляется на основе прогнозируемых характеристик эффективности выполнения параллельной программы. Система может предлагать пользователю на выбор разные схемы распараллеливания, сопровождая их прогнозируемыми характеристиками эффективности и причинами отказа от распараллеливания фрагментов программы. Пользователь определяет значимые фрагменты программы и исследует причины отказа от их распараллеливания. Возможно уточнить результаты автоматического анализа (например, используя дополнительные спецификации) и повторить второй шаг этапа, и/или преобразовать текст последовательной программы и начать с первого. При успешном выполнении этого этапа система по отобранным пользователем схемам распараллеливания и внутреннему представлению программы генерирует текст

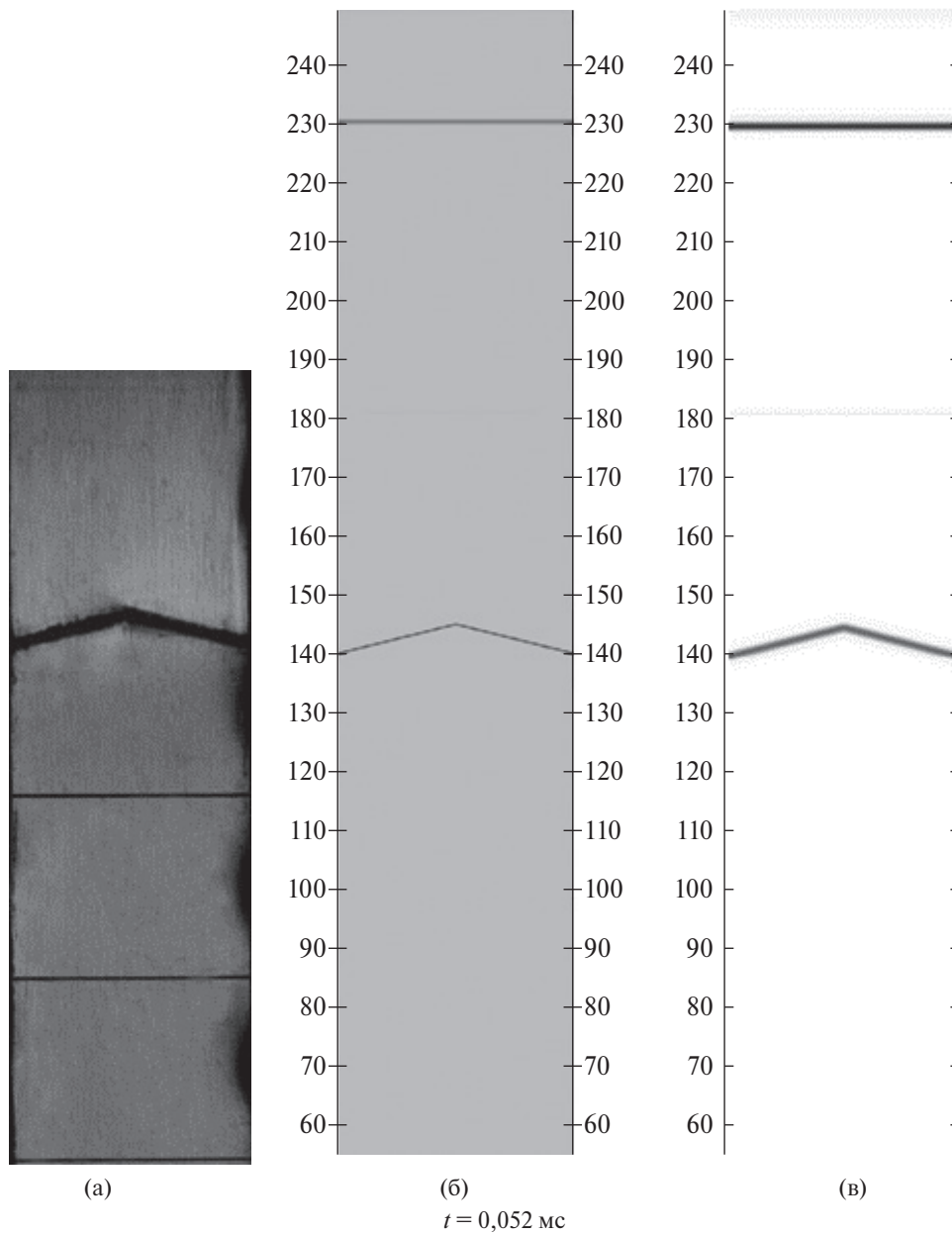


Рис. 5 (начало).

параллельной программы в модели DVMH на языке Fortran-DVMH или C-DVMH.

Модель программирования DVMH [36] позволяет разрабатывать параллельные программы для кластеров, в узлах которых помимо универсальных многоядерных процессоров установлены ускорители и сопроцессоры.

Модель параллелизма базируется на специальной форме параллелизма по данным: одна программно-множество потоков данных. В этой модели одна и та же программа выполняется на всех процессорах, но каждый процессор выполняет свое подмножество операторов в соответствии с распределением данных.

Для отображения DVMH-программы на параллельную ЭВМ используются специальные компиляторы, которые входят в состав DVM-системы.

DVMH-компилятор преобразует исходную программу в параллельную программу на языке Fortran или C с вызовами функций системы поддержки параллельного выполнения DVMH-программ (библиотеки Lib-DVMH). Система поддержки реализована на основе стандартных технологий параллельного программирования MPI (для взаимодействия между узлами кластера), OpenMP (для распределения вычислений между ядрами узла), CUDA (для распределения вычислений и отображения данных на графические ускорители).

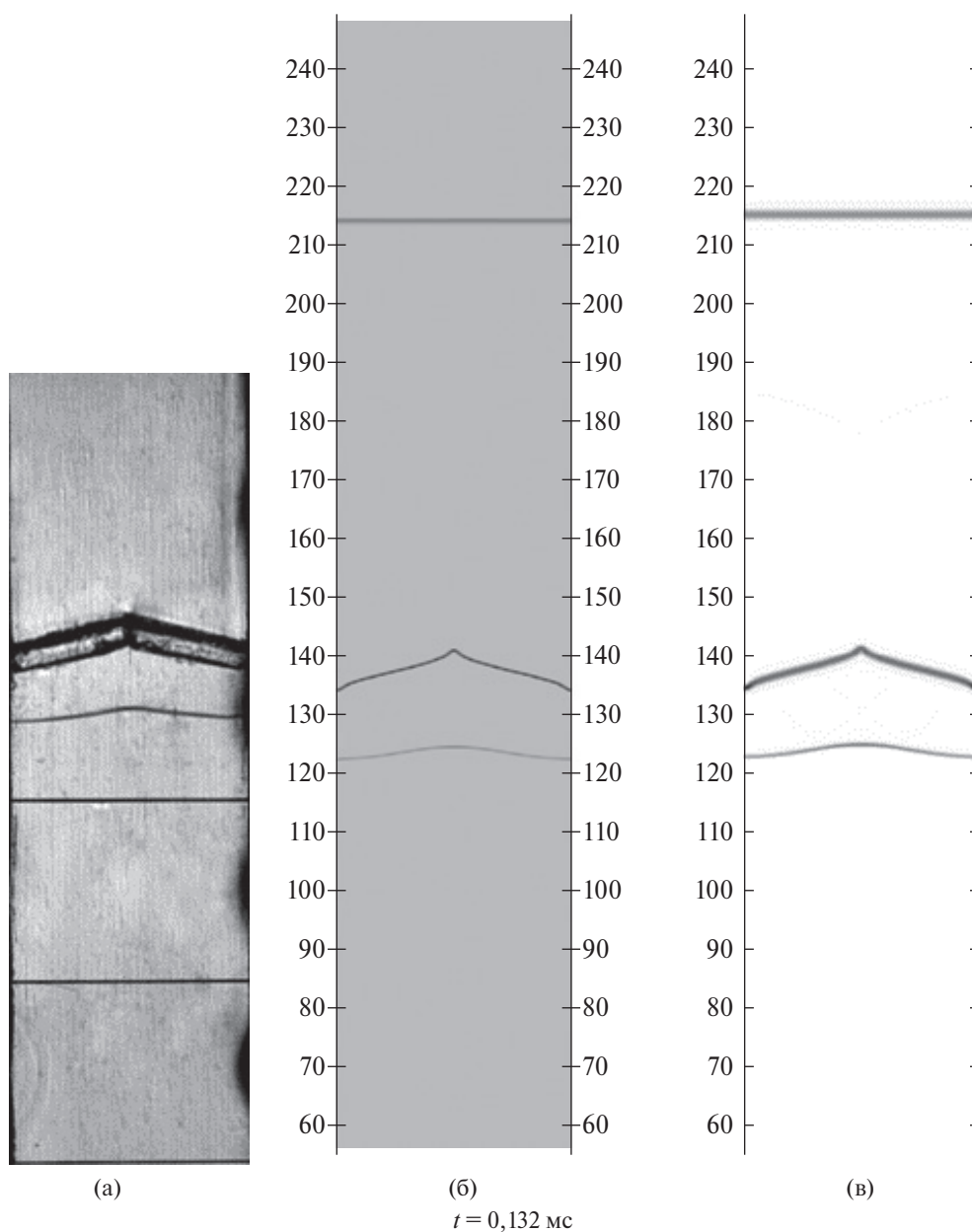


Рис. 5 (продолжение).

3.5. Результаты расчетов и сравнение с экспериментом

На первом этапе были выполнены расчеты без начальных возмущений контактных границ. Целью этих расчетов было сопоставление динамики различных фронтов и контактных поверхностей. Ниже на рис. 5 приведены численные шлирен-изображения течения в различные моменты времени. В данном случае под шлирен-изображением понимается распределение модуля градиента плотности без изменения масштаба вариации данной величины.

В приведенной на рис. 5 картине течения ($t = 0,052$ мс) на экспериментальной фотографии

в кадре нет верхней (плоской) контактной поверхности. При этом видна ударная волна, прошедшая в гелий, положение фронта которой совпадает и в эксперименте, и в численных расчетах. В следующий приведенный момент времени ($t = 0,132$ мс) падающая ударная волна уже прошла вторую контактную границу и вышла из гелия, изменив форму фронта. Здесь уже наблюдаются различия в координате фронта этой ударной волны – в численных расчетах она распространяется быстрее. Далее ($t = 0,232$ мс) данная тенденция сохраняется. На численных шлирен-изображениях наблюдается ударная волна, отраженная от КГ₂ и прошедшая через КГ₁ ($z = 224$ мм). В $t = 0,352$ мс в кадре появляется

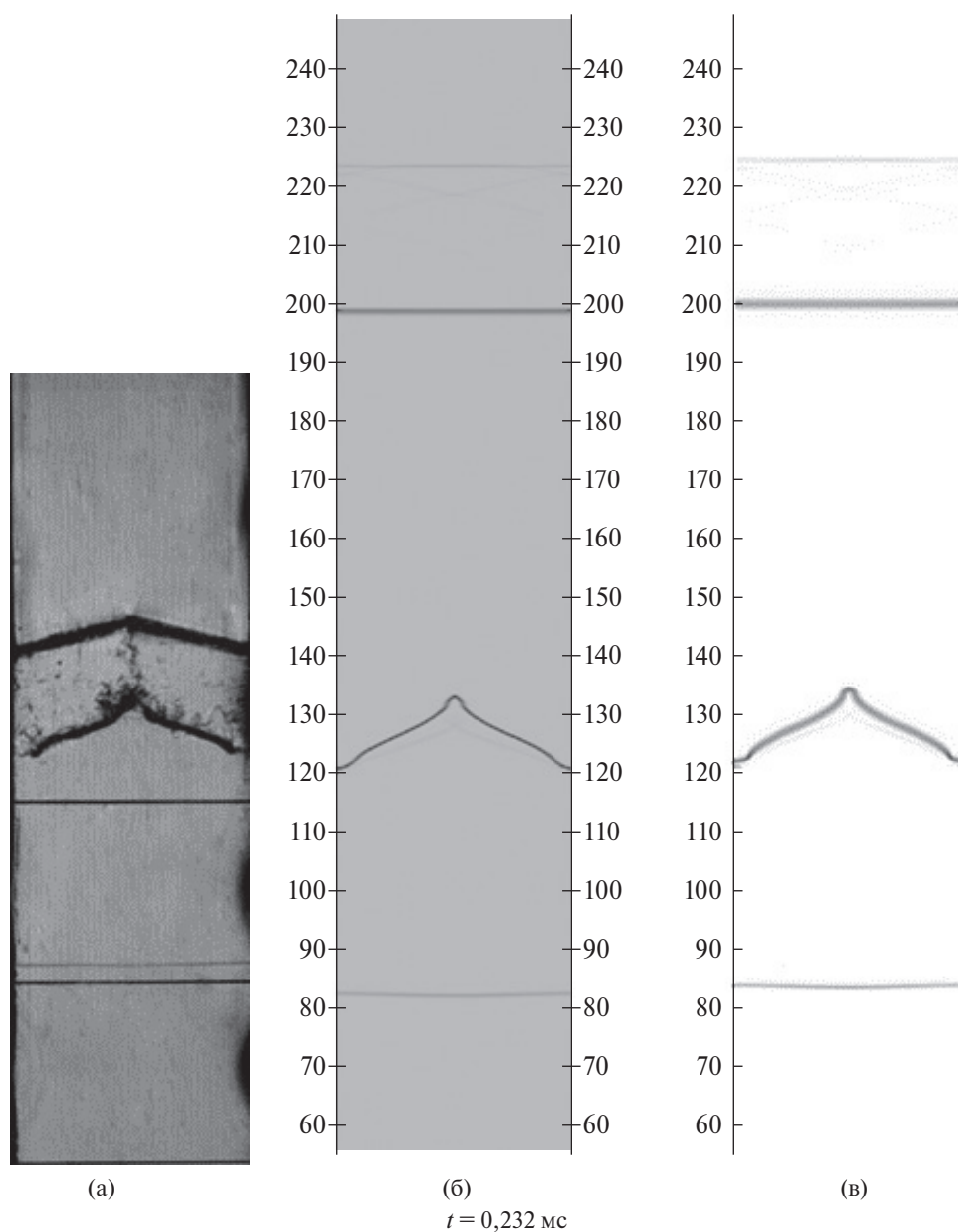


Рис. 5 (продолжение).

возмущенная КГ₁, однако расчетное ее положение существенно отличается от экспериментального, отставая от него. Также отставание начинает наблюдаться и для КГ₂, движение которой в более ранние моменты времени совпадало с экспериментальным. Финальный момент времени $t = 0,532$ мс лишь подтверждает наметившуюся тенденцию. На основании рис. 5 можно отметить следующие обстоятельства. Во-первых, расчеты, выполненные с использованием двух различных методик (NUT3D и VIC3D), хорошо согласуются между собой. Во-вторых, в эксперименте скорость движения контактных границ выше, чем в расчетах. Это может быть связано с неточными данными по положению пленки, разделя-

ющей воздух и гелий в измерительной секции трубы, и скорости падающей ударной волны. Кроме того, в расчетах не учитываются особенности взаимодействия падающей ударной волны с пленкой, которые могут приводить к ее выгибанию и смещению перед разрушением.

В следующей серии расчетов на обеих контактных границах были заданы случайные начальные возмущения. Длина волны возмущений задавалась в интервале от $\lambda_{\min} = 1$ до $\lambda_{\max} = 3$ мм, среднеквадратичное отклонение составляло $0,1\lambda_{\min}$. На рис. 6 приведены ширен-изображения, полученные в расчетах с использованием NUT3D и VIC3D.

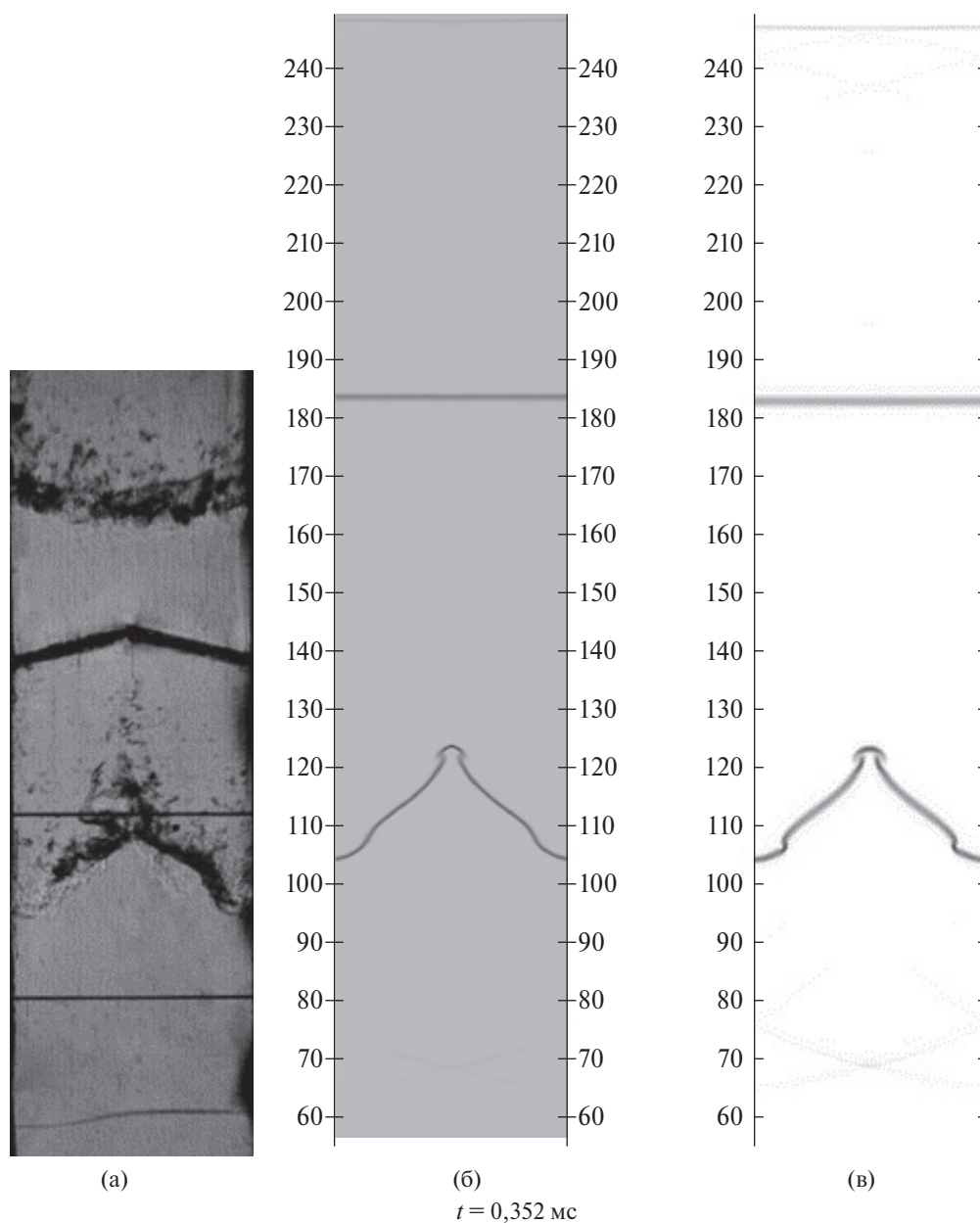


Рис. 5 (продолжение).

На основании рис. 6 можно отметить следующее. Наличие возмущений на контактных границах незначительно влияет на скорость их движения — положения в различные моменты времени идентичны расчетам без возмущений (рис. 5). Характер роста возмущений на $КГ_1$ и $КГ_2$ отличается, во-первых, в связи с дополнительным развитием НКГ на $КГ_2$, а во-вторых, вследствие инверсии фаз начальных возмущений на $КГ_1$ при прохождении исходной падающей ударной волны. Сформировавшиеся в результате развития начальных возмущений зоны перемещения не являются идентичными. На $КГ_2$ можно отчетливо рассмотреть вихреобразные структуры, а именно дорожку вихрей, характерную для развития

неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Также можно отметить, что развитие возмущений на этой контактной границе происходит медленнее, чем на $КГ_1$.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННЫХ КОДОВ ЭГАК И k-ε МОДЕЛИ

В данном разделе представлены результаты проверки численных кодов ЭГАК и k-ε модели на эксперименте № 6.

Методика ЭГАК является лагранжево-эйлеровой, в которой аппроксимация уравнений многокомпонентной газодинамики производится в два этапа

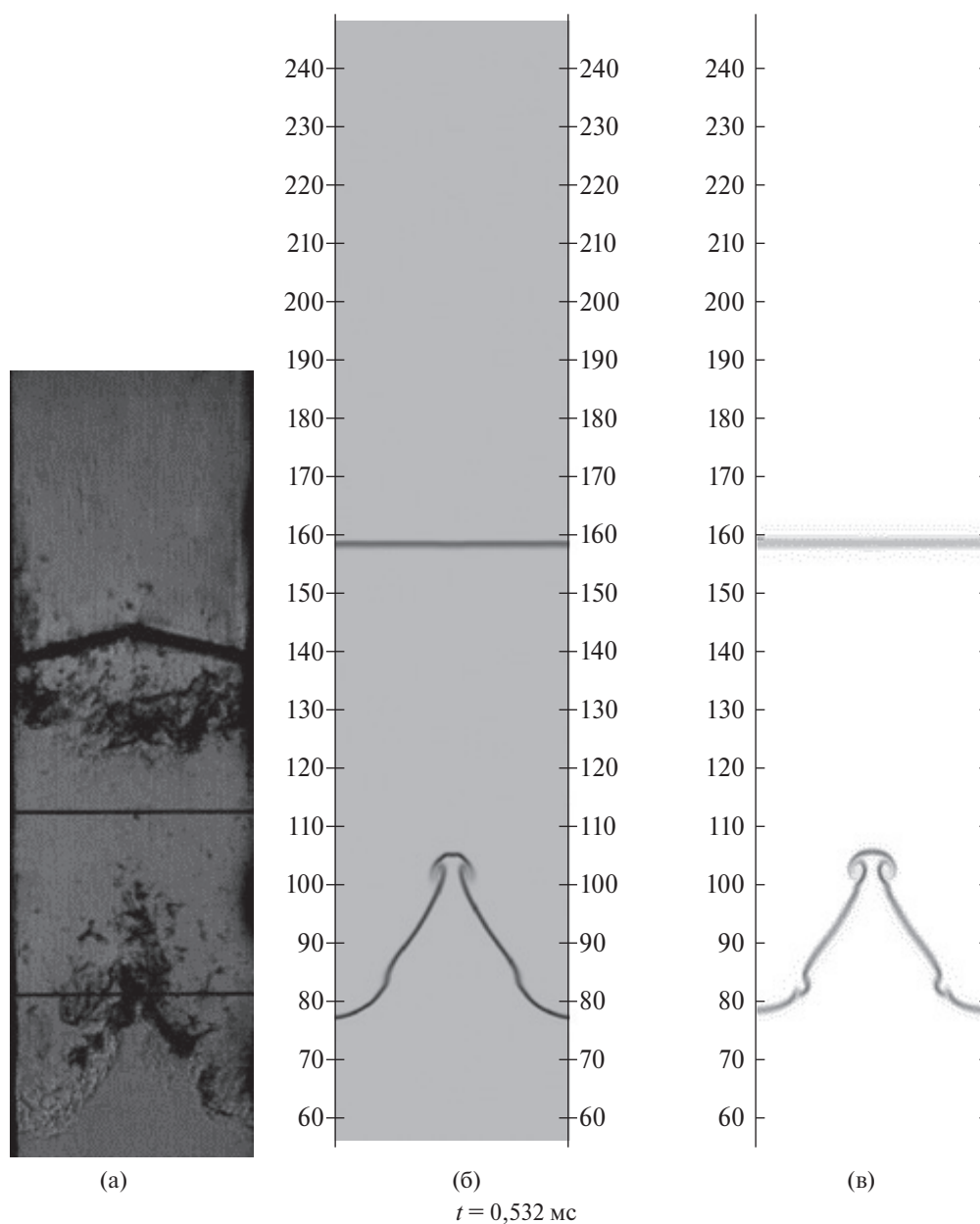


Рис. 5 (окончание). Экспериментальные фотографии (а) и численные шлирен-изображения (б) NUT3D, (в) VIC3D, в различные моменты времени.

на неподвижной прямоугольной, как правило, квадратной счетной сетке [37].

На лагранжевом этапе вычислений используется схема типа “крест”. Все компоненты среды выделяются своими термодинамическими параметрами и объемной долей. Для замыкания уравнений газодинамики в смешанных ячейках, содержащих два и более компонента, используются несколько методов, основанные на разных предположениях относительно термодинамического состояния компонентов [38].

На эйлеровом этапе в чистых (однокомпонентных) ячейках для аппроксимации уравнения ад-

векции используется метод PPM [39] третьего порядка аппроксимации. Для определения потоков из смешанных ячеек используется метод концентраций (VoF) [40].

В методике разработан специальный (неподвижный несжимаемый) компонент, граница которого проходит по линиям сетки, и на которой реализовано условие идеального скольжения.

Для моделирования турбулентного перемешивания в методике используется как $k-\varepsilon$ модель, так и прямое моделирование на подробной сетке без использования каких-либо моделей турбулентности.

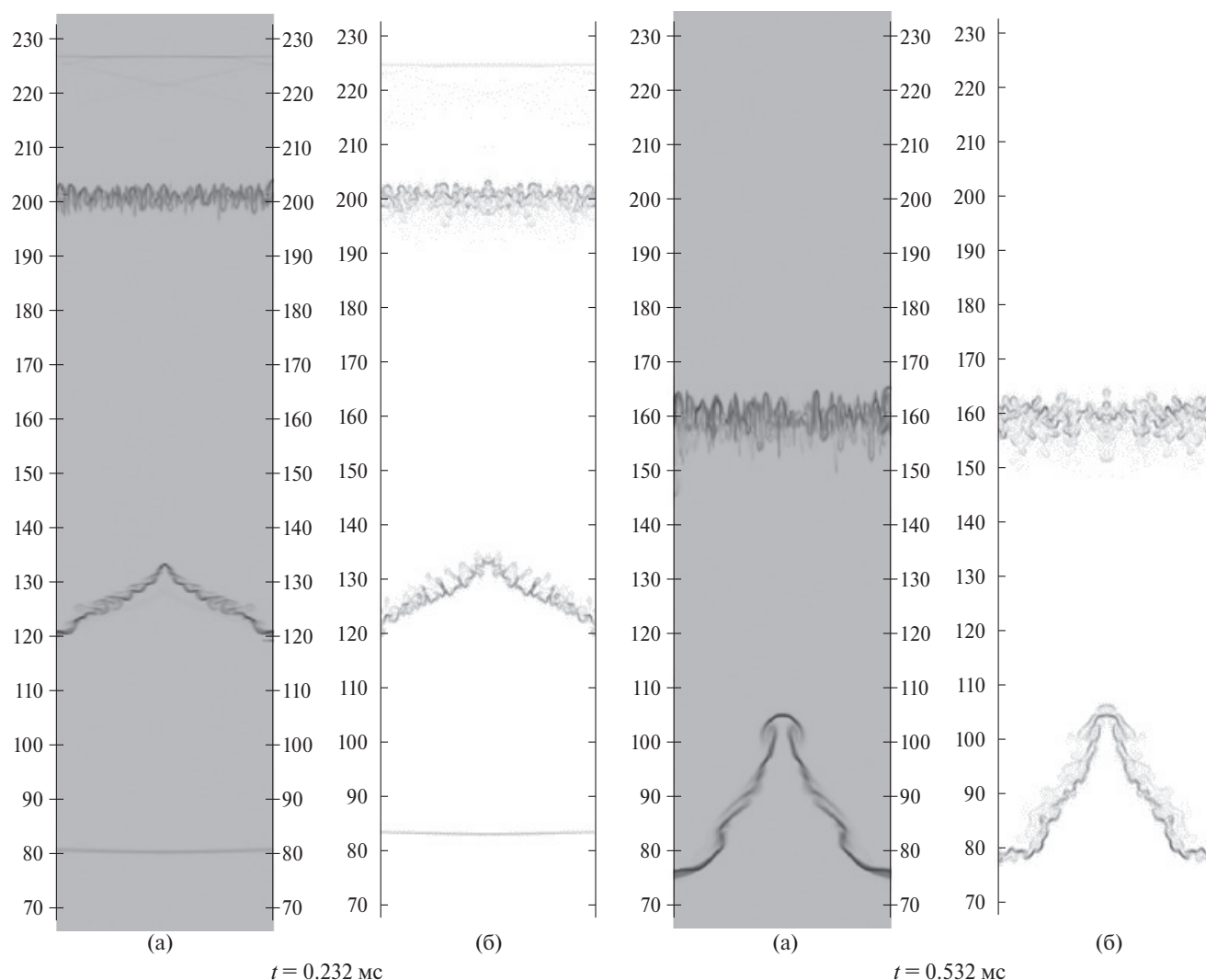


Рис. 6. Численные шпирен-изображения в различные моменты времени: (а) NUT3D, (б) BIC3D.

В настоящей работе использовался подход, основанный на решении уравнений невязкой газодинамики в форме Эйлера.

4.1. Математическая постановка задачи

Начальная геометрия эксперимента взята из рис. 1. На КГ₂ в эксперименте была задана двухмерная или трехмерная сетка из медной или лавсановой проволоки с $\lambda = 0,5$ см. В расчетах эта сетка была неподвижной и моделировалась с использованием несжимаемого компонента. При этом в расчетах диаметр проволоки задавался равным $d_{\text{расчет}} = d + 2s$, где d — реальный диаметр проволоки, s — толщина натянутой на сетку пленки. Это сделано исходя из предположения, что пленка после разрыва в процессе течения прилипает к проволоке и ее фактическая толщина увеличивается. В двух расчетах сама пленка не задавалась, в третьем расчете она задавалась в виде разорванных кусков толщиной 0,005 см

и шириной 0,03 см, расстояние между кусочками составляло 0,01 см.

В расчетах используется следующая система единиц: г, см, мс = 10^{-3} с, T , К, давление в атм. На КГ₁ задавалось условие свободного протекания. На боковых стенках задавалось условие “жесткая стенка”. КГ₁ была возмущена в виде синусоиды с длиной волны $\lambda = 0,03$ см и с амплитудой возмущений $a = 0,01$ см.

Уравнение состояния газов:

$$\varepsilon = c_V \cdot T = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho},$$

здесь γ — постоянная адиабаты. В расчетах с пленкой для пленки использовался УРС Ми—Грюнайзена с $\rho_0 = 0,92$, $c_0 = 2,65$, $n = 4,5$, $\gamma = 2,35$, $c_V = 1$, $p_0 = 1$.

Начальные данные задачи зависели от использованных в опытах газов. Отметим, что в области

“газ 1” (воздух) задавался соответствующий газ с параметрами за фронтом ударной волны, которые определялись следующим образом.

Начальное давление в области “газ 1”

$$p_1 = \frac{2 \cdot \rho_0 \cdot u_{\text{ув}}^2 - (\gamma_1 - 1) \cdot p_0}{(\gamma_1 + 1)}. \quad (15)$$

Здесь скорость ударной волны $u_{\text{ув}}$ берется из эксперимента.

Далее находим начальную плотность в “газ 1”

$$\rho_1 = \rho_0 \cdot \frac{(\gamma_1 + 1) \cdot p_1 + (\gamma_1 - 1) \cdot p_0}{(\gamma_1 + 1) \cdot p_0 + (\gamma_1 - 1) \cdot p_1}. \quad (16)$$

И наконец, находим начальную скорость в “газ 1”

$$u_z = -\sqrt{(p_1 - p_0) \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_1} \right)}. \quad (17)$$

Начальные данные опыта № 6: в области “газ 1”: $\rho_{10} = 0,0017$, $u_{z0} = 21,62$, $p_{10} = 1,5844$, $\gamma_1 = 1,4$; в области “газ 2”: $\rho_{\text{SF6}0} = 6,5 \cdot 10^{-3}$, $u_0 = 0$, $p_{20} = 1$, $\gamma_2 = 1,0945$; в области ниже КГ_2 $\rho_0 = 1,25 \cdot 10^{-3}$, $u_0 = 0$, $p_0 = 1$, $\gamma_1 = 1,4$.

Проведены три расчета на счетной сетке с $h = 0,005$: расчет 1 — без пленки и k - ϵ модели; расчет 2 — без k - ϵ модели с кусками пленки, заданными как указано выше; расчет 3 — без пленки с k - ϵ моделью. В расчете с k - ϵ моделью на КГ_2 задавались начальные затравочные значения турбулентной энергии и скорости ее диссипации: $k = 10^{-4}$, $\epsilon = 10^{-5}$.

Численное моделирование задачи производилось в 2D-постановке по методике ЭГАК [37].

4.2. Результаты расчетов

Ниже приводится сравнение с экспериментами (с двумерной 2D- и с трехмерной 3D-сеткой) указанных вариантов двумерных расчетов. Экспери-

менты представлены шпирен-фотографиями, расчеты — распределением градиента плотности, по сути, это расчетная шпирен-картина (рис. 7–10).

Отметим некоторые различия, имеющиеся в экспериментальных данных. Имеется некоторое опережение движения волн в эксперименте с 2D-сеткой. На рис. 7 видно, что ударная волна пришла на сетку на более раннее время по сравнению с 3D-сеткой. Такое небольшое отличие может быть следствием изменения сетки или же это вследствие экспериментальной погрешности в определении скорости ударной волны, движущейся по ударной трубе. Как бы там ни было, в этой ситуации от расчетов правомерно ожидать качественного согласия с экспериментальными данными, не претендуя на большую точность по времени. Кроме того, имеются отличия в интенсивности перемешивания и скорости распространения ЗТП вдоль трубы, что хорошо видно на рис. 10.

Отметим, что на всех расчетных рисунках приводятся распределения градиентов плотности в диапазоне от 0 до 0,01, соответственно этому цвет меняется от синего до красного. Таким образом, красные оттенки в расчетах дают представление о процессах перемешивания, в частности о зоне турбулентного перемешивания.

Из сравнения расчетных и экспериментальных распределений можно сделать следующие выводы. В целом результаты расчетов согласуются между собой и с экспериментальными данными, при этом расчеты лучше согласуются с экспериментом с 2D-сеткой, что не удивительно, так как они моделируют именно этот опыт (расчеты двумерные). Наличие проволочной сетки в расчете 1 чувствуется до конца моделирования, в расчетах хорошо видны струйки с большими градиентами, совпадающими с положением сетки. Менее ярко этот эффект проявляется в расчете 2, наличие фрагментов пленки хаотизирует

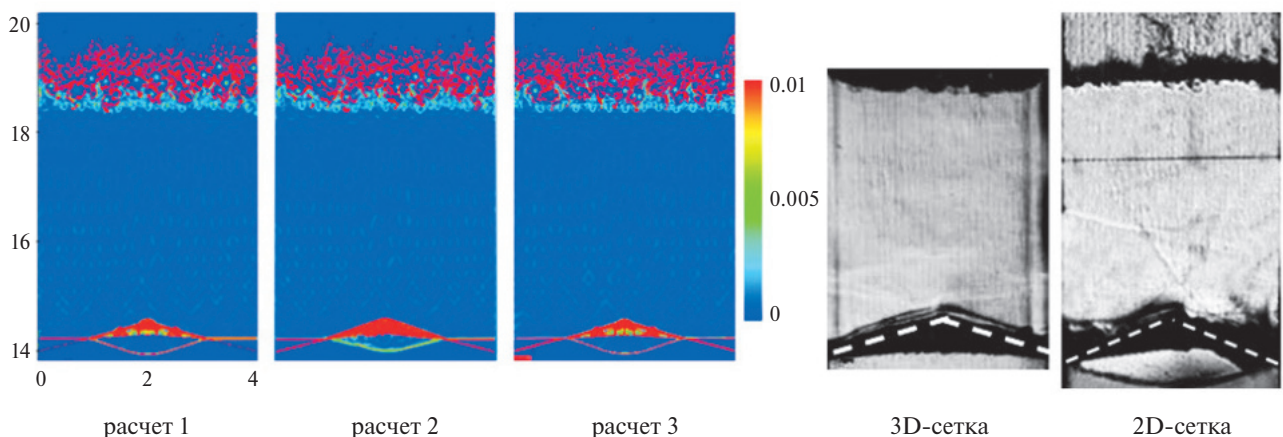


Рис. 7. Картины течения: расчеты $t = 491$, эксперимент с 3D-сеткой $t = 491,6$, эксперимент с 2D сеткой $t = 481$.

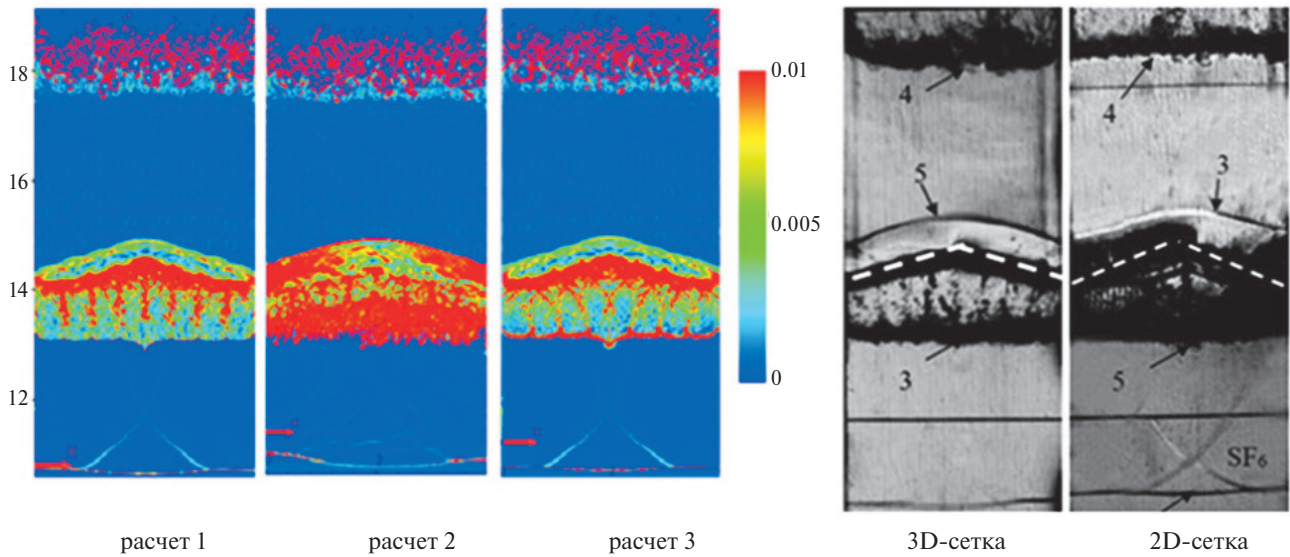


Рис. 8. Картины течения: расчеты $t = 571$, эксперимент с 3D-сеткой $t = 571,6$, эксперимент с 2D-сеткой $t = 565,1$.

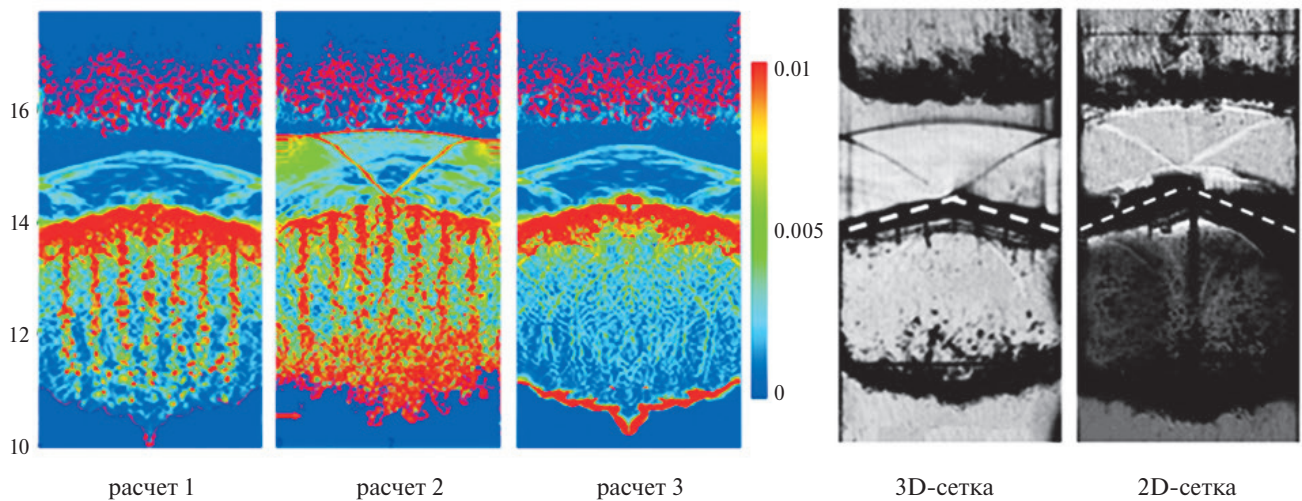


Рис. 9. Картины течения: расчеты $t = 732$, эксперимент с 3D-сеткой $t = 731,6$, эксперимент с 2D-сеткой $t = 732,1$.

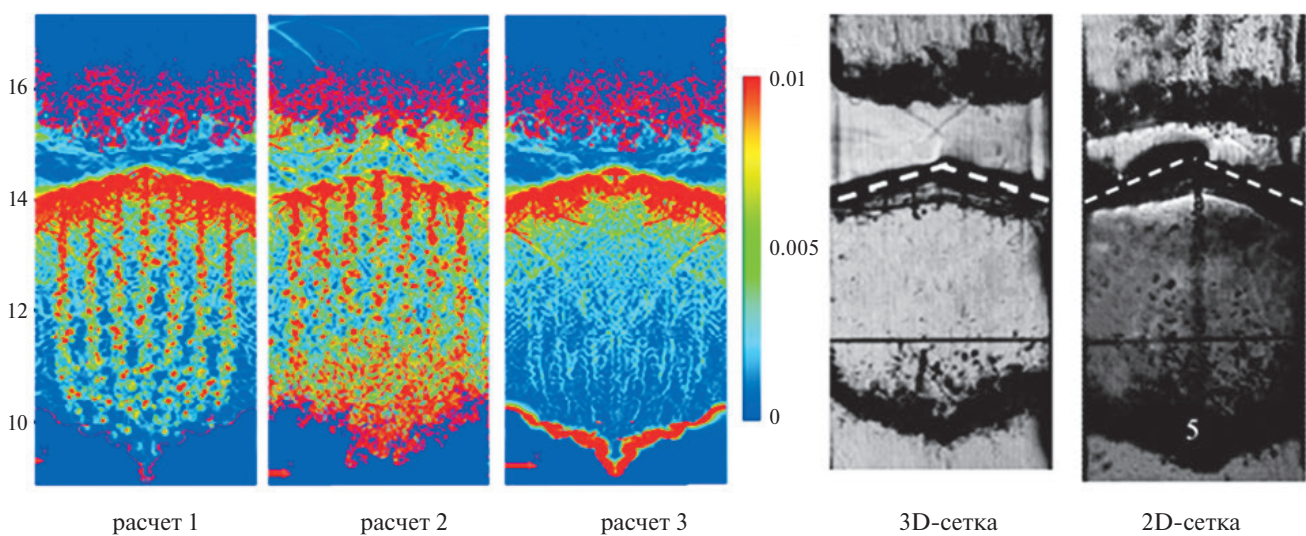


Рис. 10. Картины течения: расчеты $t = 812$, эксперимент с 3D-сеткой $t = 811,6$, эксперимент с 2D-сеткой $t = 815,6$.

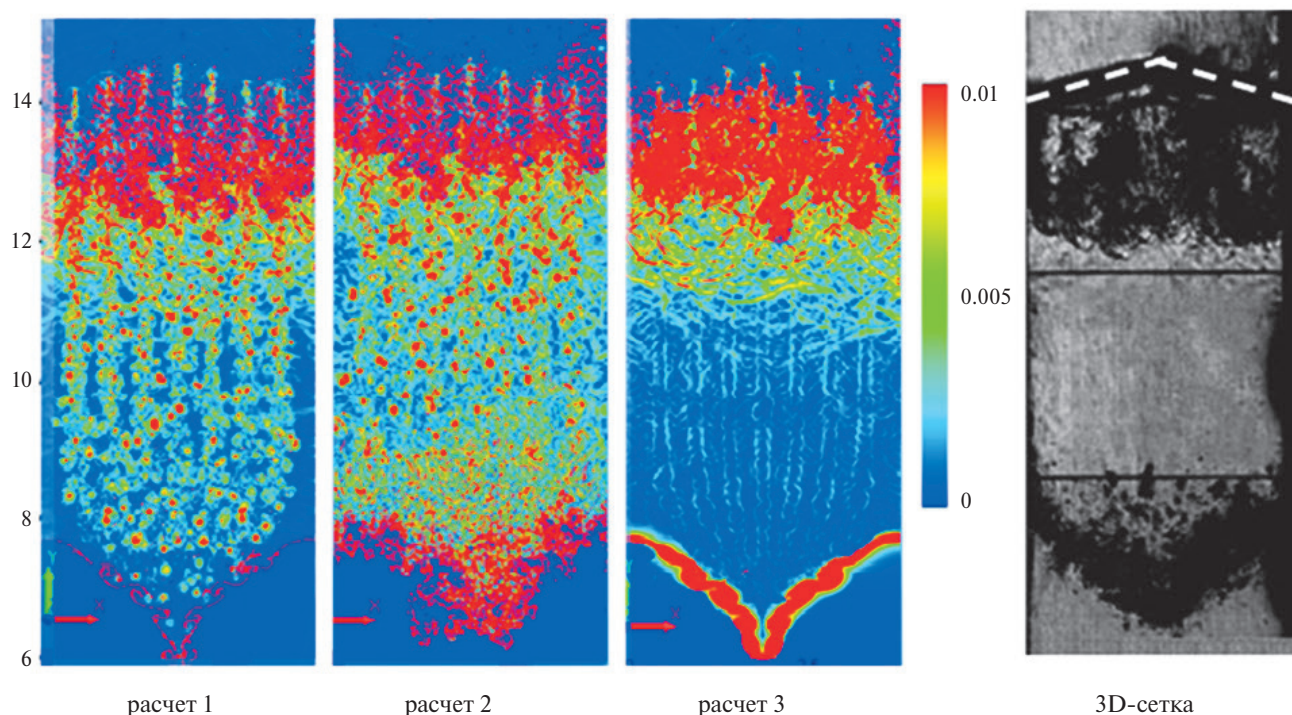


Рис. 11. Картины течения: расчеты $t = 1000$, эксперимент с 3D сеткой $t = 1071,6$ (для эксперимента с 2D-сеткой данных нет).

течение и эти струйки со временем размываются. Еще более выделяется расчет с $k-\epsilon$ моделью, в котором наличие диффузии сглаживает этот эффект с самого начала течения, но он все равно заметен (рис. 10).

Однако имеются и более существенные отличия расчетов от экспериментов. Во всех расчетах есть небольшое отставание ударной волны, приходящей на место расположения проволочной сетки (рис. 7), по сравнению с экспериментальными данными, на рис. 9 видно, что расчетная ударная волна опережает экспериментальную. Наиболее согласующиеся с экспериментом данные получены в расчете 2 с учетом фрагментов пленки. В частности, на рис. 9 в расчете 2 отраженная от пленки волна (которая распространяется вверх по трубе) заметно ближе к экспериментальному положению. Еще более заметно, что в расчете 2 ЗТП на границе воздух– SF_6 согласуется с экспериментальными данными, в то время как в расчете 1 она практически отсутствует, а имеются лишь завитушки вследствие проявления сдвиговой неустойчивости, а в расчете 3 ЗТП имеется, однако она значительно тоньше. Таким образом, пленка играет важную роль в данном течении и для корректного численного моделирования необходимо ее учитывать.

Отметим, что для 3D-сетки надо бы провести 3D-моделирование, однако подобный расчет требует

неоправданно больших ресурсов компьютера. На качественном уровне результаты вполне адекватны и при 2D-моделировании.

5. ВЕРИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОЙ МЕТОДИКИ МИМОЗА

Моделирование опыта № 1 выполнялось в постановке, приведенной на рис. 1. В трехслойной газовой системе центральный слой (между контактными границами КГ₁ и КГ₂) заполнялся легким газом (He). Вне центрального слоя располагался воздух. Все газы находились при атмосферном давлении.

УВ формировалась на левой границе и двигалась направо с числом Маха $M = 1,3$. Граничные условия: на верхней и нижней границах ставились периодические условия, за фронтом УВ газодинамические параметры соответствовали величинам за фронтом скачка.

Выполнено два расчета. В первом расчете на обеих КГ задавались двухмодовые ($a_1, a_2 \neq 0, a_3 = 0$) начальные возмущения, во втором — трехмодовые ($a_1, a_2, a_3 \neq 0$) возмущения по соотношению

$$D(y) = a_1 \sin(k_1 y) + a_2 \sin(k_2 y) + a_3 \sin(k_3 y).$$

Амплитуды и длины волн составляли $a_1 = 0,01$ см, $\lambda_1 = 3$ см, $a_2 = 0,01$ см, $\lambda_2 = 0,4$ см, $a_3 = 0,002$ см, $\lambda_3 = 0,01$ см.

5.1. Методика расчета

Математическое моделирование опыта № 1 выполнялось в 2D-постановке по методике МИМОЗА с использованием уравнений Эйлера без привлечения каких-либо моделей учета ТП (ILES моделирование). Расчетная методика основана на лагранжево-эйлеровой стратегии и выделении веществ концентрациями (подробнее см. [41–44]). Такой подход является эффективным при моделировании задач механики сплошной среды с большими деформациями.

Расчет счетного шага состоит из двух этапов: на первом этапе выполняется интегрирование уравнений Эйлера, записанных в лагранжевых координатах, на втором этапе производится пересчет полученных сеточных значений на первоначальную квадратную сетку [42]. Пересчет величин осуществляется при помощи алгоритма, основанного на расщеплении по координатным направлениям и использовании одномерного алгоритма повышенного порядка точности.

На лагранжевом этапе расчета границы ячеек сетки перемещаются со скоростью вещества, массы ячеек не изменяются. Интегрирование системы уравнений выполняется на разнесенной разностной сетке. Термодинамические параметры задачи относятся к центру счетной ячейки, координаты и компоненты скорости — к узлам. Используется полностью консервативная разностная схема “предиктор—корректор”, аналогичная [44]. С целью предотвращения размытия КГ между веществами применяется алгоритм их выделения с помощью концентраций. Для подавления паразитических осцилляций численного решения в окрестности больших градиентов газодинамических величин вводится искусственная вязкость, являющаяся суммой квадратичной и линейной вязкостей. В смешанных ячейках (ячейках, содержащих несколько веществ) давление вычисляется покомпонентно, а затем усредняется с учетом объемных концентраций веществ.

Расчет многокомпонентной сплошной среды осуществляется посредством двух методов отслеживания КГ материалов: метода концентраций — VolumeofFluid (VoF) [43] и метода моментов концентраций — MomentofFluid (MoF) [45]. Особенностью метода VoF является зависимость алгоритма от объемных концентраций материала в соседних счетных ячейках. Другая особенность VoF-методов заключается в том, что при наличии в смешанной ячейке более двух компонентов результат реконструкции КГ зависит от порядка обработки веществ в алгоритме.

В методе МоF, зная положение центра массы вещества и занимаемую им долю объема в ячейке, путем решения задачи минимизации определяется КГ вещества в виде прямой линии без привлечения данных из соседних счетных ячеек. Метод МоF имеет второй порядок точности, что позволяет точно реконструировать линейные КГ. Метод МоF позволяет точнее рассчитывать потоки объемов компонент на этапе адвекции и позволяет дольше удерживать целостность КГ материалов в процессе счета.

5.2. Результаты расчетов

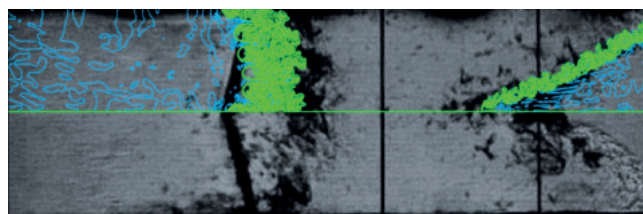
Результаты моделирования динамики границ и зон перемешивания, полученные с использованием методов VoF и МоF, дали близкие результаты. На рис. 12 сопоставляются результаты экспериментов и расчетов, полученных методом VoF. Рассчитанные по методике МИМОЗА зоны перемешивания соприкасающихся газов на КГ₁ и КГ₂ изображены на рисунке зеленым цветом.

Анализ полученных результатов показал, что:

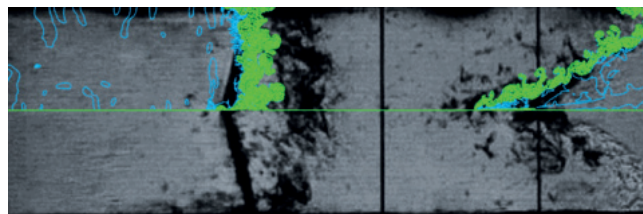
- ширина области перемешивания при трехмодовых начальных возмущениях заметно меньше, чем при двухмодовых (наиболее ярко это наблюдается на КГ₁);
- расчетная скорость КГ₁ несколько меньше, чем в эксперименте.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены численные расчеты динамики роста малых возмущений на контактных границах газов в трехслойных системах воздух—Не—воздух и воздух—SF₆—воздух вследствие развития НРМ и НКГ. Эти



Двухмодовые возмущения, $t \approx 530$ мкс



Трехмодовые возмущения, $t \approx 530$ мкс

Рис. 12. Сравнение расчетной и экспериментальной динамики границ и зон перемешивания, слойка воздух—гелий—воздух, $t \approx 530$ мкс.

данные сопоставлены с данными натурных экспериментов, выполненных в ударной трубе. Получено удовлетворительное согласие расчетных и экспериментальных результатов по динамике зоны турбулентного перемешивания. Некоторые временные отличия могут быть связаны с экспериментальными погрешностями измерения скорости падающей на контактную границу ударной волны.

Эксперименты и расчеты показывают, что с увеличением размера начальных возмущений на контактной границе газов ширина зоны перемешивания увеличивается, поэтому для корректного численного моделирования турбулентного перемешивания веществ требуется строго знать спектр начальных возмущений.

Расчеты ИПМ им. М.В. Келдыша РАН выполнены с использованием вычислительных ресурсов Суперкомпьютерного центра коллективного пользования.

П.А. Кучугов выражает благодарность разработчикам системы SAPFOR и DVMH за реализацию параллельной версии программы NUT3D.

Работа выполнена в рамках научной программы Национального центра физики и математики по Государственному контракту № Н.4ц.241.4Д.23.1085.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressed fluids, Commun. Pure Appl. Math. 13, 297, 1960.
2. Мешков Е.Е. Неустойчивость границы раздела двух газов, ускоряемой ударной волной. Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 5. С. 151–158. 1969.
3. Helmholtz H.L.F. Über discontinuillisch Flussigkeits-Bewegungen. Monatsberichte Konigl. Preus. Akad. Wiss. Berlin. 1868. P. 215.
4. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. Proc. Roy. Soc. 1950. V. A201. P. 192.
5. Bel'kov S.A., Bondarenko S.V., Demchenko N.N. et al. Compression and burning of a direct-driven thermonuclear target under the conditions of inhomogeneous heating by multi-beam megajoule laser, PPCF, 61, 025011, 2019.
6. Невмержицкий Н.В. Гидродинамические неустойчивости и турбулентное перемешивание веществ. Лабораторное моделирование. Монография / под ред. доктора техн. наук А.Л. Михайлова. Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2018. С. 246.
7. Luo X., Guan B., Si T. et al. Richtmyer-Meshkov instability of a three-dimensional SF6-air interface with a minimum-surface feature, Phys. Rev E, 93, 013101, 2016.
8. Brouillette M. The Richtmyer-Meshkov Instability, Annu. Rev. Fluid Mech., 34, 445, 2002.
9. Невмержицкий Н.В., Разин А.Н., Трутнев Ю.А. и др. Исследование развития турбулентного перемешивания в трехслойных газовых системах с наклонной контактной границей. ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика, 2, 12–17, 2008.
10. Козлов В.И., Разин А.И., Шапоренко Е.В. и др. Результаты моделирования по методике КОРОНА газодинамических опытов по турбулентному перемешиванию в двумерных течениях. ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика, 1, 31–38, 2009.
11. Разин А.Н. Взаимодействие ударной волны с наклонной контактной границей. ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика, 2, 3–11, 2008.
12. Henderson L.F. On the refraction of shock waves, J. Fluid Mech., 198, 365–386, 1989.
13. Hahn M., Drikakis D., Youngs D.L. et al. Richtmyer-Meshkov turbulent mixing arising from an inclined material interface with realistic surface perturbations and reshocked flow, Phys. Fluids, 23, 046101, 2011.
14. Разин А.Н. Моделирование неустойчивости и турбулентного перемешивания в слоистых системах. Саров: ФГУП РФЯЦ ВНИИЭФ. 414. 2010.
15. Змушко В.В., Разин А.Н., Синельникова А.А. Влияние начальной шероховатости контактных границ на развитие неустойчивости после прохождения ударной волны, Прикладная механика и техническая физика. 63. 3. 34–42. 2022.
16. Бодров Е.В., Змушко В.В., Невмержицкий Н.В. и др. Расчетно-экспериментальное исследование развития турбулентного перемешивания в газовой слойке при прохождении ударной волны. Известия РАН. Механика жидкости и газа. 3. 54–62. 2018.
17. Smith A.V., Holder D.A., Barton C.J. et al. Shock tube experiments on Richtmyer-Meshkov instability across a chevron profiled interface, Proceedings of the 8th IWPCTM, 2001.
18. Holder D.A., Barton C.J. Shock tube Richtmyer-Meshkov experiments: Inverse chevron and half height, Proceeding of the 9th IWPCTM, 2004.
19. Holder D.A., Smith A.V., Barton C.J. et al. Shock-tube experiments on Richtmyer-Meshkov instability growth using an enlarged double-bump perturbation, Laser and Particle Beams, 23, 411, 2003.
20. Ладонкина М.Е. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем. Институт математического моделирования РАН. 2005.
21. Кучугов П.А. Динамика процессов турбулентного перемешивания в лазерных мишенях. Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. 2014.
22. Кучугов П.А. Моделирование имплозии термоядерной мишени на гибридных вычислительных системах, Сб. тр. междунар. науч. конф. "Параллельные

- вычислительные технологии 2017”, г. Казань, Республика Татарстан, 3–7 апреля 2017 г., 399–409, 2017.
23. Брагин М.Д., Рогов Б.В. О точном пространственном расщеплении многомерного скалярного квазилинейного гиперболического закона сохранения. Докл. АН. 2016. Т. 469. № 2. С. 143–147.
24. Брагин М.Д. Неявно-явные бикомпактные схемы для гиперболических систем законов сохранения. // Матем. моделирование. 2022. Т. 34. № 6. С. 3–21.
25. Bragin M.D., Rogov B.V. Conservative limiting method for high-order bcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations. Appl. Numer. Math. 2020. V. 151. P. 229–245.
26. Брагин М.Д. Влияние монотонизации на спектральное разрешение бикомпактных схем в задаче о невязком вихре Тейлора-Грина // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 4. С. 625–641.
27. Groom M., Thornber B. The influence of the initial perturbation power spectra on the growth of a turbulent mixing layer induced by Richtmyer-Meshkov instability, Phys. D, 407, 132463, 2020.
28. Youngs D.L. Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability, Phys. Fluids A, 3, 1312, 1991.
29. Тишкин В.Ф., Никишин В.В., Попов И.В., Фаворский А.П. Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задач о развитии неустойчивости Рихтмайера-Мешкова // Мат. модел. 7. 5. 15–25. 1995.
30. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами гиперболического типа // Мат. модел. 1. 5. 95–120. 1989.
31. Toro E.F., Spruce M., Speares W. Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver, Shock Waves, 4, 25–34, 1994.
32. Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. ЖВМиМФ. 3. 4. 702–719. 1963.
33. Авдошина Е.В., Бондаренко Ю.А., Горбунов А.А., Дмитриева Ю.С., Наумов А.О., Проневич С.Н., Рудько Н.М., Тихомиров Б.П. Исследование точности различных методов усреднения коэффициента теплопроводности на стороне ячейки интегрирования при численном решении уравнения теплопроводности // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 3. 32. 2014.
34. Колганов А.С. Автоматизация распараллеливания Фортран-программ для гетерогенных кластеров: автореф. дисс. к.ф.-м.н. М.: 2020. 22 с.
35. Kataev N. Application of the LLVM Compiler Infrastructure to the Program Analysis in SAPFOR. In: Voevodin V., Sobolev S. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2018. Communications in Computer and Information Science, vol 965. Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-05807-4_41
36. Bakhtin V.A., Krukov V.A. DVM-Approach to the Automation of the Development of Parallel Programs for Clusters // Programming and Computer Software. 2019. V. 45. № 3. P. 121–132.
37. Янилкин Ю.В., Беляев С.П., Бондаренко Ю.А., Гаврилова Е.С., Гончаров Е.А., Горбенко А.Д., Городничев А.В., Губков Е.В., Гужова А.Р., Дегтяренко Л.И., Жарова Г.В., Колобянин В.Ю., Софронов В.Н., Стадник А.Л., Ховрин Н.А., Чернышова О.Н., Чистякова И.Н., Шемяков В.Н. Эйлеровы численные методики ЭГАК и ТРЭК для моделирования многомерных течений многокомпонентной среды. Тр. РФЯЦ-ВНИИЭФ. Науч.-иссл. изд. Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ. Вып. 12. 54–65. 2008.
38. Янилкин Ю.В. Модели замыкания уравнений лагранжевой газодинамики и упругопластики в многокомпонентных ячейках. Часть 1. Изотропные модели // ВАНТ. Сер. ММФП. Вып. 3. 3–21. 2017.
39. Янилкин Ю.В., Колобянин В.Ю., Чистякова И.Н., Егузова М.Ю. Применение метода PPM в расчетах по методикам ЭГАК и ТРЭК // ВАНТ. Сер. ММФП. Вып. 4. 69–79. 2005.
40. Бахрах С.М., Глаголева Ю.П., Самигулин М.С., Фролов В.Д., Яненко Н.Н., Янилкин Ю.В. Расчет газодинамических течений на основе метода концентраций // ДАН СССР. Т. 257. № 3. 566–569. 1981.
41. Змушко В.В., Плетенёв Ф.А., Сараев В.А., Софронов И.Д. Методика решения трехмерных уравнений газовой динамики в смешанных лагранжево-эйлеровых координатах // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1988. Вып. 1. С. 22–27.
42. Софронов И.Д., Афанасьева Е.А., Винокуров О.А. и др. Комплекс программ МИМОЗА для решения многомерных задач механики сплошной среды на ЭВМ “Эльбрус-2” // Вопр. атом. науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1990. Вып. 2. С. 3–9.
43. Zmushko V.V. Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // International Workshop “New Models of Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media” / Oxford / September 15–19. 1997.
44. Ладагин В.К., Пастушенко А.М. Об одной схеме расчета газодинамических течений // Численные методы механики сплошной среды. 1977. Т. 8. № 2. С. 66–72.
45. Benson D.J. Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems. // Applied Mechanics Review 55(2). 2002. С. 151–165.
46. Dyadechko V., Shashkov M. Multi-material interface reconstruction from the moment data. Technical report LA-UR-07-0656, LANL, 2006.

MATHEMATICAL MODELING OF TURBULENT MIXING IN GAS SYSTEMS WITH A CHEVRON CONTACT BOUNDARY USING NUT3D, BIC3D, EGAK, AND MIMOSA NUMERICAL CODES

M. D. Bragin^a, N. V. Zmitrenko^a, V. V. Zmushko^b, P. A. Kuchugov^a, E. V. Levkina^b,
K. V. Anisiforov^b, N. V. Nevmerzhitskiy^b, A. N. Razin^b, E. D. Sen'kovskiy^b,
V. P. Statsenko^b, N. V. Tishkin^a, Yu. V. Tret'yachenko^b, Yu. V. Yanilkin^b

^aKeldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Miusskaya pl. 4, Moscow, 125047 Russia

^bRussian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics,
pr. Mira 37, Sarov, Nizhni Novgorod oblast, 607188 Russia

The paper presents computational and experimental studies of the evolution of turbulent mixing in three-layer gas systems with the development of hydrodynamic instabilities, in particular Richtmyer-Meshkov and Kelvin-Helmholtz, under the action of shock waves. One of the contact boundaries of the gases was flat, the other with a break in the form of a chevron. Numerical calculations are performed both without initial perturbations of the contact boundaries, and in the presence of perturbations. It is shown that the roughness of the contact boundary significantly affects the width of the mixing zone.

Keywords: turbulent mixing, mathematical modeling, hydrodynamic instabilities, shock tube

REFERENCES

1. Richtmyer R.D. Taylor instability in shock acceleration of compressed fluids, *Commun. Pure Appl. Math.* 13, 297, 1960.
2. Meshkov E.E. Instability of the interface between two gases, accelerated by a shock wave, *Izv. Academy of Sciences of the USSR, Mechanics of Liquid and Gas*, 5, 151–158, 1969.
3. Helmholtz H.L.F. Über discontinuillisch Flüssigkeits-Bewegungen. *Monatsberichte Konigl. Preus. Akad. Wiss. Berlin*. 1868. P. 215.
4. Taylor G.I. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. I. *Proc. Roy. Soc.*, 1950. V.A201. P.192.
5. Bel'kov S.A., Bondarenko S.V., Demchenko N.N. et al. Compression and burning of a direct-driven thermonuclear target under the conditions of inhomogeneous heating by multi-beam megajoule laser, *PPCF*, 61, 025011, 2019.
6. Nevmerzhitskiy N.V. Hydrodynamic instabilities and turbulent mixing of substances. Laboratory modeling. Monograph / Ed. Doctor of Technical Sciences A.L. Mikhailova. – Sarov: FSUE "RFNC-VNIIEF". 2018. P. 246.
7. Luo X., Guan B., Si T. et al. Richtmyer-Meshkov instability of a three-dimensional SF6-air interface with a minimum-surface feature, *Phys. Rev E*, 93, 013101, 2016.
8. Brouillette M. The Richtmyer-Meshkov Instability, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 34, 445, 2002.
9. Nevmerzhitskiy N.V., Razin A.N., Trutnev Yu.A. and others. Study of the development of turbulent mixing in three-layer gas systems with an inclined contact boundary, *VANT. Series: theoretical and applied physics*, 2, 12–17, 2008.
10. Kozlov V.I., Razin A.I., Shaporenko E.V. and others. Results of modeling gas-dynamic experiments on turbulent mixing in two-dimensional flows using the CORONA method, *VANT. Series: theoretical and applied physics*, 1, 31–38, 2009.
11. Razin A.N. Interaction of a shock wave with an inclined contact boundary, *VANT. Series: theoretical and applied physics*, 2, 3–11, 2008.
12. Henderson L.F. On the refraction of shock waves, *J. Fluid Mech.*, 198, 365–386, 1989.
13. Hahn M., Drikakis D., Youngs D.L. et al. Richtmyer-Meshkov turbulent mixing arising from an inclined material interface with realistic surface perturbations and reshocked flow, *Phys. Fluids*, 23, 046101, 2011.
14. Razin A.N. Modeling of instability and turbulent mixing in layered systems, *Sarov, FSUE RFNC VNIIEF*, 414, 2010.
15. Zmushko V.V., Razin A.N., Sinelnikova A.A. The influence of the initial roughness of contact boundaries on the development of instability after the passage of a shock wave, *Applied Mechanics and Technical Physics*, 63, 3, 34–42, 2022.
16. Bodrov E.V., Zmushko V.V., Nevmerzhitskiy N.V. and others. Computational and experimental study of the development of turbulent mixing in a gas layer during the passage of a shock wave, *Izvestiya RAS. Mechanics of Liquid and Gas*, 3, 54–62, 2018.
17. Smith A.V., Holder D.A., Barton C.J. et al. Shock tube experiments on Richtmyer-Meshkov instability across a chevron profiled interface, *Proceedings of the 8th IWPCTM*, 2001.
18. Holder D.A., Barton C.J. Shock tube Richtmyer-Meshkov experiments: Inverse chevron and half height, *Proceeding of the 9th IWPCTM*, 2004.
19. Holder D.A., Smith A.V., Barton C.J. et al. Shock-tube experiments on Richtmyer-Meshkov instability growth using an enlarged double-bump perturbation, *Laser and Particle Beams*, 23, 411, 2003.
20. Ladonkina M.E. Numerical modeling of turbulent mixing using high-performance systems, 2005, Institute of Mathematical Modeling of the Russian Academy of Sciences.

21. *Kuchugov P.A.* Dynamics of turbulent mixing processes in laser targets, 2014, Institute of Applied Mathematics named after. M.V. Keldysh RAS.
22. *Kuchugov P.A.* Modeling the implosion of a thermonuclear target on hybrid computing systems, Collection of proceedings of the international scientific conference «Parallel Computing Technologies 2017», Kazan, Republic of Tatarstan, April 3-7, 2017, 399-409, 2017.
23. *Bragin M.D., Rogov B.V.* On the exact spatial splitting of a multidimensional scalar quasilinear hyperbolic conservation law. Dokl. AN. 2016. T. 469. No. 2. P. 143–147.
24. *Bragin M.D.* Implicit-explicit compact schemes for hyperbolic systems of conservation laws. Math. modeling. 2022. T. 34. No. 6. P. 3–21.
25. *Bragin M.D., Rogov B.V.* Conservative limiting method for high-order bcompact schemes as applied to systems of hyperbolic equations. Appl. Numer. Math. 2020. V. 151. P. 229–245.
26. *Bragin M.D.* The influence of monotoneization on the spectral resolution of bcompact schemes in the Taylor-Green inviscid vortex problem. J. Comput. math. and math. physical 2022. T. 62. No. 4. P. 625–641.
27. *Groom M., Thornber B.* The influence of the initial perturbation power spectra on the growth of a turbulent mixing layer induced by Richtmyer-Meshkov instability, Phys. D, 407, 132463, 2020.
28. *Youngs D.L.* Three-dimensional numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability, Phys. Fluids A, 3, 1312, 1991.
29. *Tishkin V.F., Nikishin V.V., Popov I.V., Favorsky A.P.* Difference schemes of three-dimensional gas dynamics for problems on the development of Richtmyer-Meshkov instability, Mat. model., 7, 5, 15–25, 1995.
30. *Vyaznikov K.V., Tishkin V.F., Favorsky A.P.* Construction of monotonic difference schemes of higher order of approximation for systems of linear differential equations with constant coefficients of hyperbolic type, Mat. model., 1, 5, 95–120, 1989.
31. *Toro E.F., Spruce M., Speares W.* Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver, Shock Waves, 4, 25–34, 1994.
32. *Samarsky A.A., Sobol I.M.* Examples of numerical calculation of temperature waves, ZhVMiMF, 3, 4, 702–719, 1963.
33. *Avdoshina E.V., Bondarenko Yu.A., Gorbunov A.A., Dmitrieva Yu.S., Naumov A.O., Pronevich S.N., Rudko N.M., Tikhomirov B.P.* Study of the accuracy of various methods for averaging the thermal conductivity coefficient on the side of the integration cell in the numerical solution of the heat equation, VANT, ser. Mathematical modeling of physical processes, 3, 32, 2014.
34. *Kolganov A.S.* Automation of parallelization of Fortran programs for heterogeneous clusters: Abstract of the dissertation of Ph.D., M.: 2020. 22 p.
35. *Kataev N.* Application of the LLVM Compiler Infrastructure to the Program Analysis in SAPFOR. In: Voevodin V., Sobolev S. (eds) Supercomputing. RuSCDays 2018. Communications in Computer and Information Science, vol 965. Springer, Cham. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-05807-4_41
36. *Bakhtin V.A., Krukov V.A.* DVM-Approach to the Automation of the Development of Parallel Programs for Clusters // Programming and Computer Software. 2019. Vol. 45. № 3. P. 121–132.
37. *Yanilkin Yu.V., Belyaev S.P., Bondarenko Yu.A., Gavrilova E.S., Goncharov E.A., Gorbunov A.D., Gorodnichev A.V., Gubkov E.V., Guzova A.R., Degtyarenko L.I., Zharova G.V., Kolobyanin V.Yu., Sofronov V.N., Stadnik A.L., Khovrin N.A., Chernyshova O.N., Chistyakova I.N., Shemyakov V.N.* Euler numerical methods EGAC and TREC for modeling multidimensional flows of a multicomponent medium. Proceedings of RFNC-VNIIEF. Scientific research publication, Sarov: RFNC-VNIIEF, 200, Vol. 12, P. 54–65.
38. *Yanilkin Yu.V.* Models for closing the equations of Lagrangian gas dynamics and elastic-plasticity in multicomponent cells. Part 1. Isotropic models // VANT, ser. MMFP, Vol. 3, 2017, P. 3–21.
39. *Yanilkin Yu.V., Kolobyanin V.Yu., Chistyakova I.N., Eguzhova M.Yu.* Application of the PPM method in calculations using the EGAC and TREC methods // VANT, ser. MMFP, 2005, Vol. 4, P. 69–79.
40. *Bakhrakh S.M., Glagoleva Yu.P., Samigulin M.S., Frolov V.D., Yanenko N.N., Yanilkin Yu.V.* Calculation of gas-dynamic flows based on the concentration method // DAN USSR, 1981, Vol. 257, No. 3, P. 566–569.
41. *Zmushko V.V., Pletenev F.A., Saraev V.A., Sofronov I.D.* Methodology for solving three-dimensional gas dynamics equations in mixed Lagrangian-Eulerian coordinates // VANT. Ser. Methods and programs for numerical solution of problems of mathematical physics. 1988. Issue 1. P. 22–27.
42. *Sofronov I.D., Afanasyeva E.A., Vinokurov O.A. and others.* Complex of MIMOZA programs for solving multidimensional problems of continuum mechanics on the Elbrus-2 computer // Vopr. atom. science and technology. Ser. Mathematical modeling of physical processes. 1990. Issue 2. P. 3–9.
43. *Zmushko V.V.* Computation of convective flows and their realization in MIMOZA code // International Workshop “New Models of Numerical Codes for Shock Wave Processes in Condensed Media” / Oxford / September 15–19. 1997.
44. *Ladagin V.K., Pastushenko A.M.* On one scheme for calculating gas-dynamic flows // Numerical methods of continuum mechanics. 1977. T.8. No. 2. P.66–72.
45. *Benson D.J.* Volume of fluid interface reconstruction methods for multi-material problems. // Applied Mechanics Review 55(2). 2002. C. 151–165.
46. *Dyadechko V., Shashkov M.* Multi-material interface reconstruction from the moment data. Technical report LA-UR-07-0656, LANL, 2006.