

Том 63, Номер 6

ISSN 0044-4669

Июнь 2023



ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

www.sciencejournals.ru



СОДЕРЖАНИЕ

Том 63, номер 6, 2023 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Исследование устойчивости неклассических разностных схем для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода
М. Н. Ботороева, М. В. Булатов 881
- О новом типе юнитоидных матриц
Х. Д. Икрамов 891
- Апостериорные тождества для мер отклонений от точных решений нелинейных краевых задач
С. И. Репин 896
-

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- Теория p -регулярности и существование непрерывно зависящего от граничных условий решения краевой задачи
Ю. Г. Евтушенко, Б. Медак, А. А. Третьяков 920
- On Normality in Optimal Control Problems with State Constraints
D. Yu. Karamzin, F. Lobo Pereira 937
- О Реконструкции входного воздействия системы реакции–диффузии
В. И. Максимов 938
- Mixed Virtual Element Approximation of a Fourth Order Optimal Control Problem
Minghui Yang, Yue Shen, Zhaojie Zhou 949
- Оптимизация управления и параметров в системах с фазовыми ограничениями
А. И. Тятюшкин 950
-

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Об особых точках линейных дифференциально-алгебраических уравнений с возмущениями в виде интегральных операторов
В. Ф. Чистяков 962
- О локальных параболических интерполяционных сплайнах Фавара с дополнительными узлами
В. Т. Шевалдин 979
-

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- Об отсутствии слабых решений нелинейных неотрицательных параболических неравенств высокого порядка с нелокальным источником
В. Е. Адмасу 987
- Об одном классе точных решений системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре и сферическом слое
В. А. Галкин 1000

О критических показателях для слабых решений задачи Коши для одного $2 + 1$ -мерного нелинейного уравнения составного типа с градиентной нелинейностью <i>М. О. Корпусов, А. К. Матвеева</i>	1006
Optical Solitary Waves and Soliton Solutions of the $(3 + 1)$ -Dimensional Generalized Kadomtsev–Petviashvili–Benjamin–Bona–Mahony Equation <i>A. A. Mahmud, H. M. Baskonus, T. Tanriverdi, K. A. Muhamad</i>	1022
Well-Posedness and Asymptotic Behavior for the Dissipative p -Biharmonic Wave Equation with Logarithmic Nonlinearity and Damping Terms <i>Mengyuan Zhang, Zhiqing Liu, Xinli Zhang</i>	1023

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Сравнение противопоточных и симметричных WENO-схем при моделировании базовых турбулентных течений методом крупных вихрей <i>С. Бахнэ, А. И. Трошин</i>	1024
Метод оптических путей для численного моделирования задач интегральной фотоники <i>А. А. Белов, Ж. О. Домбровская</i>	1040

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ

УДК 517.968.2

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКЛАССИЧЕСКИХ
РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА II РОДА¹⁾

© 2023 г. М. Н. Ботороева^{1,2,*}, М. В. Булатов^{1,**}

¹ 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Россия

² 664003 Иркутск, ул. Карла Маркса, 1, Иркутский государственный университет, Россия

*e-mail: masha88888@mail.ru

**e-mail: mvbul@icc.ru

Поступила в редакцию 03.10.2022 г.
Переработанный вариант 03.10.2022 г.
Принята к публикации 20.01.2023 г.

В работе для решения систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода сконструировано семейство безытерационных численных методов первого и второго порядка точности. Проведен анализ этих методов на A -, L -, P -устойчивость. Для иллюстрации полученных выводов представлены результаты численных расчетов модельных уравнений, содержащих жесткие и осциллирующие компоненты. Библ. 10. Фиг. 4. Табл. 4.

Ключевые слова: нелинейные интегральные уравнения Вольтерра II рода, разностные схемы, A -устойчивость, L -устойчивость, P -устойчивость.

DOI: 10.31857/S0044466923060054, **EDN:** TRLHZC

1. ВВЕДЕНИЕ

При решении ряда прикладных задач часто возникают нелинейные интегральные уравнения Вольтерра II рода (ИУВ II)

$$x(t) = \int_0^t F(t, s, x(s)) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где $F(t, s, x(t))$ и $f(t)$ суть n -мерные вектор-функции с известными, достаточно гладкими элементами, $x(t)$ – искомая n -мерная вектор-функция. Качественной теории и численным методам решения таких уравнений посвящены многочисленные работы (см., например, [1–4] и приведенную там библиографию).

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что задача (1) имеет единственное решение, обладающее гладкостью, необходимой для проведения дальнейших выкладок.

К настоящему времени разработана достаточно полная теория численных методов решения задачи (1), это одношаговые методы типа Рунге–Кутты и их модификации (Бельтюкова–Вольтерра–Рунге–Кутты, Пузе–Вольтерра–Рунге–Кутты, коллокационные) [3], многошаговые, общие многошаговые методы, блочные методы и др. [2–4].

Формально все эти методы можно разделить на явные и неявные. При реализации явных методов на каждом шаге интегрирования приближенное решение находят из рекуррентных соотношений. Реализация неявных методов требует значительно больших вычислительных затрат: на каждом шаге интегрирования приходится решать системы линейных уравнений. Как правило, такие системы решают методом Ньютона, или его модификациями. При этом возникают следующие проблемы: выбор начального приближения для запуска итерационного процесса, выбор числа итераций и критерия остановки счета.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта № 22-11-00173), <https://rscf.ru/project/22-11-00173/>.

Актуальным вопросом остается построение численных алгоритмов для решения уравнения (1) в случае, когда оно содержит быстро и медленно изменяющиеся компоненты – жесткие задачи. Использование явных методов для численного решения таких задач требует выбора очень малого шага интегрирования, что значительно затрудняет их использование.

В работе будут представлены безытерационные неклассические разностные схемы решения ИУВ II. Для обоснования их эффективности потребуется ряд вспомогательных сведений.

2. НЕОБХОДИМЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

На протяжении многих десятилетий для предсказания свойств численных методов решения задачи (1) используют тестовое уравнение [3], с. 469:

$$x(t) = \int_0^t (\lambda + \mu(t-s)) x(s) ds + \alpha_1 + \alpha_2 t, \quad (2)$$

где λ и μ – вещественные числа и $\lambda \ll 0$, $\mu \leq 0$.

На основе уравнения (2) могут быть построены различные тестовые задачи.

При $\mu = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 1$ получим уравнение

$$x(t) = \lambda \int_0^t x(s) ds + 1, \quad (3)$$

содержащее только жесткие компоненты. Его решением является функция $x(t) = e^{\lambda t}$.

В случае когда $\mu \neq 0$ уравнение (2) эквивалентно ОДУ второго порядка

$$x''(t) = \lambda x'(t) + \mu x(t), \quad x(0) = \alpha_1, \quad x'(t)|_{t=0} = \lambda \alpha_1 + \alpha_2,$$

которое при $\lambda^2 + 4\mu < 0$ содержит жесткие и осциллирующие компоненты.

Если полагать, что $\mu = -\omega^2$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \omega$, где ω – положительное действительное число, то получим уравнение

$$x(t) = -\omega^2 \int_0^t (t-s)x(s) ds + \omega t \quad (4)$$

с осциллирующим точным решением $x(t) = \sin \omega t$.

Введем на отрезке $[0;1]$ равномерную сетку $t_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $h = 1/N$, и обозначим $F_{i,j,k} = F(t_i, t_j, x(t_k))$, $j \leq i$, $k \leq j$, $f_i = f(t_i)$, $x_i \approx x(t_i)$.

При анализе численных методов будем опираться на ряд следующих определений.

Любой одношаговый метод для уравнения (3) можно представить в виде $x_{i+1} = R(z)x_i$, где $z = \lambda h$ и $R(z)$ принято называть функцией устойчивости [5] (полином или дробно рациональная функция).

Определение 1 (см. [5]). Множество всех точек комплексной плоскости, для которых $|R(z)| \leq 1$, называется областью устойчивости численного метода. Если область устойчивости содержит всю левую полуплоскость $z < 0$, то метод называется A -устойчивым. Если при этом $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, называется L -устойчивым.

Рассмотрим семейство одношаговых методов – θ -методы, которые для задачи (1) с точностью до обозначений имеют вид

$$x_{i+1} = h \left[a F_{i+1,i+1,i+1} + (1-a) F_{i+1,0,0} + \sum_{p=1}^i F_{i+1,p,p} \right] + f_{i+1}, \quad (5)$$

где скалярный параметр a : $0 \leq a \leq 1$.

Для уравнения (3) методы (5) при $a = 1$, $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$ совпадают с неявным методом Эйлера, явным методом Эйлера и методом трапеций. Функция устойчивости в этом случае $R(z) = \frac{1 + (1-a)z}{1-az}$, т.е. методы (5) будут A -устойчивыми при $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ и L -устойчивым при $a = 1$.

Для тестового примера (2) данные методы дают рекуррентные соотношения:

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = z(x_{i+1} - x_i) + rx_i, \quad a = 0, \quad (6)$$

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = z(x_i - x_{i-1}) + rx_{i-1}, \quad a = 1, \quad (7)$$

$$x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = \frac{z}{2}(x_{i+1} - x_{i-1}) + rx_i, \quad a = \frac{1}{2}, \quad (8)$$

где $r = \mu h^2$.

Определение 2 (см. [6]). Областью устойчивости методов (6)–(8) назовем те вещественные значения z и r , при которых корни p характеристических уравнений

$$(1-z)p^2 - 2\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{r}{2}\right)p + 1 = 0,$$

$$p^2 - 2\left(1 + \frac{z}{2}\right)p + (1+z-r) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{z}{2}\right)p^2 - 2\left(1 + \frac{r}{2}\right)p + \left(1 + \frac{z}{2}\right) = 0,$$

лежат в единичном круге.

Определение 3 (см. [7]). Если для модельного уравнения (4) численные методы дают симметричное характеристическое уравнение

$$P_m(\rho^2)p^2 - 2Q_i(\rho^2)p + P_m(\rho^2) = 0,$$

где $\rho = \omega h > 0$ и функция устойчивости метода $R_p(\rho) = \frac{Q_i(\rho^2)}{P_m(\rho^2)}$ принимает значения, меньшие единицы по модулю при любых значениях ω и любых длинах шагов за исключением, быть может, дискретного набора значений h , то численный метод называют P -устойчивым.

3. ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ

При применении неявных разностных схем для ОДУ получают систему нелинейных конечномерных уравнений. Для того чтобы облегчить вычислительный процесс, используют методы типа Розенброка [6], с. 121, предполагающие путем линеаризации схемы свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений.

Ниже мы используем этот подход для создания безытерационных методов для задачи (1). Выпишем одноопорный вариант методов (5) для задачи (1)

$$x_{i+1} = h \sum_{p=0}^i F(t_{i+1}, t_{p+b}, (bx_{p+1} + (1-b)x_p)) + f_{i+1}. \quad (9)$$

Линеаризуем (5) и (9) и объединим получившиеся соотношения в переопределенную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно x_{i+1}

$$\begin{pmatrix} E - haJ_{i+1} \\ E - hbJ_{i+b} \end{pmatrix} x_{i+1} = \begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_{i+1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} (1-a)F_{i+1,0,0} + aF_{i+1,i+1,i} - aJ_{i+1}x_i + \sum_{p=1}^i F_{i+1,p,p} \\ F_{i+1,i+b,i} - bJ_{i+b}x_i + \sum_{p=0}^{i-1} F(t_{i+1}, t_{p+b}, (bx_{p+1} + (1-b)x_p)) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где E – единичная матрица порядка n , а для матрицы Якоби $J = \frac{\partial F(t, s, x)}{\partial x}$ введены обозначения $J(t_{i+1}, t_{i+1}, x(t_i)) = J_{i+1}$, $J(t_{i+1}, t_{i+b}, x(t_i)) = J_{i+b}$.

СЛАУ (10) в общем случае не имеет решения, поэтому умножим обе части системы слева на матрицу $(E - haJ_{i+1} | c(E - hbJ_{i+b}))$ размерности $(n \times 2n)$. В итоге получим систему n уравнений

$$\begin{aligned} \left[(E - haJ_{i+1})^2 + c(E - hbJ_{i+b})^2 \right] x_{i+1} = (E - haJ_{i+1})h \left[(1-a)F_{i+1,0,0} + aF_{i+1,i+1,i} - aJ_{i+1}x_i + \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^i F_{i+1,p,p} \right] + c(E - hbJ_{i+b})h \left[F_{i+1,i+b,i} - bJ_{i+b}x_i + \sum_{p=0}^{i-1} F(t_{i+1}, t_{p+b}, bx_{p+1} + (1-b)x_p) \right] + \\ + [E - ahJ_{i+1} + c(E - bhJ_{i+b})] f_{i+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Семейство методов (11) устойчиво и при любых значениях параметров a, b, c имеет как минимум первый порядок точности.

Если параметры удовлетворяют уравнению

$$1 + c = 2(a + bc), \quad (12)$$

то разностная схема (11) будет иметь второй порядок точности. В этом легко убедиться, разложив разностную схему (11) в ряд в окрестности точки (x_i, t_i) .

Для модельной задачи (2) при $\mu = 0$, $a_2 = 0$ разностная схема (11) дает следующее рекуррентное соотношение

$$\left((1 - az)^2 + c(1 - bz)^2 \right) x_{i+1} = \left(z(1 - az + c(1 - bz)) + (1 - az)^2 + c(1 - bz)^2 \right) x_i. \quad (13)$$

Для дальнейшего исследования удобно представить функцию устойчивости рассматриваемых методов в следующем виде:

$$R(z) = \frac{1 + c + (1 - 2a + c - 2bc)z + (a^2 - a + cb^2 - cb)z^2}{1 + c - (2a + 2bc)z + (a^2 + cb^2)z^2}.$$

Среди методов (11), параметры которых удовлетворяют условию (13), можно выделить A -устойчивые при $c \geq 0$ и L -устойчивые при одновременном выполнении условий

$$c \geq 0, \quad a^2 - a + cb^2 - cb = 0, \quad a^2 + cb^2 \neq 0. \quad (14)$$

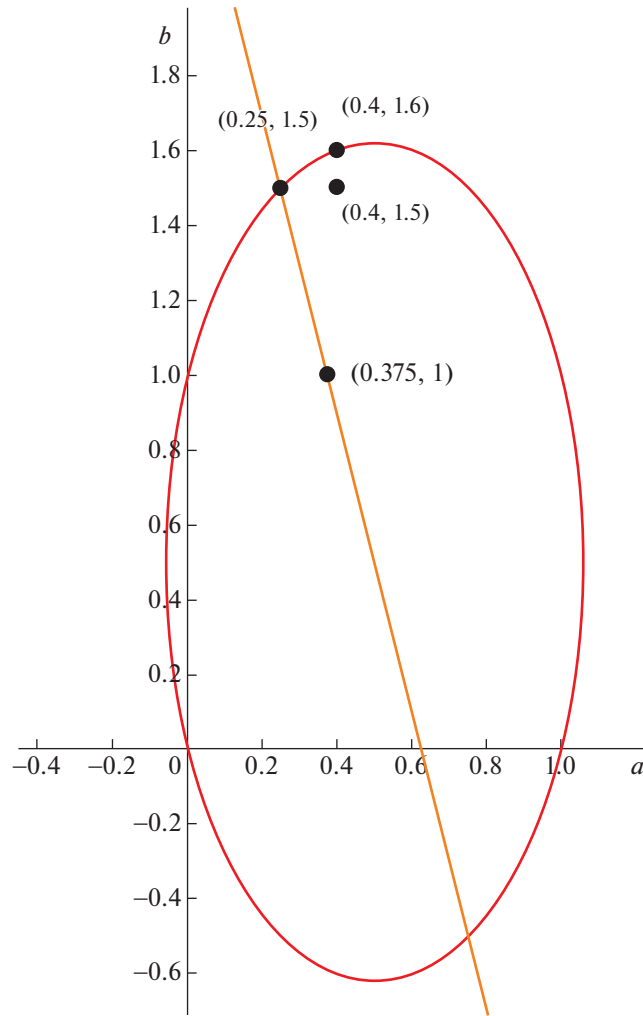
Для анализа характера разностных схем (11) удобно воспользоваться графическим представлением условий (12) и (14), например, в системе координат aOb при заданном конкретном значении параметра c . В таком случае уравнение (12) задает прямую, а условия (14) при $c > 0$ описывают эллипс с центром в точке $(0.5; 0.5)$. Точки пересечения этих кривых определяют коэффициенты (a, b) (при заранее заданном $c > 0$) L -устойчивого алгоритма второго порядка. Следует отметить, что при обозначенных ранее условиях $0 \leq a, b \leq 1$ L -устойчивый метод второго порядка единственный, его исследование было проведено в статье [8]. Допустим, что параметры a, b могут принимать значения, большие единицы, и станем исследовать вопрос поиска экстраполяционных L -устойчивых методов первого и второго порядков.

В качестве примера, на фиг. 1 приведен случай расположения кривых, заданных уравнениями (12) и (14) при $c = 0.25$. Отмеченные на фиг. 1 точки определяют параметры для численных методов, обладающих следующими характеристиками (см. табл. 1).

На фиг. 2 представлены области устойчивости для выделенных в табл. 1 численных методов.

Продолжим исследовать свойства семейства численных методов (11), для этого введем ряд обозначений:

$$\begin{aligned} r = \mu h^2, \quad A = (1 - az)^2 + c(1 - bz - br(1 - b))^2, \\ B(u) = (az - 1)(z + ur), \quad C(u) = (z + r(u - b))(1 - b) + b(z + r(u + 1 - b)). \end{aligned}$$



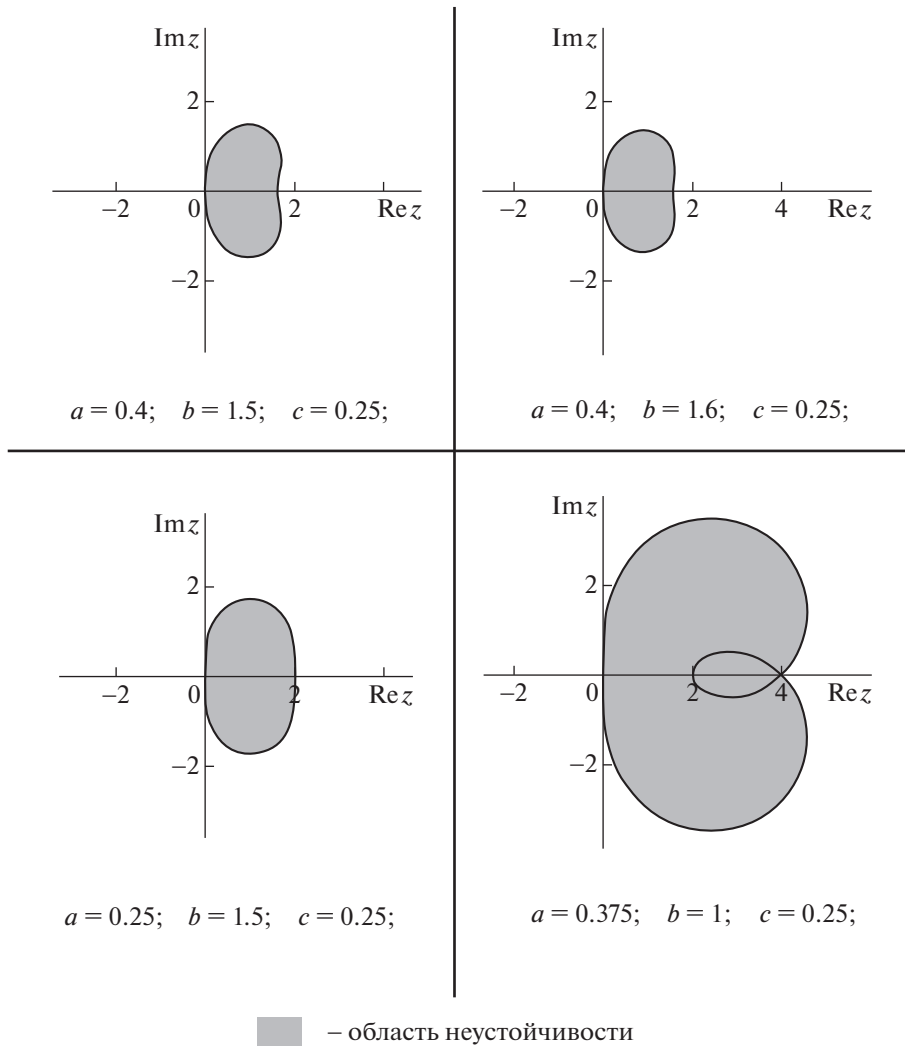
Фиг. 1. На данном рисунке в системе координат aOb приводится геометрическое представление условий второго порядка (12) и устойчивости (14) численных методов (11) при фиксированном значении $c = 0.25$. Здесь координаты точек, расположенных на эллипсе, задают параметры a, b L -устойчивых методов; координаты точек прямой определяют параметры методов второго порядка. Координаты точек, отмеченных черным, соответствуют параметрам методов, представленных в табл. 1.

Для модельного уравнения (2) запишем характеристическое уравнение:

$$Ap^2 + (B(1) - c(1 - bz - br(1 - b))C(1) - 2A)p + B(2) - c(1 - bz - br(1 - b))(C(2) - 2C(1)) + 2B(1) - A = 0.$$

Таблица 1. Сравнение характеристик численных методов с различными наборами параметров (a, b, c)

Упорядоченный набор параметров $(a; b; c)$	Порядок точности разностной схемы	Характеристика устойчивости
(0.4; 1.6; 0.25)	первый	L -устойчивость
(0.25; 1.5; 0.25)	второй	L -устойчивость
(0.4; 1.5; 0.25)	первый	A -устойчивость
(0.375; 1; 0.25)	второй	A -устойчивость



Фиг. 2. Области устойчивости для методов, выделенных в табл. 1.

С помощью критерия Рауса–Гурвица (см., например, [9], с. 676) определим условия

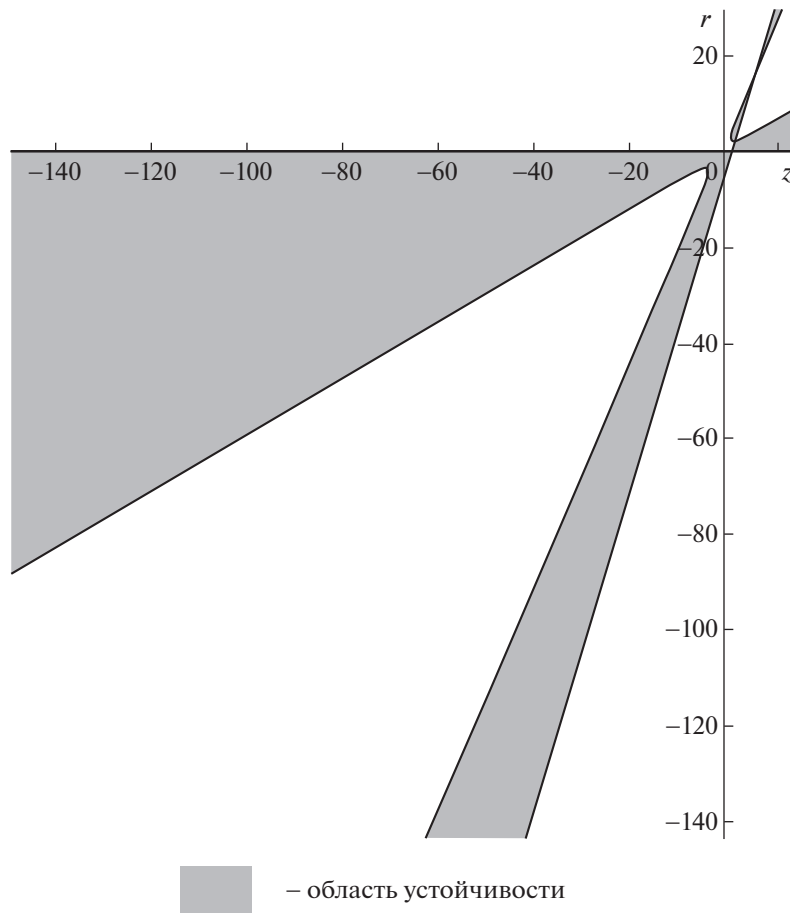
$$\begin{aligned}
 & -b^2cr^2 + bczr + bcr^2 + azr - cr - r \geq 0, \\
 & -2b^2c zr + 2bcz^2 + 2bczr + 2az^2 - 2cz - 2z \geq 0, \\
 & b^2c(4b^2r^2 - 8bzr - 8br^2 + 4z^2 + 10zr + 5r^2 + 8r) + 4a^2z^2 - bc(2z^2 - 3zr - r^2 - 8z - 8r) - \\
 & - 2az^2 - azr - 8az + 2cz + cr + 4c + 2z + r + 4 \geq 0,
 \end{aligned}$$

при выполнении которых корни характеристического уравнения будут лежать в единичном круге. На фиг. 3 приведена область устойчивости метода с параметрами $a = 0.4, b = 1.6, c = 0.25$.

Далее на основании определения 3 выявим условия на параметры, при которых методы (11) будут P -устойчивыми.

Методы (11) для уравнения (4) имеют следующую функцию устойчивости:

$$R_p(\rho) = \frac{\rho^2(1 + c(1 + \rho^2b(1 - b))) - 1 - c(1 + \rho^2b(1 - b))^2}{1 + c(1 + \rho^2b(1 - b))^2}.$$



Фиг. 3. Область устойчивости метода с параметрами $a = 0.4, b = 1.6, c = 0.25$.

Значения функции устойчивости будут заключены в интервале $(-1; 1)$ при

$$b = 0.5, \quad c > 1. \tag{15}$$

Для частного случая уравнений (1) линейных ИУВ II (при $F(t, s, x(t)) = K(t, s)x(t)$, $K(t, s) - (n \times n)$ матрица) можно записать аналогичные схемы

$$\begin{aligned} & \left[(E - haK_{i+1,i+1})^2 + c(E - hbK_{i+1,i+b})^2 \right] x_{i+1} = \\ & = (E - haK_{i+1,i+1}) \left[h(1-a)K_{i+1,0}x_0 + h \sum_{p=1}^i K_{i+1,p}x_p + f_{i+1} \right] + \\ & + c(E - hbK_{i+1,i+b}) \left[h \sum_{p=0}^{i-1} K_{i+1,p+b}(bx_{p+1} + (1-b)x_p) + hK_{i+1,i+b}(1-b)x_i + f_{i+1} \right], \end{aligned}$$

где $K_{i,i} = K(t_i, t_i)$. Для данного семейства методов, очевидно, будут справедливы все выводы, сформулированные выше.

Приведем результаты численных экспериментов.

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для иллюстрации описанного выше аппарата описания характеристик численных схем из семейства методов (11) приведем результаты численных экспериментов для ряда модельных задач.

Таблица 2. Результаты расчетов для примера 1

$(a; b; c)$		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Характеристика
(0.4; 1.6; 0.25)	err_1	0.0056	0.0027	0.0013	L -уст.,
	err_2	0.12	0.092	0.044	1 порядок точности
(0.25; 1.5; 0.25)	err_1	0.00057	0.00015	0.38×10^{-4}	L -уст.,
	err_2	0.022	0.0093	0.0038	2 порядок точности
(0.4; 1.5; 0.25)	err_1	0.0020	0.00086	0.00040	A -уст.,
	err_2	0.14	0.085	0.039	1 порядок точности
(0.375; 1; 0.25)	err_1	0.0043	0.30×10^{-4}	0.50×10^{-5}	A -уст.,
	err_2	0.11	0.032	0.0081	2 порядок точности

Таблица 3. Результаты расчетов для примера 3. В таблице указаны значения погрешностей $\max_{1 \leq i \leq N} |x(t_i) - x_i|$

$(a; b; c)$	λ	μ	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Характеристика
(0.4; 1.6; 0.25)	2	4	0.0093	0.0044	0.0021	L -уст.,
	100	10	0.012	0.0057	0.0026	1 порядок точности
(0.25; 1.5; 0.25)	2	4	0.0017	0.00053	0.00015	L -уст.,
	100	10	0.00087	0.00030	0.93×10^{-4}	2 порядок точности
(0.4; 1.5; 0.25)	2	4	0.0078	0.0037	0.0018	A -уст.,
	100	10	0.010	0.0049	0.0022	1 порядок точности
(0.375; 1; 0.25)	2	4	0.00036	0.55×10^{-4}	0.91×10^{-5}	A -уст.,
	100	10	0.0047	0.0013	0.00032	2 порядок точности

Пример 1. Рассмотрим жесткое ИУВ II относительно неизвестной вектор-функции $x(t) = (u(t) \ v(t))^T$, аналог жесткого ОДУ [3, с. 507], [10]:

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} -50lu(s) - 500v(s) \\ 3 \cos(t-s)v^2(s) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t - \sin t - \sin 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Точное решение: $u(t) = \exp(-t) - \exp(-100t)$, $v(t) = \cos t$.

В табл. 2 и далее приведены значения погрешностей $\text{err}_1 = \max_{1 \leq i \leq N} |u(t_i) - u_i|$ и $\text{err}_2 = \max_{1 \leq i \leq N} |v(t_i) - v_i|$, где $Nh = 1$.

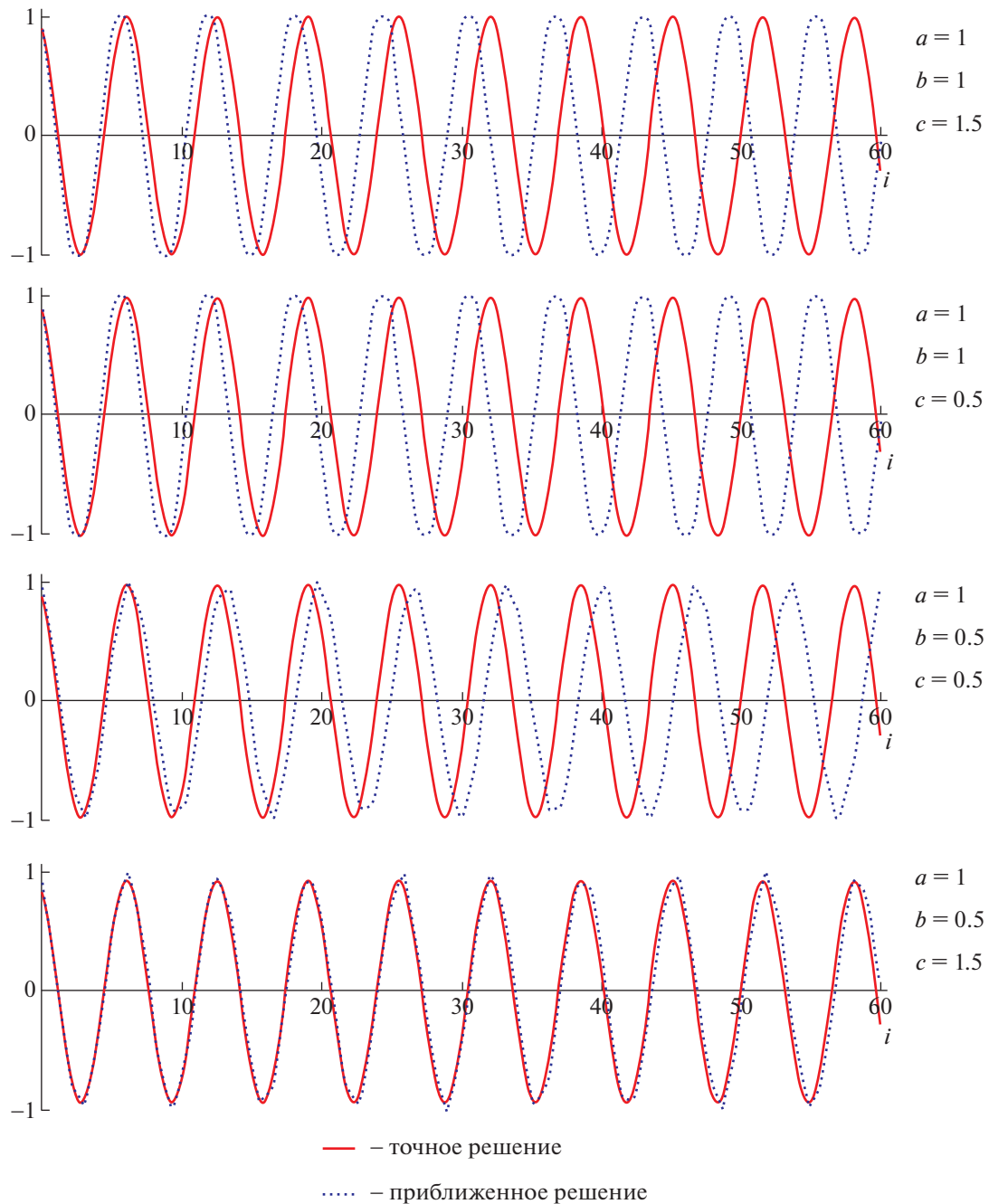
Пример 2. Для модельной задачи (4) со значением ω на фиг. 4 представлено сравнение графиков точного решения $x(t) = \sin 20t$ и восстановленных решений на отрезке $t \in [1, 3]$ с помощью различных численных методов (параметры методов приведены на фиг. 4). Метод с параметрами $a = 1$, $b = 0.5$, $c = 1.5$ удовлетворяет условиям (15) и является P -устойчивым. На фиг. 4 видно, что график решения, восстановленного с помощью этого метода, практически совпадает с графиком точного решения. На прочих графиках видна рассогласованность в частотах колебания.

Пример 3. В табл. 3 представлены результаты расчетов для жесткого нелинейного ИУВ II (см. [3], с. 465):

$$x(t) = -\lambda \int_0^t \frac{1+t}{1+s} x^2(s) ds + f(t), \quad t \in [0; 1],$$

где

$$f(t) = \sqrt{1 + (1+t)e^{-\mu t}} + \lambda(1+t) \left[\ln(1+t) - \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{1}{\mu} \right].$$



Фиг. 4. Результаты численных расчетов для примера 4 при $\omega = 20$. Метод с параметрами $a = 1, b = 0.5, c = 1.5$ (нижний рисунок) является P -устойчивым и весьма точно улавливает частоту точного решения, в отличие от расчетов (три рисунка сверху) с помощью методов, не являющихся P -устойчивыми.

Точное решение: $x(t) = \sqrt{1 + (1 + t)e^{-\omega t}}$.

Пример 4. В качестве заключительного примера рассмотрим

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(t + \ln v(s)) \\ \ln((t + 1)\exp(-u(s))) \end{pmatrix} ds + \begin{pmatrix} 1 + t - \cos t \\ \exp(-t) + \frac{t^2}{2} - t \ln(t + 1) \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 1].$$

Точное решение: $u(t) = t, v(t) = \exp(-t)$.

Таблица 4. Результаты расчетов для примера 4

$(a; b; c)$		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Характеристика
(0.4; 1.6; 0.25)	err_1	0.024	0.014	0.0076	L -уст.,
	err_2	0.021	0.012	0.0062	1 порядок точности
(0.25; 1.5; 0.25)	err_1	0.0094	0.0023	0.00058	L -уст.,
	err_2	0.0056	0.0013	0.00032	2 порядок точности
(0.4; 1.5; 0.25)	err_1	0.021	0.012	0.0065	A -уст.,
	err_2	0.018	0.010	0.0053	1 порядок точности
(0.375; 1; 0.25)	err_1	0.0027	0.00062	0.00015	A -уст.,
	err_2	0.0016	0.00036	0.000084	2 порядок точности

Результаты численных расчетов с помощью некоторых методов из семейства (11) приведены в табл. 4.

Замечание. Множественные численные эксперименты, проведенные для модельных интегральных уравнений Вольтерра II рода, содержащих жесткие и быстро осциллирующие компоненты (2), показали, что методы из семейства (11) дают весьма хороший результат в тех случаях, когда параметры жесткости $z = \lambda h$ и осцилляции $r = \mu h^2$ удовлетворяют области устойчивости метода (см., например, фиг. 3). В других случаях требуется более тонкая настройка параметров a, b, c методов (11) или значительное уменьшение шага интегрирования h .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построено семейство безытерационных методов, содержащих три свободных параметра, для численного решения нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода. Получены условия на параметры, что позволило конкретизировать семейства A - и L -устойчивых методов первого и второго порядка точности. Выделены условия для конструирования P -устойчивых методов. Все выводы хорошо согласуются с результатами численных экспериментов, проведенных для нелинейных интегральных уравнений Вольтерра II рода, содержащих жесткие или (и) осциллирующие компоненты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. (Введение в теорию). М.: Наука, 1975. 301 с.
2. Linz P. Analytical and numerical methods for Volterra equations. Studies in applied mathematics. Philadelphia, 1985. 240 p.
3. Brunner H., van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations, CWI Monographs 3, North-Holland, Amsterdam, 1986. 588 p.
4. Brunner H. Collocation Methods for volterra integral and related functional differential equations. Cambridge University Press, 2004.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге–Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
6. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
7. Coleman J.P., Ixaru L.Gr. P-stability and exponential-fitting methods for $y = f(x, y)$ // J. Num. Anal. 1996. № 16. С. 179–199.
8. Булатов М.В., Мачхина М.Н. Некоторые особенности поведения численных методов решения интегральных уравнений Вольтерра II рода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 3. С. 496–502.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1973. 832 с.
10. Булатов М.В. О построении неклассических разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. ур-ния. 2008. Т. 44. № 4. С. 546–557.

**ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ
МЕТОДЫ**

УДК 512.643

О НОВОМ ТИПЕ ЮНИТОИДНЫХ МАТРИЦ

© 2023 г. Х. Д. Икрамов^{1,*}

¹ 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

*e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 10.09.2022 г.
Переработанный вариант 10.09.2022 г.
Принята к публикации 03.03.2023 г.

Коквадрат невырожденной комплексной матрицы A определяется как $A^{-\top} A$ в теории T -конгруэнций и как $A^{-*} A$ в теории эрмитовых конгруэнций. Существует еще одно произведение подобного рода, а именно, $\bar{A}^{-1} A$. В статье обсуждается следующий вопрос: можно ли и это произведение интерпретировать как коквадрат в рамках какой-то теории конгруэнций? Какова эта теория, и как в ней выглядит каноническая форма? Библ. 5.

Ключевые слова: конгруэнции, юнитоид, коквадрат, каноническая форма, канонические углы, конинволюция.

DOI: 10.31857/S0044466923060091, **EDN:** UYPHCY

1. ВВЕДЕНИЕ

В теории (квадратных) комплексных матриц рассматриваются два типа конгруэнтных преобразований или, короче, конгруэнций: T -конгруэнции, т.е. преобразования вида

$$A \rightarrow S^{\top} AS, \tag{1}$$

и эрмитовы, или $*$ -конгруэнции

$$A \rightarrow S^* AS. \tag{2}$$

В обеих формулах S — произвольная невырожденная матрица.

И в том, и в другом случае матрицу S можно выбрать так, чтобы A приобрела вид

$$B \oplus J_{n_1} \oplus \dots \oplus J_{n_p}. \tag{3}$$

Здесь J_{n_1}, \dots, J_{n_p} — жордановы клетки соответствующих порядков с нулем на главной диагонали, а B — невырожденная матрица, определяемая с точностью до конгруэнции.

Прямая сумма $J_{n_1} \oplus \dots \oplus J_{n_p}$ называется сингулярной частью разложения (3), а о матрице B говорят, что она определяет регулярную часть разложения. Несколько алгоритмов для вычисления такого разложения описаны в [1], [2]. Некоторые из них можно считать рациональными. Рациональным алгоритмом мы называем конечный вычислительный процесс, использующий только арифметические операции.

Существование рациональных алгоритмов для выделения из матрицы ее регулярной части позволяет нам в дальнейшем ограничиться рассмотрением только невырожденных матриц. Каждой такой матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-\top} A, \tag{4}$$

если обсуждаются T -конгруэнции, и матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-*} A \tag{5}$$

в случае $*$ -конгруэнций. И та, и другая называются *кокватрами* матрицы A .

Если A подвергается конгруэнции (1) или (2), то ее коквадрат претерпевает подобие

$$\mathcal{C}_A \rightarrow S^{-1}\mathcal{C}_A S,$$

задаваемое той же матрицей S . Таким образом, класс конгруэнтности, содержащий матрицу A , сопровождается классом подобия ее коквадрата. В частности, каноническая форма матрицы относительно конгруэнций, как она описана в § 4.5 книги [3], в значительной мере определяется жордановой формой ее коквадрата. Обе формы суть блочно-диагональные матрицы, порядки диагональных блоков которых согласованы.

Матрицы типов (4) и (5) обладают любопытными особенностями спектра. Все собственные значения матрицы (4), кроме чисел 1 и -1 , можно расположить парами вида (μ, μ^{-1}) . Жордановы структуры обоих собственных значений такой пары одинаковы.

Собственные значения матрицы (5), лежащие вне единичной окружности γ_1 , также можно объединить в пары вида $(\mu, \bar{\mu}^{-1})$. Жордановы структуры этих двух чисел, симметричных относительно γ_1 , одинаковы.

Каков бы ни был тип конгруэнции, условимся называть матрицу A *юнитоидной* (или просто *юнитоидом*), если ее каноническая форма относительно рассматриваемого типа конгруэнций является диагональной матрицей. Диагональную форму имеют и коквадраты канонических юнитоидов. Из определения коквадратов теперь следует:

1. В случае T -конгруэнций все диагональные элементы коквадрата канонической матрицы равны единице, а сам коквадрат – это единичная матрица. Единичная матрица не изменяется подобиями, поэтому всякая матрица A в классе конгруэнтности юнитоидной матрицы удовлетворяет соотношению $A^{-T}A = I$, т.е. является симметричной матрицей, вещественной или комплексной. Термин “юнитоид” превращается в синоним термина “симметричная матрица”, так что введение его в данном случае не имеет смысла.

2. В случае $*$ -конгруэнций диагональная форма (невырожденного) юнитоида всегда может быть выбрана так, чтобы модули всех ее диагональных элементов были равны единице. Если обозначить эти элементы $e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}$, полагая, например, $\phi_1, \dots, \phi_n \in [0, 2\pi)$, то числа ϕ_1, \dots, ϕ_n называют *каноническими углами* любой матрицы из данного класса $*$ -конгруэнтности. Коквадраты матриц из этого класса суть матрицы, диагонализующиеся подобием и имеющие спектр $e^{i2\phi_1}, \dots, e^{i2\phi_n}$.

2. НОВЫЙ ТИП КОКВАДРАТОВ

Формулы (4) и (5) описывают парные произведения, получаемые применением к (невырожденной) матрице A операций обращения и транспонирования либо сопряжения. Если последнюю заменить операцией поэлементного сопряжения, то получится еще одно парное произведение подобного рода. Итак, положим

$$\mathcal{C}_A = \bar{A}^{-1}A \quad (6)$$

и будем по-прежнему называть \mathcal{C}_A коквадратом матрицы A . Какому типу конгруэнций, совершаемых с матрицами A , соответствуют подобия матриц (6), и каковы эти подобия?

Ответ таков: конгруэнции, задаваемые вещественными матрицами S (в этом случае преобразования (1) и (2) не различаются). Действительно, если $B = S^T A S$, то

$$\mathcal{C}_B = \bar{B}^{-1}B = (S^{-1}\bar{A}^{-1}S^{-T})(S^T A S) = S^{-1}(\bar{A}^{-1}A)S = S^{-1}\mathcal{C}_A S,$$

т.е. коквадрат претерпевает подобие, задаваемое той же матрицей S .

Присмотримся к самому коквадрату \mathcal{C}_A . Видно, что $\mathcal{C}_A \bar{\mathcal{C}}_A = I$. Квадратные $n \times n$ -матрицы C , удовлетворяющие соотношению

$$C\bar{C} = I_n, \quad (7)$$

известны в теории матриц и называются *конинволюторными* или, короче, *конинволюциями* (con-involutions). Подробное исследование этого класса матриц проведено в [4]. В следующем разделе мы приведем нужные нам сведения из этой статьи.

3. КОНИНВОЛЮЦИИ

Мы отметили в предыдущем разделе, что всякая матрица типа (6) есть конинволюция в смысле определения (7). Справедливо и не столь очевидное обратное утверждение: всякая конинволюция C может быть представлена в виде $C = \bar{A}^{-1}A$. (Это лемма 4.6.9 из первого издания книги [3], существующей в русском переводе; см. [5].)

Пусть λ и x – собственное значение и соответствующий собственный вектор конинволюции C . Из соотношений $Cx = \lambda x$ и $C^{-1} = \bar{C}$ выводим

$$C^{-1}x = \lambda^{-1}x, \quad \bar{C}x = \lambda^{-1}x, \quad C\bar{x} = \bar{\lambda}^{-1}\bar{x},$$

т.е. $\bar{\lambda}^{-1}$ – также собственное значение матрицы C , которому отвечает собственный вектор \bar{x} . Если x и \bar{x} – это один и тот же вектор, то λ лежит на единичной окружности. В противном случае (λ не лежит на γ_1), векторы x и \bar{x} линейно независимы.

Для произвольного натурального m и $\lambda \neq 0$ имеем

$$\text{rank}(C - \lambda I)^m = \text{rank}(I - \lambda C^{-1})^m = \text{rank}(I - \lambda \bar{C})^m = \text{rank}(I - \bar{\lambda} C)^m = \text{rank}(C - \bar{\lambda}^{-1} I)^m.$$

Крайние части этих соотношений показывают, что жордановы структуры матрицы C , относящиеся к λ и $\bar{\lambda}^{-1}$, одинаковы.

Процитируем теперь некоторые результаты из [4]. Пусть C – конинволюция порядка n , имеющая унимодулярные собственные значения

$$\lambda_1 = e^{i\theta_1}, \dots, \lambda_r = e^{i\theta_r} \tag{8}$$

и пары неунимодулярных собственных значений

$$(\mu_1, \bar{\mu}_1^{-1}), \dots, (\mu_s, \bar{\mu}_s^{-1}). \tag{9}$$

Пусть l_1, \dots, l_r – порядки жордановых клеток, отвечающих числам (8) в жордановой форме матрицы C , а k_1, \dots, k_s – порядки клеток, отвечающих числам μ_1, \dots, μ_s . (Напомним, что вторым числам в парах (9) отвечают клетки тех же порядков, что и первым.) Таким образом, жорданова форма матрицы C имеет вид

$$J = J_{l_1}(e^{i\theta_1}) \oplus \dots \oplus J_{l_r}(e^{i\theta_r}) \oplus [J_{k_1}(\mu_1) \oplus J_{k_1}(\bar{\mu}_1^{-1})] \oplus \dots \oplus [J_{k_s}(\mu_s) \oplus J_{k_s}(\bar{\mu}_s^{-1})], \tag{10}$$

$$l_1 + \dots + l_r + 2(k_1 + \dots + k_s) = n.$$

Однако матрица (10), вообще говоря, не является конинволюцией и потому может быть недостижимой в классе подобий, разрешенных для наших коквадратов. (Напоминаем, что матрицы, задающие эти подобия, должны быть вещественными.) Следуя [4], опишем вид достижимой формы. Это потребует некоторых предварительных определений.

Пусть A и B – матрицы порядка k . Символом $G_{2k}(A, B)$ будем обозначать матрицу

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} A + B & -i(A - B) \\ i(A - B) & A + B \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Спектр этой матрицы есть объединение спектров матриц A и B . Это следует из формулы

$$G_{2k}(A, B) = U(A \oplus B)U^{-1},$$

где

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_k & iI_k \\ iI_k & I_k \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица U является унитарной конинволюцией.

Мы будем использовать конструкцию (11) с жордановыми клетками. Положим

$$G_{2k}(\mu) = G_{2k}(J_k(\mu), J_k(\bar{\mu}^{-1})), \quad \mu \neq 0.$$

Теперь можно описать матрицу, к которой вещественным подобием может быть приведена конинволюция C с жордановой формой (10):

$$\hat{J} = e^{iJ_h(\theta_1)} \oplus \dots \oplus e^{iJ_r(\theta_r)} \oplus G_{2k_1}(\mu_1) \oplus \dots \oplus G_{2k_s}(\mu_s). \quad (12)$$

Матрица (12) – это конинволюция, что вытекает из следующих положений: а) для всякой вещественной матрицы R матрица e^{iR} есть конинволюция (см. [4, предложение 1.2(h)]); б) матрица $G_{2k}(A, B)$ тогда и только тогда является конинволюцией, когда $A\bar{B} = I_k$ (см. [4, лемма 1.1(e)]); в) прямая сумма конинволюций – это снова конинволюция (что очевидно из (7)).

4. ЮНИТОИДЫ НЕОБЫЧНОГО ТИПА

В теории *-конгруэнций юнитоиды – это матрицы, канонические формы которых суть диагональные матрицы. Коквадрат канонического юнитоида – это также диагональная матрица. Естественно считать матрицу (12) простейшей формой, достижимой для коквадрата в классе разрешенных (вещественных) подобий. Но тогда, по аналогии со случаем *-конгруэнций, естественно назвать юнитоидными матрицы, для которых эта простейшая форма коквадрата является диагональной.

Принимая это определение, мы выводим из (12) такие следствия:

- 1) коквадрат юнитоида не должен иметь нулевыми собственными значениями;
- 2) в жордановой форме коквадрата никакому собственному значению не могут соответствовать клетки порядка > 1 .

Теперь каноническую форму относительно вещественных конгруэнций следует искать среди матриц с диагональными коквадратами. Пусть

$$D = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$$

есть такой коквадрат. Матрицы с коквадратом D описываются уравнением

$$\bar{A}^{-1}A = D \quad (13)$$

или уравнением

$$A = \bar{A}D, \quad (14)$$

или, в поэлементной записи,

$$a_{kj} = \bar{a}_{kj} e^{i\theta_j} \quad \forall k, j.$$

Скалярное уравнение

$$z = \bar{z} e^{i\theta}$$

решается так:

$$z e^{-i\theta/2} = \bar{z} e^{i\theta/2},$$

откуда следует, что решения z имеют вид

$$z = r e^{i\theta/2},$$

где r – произвольное вещественное число. Соответственно решениями уравнений (13) и (14) являются матрицы

$$A = R D^{1/2}, \quad (15)$$

где R – произвольная (невырожденная) вещественная матрица и

$$D^{1/2} = \text{diag}(e^{i\theta_1/2}, \dots, e^{i\theta_n/2}).$$

Итак, канонической формой юнитоида называем матрицу вида (15). Если $e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}$ – собственные значения ее коквадрата D , то числа $\theta_1/2, \dots, \theta_n/2$ естественно назвать *каноническими углами* этого юнитоида.

В выборе матрицы R для представления (15) есть некоторая свобода. Если S – вещественная матрица, коммутирующая с $D^{1/2}$, то

$$S^T AS = (S^T RS)(S^{-1}D^{1/2}S) = (S^T RS)D^{1/2}, \quad (16)$$

т.е. канонической формой данного класса вещественной конгруэнтности может считаться и матрица $S^T AS$. Такая свобода минимальна, если канонические углы попарно различны. В этом случае матрица S в соотношениях (16) может быть только диагональной, и $S^T AS$ разве что величиной элементов отличается от A . Свобода в выборе канонической формы несколько больше, если имеются кратные канонические углы. Их наличие можно использовать, например, для придания какого-то специального вида некоторым диагональным блокам канонической матрицы.

Закончим статью итоговым описанием предлагаемого нового типа юнитоидных матриц: это комплексные матрицы, которые посредством вещественных конгруэнций могут быть представлены в виде произведения вещественной матрицы и диагональной унитарной матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn R.A., Sergeichuk V.V.* A regularization algorithm for bilinear and sesquilinear forms // *Linear Algebra Appl.* 2006. V. 412. P. 380–395.
2. *Икрамов Х.Д.* О конгруэнтном выделении жордановых блоков из вырожденной квадратной матрицы // *Сиб. журнал вычисл. матем.* 2018. Т. 21. С. 255–258.
3. *Horn R.A., Johnson C.R.* *Matrix Analysis*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 2013.
4. *Horn R.A., Merino D.I.* A real-coninvolutory analog of the polar decomposition // *Linear Algebra Appl.* 1993. V. 190. P. 209–227.
5. *Хорн Р., Джонсон Ч.* *Матричный анализ*. М.: Мир, 1989.

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.63

АПОСТЕРИОРНЫЕ ТОЖДЕСТВА ДЛЯ МЕР ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

© 2023 г. С. И. Репин^{1,2,*}

¹ 191023 Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанка, 27,
СПб отд. Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Россия

² 195251 Санкт-Петербург, ул. Политехническая, 29,
СПб Политехнический университет Петра Великого, Россия

*e-mail: repin@pdm1.ras.ru

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 01.02.2023 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Получены функциональные тождества, которые выполняются для отклонений от точных решений краевых и начально-краевых задач с монотонными операторами. Тождества выполняются для любых функций из соответствующего функционального класса, который содержит точное решение задачи. Левая часть тождества представляет собой сумму мер отклонений приближенного решения от точного. Показано, что именно такие меры являются естественными характеристиками точности приближенных решений. В некоторых случаях правая часть тождества содержит только известные данные задачи и функции, характеризующие приближенное решение. Такое тождество можно прямо использовать для контроля точности. В других случаях правая часть включает неизвестные функции. Однако их можно исключить и получить полностью вычисляемые двусторонние оценки. При этом необходимо использовать специальные функциональные неравенства, связывающие меры отклонения со свойствами рассматриваемого монотонного оператора. В качестве примера такие оценки и точные значения соответствующих констант получены для класса задач с оператором α -Лапласиана. Показано, что тождества и вытекающие из них оценки позволяют оценивать погрешность любых аппроксимаций независимо от способа их получения. Кроме того, они позволяют сравнивать точные решения задач с различными данными, что дает возможность оценивать ошибки математических моделей, например тех, что возникают при упрощении коэффициентов дифференциального уравнения. В первой части статьи теория и приложения касаются стационарных моделей, а затем основные результаты переносятся на эволюционные модели с монотонными пространственными операторами. Библ. 30. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнения эллиптического и параболического типа, монотонные операторы, оценки отклонения от точного решения, апостериорные тождества и оценки.

DOI: 10.31857/S0044466923060170, **EDN:** TUUBIG

1. ВВЕДЕНИЕ

Численный анализ моделей математической физики фактически сводится к двум основным вопросам. Во-первых, надо предложить и обосновать метод построения последовательности приближений, которая в пределе сходится к точному решению. На практике эта последовательность не может иметь бесконечного числа членов и должна остановиться на некотором последнем приближении. При этом неизбежно возникает второй вопрос: насколько близко это приближение к точному решению? Он особенно актуален при решении нелинейных дифференциальных уравнений, когда успешное использование численных процедур может быть обусловлено рядом дополнительных (и часто трудно проверяемых) условий. К сожалению, инженерные и научные вычисления, как правило, не уделяют должного внимания проверке достоверности полученных результатов. Между тем имеется множество примеров, когда использование той или иной численной процедуры приводит к неверным результатам даже в том случае, когда соответствующий алгоритм и компьютерный код формально написаны верно. Такие примеры известны как для самых простых вычислительных задач, так и для более сложных, связанных с аппроксимацией функций (см., например, [1–3]). Тем более они возникают при решении дифференци-

альных уравнений, где возможны явления численной неустойчивости, локинга (locking), потери точности из-за большой обусловленности или нарушении сходимости итерационных схем и т.п.

Чисто эвристический подход к математическому эксперименту был долгое время обусловлен отсутствием теории и практических технологий, которые позволяли бы надежно контролировать качество приближенных решений. Априорные асимптотические оценки погрешности для уравнений в частных производных активно изучаются с начала 60-х годов прошлого века (систематическое изложение соответствующей теории можно найти в хорошо известных монографиях [4], [5]). Такие оценки оперируют с бесконечными последовательностями и важны тем, что указывают теоретическую скорость сходимости для аппроксимаций определенного типа. Эти оценки предполагают, что при решении соответствующей конечномерной задачи все вычисления выполняются абсолютно точно при любой ее размерности, что в реальных условиях редко, когда можно гарантировать. Также априорные оценки требуют выполнения весьма жестких условий (повышенная дифференцируемость точного решения, регулярность вычислительных сеток, галеркинская ортогональность приближенного решения), которые часто невозможно гарантировать. Поэтому, за исключением весьма специальных типов задач, эти оценки мало чем могут помочь в решении вопроса о точности конкретного приближенного решения.

Возникшие в начале 80-х годов прошлого века методы апостериорного контроля были в основном нацелены на так называемые индикаторы ошибок (error indicators/estimators), которые должны подсказывать правильные способы адаптации вычислительных сеток в рамках общей концепции адаптивного подхода к решению краевых задач. Этим вопросам посвящено огромное количество публикаций (см., например, [6–8] и приведенные там ссылки). Однако, как правило, индикаторы не дают гарантированных оценок, а только указывают (с той или иной степенью достоверности), где находятся области с максимальной величиной погрешности. Кроме того, их использование также связано с рядом условий и ограничений, которые часто трудно выполнить на практике, особенно, если речь идет о нелинейных уравнениях в частных производных. Нарушение этих условий (например, галеркинской ортогональности) может приводить к неверным выводам.

Верификация результатов численного моделирования должна проводиться с помощью универсальных методов, которые работоспособны независимо от того, каким образом было получено приближенное решение. Получение оценок такого рода является принципиально важным вопросом наряду с доказательством корректности задачи и установлением свойств ее решения. При этом надо, во-первых, установить правильный критерий (меру) $\mathbf{m}(v, u)$ близости функции v к решению задачи u и, во-вторых, уметь оценить его величину для любой заданной функции v из соответствующего функционального класса V . Мера \mathbf{m} генерирует систему открытых окрестностей точного решения

$$\mathbb{O}_\epsilon(u) := \{w \in V \mid \mathbf{m}(w, u) < \epsilon\}, \quad \epsilon \rightarrow 0, \tag{1.1}$$

а приближение считается тем точнее, чем в меньшую окрестность \mathbb{O}_ϵ оно попадает. Для моделей, использующих линейные дифференциальные уравнения, выбор меры почти очевиден. Как правило, расстояние измеряется относительно нормы соответствующего (энергетического) функционального пространства V , содержащего u , т.е. $\mathbf{m}(v, u) := \|v - u\|_V$. Тогда проблема сводится к получению явно вычисляемых двусторонних оценок $\|v - u\|_V$, которые были бы применимы для любого $v \in V$. Этой проблеме посвящена монография [9], где рассматриваются методы получения и свойства так называемых *функциональных апостериорных оценок*. Имея такие оценки, можно оценить близость любой функции к точному решению и понять, насколько удачными оказались результаты численного эксперимента. В отличие от апостериорных оценок других типов, эти оценки устанавливаются с помощью чисто функциональных методов и не используют какие-либо специальные свойства аппроксимаций или численного метода. Их вычисление может быть в каких-то случаях простым, а в других более сложным, но если такие оценки получены, то рассматриваемую задачу можно считать *контролируемой* в вычислительном плане, так как близость любой функции к решению может быть надежно проверена.

Контролировать приближенные решения нелинейных задач намного сложнее. Здесь вопрос о том, в какой норме, метрике (или локальной топологии \mathbb{O}_ϵ) следует изучать близость функции к точному решению, требует специального рассмотрения для каждого класса задач. Ряд результатов в этом направлении был ранее получен в [10], [11]. В виде систематического подхода они

изложены в монографии [12]. В этих работах тождества и соответствующие оценки были получены для задач вида

$$\inf_{v \in V} J(v), \quad J(v) = G(\Lambda v) + F(v) \quad (1.2)$$

с помощью методов вариационного исчисления. Здесь $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ и $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ – выпуклые и слабо полунепрерывные снизу функционалы, $\Lambda : V \rightarrow Y$ – ограниченный линейный оператор, а V и Y – рефлексивные банаховы пространства. Кратко эти результаты обсуждаются в разд. 2.

В настоящей статье предлагается метод, который охватывает существенно более широкий класс задач, а именно, краевые и начально-краевые задачи с монотонными операторами. Как и ряд предыдущих работ (см., например, [10], [13]), статья, в основном, посвящена функциональным тождествам, которые контролируют отклонение произвольной функции от точного решения краевой или начально-краевой задачи. Эти тождества отражают естественные свойства последовательностей приближений (например, минимизирующих последовательностей) и указывают на правильные меры, которые следует использовать для оценки точности аппроксимаций. В [13] тождества для отклонений от точного решения и их следствия были подробно изучены для случая линейного эллиптического оператора дивергентного типа $\Lambda^* A \Lambda$, где Λ^* – оператор сопряженный к Λ , а A – ограниченный оператор. Ниже дается ответ на вопрос о том, в каком смысле эти результаты переносятся на нелинейные эллиптические и параболические уравнения с монотонными операторами.

В разд. 3 рассматривается абстрактная задача для монотонного эллиптического оператора. Здесь устанавливается основное тождество для нелинейных мер отклонения от точного решения. Его доказательство не использует теорию двойственности вариационного исчисления, а само тождество отличается от доказанного ранее (2.16) и может рассматриваться как его обобщение. В самой общей форме основной результат сформулирован в теореме 2.

Анализ нелинейных мер, которые образуют левую часть (3.8), проводится в разд. 4. Показана их связь с другими нелинейными мерами, использующими свойства монотонных операторов и равномерно выпуклых функционалов.

В разд. 5 изучаются следствия тождества (3.8), которые позволяют получать оценки ошибок аппроксимации и сравнивать решения краевых задач с различными данными. Показано, что ранее полученные тождества являются частными случаями (3.8). Например, это относится к тождеству для линейных эллиптических уравнений, которое исследовалось в [13]. При специальном выборе одной из функций тождество (3.8) переходит в (3.14), правая часть которого может быть вычислена. В других случаях оно содержит слагаемое, которое необходимо оценить так, чтобы исключить неизвестную функцию $e = v - u$. Это можно сделать различными способами. В статье рассматривается наиболее общий метод. Он приводит к оценкам (5.7) и (5.8), правые части которых содержат только известные функции.

Раздел 6 посвящен алгебраическим неравенствам для степенных функций, которые в дальнейшем используются для получения оценок.

В качестве примера нелинейной краевой задачи в разд. 7 рассматривается уравнение реакции–диффузии для α -лапласиана (7.1). Для нее основное тождество имеет вид (7.5), а (3.14) переходит в тождество (7.7). Далее показано, как с помощью метода, изложенного в разд. 5, можно получить полностью вычисляемые оценки для мер отклонений от точного решения.

В заключительном разд. 8 обсуждаются обобщения предлагаемого метода на эволюционные задачи с монотонными операторами. Основной результат сформулирован в теореме 3, которая устанавливает тождество (8.5). По структуре это тождество очень похоже на (3.8), но имеет дополнительные члены, связанные с производными по времени.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В вариационном исчислении задача (1.2) изучается вместе с так называемой двойственной задачей

$$\sup_{y^* \in Y^*} I^*(y^*), \quad I^*(y^*) = -G^*(y^*) - F^*(-\Lambda^* y^*). \quad (2.1)$$

Здесь $G^* : Y^* \rightarrow \mathbb{R}$ и $F^* : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ являются функционалами, сопряженными к G и F в смысле Юнга–Фенхеля, т.е.

$$G^*(y^*) := \sup_{y \in Y} \{ \langle (y^*, y) \rangle - G(y) \} \quad \text{и} \quad F^*(v^*) := \sup_{v \in V} \{ \langle v^*, v \rangle - F(v) \}, \quad (2.2)$$

где Y^* и V^* – пространства, двойственные к Y и V соответственно, $\langle (y^*, y) \rangle$ обозначает спаривание элементов $y^* \in Y^*$ и $y \in Y$, а $\langle v^*, v \rangle$ – спаривание $v^* \in V^*$ и $v \in V$. Определим оператор $\Lambda^* : Y^* \rightarrow V^*$, сопряженный к Λ , с помощью равенства

$$\langle (y^*, \Lambda v) \rangle = \langle \Lambda^* y^*, v \rangle \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Y^*. \quad (2.3)$$

Для того чтобы гарантировать корректность вариационной задачи, достаточно наложить на функционал G условие коэрцитивности

$$G(y) \rightarrow +\infty, \quad \text{если} \quad \|y\|_Y \rightarrow +\infty, \quad (2.4)$$

и выполнение неравенства

$$\|w\|_V \leq C_F \|\Lambda w\|_Y \quad \forall w \in V, \quad (2.5)$$

где $C_F > 0$ не зависит от w . Его можно рассматривать как обобщение известного неравенства

Фридрихса для оператора градиента, где в качестве V берется пространство Соболева $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$, состоящее из функций, обращающихся в нуль на границе $\partial\Omega$.

Известно, что $J(v) \geq I^*(y^*)$ для любых $v \in V$ и $y^* \in Y^*$. Одним из наиболее важных утверждений теории двойственности является равенство

$$J(u) = I^*(p^*), \quad (2.6)$$

которое выполняется, если решения задач (1.2) и (2.1) существуют, и это функции u и p^* соответственно (см., например, [14]).

Из (2.6) вытекают условия, которым должны удовлетворять u и p^* . Это равенство означает, что

$$G(\Lambda u) + F(u) + G^*(p^*) + F^*(-\Lambda^* p^*) = 0.$$

Поскольку $\langle (p^*, \Lambda u) \rangle - \langle \Lambda^* p^*, u \rangle = 0$, мы можем переписать его в виде

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) + \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0, \quad (2.7)$$

где \mathbb{D}_G и \mathbb{D}_F – это так называемые *составные* функционалы (compound functionals), которые определяются соотношениями

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) := G(\Lambda v) + G^*(y^*) - \langle (y^*, \Lambda v) \rangle \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*) := F(v) + F^*(-\Lambda^* y^*) + \langle \Lambda^* y^*, v \rangle.$$

Вследствие определений сопряженных функционалов (2.2), составные функционалы всегда неотрицательны. Поэтому равенство (2.7) означает, что на решениях u и p^* эти функционалы обращаются в нуль, т.е.

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) = \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0. \quad (2.8)$$

В свою очередь, (2.8) означает, что

$$p^* \in \partial G(\Lambda u), \quad \Lambda u \in \partial G^*(p^*), \quad (2.9)$$

$$-\Lambda^* p^* \in \partial F(u), \quad u \in \partial F^*(-\Lambda^* p^*). \quad (2.10)$$

Здесь $\partial G(\Lambda u)$ обозначает субдифференциал G для Λu . Если функционал G дифференцируем по Гато, то субдифференциальное включение заменяется на равенство, например, первое из соотношений (2.9) записывается в виде $p^* = G'(\Lambda u)$, а второе – в виде $\Lambda u = G^*(p^*)$, где G' , G^* – это производные Гато функционалов G и G^* соответственно. В дальнейшем мы будем считать эти функционалы дифференцируемыми. Соотношения (2.9) и (2.10) устанавливают связь между функциями u и p^* так, что $p^* = p^*(\Lambda u)$ и $u = u(-\Lambda^* p^*)$.

Установим некоторые свойства составных функционалов.

Лемма 1. Пусть выпуклые функционалы F и \widehat{F} связаны соотношением,

$$\widehat{F}(v) = F(v) + \langle g, v \rangle \quad \forall v \in V,$$

где $g \in V^*$. Тогда

$$\mathbb{D}_{\widehat{F}}(v, v^*) = \mathbb{D}_F(v, v^* - g) \quad \forall v \in V, \quad v^* \in V^*. \tag{2.11}$$

Доказательство. Согласно определению

$$\widehat{F}(v^*) = \sup_{v \in V} \{ \langle (v^* - g), v \rangle - F(v) \} = F^*(v^* - g).$$

Поэтому

$$\mathbb{D}_{\widehat{F}}(v, v^*) = \widehat{F}(v) + \widehat{F}^*(v^*) - \langle v^*, v \rangle = F(v) + F^*(v^* - g) - \langle v^* - g, v \rangle = \mathbb{D}_F(v, v^* - g).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если для $\eta \in Y$ и $\eta^* \in Y^*$ выполнено равенство $\mathbb{D}_F(\eta, \eta^*) = 0$, то

$$\mathbb{D}_G(y, y^*) = \mathbb{D}_G(y, \eta^*) + \mathbb{D}_G(\eta, y^*) + ((\eta^* - y^*, y - \eta)) \quad \forall y \in Y, \quad y^* \in Y^*. \tag{2.12}$$

Доказательство. С учетом условия $\mathbb{D}_F(\eta, \eta^*) = 0$ получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_G(y, y^*) &= G(\eta) + G^*(y^*) - ((y^*, \eta)) + G(y) + G^*(\eta^*) - ((\eta^*, y)) + \\ &+ ((y^*, \eta)) + ((\eta^*, y)) - ((\eta, \eta^*)) - ((y, y^*)) = \mathbb{D}_G(\eta, y^*) + \mathbb{D}_G(y, \eta^*) + ((\eta^* - y^*, y - \eta)). \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

С помощью функционалов \mathbb{D}_G и \mathbb{D}_F определим величины

$$\mathbf{m}(v, u) := \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$$

и

$$\mathbf{m}^*(y^*, p^*) := \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* y^*).$$

Следующая лемма показывает, что $\mathbf{m}(v, u)$ и $\mathbf{m}^*(y^*, p^*)$ являются естественными мерами отклонения v от u и y^* от p^* .

Лемма 3. Мера $\mathbf{m}(v, u) = 0$ тогда и только тогда, когда v является минимайзером вариационной задачи (1.2), а $\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = 0$ только в том случае, когда y^* является максимайзером (2.1).

Доказательство. Нетрудно видеть (см. (2.8)), что

$$\begin{aligned} F(v) + F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^* p^*, v \rangle &= F(v) - F(u) - \langle \Lambda^* p^*, v - u \rangle, \\ G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) &= G(\Lambda v) - G(\Lambda u) + ((p^*, \Lambda(v - u))). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства и учитывая (2.3), получаем

$$\mathbf{m}(v, u) = G(\nabla v) + F(v) - G(\nabla u) - F(u) = J(v) - J(u). \tag{2.13}$$

Следовательно, условие $\mathbf{m}(v, u) = 0$ означает, что v является минимайзером.

Аналогично, равенства

$$\begin{aligned} G(\Lambda u) + G^*(y^*) - ((y^*, \Lambda u)) &= G^*(y^*) - G^*(p^*) + ((p^* - y^*, \Lambda u)), \\ F(u) + F^*(-\Lambda^* y^*) + \langle \Lambda^* y^*, u \rangle &= F^*(-\Lambda^* y^*) - F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^*(y^* - p^*), u \rangle \end{aligned}$$

означают, что

$$\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = G^*(y^*) + F^*(-\Lambda^* y^*) - G^*(p^*) - F^*(-\Lambda^* p^*) = I^*(p^*) - I^*(y^*). \tag{2.14}$$

Таким образом, если $\mathbf{m}^*(y^*, p^*) = 0$, то y^* является максимайзером в двойственной задаче (2.1). Лемма 3 доказана.

Вместе с доказательством леммы 3 мы получили равенства (2.13) и (2.14), которые показывают, что $\mathbf{m}(v, u)$ и $\mathbf{m}^*(y^*, p^*)$ являются естественными характеристиками точности приближенного решения. В соответствии с (1.1) мера $\mathbf{m}(v, u)$ задает систему открытых выпуклых окрестностей \mathbb{O}_ϵ для минимайзера u . Любой успешный численный метод предполагает построение минимизиру-

ющей последовательности $\{u_i\} \in V$ такой, что $J(u_i) \rightarrow J(u)$, если $i \rightarrow +\infty$. Равенство (2.13) показывает, что минимизирующая последовательность сходится к u именно в топологии \mathcal{O}_ϵ . Более того, (2.13) позволяет в самой общей форме ответить на вопрос о сходимости галеркинских решений. Этот вопрос является принципиальным и привлекал внимание с середины прошлого века, когда началось систематическое исследование численных методов для уравнений в частных производных (здесь надо отметить работы С.Г. Михлина, см. [15] и указанную там литературу). Приведенная ниже лемма показывает, какой тип сходимости галеркинских аппроксимаций можно гарантировать для нелинейных задач (1.2), и какие условия для этого достаточны.

Напомним некоторые определения. Последовательность конечномерных подпространств $\{V_n\}$, $\dim V_n = n$, $V_n \subset V$, $V_n \subset V_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, называется *предельно плотной* в V , если для любого малого $\epsilon > 0$ и любого $v \in V$ можно указать номер n_ϵ такой, что при $n > n_\epsilon$ V_n содержит элемент $v_{n,\epsilon}$ такой, что $\|v - v_{n,\epsilon}\|_V \leq \epsilon$. Функцию u_n будем называть *галеркинским решением*, если она минимизирует функционал на подпространстве V_n , т.е.

$$J(u_n) = \inf_{v \in V_n} J(v).$$

Лемма 4. Пусть $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклым и непрерывным, а последовательность подпространств $\{V_n\}$ предельно плотна в V . Тогда соответствующие галеркинские решения сходятся к точному в топологии \mathcal{O}_ϵ .

Доказательство. В силу предельной плотности $\{V_n\}$, существует последовательность $\{w_n\}$ такая, что $w_n \in V_n$ и $w_n \rightarrow u$ в V . Поскольку функционал J непрерывен, то $J(w_n) \rightarrow J(u)$. Для галеркинского решения верно неравенство $J(u_n) \leq J(w_n)$, так что

$$\epsilon_n := J(u_n) - J(u) \rightarrow 0, \quad \text{если } n \rightarrow +\infty.$$

Из (2.13) следует, что $\mathbf{m}(u_n, u) \rightarrow 0$. Поскольку $J(u_{n+1}) \leq J(u_n)$, то \mathcal{O}_{ϵ_n} содержит все члены последовательности, кроме конечного числа. Лемма 4 доказана.

Аналогичное утверждение для аппроксимаций y_n^* двойственной задачи справедливо относительно меры \mathbf{m}^* .

Заметим, что из (2.13) также следует, что для галеркинских аппроксимаций верно равенство

$$\mathbf{m}(u_n, u) = J(u_n) - J(u) \leq J(v_n) - J(v) = \mathbf{m}(v_n, u) \quad \forall v_n \in V_n.$$

Таким образом,

$$\mathbf{m}(u_n, u) \leq \inf_{v_n \in V_n} \mathbf{m}(v_n, u). \tag{2.15}$$

Если $J(v)$ индуцирован V – эллиптической билинейной формой, то (2.15) переходит в хорошо известную проекционную теорему (см., например, [5]).

Тожество для отклонений от точных решений вариационных устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 (см. [10]). Для любых $v \in V$ и $y^* \in Y^*$ имеет место тождество

$$\mathbf{m}(v, u) + \mathbf{m}^*(y^*, p^*) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*). \tag{2.16}$$

Левая часть (2.16) представляет собой сумму мер, контролирующих отклонение v от u и y^* от p^* соответственно, а правая часть содержит только известные функции v и y^* . Тожество (2.16) и его следствия для контроля точности приближенных решений и анализа ошибок математических моделей исследованы в монографии [12].

3. ТОЖДЕСТВА ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Тожество (2.16) было установлено с помощью методов теории двойственности вариационного исчисления. В этом разделе излагается другой, более общий, метод получения тождеств такого рода, который не использует вариационные аргументы и может быть использован для широкого круга краевых и начально-краевых задач.

3.1. Класс задач

Рассмотрим следующую абстрактную нелинейную краевую задачу. Требуется найти функции $u \in V$, $p^* \in Y^*$ и $\sigma \in V^*$, которые удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{A}u = f, \quad \text{где} \quad \mathcal{A}u := \Lambda^* p^*(u) + \sigma(u) \tag{3.1}$$

и соотношениям

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, p^*) := G(\Lambda u) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda u)) = 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbb{D}_R(u, \sigma) := R(u) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, u \rangle = 0. \tag{3.3}$$

Здесь $f \in V^*$, а выпуклые непрерывные функционалы $G : Y \rightarrow \mathbb{R}$ и $R : V \rightarrow \mathbb{R}$ задают связь между решением u и функциями p^* и σ . В дополнение к (2.5) и (2.4) мы предполагаем, что $G(y) \geq 0$, $R(v) \geq 0$, $G(y) = 0$, только если y совпадает с нулевым элементом пространства Y .

Покажем, что оператор \mathcal{A} , где $p^*(u)$ и $\sigma(u)$ определяются равенствами (3.2) и (3.3), является монотонным.

Лемма 5. Пусть для $u_1, u_2 \in V$, $\sigma_1, \sigma_2 \in V^*$, и $p_1^*, p_2^* \in Y^*$ выполнены условия

$$\mathbb{D}_G(\nabla u_i, p_i^*) = 0 \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_R(u_i, \sigma_i) = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3.4}$$

Тогда $\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle \geq 0$.

Доказательство. Имеем

$$\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = ((p_1^* - p_2^*, \Lambda(u_1 - u_2))) + \langle \sigma_1 - \sigma_2, u_1 - u_2 \rangle. \tag{3.5}$$

С учетом (3.4) правую часть (3.5) можно переписать в виде

$$G(\nabla u_1) + G^*(p_1^*) + G(\nabla u_2) + G^*(p_2^*) - ((p_2^*, \nabla u_1)) - ((p_1^*, \nabla u_2)) + R(u_1) + R^*(\sigma_1) + R(u_2) + R^*(\sigma_2) - \langle \sigma_2, u_1 \rangle - \langle \sigma_1, u_2 \rangle.$$

Таким образом,

$$\langle \mathcal{A}u_1 - \mathcal{A}u_2, u_1 - u_2 \rangle = \mathbb{D}_G(\nabla u_1, p_1^*) + \mathbb{D}_G(\nabla u_2, p_2^*) + \mathbb{D}_R(u_1, \sigma_2) + \mathbb{D}_R(u_2, \sigma_1) \geq 0.$$

Лемма 5 доказана.

Корректность задач с монотонными операторами основана на известной теореме Браудера–Минти (F. Browder, J. Minty), в которой утверждается, что ограниченный, монотонный, непрерывный и коэрцитивный оператор сюрективен. При выполнении условий, которые были ранее наложены на G и R , задача (3.1) корректна, а ее обобщенное решение удовлетворяет тождеству

$$((p^*(u), \Lambda w)) + \langle \sigma(u), w \rangle = \langle f, w \rangle \quad \forall w \in V. \tag{3.6}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) = G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) + R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v \rangle = \\ &= G(\Lambda v) + R(v) - G(\Lambda u) - R(u) - ((p^*, \Lambda(v - u))) - \langle \sigma, v - u \rangle = \\ &= G(\Lambda v) + R(v) - G(\Lambda u) - R(u) - \langle f, v - u \rangle = J(v) - J(u), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $J(v) := G(\Lambda v) + R(v) - \langle f, v \rangle$, мы заключаем, что функция u , удовлетворяющая (3.6), (3.2) и (3.3), является минимайзером функционала $J(v)$ на множестве V .

3.2. Основное тождество

Пусть имеются функция $v \in V$, а также $u^* \in Y^*$ и $\tau \in V^*$. Мы хотим оценить их близость к u , $p^*(u)$, и $\sigma(u)$ соответственно. Следующая теорема дает основу для такого анализа.

Теорема 2. Для $v \in V$, $y^* \in Y^*$, $\tau \in V^*$ выполняются тождество

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \langle \mathbf{r}_f(y^*, \tau), e \rangle, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{r}_f(y^*, \tau) := -\Lambda^* y^* - \tau + f$, а

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma) := \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) &= G(\Lambda u) + G^*(y^*) - ((y^*, \Lambda u)) + G(\Lambda v) + G^*(p^*) - ((p^*, \Lambda v)) + \\ &+ ((y^*, \Lambda u)) + ((p^*, \Lambda v)) - ((p^*, \Lambda u)) - ((y^*, \Lambda v)) = \\ &= \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + ((p^* - y^*, \Lambda(v - u))). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_R(v, \tau) &= R(v) + R^*(\tau) - \langle \tau, v \rangle = R(u) + R^*(\tau) - \langle \tau, u \rangle + R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v \rangle + \\ &+ \langle \tau, u \rangle + \langle \sigma, v \rangle - \langle \sigma, u \rangle - \langle \tau, v \rangle = \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) + \langle \sigma - \tau, v - u \rangle. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Суммируя (3.9) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) &= \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) + \\ &+ ((p^* - y^*, \Lambda(v - u))) + \langle \sigma - \tau, v - u \rangle. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Для оценки последнего интеграла в (3.11) мы используем равенство

$$((p^*, \Lambda e)) + \langle \sigma, e \rangle = \langle f, e \rangle,$$

которое следует из (3.6) и позволяет представить последние два интеграла в виде

$$((p^* - y^*, \Lambda e)) + \langle \sigma - \tau, e \rangle = \langle -\Lambda^* y^* - \tau + f, e \rangle = \langle \mathbf{r}_f(y^*, \tau), e \rangle. \tag{3.12}$$

Тождество (3.8) следует из (3.11) и (3.12). Теорема 2 доказана.

3.3. Модификации основного тождества

Положим в (3.8)

$$\tau = \tau_f := -\Lambda^* y^* + f. \tag{3.13}$$

Тогда это тождество приобретает вид

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau_f) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau_f). \tag{3.14}$$

Отметим, что правая часть (3.14) содержит только известные функции v , y^* и f . Поэтому его можно непосредственно использовать для оценки близости v к u и y^* к p^* .

Тождество (3.8) сформулировано в терминах пространств Y , Y^* , V и V^* . Нормы первых трех обычно задаются интегралами, которые для широкого класса функций (например, тригонометрических или кусочно-полиномиальных) могут быть вычислены точно. В других случаях можно использовать квадратурные формулы, точность которых контролируется известными методами. Однако норма пространства V^* определяется как супремум по бесконечному набору функций, что делает ее практическое вычисление трудно решаемой задачей. Поэтому желательно переписать (3.8) в таком виде, чтобы тождество оперировало только со слагаемыми интегрального типа. Естественно, что для этого потребуются ввести некоторые ограничения.

Далее мы считаем, что оператор \mathcal{A} связан с краевой задачей в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) с липшицевой границей Γ , $V(\Omega)$ – это пространство функций, определенных в Ω , а $V_0 \subset V$ содержит функции, обращающиеся в нуль на Γ . Мы предполагаем, что $V \subset \mathcal{V}$, где \mathcal{V} – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ интегрального типа, и вложение V в \mathcal{V} компактно. Пространства V^* и \mathcal{V}^* являются топологически двойственными к V_0 и \mathcal{V} соответственно. Пространство \mathcal{V}^* также наделено нормой интегрального типа и для пары \mathcal{V} , \mathcal{V}^* соответствующий продукт выражается интегралом, т.е. $\langle v^*, v \rangle = \int_{\Omega} v^* v dx$ для $v^* \in \mathcal{V}^* \subset V^*$. В случае, если \mathcal{V} является гильбертовым пространством, \mathcal{V} и \mathcal{V}^* можно идентифицировать, и тогда $V_0 \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow V^*$ представляет

собой триплет Гельфанда. В примерах, связанных с краевыми задачами, функционалы G и R , как правило задаются интегралами

$$G(y) = \int_{\Omega} g(y)dx \quad \text{и} \quad R(u) := \int_{\Omega} \rho(u)dx,$$

где g и ρ – выпуклые и непрерывные функции. Также предполагается, что

$$f \in \mathcal{V}^*. \tag{3.15}$$

Пространство Y содержит векторнозначные функции. С помощью гильбертова пространства U зададим другой триплет пространств $Y \subset U \subset Y^*$. Обычно $U := L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$, а $((y^*, y)) = \int_{\Omega} y y^* dx$. В общем случае $\Lambda^* y^*$ это элемент пространства V^* , норма которого не является интегральной. Мы введем более узкое множество

$$Y_{\Lambda^*}^* := \{y^* \in Y^* \mid \Lambda^* y^* \in \mathcal{V}^*\}.$$

Заметим, что $p^* \in Y_{\Lambda^*}^*$. Если $\tau \in \mathcal{V}^*$, $y^* \in Y_{\Lambda^*}^*$ и выполнено (3.15), то $r_f(y^*, \tau) \in \mathcal{V}^*$ и все слагаемые (3.8) можно записать в виде интегралов:

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \int_{\Omega} r_f(y^*, \tau) e dx. \tag{3.16}$$

Случай $R(v) \equiv 0$ требует специального рассмотрения. Здесь

$$R^*(v^*) = \begin{cases} 0, & v^* = 0, \\ +\infty, & v^* \neq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathbb{D}_R(v, v^*) = \begin{cases} 0, & v^* = 0, \\ +\infty, & v^* \neq 0. \end{cases}$$

Поэтому (3.3) означает, что $\sigma = 0$ и для $\tau \neq 0$ тождество (3.8) выполняется в форме $+\infty = +\infty$. Полагая $\tau = \sigma = 0$, получаем “усеченное” тождество

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) - \int_{\Omega} r_f(y^*) e dx, \tag{3.17}$$

в котором присутствует только функционал \mathbb{D}_G , а $r_f(y^*) = -\Lambda^* y^* + f$.

Замечание 1. Определим функционал $F(w) = R(w) - \langle f, w \rangle$. Используя лемму 1, заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_R(v, \tau_f) &= \mathbb{D}_F(v, \tau_f - f) = \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*), \\ \mathbb{D}_R(u, \tau_f) &= \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* y^*). \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma = -\Lambda^* p^* + f$, то $\mathbb{D}_R(v, \sigma) = \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$. Таким образом, выбор (3.13) приводит тождество (3.8) к виду

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_F(u, -\Lambda^* y^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) = \mathbb{D}_F(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_F(v, -\Lambda^* y^*),$$

т.е. в этом специальном случае (3.8) совпадает с (2.16).

3.4. Пример

Проиллюстрируем (3.17) с помощью простого примера. Пусть

$$\Lambda v = \nabla v, \quad f \in L^2(\Omega), \quad G(y) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A y y dx, \quad R \equiv 0,$$

где A – симметричная положительно определенная матрица, такая что для $c_2 \geq c_1 > 0$ и любого $\zeta \in \mathbb{R}^d$ выполняется $c_1 |\zeta|^2 \leq |\zeta|_A^2 := A \zeta \zeta \leq c_2 |\zeta|^2$. Этот выбор функционалов соответствует задаче

$$\operatorname{div} p^* + f = 0, \quad p^* = \nabla u, \tag{3.18}$$

$$u(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma. \tag{3.19}$$

Здесь

$$V = \overset{\circ}{H}^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega), \quad V^* = H^{-1}(\Omega), \quad \Lambda^* = -\operatorname{div} v$$

и

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A \nabla v \nabla v + \frac{1}{2} A^{-1} p^* p^* - \nabla v p^* \right) dx = \frac{1}{2} \|\nabla(v - u)\|_A^2.$$

В результате тождество (3.17) принимает вид

$$\frac{1}{2} \|\nabla(v - u)\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y^* - p^*\|_{A^{-1}}^2 = \frac{1}{2} \|y^* - A \nabla v\|_{A^{-1}}^2 - \int_{\Omega} \mathbf{r}_f(y^*) e dx, \tag{3.20}$$

где $\|y\|_A^2 := \int_{\Omega} A y u dx$. Тождества такого типа характерны для линейных задач. Они подробно исследованы (см. [9–13]), а их применение для контроля точности сингулярно обусловленных краевых задач обсуждается в [16].

Если на y^* наложить дополнительное условие

$$y^* \in Q_f^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle \Lambda^* y^* - f, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V\},$$

то последнее слагаемое в (3.17) исчезает, и мы приходим к тождеству

$$\mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*). \tag{3.21}$$

Из (3.21) следует оценка

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) \leq \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Q_f^*, \tag{3.22}$$

которую можно считать обобщением на нелинейные задачи оценки гиперциклов, которая была предложена в [17] для задачи линейной теории упругости (другой способ получения основан на использовании вариационных методов из [15]). Для задачи (3.18)–(3.19) оценка (3.22) превращается в известное неравенство

$$\|\nabla(v - u)\|_A \leq \|y^* - A \nabla v\|_{A^{-1}} \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Q_f^*,$$

где Q_f^* содержит вектор-функции, подчиненные условию $\operatorname{div} y^* + f = 0$. Заметим, что с практической точки зрения наличие дополнительного дифференциального условия (которое должно быть выполнено почти всюду в Ω) создает серьезные неудобства. Аппроксимации точного потока p^* , полученные с помощью численного метода, часто не удовлетворяют этому условию, что вызывает необходимость использования специальных методов “уравновешивания”. В относительно простых задачах эти методы применимы и дают хорошие оценки (см., например, [18], [19]). Однако в других случаях функция \mathbf{r}_f может иметь более сложную структуру. В частности, для параболических уравнений этот член включает производную по времени v_t , а в задачах с конвекцией соответствующие конвективные слагаемые. При необходимости поточечного удовлетворения условия $\mathbf{r}_f = 0$ это может создать серьезные проблемы. Однако теория показывает, что для получения эффективных и полностью вычисляемых оценок выполнение подобных поточечных условий совсем не является необходимым. Вместо этого получены оценки, которые включают интегралы от \mathbf{r}_f с известными весовыми множителями (см. [9] и оценки в следующем разделе).

4. МЕРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Величина $\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma)$ представляет собой комбинированную меру отклонения функций v, y^* и τ от u, p^* и σ соответственно. Каждая из четырех величин в $\mathbf{M}(v, y^*, \tau; u, p^*, \sigma)$ сама является некоторой мерой расстояния от одной из компонент до соответствующего точного значения. Если G и R дифференцируемы по Гато, то соответствующие выражения имеют достаточно простой вид (это ограничение не является принципиальным и вводится только для упрощения записи). В этом случае (см. (2.9))

$$p^* = G'(\Lambda u), \quad \Lambda u = G^{*'}(p^*), \quad \sigma = R'(u), \quad u = R^{*'}(\sigma), \tag{4.1}$$

и мы получаем четыре нелинейных меры:

$$\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = G(\Lambda v) - G(\Lambda u) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))) =: \mu_G(v, u),$$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_R(v, \sigma) &= R(v) - R(u) - \langle R'(u), v - u \rangle =: \mu_R(v, u), \\ \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) &= G^*(y^*) - G^*(p^*) - ((y^* - p^*, G^{*'}(p^*))) =: \mu_G^*(y^*, p^*), \\ \mathbb{D}_R(u, \tau) &= R^*(\tau) - R^*(\sigma) - \langle \tau - \sigma, R^{*'}(\sigma) \rangle =: \mu_R^*(\tau, \sigma), \end{aligned}$$

которые в сумме дают полную меру $\mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma)$. Рассмотрим их по отдельности. Две первых в сумме составляют величину

$$\mathbf{m}(v, u) := \mu_G(v, u) + \mu_R(v, u),$$

которая характеризует близость v и u . Мера $\mu_G^*(y^*, p^*)$ характеризует близость y^* к p^* , а $\mu_R^*(\tau, \sigma)$ показывает, насколько τ близко к точной функции σ . Теперь мы установим, как эти меры связаны некоторыми другими мерами, используемыми в нелинейном анализе.

4.1. Меры, основанные на монотонности

Так как G – выпуклый функционал, то операторы $G' : Y \rightarrow Y^*$ и $R' : V \rightarrow V^*$ являются монотонными. Поэтому величины

$$\bar{\mu}_G(v, u) := ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda v - \Lambda u)) \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_R(v, u) := \langle R'(v) - R'(u), v - u \rangle$$

неотрицательны, обращаются в нуль, если $v = u$, и могут рассматриваться как меры расстояния между v и u . Эти меры связаны с $\mu_G(v, u)$ и $\mu_R(v, u)$.

Пусть y^* определено равенством

$$y^* = G'(\Lambda v). \tag{4.2}$$

Тогда $G^*(y^*) + G(\Lambda v) = ((y^*, \Lambda v))$ и, учитывая (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \mu_G(v, u) + \mu_G^*(y^*, p^*) &= G(\Lambda v) + G^*(y^*) - G^*(p^*) - G(\Lambda u) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))) - \\ &- ((y^* - p^*, \Lambda u)) = ((G'(\Lambda v), \Lambda v)) - ((G'(\Lambda u), \Lambda u)) - ((G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))) - \\ &- ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda u)) = ((G'(\Lambda v) - G'(\Lambda u), \Lambda(v - u))), \end{aligned}$$

т.е. в данном случае сумма этих двух мер совпадает с $\bar{\mu}_G(v, u)$.

Аналогично, если

$$\tau = R'(v), \tag{4.3}$$

то

$$\mu_R(v, u) + \mu_R^*(\tau, \sigma) = \langle R'(v) - R'(u), v - u \rangle.$$

В конкретных задачах соотношения (4.2) и (4.3) обычно соответствуют некоторым (физическим или иным) законам, которые определяют свойства математической модели и часто называются *определяющими соотношениями*. Таким образом, если y^* и τ строятся на основе приближенного решения v и этих соотношений (что является одним из часто используемых на практике вариантов), то

$$\mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma) = \bar{\mu}_G(v, u) + \bar{\mu}_R(v, u), \tag{4.4}$$

и полная мера совпадает с суммой мер монотонности. Однако в общем случае такого совпадения нет.

4.2. Меры, основанные на равномерной выпуклости

Другая мера расстояния может быть введена для так называемых равномерно выпуклых функционалов. Считается, что функционал G обладает свойством равномерной выпуклости в некотором множестве B , если существует нетривиальный неотрицательный функционал $\Phi : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ такой, что $\Phi(y, y) = 0$ для любых $y \in Y$ и

$$G\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \Phi(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2}G(y_1) + \frac{1}{2}G(y_2) \quad \forall y_1, y_2 \in B. \tag{4.5}$$

В зависимости от конкретного функционала множество B может совпадать со всем пространством или, например, ограничивается некоторым шаром. Для функционала G можно ввести меру

$$\underline{\mu}_G(v, u) := 2\Phi(\Lambda v, \Lambda u).$$

Если R также является равномерно выпуклым, т.е.

$$R\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \phi(v_1, v_2) \leq \frac{1}{2}R(v_1) + \frac{1}{2}R(v_2), \tag{4.6}$$

то определим $\underline{\mu}_R(v, u) := 2\phi(v, u)$. Для степенных функций неравенства равномерной выпуклости известны как неравенства Кларксона (см. [20], а также разд. 6 ниже).

Лемма 6. Если G и R дифференцируемы и равномерно выпуклы в V , то

$$\underline{\mathbf{m}}(v, u) \leq \mathbf{m}(v, u) \leq \bar{\mathbf{m}}(v, u) \quad \forall v \in V, \tag{4.7}$$

где

$$\underline{\mathbf{m}}(v, u) := \underline{\mu}_G(v, u) + \underline{\mu}_R(v, u) \quad \text{и} \quad \bar{\mathbf{m}}(v, u) := \bar{\mu}_G(v, u) + \bar{\mu}_R(v, u).$$

Доказательство. Так как $D_G(\Lambda u, p^*) = 0$, то $p^* = G'(\Lambda u)$ и

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_G(v, u) &= \mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) = G(\Lambda v) + G^*(p^*) - \langle p^*, \Lambda v \rangle = G(\Lambda v) - G(\Lambda u) - \\ &- \langle G'(\Lambda u), \Lambda(v - u) \rangle \leq \langle G'(\Lambda v), \Lambda(v - u) \rangle - \langle G'(\Lambda u), \Lambda(v - u) \rangle = \bar{\mu}_G(v, u). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_R(v, u) &= \mathbb{D}_R(v, \sigma) = R(v) + R^*(\sigma) - \langle \sigma, v \rangle = \\ &= R(v) - R(u) - \langle \sigma, v - u \rangle \leq \langle R'(v), v - u \rangle - \langle R'(u), v - u \rangle = \bar{\mu}_R(v, u). \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства, получаем правую часть (4.7).

Для доказательства левой части заметим, что из (4.5) и (4.6) следует равномерная выпуклость функционала J :

$$J\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \Phi(\Lambda v_1, \Lambda v_2) + \phi(v_1, v_2) \leq \frac{1}{2}J(v_1) + \frac{1}{2}J(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V,$$

и мы заключаем, что

$$\Phi(\Lambda v, \Lambda u) + \phi(v, u) \leq \frac{1}{2}\mathcal{J}(v) + \frac{1}{2}\mathcal{J}(u) - \mathcal{J}\left(\frac{u+v}{2}\right).$$

Так как $\mathcal{J}(u) = \inf_{v \in V} J(v) \leq \mathcal{J}\left(\frac{u+v}{2}\right)$, то отсюда следует неравенство

$$\underline{\mathbf{m}}(v, u) \leq \mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u).$$

С другой стороны, (3.7) показывает, что $\mathcal{J}(v) - \mathcal{J}(u) = \mathbf{m}(v, u)$, что и дает оценку меры снизу. Лемма 6 доказана.

Замечание 2. Если $R(v) \equiv 0$ или этот функционал является выпуклым, но не равномерно выпуклым, то $\phi = 0$ и соответствующие ему части мер исчезают, так что мера $\mathbf{m}(v, u)$ совпадает с $\underline{\mu}_G(v, u)$ и ограничена снизу и сверху мерами $\underline{\mu}_G(v, u)$ и $\bar{\mu}_G(v, u)$.

5. ОЦЕНКИ

Тождество (3.16) позволяет получить полностью вычисляемые оценки величины $\underline{\mu}_G(v, u)$ и других мер отклонения для любых $v \in V_0$, $y^* \in Y^*$ и $\tau \in \mathcal{V}$. Это требует применения функциональных неравенств, которые должны выполняться для пространств V и Y , оператора Λ и используемых мер. Нам потребуется одно из следующих неравенств:

$$\Phi(\|\Lambda(v - u)\|_Y) \leq C_\phi \underline{\mu}_G(v, u) \quad \forall u, v \in V, \tag{5.1}$$

$$\Psi(\|v - u\|_V) \leq C_\Psi \underline{\mu}_R(v, u), \tag{5.2}$$

где φ, ψ – монотонные неотрицательные функции, такие что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, а C_φ и C_ψ – положительные постоянные не зависящие от u и v . Вообще говоря, для получения оценок достаточно одного из этих неравенств, однако, если выполняются оба, это можно использовать, чтобы сделать оценку более эффективной. Ниже рассматривается именно такой вариант.

С учетом обозначений, введенных в разд. 4, тождество (3.16) имеет вид

$$\mu_G(v, u) + \mu_R(v, u) + \mu_G^*(y^*, p^*) + \mu_R^*(\tau, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \int_{\Omega} r_f(y^*, \tau) e dx. \tag{5.3}$$

Для получения полностью вычисляемой оценки необходимо оценить последний интеграл. Это можно сделать различными способами (включая, например, те, что используют решение вспомогательных задач, см. [13], [16]). Здесь мы используем самый простой вариант, основанный на применении неравенств (2.5), (5.1) и (5.2).

Пусть $\kappa(x)$ – некоторая функция, заданная в Ω и принимающая значения в $[0, 1]$. Свобода в выборе этой функции может быть в дальнейшем использована для оптимизации оценки. Ясно, что

$$\left| \int_{\Omega} r_f(y^*, \tau) e dx \right| \leq \|\kappa(x) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \|e\|_q + \|(1 - \kappa(x)) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \|e\|_q. \tag{5.4}$$

Используя (2.5) и неравенство Юнга с $\beta > 0$, получаем

$$\begin{aligned} & \|\kappa r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \|e\|_q \leq C_F \|\kappa(x) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \|\Lambda e\|_Y \leq \\ & \leq \beta \varphi^* \left(\frac{C_F}{\beta} \|\kappa(x) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right) + \beta \varphi(\|\Lambda e\|_Y) \leq \beta \varphi^* \left(\frac{C_F}{\beta} \|\kappa(x) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right) + \beta C_\varphi \mu_G(v, u), \end{aligned} \tag{5.5}$$

где $\varphi^*(\zeta^*) := \sup_{\zeta \in \mathbb{R}} (\zeta^* \zeta - \varphi(\zeta))$.

Вторая часть (5.4) оценивается аналогично ($\gamma > 0$):

$$\begin{aligned} & \|(1 - \kappa(x)) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \|e\|_q \leq \gamma \psi^* \left(\frac{1}{\gamma} \|(1 - \kappa(x)) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right) + \gamma \psi(\|e\|_q) \leq \\ & \leq \gamma \psi^* \left(\frac{1}{\gamma} \|(1 - \kappa(x)) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right) + \gamma C_\psi \mu_R(v, u). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Определим величину

$$\Sigma_f(y^*, \tau, \kappa\beta, \gamma) := \beta \varphi^* \left(\frac{C_F}{\beta} \|\kappa(x) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right) + \gamma \psi^* \left(\frac{1}{\gamma} \|(1 - \kappa(x)) r_f(y^*, \tau)\|_{q^*} \right).$$

Она зависит только от известных функций и параметров. Из (5.3), (5.5) и (5.6) вытекает оценка сверху

$$\begin{aligned} & (1 - \beta C_\varphi) \mu_G(v, u) + (1 - \gamma C_\psi) \mu_R(v, u) + \mu_G^*(y^*, p^*) + \mu_R^*(\tau, \sigma) \leq \\ & \leq \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) + \Sigma_f(y^*, \tau, \kappa\beta, \gamma), \end{aligned} \tag{5.7}$$

где $\beta \leq 1/C_\varphi$ и $\gamma \leq 1/C_\psi$.

Левая часть (5.7) содержит сумму мер с весовыми множителями (которые можно варьировать за счет изменения констант β и γ), а правая часть не содержит неизвестных функций и может быть прямо вычислена.

Также мы получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} & (1 + \beta C_\varphi) \mu_G(v, u) + (1 + \gamma C_\psi) \mu_R(v, u) + \mu_G^*(y^*, p^*) + \mu_R^*(\tau, \sigma) \geq \\ & \geq \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \Sigma_f(y^*, \tau, \kappa\beta, \gamma). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Для использования оценок (1.2) и (2.1) надо знать постоянные C_F, C_φ, C_ψ . Методы получения оценок C_F хорошо разработаны (обзор результатов можно найти в [12]). Вопрос с C_φ и C_ψ обсуждается в следующем разделе в контексте моделей с потенциалами степенного роста.

Тождества могут также использоваться для сравнения решений различных математических моделей. Например, вместе с (3.1)–(3.3) мы можем рассмотреть задачу с измененным оператором

ром $\tilde{\mathcal{A}}$, для которого (3.2) и (3.3) выполняются с функционалами \tilde{G} и \tilde{R} вместо G и R , так что соответствующие решения \tilde{u} , \tilde{p}^* и $\tilde{\sigma}$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathbb{D}_{\tilde{G}}(\Lambda\tilde{u}, \tilde{p}^*) := \tilde{G}(\Lambda\tilde{u}) + \tilde{G}^*(\tilde{p}^*) - \langle \tilde{p}^*, \Lambda\tilde{u} \rangle = 0, \tag{5.9}$$

$$\mathbb{D}_{\tilde{R}}(\tilde{u}, \tilde{\sigma}) := \tilde{R}(\tilde{u}) + \tilde{R}^*(\tilde{\sigma}) - \langle \tilde{\sigma}, \tilde{u} \rangle = 0. \tag{5.10}$$

Поскольку $\mathbf{r}_f(\tilde{y}^*, \tilde{\sigma}) = 0$, то из (5.3) следует, что

$$\mu_G(\tilde{u}, u) + \mu_G^*(\tilde{p}^*, p^*) + \mu_R(\tilde{u}, u) + \mu_R^*(\tilde{\sigma}, \sigma) = \mathbb{D}_G(\Lambda\tilde{u}, \tilde{p}^*) + \mathbb{D}_R(\tilde{u}, \tilde{\sigma}). \tag{5.11}$$

В частности, $\tilde{\mathcal{A}}$ можно рассматривать как упрощение оператора \mathcal{A} за счет отбрасывания несущественных деталей в поведении коэффициентов. В современном математическом моделировании такие приемы часто используются (defeaturing of models). В этом случае функции \tilde{u} , \tilde{p}^* , $\tilde{\sigma}$ являются решениями упрощенной задачи. Правая часть (5.11) зависит только от этих функций, а левая характеризует ошибку, которая возникла в результате упрощения модели.

Используя (5.9) и (5.10), это тождество можно также переписать в виде

$$\begin{aligned} &\mu_G(\tilde{u}, u) + \mu_G^*(\tilde{p}^*, p^*) + \mu_R(\tilde{u}, u) + \mu_R^*(\tilde{\sigma}, \sigma) = \\ &= G(\Lambda\tilde{u}) - \tilde{G}(\Lambda\tilde{u}) + G^*(\tilde{p}^*) - \tilde{G}^*(\tilde{p}^*) + R(\tilde{u}) - \tilde{R}(\tilde{u}) + R^*(\tilde{\sigma}) - \tilde{R}^*(\tilde{\sigma}). \end{aligned} \tag{5.12}$$

6. НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СТЕПЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе мы установим некоторые неравенства, которые позволяют обосновать оценки (5.1) и (5.2) для функционалов вида

$$G(v) = \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} |\nabla v|^\alpha dx.$$

Далее эти оценки используются в приложении к задаче (7.2)–(7.3).

Наиболее простой способ использует сильную (равномерную) выпуклость степенных функций с показателем $\alpha > 1$. Для $\alpha \geq 2$ сильная выпуклость следует из известного алгебраического неравенства

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^\alpha + \left| \frac{a-b}{2} \right|^\alpha \leq \frac{1}{2} (|a|^\alpha + |b|^\alpha) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d. \tag{6.1}$$

Поэтому для скалярных и векторнозначных функций, суммируемых в Ω с нужной степенью, выполняется (4.5) с $\Phi(y_1, y_2) = \frac{1}{2^\alpha} \int_{\Omega} |y_1 - y_2|^\alpha dx$. Для $\alpha \in (1, 2)$ неравенство (4.5) также выполняется, но функция Φ имеет более сложный вид (см. [21–24]).

Далее мы получим другую (более точную) оценку снизу для меры $\mu_G(v, u)$ в случае, когда G является степенным функционалом. Сначала мы установим алгебраическое неравенство для функции $\mu_\alpha : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ вида

$$\mu_\alpha(a, b) := \frac{1}{\alpha} |a|^\alpha + \frac{1}{\alpha} |b|^\alpha - ab|b|^{\alpha-2}.$$

Лемма 7. Если $\alpha \geq 2$, то

$$\mu_\alpha(a, b) \geq c_\alpha |a - b|^\alpha \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \tag{6.2}$$

где $c_\alpha = \frac{\alpha-1}{\alpha} (1 + \lambda_0)^{2-\alpha}$, а λ_0 является корнем уравнения (6.4).

Если $a = b$, то обе части (6.2) равны нулю и неравенство верно с любой константой.

Для рассмотрения любых других случаев введем параметры $\lambda \geq 0$ и $\theta \in [-1, 1]$ такие, что $|a| = \lambda|b|$ и $ab = \theta|a||b| = \theta\lambda|b|^2$.

Нетрудно видеть, что

$$c_\alpha = \min_{\lambda, \theta} \frac{1}{\alpha} S_\alpha(\lambda, \theta), \quad \text{где} \quad S_\alpha(\lambda, \theta) := \frac{\lambda^\alpha + \alpha - 1 - \alpha\lambda\theta}{|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2|^{\alpha/2}},$$

и минимум берется по всем $\lambda > 0$ и $\theta \in [1, 1]$, за исключением $\lambda = \theta = 1$. Поскольку $|\theta| \leq 1$, то $1 - 2\lambda\theta + \lambda^2 \geq 0$. Вычислим производную

$$\frac{\partial S_\alpha(\lambda, \theta)}{\partial \theta} = \alpha\lambda \frac{\lambda^\alpha - \lambda^2 + (\alpha - 2)(1 - \lambda\theta)}{|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2|^{1+\alpha/2}} \geq \alpha\lambda \frac{\phi(\lambda)}{|1 - 2\lambda\theta + \lambda^2|^{1+\alpha/2}}, \quad (6.3)$$

где $\phi(\lambda) := \lambda^\alpha - \lambda^2 + (\alpha - 2)(1 - \lambda)$ является неотрицательной функцией. Действительно, $\phi(0) = \alpha - 2 \geq 0$, а производная $\phi'(\lambda) = \alpha\lambda^{\alpha-1} - 2\lambda + 2 - \alpha$ обращается в нуль в единственной точке $\lambda = 1$, где $\phi''(1) = \alpha(\alpha - 1) - 2 \geq 0$. Поэтому $\phi'(\lambda) \geq 0$ и, следовательно, $\phi(\lambda) \geq 0$.

Оценка (6.3) показывает, что $S_\alpha(\lambda, \theta)$ достигает минимального и максимального значений соответственно при $\theta = -1$ и $\theta = 1$. Таким образом,

$$c_\alpha = \min_{\lambda \geq 0} \frac{1}{\alpha} S(\lambda, -1), \quad S(\lambda, -1) = \frac{\lambda^\alpha + \alpha - 1 + \alpha\lambda}{(1 + \lambda)^\alpha}.$$

Нетрудно видеть, что $\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(\lambda, -1) = \alpha - 1$ и $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S(\lambda, -1) = 1$. Поскольку

$$\frac{\partial S(\lambda, -1)}{\partial \lambda} = \alpha \frac{s(\lambda)}{(1 + \lambda)^{1+\alpha}}, \quad \text{где} \quad s(\lambda) := \lambda^{\alpha-1} + \lambda(1 - \alpha) + 2 - \alpha,$$

приходим к уравнению $s(\lambda) = 0$.

Функции $S(\lambda, -1)$ и $s(\lambda)$ изображены на фиг. 1а. Видно, что $s(0) \leq 0$ и $s(\lambda) \rightarrow +\infty$, если $\lambda \rightarrow +\infty$. Поэтому имеется число λ_0 такое, что

$$\lambda_0^{\alpha-1} + \lambda_0(1 - \alpha) - 2 + \alpha = 0. \quad (6.4)$$

Так как $\alpha > 2$, то линейная и степенная функции в (6.4) могут совпадать лишь в одной точке, так что корень единственный. При этом

$$s'(\lambda_0) = (\alpha - 1)(\lambda_0^{\alpha-2} - 1) = \frac{\alpha - 1}{\lambda_0}(\lambda_0^{\alpha-1} - \lambda_0) = \frac{(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{\lambda_0}(1 + \lambda_0)$$

и, следовательно,

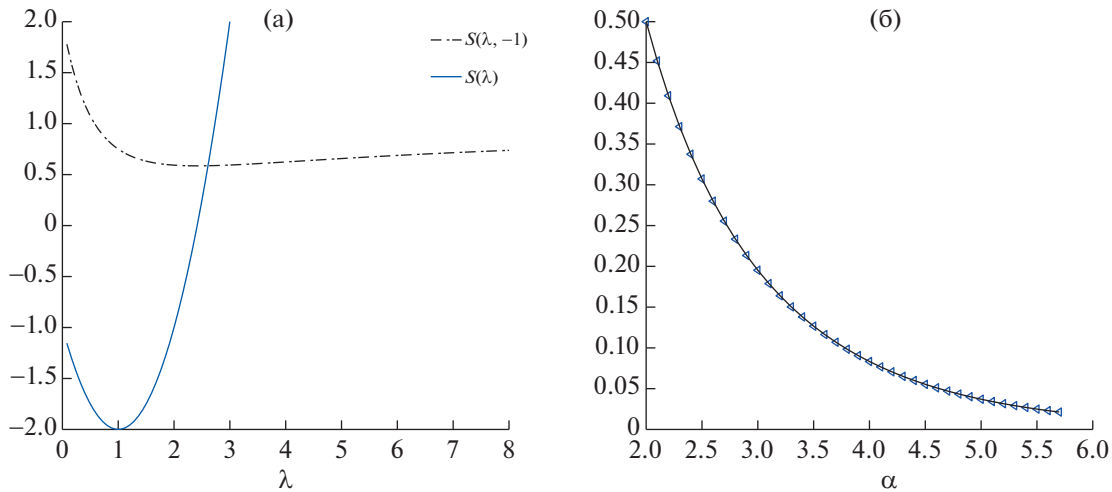
$$\left. \frac{\partial^2 S(\lambda, -1)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=\lambda_0} = \alpha \left(\frac{s'(\lambda_0)}{(1 + \lambda_0)^{1+\alpha}} \right) = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)}{\lambda_0(1 + \lambda_0)^\alpha} > 0.$$

Таким образом, минимум $S(\lambda, -1)$ достигается при $\lambda = \lambda_0$. Так как $\lambda_0^\alpha = (\alpha - 2)\lambda_0 + (\alpha - 1)\lambda_0^2$, приходим к заключению, что $c_\alpha = \frac{\alpha - 1}{\alpha}(1 + \lambda_0)^{2-\alpha}$.

Замечание 3. Так как $S(\lambda, +1) = \frac{\lambda^\alpha - 1 + \alpha(1 - \lambda)}{|\lambda - 1|^\alpha}$ стремится к $+\infty$, если $\lambda \rightarrow 1_{+0}$, то при $\alpha > 2$ не-

равенство, обратное к (6.2), не имеет места. Мера $\mu_\alpha(a, b)$ эквивалентна норме $|a - b|^\alpha$ только при $\alpha = 2$ ($c_\alpha = 0.5$).

Замечание 4. Оценка (6.2) существенно лучше, чем оценка, которая следует из равномерной выпуклости и определяется функцией $\underline{\mu}_\alpha(a, b) := (1/2^\alpha)|a - b|^\alpha$ в соответствии с (6.1). Например, при $\alpha = 3$ $c_\alpha \cong 0.1953$, а $(1/2^\alpha) = 0.125$. При $\alpha = 4$ $c_\alpha \cong 0.8333$ (см. фиг. 1), а $(1/2^\alpha) = 0.0625$.



Фиг. 1. Функции $S(\lambda, -1)$ и $s(\lambda)$ при $\alpha = 3$ (а) и значения c_α (б).

Из неравенства (6.2) следует ряд других оценок, в частности,

$$\mu_\alpha(b, a) := \frac{1}{\alpha} |b|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*} |a|^\alpha - ab |a|^{\alpha-2} \geq c_\alpha |a - b|^\alpha \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \geq 2, \tag{6.5}$$

$$\mu_{\alpha^*}(a, b) := \frac{1}{\alpha^*} |a|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha} |b|^{\alpha^*} - ab |b|^{\alpha^*-2} \geq c_{\alpha^*} |a - b|^{\alpha^*} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in (1, 2], \tag{6.6}$$

$$\mu_{\alpha^*}(b, a) := \frac{1}{\alpha^*} |b|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha} |a|^{\alpha^*} - ab |a|^{\alpha^*-2} \geq c_{\alpha^*} |a - b|^{\alpha^*} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in (1, 2]. \tag{6.7}$$

Подстановка $\bar{a} = |a|^{\alpha^*-2} a$ и $\bar{b} = |b|^{\alpha^*-2} b$ приводит к равенствам

$$\mu_\alpha(\bar{b}, \bar{a}) = \mu_{\alpha^*}(a, b) \quad \text{и} \quad \mu_\alpha(\bar{a}, \bar{b}) = \mu_{\alpha^*}(b, a).$$

Применив (6.5), получаем

$$\mu_{\alpha^*}(a, b) \geq c_\alpha \left| |a|^{\alpha^*-2} a - |b|^{\alpha^*-2} b \right|^\alpha \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \geq 2. \tag{6.8}$$

При изучении задач со степенным ростом (в частности, для получения оценок в разд. 7) полезны некоторые другие неравенства для степенных функций. Многие из них исследованы в [25], где было показано, что для $\alpha \in [1, 2]$ выполняется

$$\left| |b|^{\alpha-2} b - |a|^{\alpha-2} a \right| \leq 2^{2-\alpha} |b - a|^{\alpha-1} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d.$$

Для $\alpha > 2$ такое неравенство не выполняется, но можно установить другое, которое оценивает выражение в левой части через модуль разности аргументов.

Лемма 8. Для $\alpha \geq 2$ имеет место неравенство

$$\left| |b|^{\alpha-2} b - |a|^{\alpha-2} a \right| \leq \kappa_\alpha |b - a| (|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2}) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^d, \tag{6.9}$$

где $\kappa_\alpha = 1$, если $\alpha \in [2, 3]$, и $\kappa_\alpha = \frac{\alpha - 1}{2}$, если $\alpha > 3$.

Доказательство. Рассуждая так же, как и в лемме 7, заключаем, что

$$\kappa_\alpha^2 = \sup_{\lambda \geq 0, \theta \in [-1, 1]} \frac{1 + \lambda^{2\alpha-2} - 2\theta\lambda^{\alpha-1}}{(1 - 2\theta\lambda + \lambda^2)(1 + \lambda^{\alpha-2})^2}.$$

Анализ этой задачи показывает, что супремум достигается при $\theta = 1$. Если $\alpha > 3$, то супремум выражения $\frac{1 - \lambda^{\alpha-1}}{(1 - \lambda)(1 + \lambda^{\alpha-2})}$ достигается при $\lambda \rightarrow 1$, а для $\alpha \in (2, 3)$ супремум достигается при $\lambda = 0$. Лемма 8 доказана.

Замечание 5. В ряде случаев меры, входящие в функциональные тождества, совпадают с мерами $\bar{\mu}$, использующими монотонность операторов (см. (4.4)). В этой связи возникает функция

$$\mu_\alpha^s(a, b) := (|b|^{\alpha-2} b - |a|^{\alpha-2} a)(b - a),$$

которая также является мерой расстояния между векторами a и b . Нетрудно видеть, что

$$\mu_\alpha^s(a, b) = \mu_\alpha(a, b) + \mu_\alpha(b, a),$$

так что $\mu_\alpha^s(a, b)$ является удвоенной симметризацией меры $\mu_\alpha(a, b)$.

Известно, что (см. [26])

$$\mu_\alpha^s(a, b) \geq \kappa_0 |a - b|^\alpha, \quad \text{если } \alpha \geq 2, \quad \text{и } \mu_\alpha^s(a, b) \leq \kappa_1 |a - b|^\alpha, \quad \text{если } \alpha \in (1, 2),$$

где положительные постоянные κ_0 и κ_1 зависят только от α . В [25] был установлен ряд оценок величины $\mu_\alpha^s(a, b)$, в частности,

$$\begin{aligned} \mu_\alpha^s(a, b) &\geq \frac{1}{2} (|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2}) |b - a|^2 \geq \hat{c}_\alpha |b - a|^\alpha, \quad \hat{c}_\alpha = 2^{2-\alpha}, \quad \alpha \geq 2, \\ \mu_\alpha^s(a, b) &\leq \frac{1}{2} (|b|^{\alpha-2} + |a|^{\alpha-2}) |b - a|^2, \quad \alpha \in (1, 2]. \end{aligned}$$

Неравенства (6.2), (6.5)–(6.7), влекут соответствующие функциональные неравенства для мер, которые удобно использовать при изучении соответствующих классов краевых задач. Одна из таких задач рассматривается далее.

7. ПРИМЕР. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ α -ЛАПЛАСИАНА

В качестве примера рассмотрим нелинейное уравнение реакции–диффузии

$$-\operatorname{div} |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u + \sigma(u) = f \quad \text{в } \Omega \tag{7.1}$$

для функции u , обращающейся в нуль на границе Γ ограниченной области Ω . Здесь $\alpha > 1$, а $\sigma(u)$ определяется согласно (3.3). В этом случае

$$g(y) = \frac{1}{\alpha} |y|^\alpha, \quad g^*(y^*) = \frac{1}{\alpha^*} |y^*|^{\alpha^*}, \quad G(\nabla v) = \frac{1}{\alpha} \|\nabla v\|_{\alpha, \Omega}^\alpha, \quad R(v) = \int_\Omega \rho(v) dx, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

Здесь и далее $\|\cdot\|_{\alpha, \Omega}$ обозначает норму пространства $L^\alpha(\Omega)$. Для $\alpha = 2$ используется сокращенное обозначение $\|\cdot\|_\Omega$.

Если функция ρ дифференцируема, то приходим к краевой задаче

$$-\operatorname{div} |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u + \rho'(u) = f \quad \text{в } \Omega, \tag{7.2}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma. \tag{7.3}$$

Мы предполагаем, что $f \in L^{\alpha^*}(\Omega)$ и, если $\alpha < d$, то функция ρ дополнительно удовлетворяет условию $\rho(v) \leq d_1 + d_2 |\rho|^\theta$ с $\theta = \alpha d / (d - \alpha)$ и некоторыми положительными константами d_1 и d_2 . В таком случае пространства определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= W^{1, \alpha}(\Omega), \quad V_0 = \overset{\circ}{W}^{1, \alpha}(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^\alpha(\Omega), \\ \mathcal{V}^* &= L^{\alpha^*}(\Omega), \quad V^* = W^{-1, \alpha^*}(\Omega), \quad Y^* = L^{\alpha^*}(\Omega, \mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Заметим, что вследствие (2.9) функции ∇u и p^* связаны соотношениями

$$p^* = |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u \quad \text{и} \quad \nabla u = |p^*|^{(2-\alpha)/(\alpha-1)} p^*. \tag{7.4}$$

Для $a, b \in \mathbb{R}^d$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{R}$ определим функции

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(a, b) &:= \frac{1}{\alpha} |a|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*} |b|^\alpha - ab |b|^{\alpha-2}, & \mu_{\alpha^*}(a, b) &:= \frac{1}{\alpha^*} |a|^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha} |b|^{\alpha^*} - ab |b|^{\alpha^*-2}, \\ D_\alpha(a, b) &:= \frac{1}{\alpha} |a|^\alpha + \frac{1}{\alpha^*} |b|^{\alpha^*} - ab, & D_\rho(\xi, \zeta) &= \rho(\xi) + \rho^*(\zeta) - \xi\zeta \end{aligned}$$

и нелинейные меры

$$\mu_G(v, u) := \int_\Omega \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) dx, \quad \mu_G^*(y^*, p^*) := \int_\Omega \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) dx, \quad \mu_R(v, u) := \int_\Omega D_\rho(v, \sigma) dx.$$

При $\alpha = 2$ дифференциальный оператор в (7.2) совпадает с классическим оператором линейной диффузии. В этом (и только в этом) случае меры задаются нормами

$$\mu_G(v, u) = \frac{1}{2} |\nabla(v - u)|_\Omega^2 \quad \text{и} \quad \mu_G^*(y^*, p^*) = \frac{1}{2} \|y^* - p^*\|_\Omega^2.$$

Вид функционала D_ρ определяется функцией ρ , которая в прикладных задачах часто связана с химическими реакциями. В частности, если $\rho(v) = \frac{\delta}{2} |v|^2$, $\delta > 0$, то имеет место линейный закон $\sigma = \delta u$. В этой модели $D_R(v, \tau) = \frac{1}{2\delta} \|\delta v - \tau\|_\Omega^2$ и $D_R(v, \sigma) = \frac{\delta}{2} \|v - u\|_\Omega^2$.

Для задачи (7.2)–(7.3) тождество (3.16) принимает вид

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) + D_\rho(v, \sigma) + D_\rho(u, \tau)) dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) + D_\rho(v, \tau) - \mathbf{r}(y^*, \tau)e) dx, \tag{7.5}$$

где $\mathbf{r}(y^*, \tau) = \text{div } y^* - \tau + f$.

В случае $\rho = 0$ надо положить $\tau = 0$ и использовать тождество (3.17), которое теперь выглядит так:

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*)) dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) - \mathbf{r}(y^*)e) dx. \tag{7.6}$$

Отметим, что при $\alpha = 2$ (7.6) переходит в тождество (3.20) (с единичной матрицей A).

Полагая в (7.6) $\tau = \tau_f$, мы получаем вариант тождества (3.14):

$$\int_\Omega (\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) + D_\rho(v, \sigma) + D_\rho(u, \tau_f)) dx = \int_\Omega (D_\alpha(\nabla v, y^*) + D_\rho(v, \tau_f)) dx. \tag{7.7}$$

Правая часть (7.7) содержит только известные функции v , y^* и τ_f , и поэтому это тождество сразу дает вычисляемые оценки мер в левой части.

Тождества (7.5) и (7.6) содержат неизвестную функцию e . Если речь идет о численных аппроксимациях, то, как правило, $\mathbf{r}(y^*, \tau) \neq 0$. Поэтому для получения полностью вычисляемых оценок надо оценить соответствующий интеграл. Различные варианты таких оценок для задач со степенным ростом были ранее получены в [23], [27], [28], а для задач с нестандартным ростом в [29]. Используя тождества, мы теперь получим такие оценки для введенных выше нелинейных мер. Это можно сделать с помощью метода, описанного в разд. 5, и оценок, полученных в разд. 6.

Из леммы 7 следует, что для любых $v, u \in V_0$ и $\alpha \geq 2$ верно функциональное неравенство

$$\int_\Omega \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) \geq c_\alpha \|\nabla(v - u)\|_{\alpha, \Omega}^\alpha. \tag{7.8}$$

Оно показывает, что (5.1) выполняется с функцией $\varphi_\alpha(\zeta) = \frac{1}{\alpha}|\zeta|^\alpha$ и постоянной $C_\alpha = 1/(\alpha c_\alpha)$. Оценка (2.5) в рассматриваемом случае соответствует неравенству

$$\|w\|_{\alpha,\Omega} \leq C_{\alpha,F} \|\nabla w\|_{\alpha,\Omega} \quad \forall w \in V_0.$$

Применим эти неравенства для получения оценок.

7.1. Случай $\alpha \geq 2$

В качестве первого примера рассмотрим задачу (7.2)–(7.3) с $\alpha \geq 2$ и

$$\rho(v) = \frac{\delta}{m}|v|^m, \quad \delta > 0, \quad m \geq 2. \tag{7.9}$$

В этом случае $\sigma = \delta|u|^{m-2}u$, а $\rho^*(\zeta^*) = \frac{1}{m^*\delta^{m^*-1}}|\zeta^*|^{m^*}$. Тогда

$$\mathbb{D}_R(v, \tau) = \int_{\Omega} D_\rho(v, \tau) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\delta}{m}|v|^m + \frac{|\tau|^{m^*}}{m^*\delta^{m^*-1}} - \tau v \right) dx$$

и в соответствии с (6.2)

$$\mu_R(v, u) = \int_{\Omega} D_\rho(v, \sigma) dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\delta}{m}|v|^m + \frac{\delta}{m^*}|u|^m - \delta|u|^{m-2}uv \right) dx = \delta \int_{\Omega} \mu_m(v, u) dx \geq \delta c_m \|v - u\|_{m,\Omega}^m.$$

Таким образом, (5.2) выполняется с функцией $\psi(\zeta) = \frac{\delta}{m}|\zeta|^m$ и постоянной $C_\psi = 1/(c_m m)$. Соответствующие сопряженные функции легко найти:

$$\Psi_m^*(\zeta^*) = \frac{\delta^{1-m^*}}{m^*} |\zeta^*|^{m^*} \quad \text{и} \quad \Phi_\alpha^*(\zeta^*) = \frac{1}{\alpha^*} |\zeta^*|^{\alpha^*}.$$

Определим величину

$$\Sigma_f(y^*, \tau, \kappa\alpha, \beta, \gamma) := \frac{1}{\alpha^*} \frac{C_{\alpha,F}^{\alpha^*}}{\beta^{\alpha^*-1}} \|\kappa(x)\mathbf{r}_f(y^*, \tau)\|_{\alpha^*,\Omega}^{\alpha^*} + \frac{1}{m^*} \frac{1}{(\delta\gamma)^{m^*-1}} \|(1 - \kappa(x))\mathbf{r}_f(y^*, \tau)\|_{\alpha^*,\Omega}^{m^*}.$$

В соответствии с (5.7) получаем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{\beta}{\alpha c_\alpha}\right) \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) + \left(1 - \frac{\gamma}{m c_m}\right) \mu_m(v, u) + D_\rho(u, \tau) \right) dx \leq \\ \leq \int_{\Omega} (D_\alpha(\nabla v, y^*) + D_\rho(v, \tau)) dx + \Sigma_f(y^*, \tau, \kappa, \alpha, \beta, \gamma), \end{aligned} \tag{7.10}$$

где $\beta \leq \alpha c_\alpha$ и $\gamma \leq m c_m$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\rho = 0$. Если $\alpha \geq 2$, то, преобразуя (7.6), получаем оценку

$$\int_{\Omega} \left(\left(1 - \frac{\beta}{\alpha c_\alpha}\right) \mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) + \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) \right) dx \leq \int_{\Omega} D_\alpha(\nabla v, y^*) dx + \frac{1}{\alpha^*} \frac{C_{\alpha,F}^{\alpha^*}}{\beta^{\alpha^*-1}} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*,\Omega}^{\alpha^*}. \tag{7.11}$$

В частности, если $\alpha = 2$, то $c_\alpha = 1/2$, $\mu_\alpha(\nabla v, \nabla u) = \frac{1}{2} \|\nabla(v - u)\|_\Omega^2$ и (7.11) переходит в известную оценку

$$(1 - \beta) \|\nabla(v - u)\|_\Omega^2 + \|y^* - p^*\|_\Omega^2 \leq \|\nabla v - y^*\|_\Omega^2 + \frac{C_F^2}{\beta} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_\Omega^2, \quad \beta \leq 1.$$

7.2. Случай $\alpha \in (1, 2]$

Если $\rho \neq 0$ (например/задано в виде (7.9)), то можно использовать оценку (7.10) с $\kappa(x) = 0$ и $\beta = 0$. Если $\rho = 0$ в Ω или в некоторой подобласти $\omega \subset \Omega$, то надо использовать другой метод. Рассмотрим его для случая, когда $\rho = 0$ во всей области Ω .

Преобразуем интеграл в тождестве (3.17) следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{r}_f(y^*) e dx &\leq \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|e\|_{\alpha, \Omega} \leq C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|\nabla e\|_{\alpha, \Omega} \leq \\ &\leq C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \left(\|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2} y^*\|_{\alpha, \Omega} + \| |y^*|^{\alpha^*-2} y^* - |p^*|^{\alpha^*-2} p^* \|_{\alpha, \Omega} \right). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Так как $\alpha^* > 2$, последнюю норму в (7.12) можно оценить с помощью (6.9):

$$\| |y^*|^{\alpha^*-2} y^* - |p^*|^{\alpha^*-2} p^* \|_{\alpha, \Omega} \leq \kappa_{\alpha^*} \|y^* - p^*\|_{\alpha^*, \Omega} (\|y^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*-2} + \|p^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*-2}). \tag{7.13}$$

Чтобы оценить норму p^* , используем априорную оценку точного решения. Так как

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{\alpha-2} \nabla u \nabla w dx = \int_{\Omega} f w dx \quad \forall w \in V_0,$$

то $\|\nabla u\|_{\alpha, \Omega}^{\alpha-1} \leq C_{\alpha, F} \|f\|_{\alpha^*, \Omega}$, что дает оценку

$$\|\nabla u\|_{\alpha, \Omega}^{\alpha} \leq (C_{\alpha, F} \|f\|_{\alpha^*, \Omega})^{\alpha/(\alpha-1)}.$$

Нетрудно видеть, что $\|p^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*} = \|\nabla u\|_{\alpha, \Omega}^{\alpha}$ и, следовательно, $\|p^*\|_{\alpha^*, \Omega} \leq C_{\alpha, F} \|f\|_{\alpha^*, \Omega}$. Определим величину

$$S_{\alpha^*}(y^*, f) = \|y^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*-2} + C_{\alpha, F}^{\alpha^*-2} \|f\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*-2}.$$

Теперь правую часть (7.12) можно оценить так:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{r}_f(y^*) e dx &\leq C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2} y^*\|_{\alpha, \Omega} + \\ &+ \kappa_{\alpha^*} C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|y^* - p^*\|_{\alpha^*, \Omega} S_{\alpha^*}(y^*, f) \leq C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2} y^*\|_{\alpha, \Omega} + \\ &+ \frac{\beta}{\alpha^*} \|y^* - p^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*} + \frac{1}{\alpha \beta^{\alpha-1}} \kappa_{\alpha^*}^{\alpha} C_{\alpha, F}^{\alpha} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha} S_{\alpha^*}^{\alpha}(y^*, f), \end{aligned} \tag{7.14}$$

где $\beta > 0$. Используем тот факт, что для $\alpha^* > 2$ имеет место неравенство, аналогичное (7.8):

$$\int_{\Omega} \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) dx \geq c_{\alpha^*} \|y^* - p^*\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha^*}. \tag{7.15}$$

С помощью (7.14) и (7.15) получаем оценку

$$\int_{\Omega} \mathbf{r}_f(y^*) e dx \leq \Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta) + \frac{\beta}{\alpha^* c_{\alpha^*}^{\alpha}} \int_{\Omega} \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) dx, \tag{7.16}$$

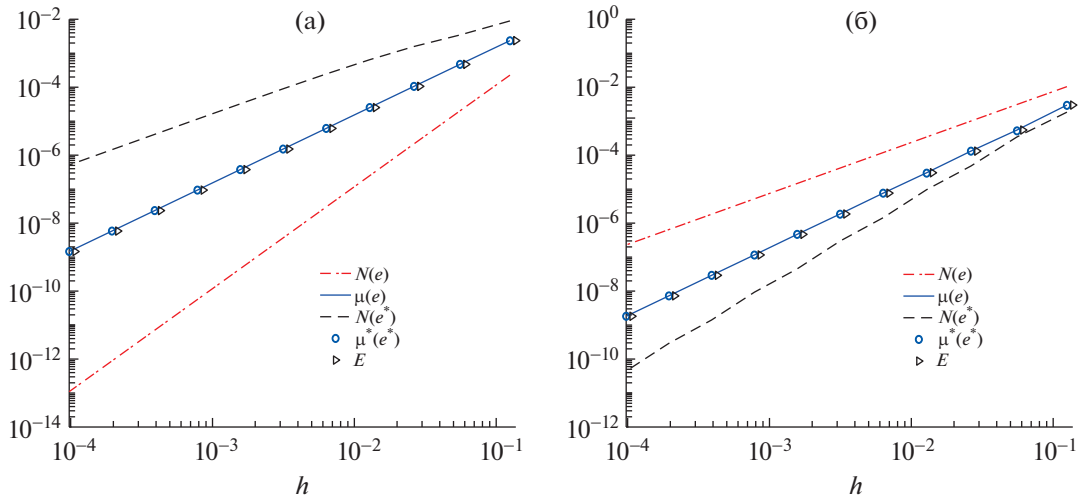
где

$$\Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta) := C_{\alpha, F} \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega} \|\nabla v - |y^*|^{\alpha^*-2} y^*\|_{\alpha, \Omega} + \frac{\kappa_{\alpha^*}^{\alpha} C_{\alpha, F}^{\alpha}}{\alpha \beta^{\alpha-1}} S_{\alpha^*}^{\alpha}(y^*, f) \|\mathbf{r}_f(y^*)\|_{\alpha^*, \Omega}^{\alpha}.$$

Из (7.6) и (7.16) следует оценка

$$\int_{\Omega} \left(\mu_{\alpha}(\nabla v, \nabla u) + \left(1 - \frac{\beta}{\alpha^* c_{\alpha^*}} \right) \mu_{\alpha^*}(y^*, p^*) \right) dx \leq \int_{\Omega} D_{\alpha}(\nabla v, y^*) dx + \Sigma_f(v, y^*, \kappa_{\alpha^*}, \alpha, \beta), \tag{7.17}$$

правая часть которой не содержит неизвестных функций и может быть вычислена по результатам математического эксперимента. Параметр β должен быть подчинен условию $\beta > \alpha^* c_{\alpha^*}$. Отметим, что структура оценки (7.17) вполне аналогична (7.11).



Фиг. 2. Сходимость интерполянта к точному решению, $\alpha = 3$ (а) и $\alpha = 1.5$ (б).

Замечание 6. Разницу в использовании мер μ_G и μ_G^* вместо норм пространств $L^\alpha(\Omega)$ и $L^{\alpha^*}(\Omega)$ иллюстрирует следующий простой пример. Пусть функция $u(x)$ является минимайзером задачи $\min_{v \in V_0} \int_0^1 \left(\frac{1}{\alpha} |u'|^\alpha - fu \right) dx$, а в качестве приближенного решения выбирается стандартный кусочно-аффинный интерполянт $v_h = \pi_h u$ на равномерной сетке с шагом h . Аппроксимация функции p^* выбирается в соответствии с (7.4), т.е. $y_h^* = |v_h'|^{\alpha-2} v_h'$.

На фиг. 2 показано, как ведут себя величины

$$N(e) = \frac{1}{\alpha} \|(v_h - u)\|^\alpha \quad \text{и} \quad N^*(e^*) = \frac{1}{\alpha^*} \|y_h^* - p^*\|^{\alpha^*}$$

и меры $\mu_G(v_h, u)$ (на фиг. 2 – сплошные линии) и $\mu_G^*(y_h^*, p^*)$ (символы \circ), когда h уменьшается и интерполянт все лучше приближает точное решение (в данном примере $u(x) = x^2(1-x)$).

При $\alpha = 3$ величина $N(e)$ (штрихпунктирная линия) сходится к нулю очень быстро. Однако малость этой величины не означает, что для соответствующей реконструкции двойственной переменной (функции y_h^*) величина $N^*(e^*)$ (штриховая линия) также мала. Напротив, эта величина сходится гораздо медленнее и может отличаться от $N(e)$ на несколько порядков. Изменение функционала (энергии) $E = J(v_h) - J(u)$ также происходит с меньшей скоростью (символы \triangleleft). Поэтому контролируя точность с помощью $N(e)$, мы можем прийти к слишком оптимистическим выводам. При $\alpha = 1.5$ ситуация обратная: $N^*(e^*)$ убывает значительно быстрее, чем $N(e)$, и существенно быстрее, чем E . В этом случае контроль точности с помощью $N^*(e^*)$ может не вполне правильно отражать ситуацию.

При этом меры $\mu_G(v_h, u)$ и $\mu_G^*(y_h^*, p^*)$ убывают с одинаковой скоростью. Более того, они убывают именно с той скоростью, с которой изменяется E , и адекватно отражают качество обоих приближенных решений v_h и y_h^* .

8. ОБОБЩЕНИЯ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Рассмотренный выше метод получения тождеств типа (3.8) переносится на уравнения параболического типа. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$u_t + \mathcal{A}(u) = f \quad \text{в} \quad Q_T := (0, T) \times \Omega, \tag{8.1}$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{на} \quad S_T := (0, T) \times \Gamma, \tag{8.2}$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \tag{8.3}$$

на конечном временном интервале $[0, T]$. Оператор \mathcal{A} определен (3.1) и соотношениями (3.2) и (3.3), которые выполняются при любом t . Введем пространства Бохнера

$$\mathbb{V}(Q_T) := L^q((0, T); V(\Omega)) \quad \text{и} \quad \mathbb{V}_0(Q_T) := L^q((0, T); V_0(\Omega)), \quad q > 1,$$

а также пространство $\mathbb{V}^*(Q_T) = L^{q'}((0, T); V^*(\Omega))$, где $q' = q/(q - 1)$. Для описания двойственной переменной используем пространство

$$\mathbb{Y}^*(Q_T) := \{y^* = L^{q'}((0, T), Y^*(\Omega)) \mid \Lambda^* y^* \in \mathbb{V}^*(Q_T)\}.$$

Умножая (8.1) на пробную функцию и используя (3.1), получаем интегральное тождество

$$\int_0^T \left(\langle u, w \rangle + ((p^*, \Lambda w)) + \langle \sigma - f, w \rangle \right) dt = 0 \quad \forall w \in \mathbb{V}_0(Q_T), \quad (8.4)$$

которое вместе с (3.2) и (3.3) определяет обобщенное решение задачи (8.1)–(8.3).

Далее мы предполагаем, что (8.4) имеет единственное решение $u \in \mathbb{V}_0(Q_T)$ и $p^* \in \mathbb{Y}^*(Q_T)$, $\sigma \in \mathbb{V}^*(Q_T)$. Функции $v(x, t)$, $y^*(x, t)$ и $\tau(x, t)$ рассматриваются как аппроксимации $u(x, t)$, $p^*(x, t)$ и $\sigma(x, t)$ соответственно. Покажем, что в этом случае имеет место тождество, являющееся обобщением того, что было установлено в теореме 2.

Теорема 3. Для функций $(v, y^*, \tau) \in \mathcal{H}(Q_T) := \mathbb{V}_0(Q_T) \times \mathbb{Y}^*(Q_T) \times \mathbb{V}^*(Q_T)$ выполняется тождество

$$\int_0^T \left(\mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma) + \langle e_t, e \rangle \right) dt = \int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \langle \mathbf{r}(y^*, \tau, v), e \rangle \right) dt, \quad (8.5)$$

где $\mathbf{r}(y^*, \tau, v) := -\Lambda^* y^* - \tau + f - v_t$, а мера определена также, как и в теореме 2.

Доказательство. Поскольку равенства (3.9) и (3.10) выполняются при любом t (это следует из соотношений (3.2), (3.3) и леммы 2), то

$$\int_0^T \mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) dt = \int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathbb{D}_G(\Lambda u, y^*) + ((p^* - y^*, \Lambda(v - u))) \right) dt \quad (8.6)$$

и

$$\int_0^T \mathbb{D}_R(v, \tau) dt = \int_0^T \left(\mathbb{D}_R(v, \sigma) + \mathbb{D}_R(u, \tau) + \langle \sigma - \tau, v - u \rangle \right) dt. \quad (8.7)$$

Выбрав в (8.4) $w = e \in \mathbb{V}_0(Q_T)$, получаем равенство

$$\int_0^T \left(((p^*, \Lambda e)) + \langle \sigma, e \rangle \right) dt = \int_0^T \langle f - u_t, e \rangle dt,$$

которое с учетом (2.3) показывает, что

$$\int_0^T \left(((p^* - y^*), \Lambda e)) + \langle \sigma - \tau, e \rangle \right) dt = \int_0^T \langle \Lambda^* y^* - \tau + f - v_t, e \rangle dt + \int_0^T \langle e_t, e \rangle dt. \quad (8.8)$$

Суммируя (8.6) и (8.7) и используя (8.8), приходим к равенству

$$\int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\Lambda v, y^*) dt + \mathbb{D}_R(v, \tau) \right) dt = \int_0^T \mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma) + \int_0^T \langle \Lambda^* y^* - \tau + f - v_t, e \rangle dt + \int_0^T \langle e_t, e \rangle dt,$$

которое эквивалентно (8.5). Теорема 3 доказана.

Теорема 3 дает самую общую формулировку тождества. Предположим, что

$$f \in \widetilde{\mathbb{V}}^*(Q_T) := L^{q'}((0, T); \mathcal{V}^*) \subset \mathbb{V}^*(Q_T)$$

и что решения обладают повышенной регуляризованностью (аналогично (3.15) в случае эллиптического уравнения):

$$\sigma, u_t \in \widetilde{V}^*(Q_T), \quad p^* \in \widetilde{V}^*(Q_T) := \{y^* \in L^{q'}((0, T), Y^*(\Omega)) \mid \Lambda^* y^* \in \widetilde{V}^*(Q_T)\},$$

где

$$\widetilde{V}^*(Q_T) := L^{q'}((0, T); V^*) \subset V^*(Q_T).$$

Вполне естественно предположить, что аппроксимации обладают такими же свойствами, как и точные решения, т.е.

$$\tau, v_t \in \widetilde{V}^*(Q_T) \quad \text{и} \quad y^* \in \widetilde{V}^*(Q_T).$$

Тогда $\langle \mathbf{r}(y^*, \tau, v), e \rangle$ можно представить в виде интеграла $\int_{\Omega} \mathbf{r}(y^*, \tau, v) e dx$, а

$$2 \int_0^T \langle e_t, e \rangle dt = 2 \int_0^T \int_{\Omega} e_t e dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \frac{d}{dt} e^2 dx dt = \int_{\Omega} (\|e(x, T)\|^2 - \|e(x, 0)\|^2) dx =: \|e\|_{\Omega}^2 \Big|_0^T.$$

Теперь тождество (8.5) можно записать так:

$$\int_0^T \mathbf{M}(v, y^*, \tau, u, p^*, \sigma) + \frac{1}{2} \|e\|_{\Omega}^2 \Big|_0^T = \int_0^T (\mathbb{D}_G(\nabla v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau) - \int_{\Omega} \mathbf{r}(y^*, \tau, v) e dx) dt. \quad (8.9)$$

Положим в (8.9) $\tau = \tau_f := \operatorname{div} y^* + f - v_t$. Тогда (8.9) переходит в тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla u, y^*) + \mathbb{D}_G(\nabla v, p^*) + \mathbb{D}_R(u, \tau_f) + \mathbb{D}_R(v, \sigma) \right) dt + \frac{1}{2} \|e\|_{\Omega}^2 \Big|_0^T &= \\ &= \int_0^T \left(c D_G(\nabla v, y^*) + \mathbb{D}_R(v, \tau_f) \right) dt, \end{aligned} \quad (8.10)$$

в котором все функции в правой части известны. Тождество (8.10) можно считать обобщением (3.16) на параболические уравнения.

Если $\rho = 0$, то $\sigma = 0$, и, рассуждая так же, как и при получении (3.17), мы полагаем $\tau = 0$ и приходим к тождеству

$$\int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla u, y^*) + \mathbb{D}_G(\nabla v, p^*) \right) dt + \frac{1}{2} \|e\|_{\Omega}^2 \Big|_0^T = \int_0^T \left(\mathbb{D}_G(\nabla v, y^*) + \int_{\Omega} (\Lambda^* y^* - f + v_t) e dx \right) dt. \quad (8.11)$$

Тождество (8.11) было ранее установлено в [30], где также изучены его некоторые следствия. Интеграл в правой части (8.11) оценивается точно так же, как и в разд. 5, что приводит к полностью вычисляемой оценке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rump S.M.* Algorithms for verified inclusions—theory and practice. In: Reliability in Computation (ed. R.E. Moore), Academic Press, New York, 1988. P. 109–126.
2. *Trefethen L.N.* Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2019.
3. *Brandts J., Krizek M., Zhang Z.* Paradoxes in numerical calculations // Neural Network World. 2016. V. 26. № 3. P. 317–330.
4. *Brezzi F., Fortin M.* Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer Ser. in Comput. Math., 15. New York, 1991.
5. *Ciarlet P.* The finite element method for elliptic problems. North-Holland, Amsterdam, 1987.
6. *Babuška I., Rheinboldt W.C.* Error estimates for adaptive finite element computations // SIAM J. Numer. Anal. 1978. V. 15. P. 736–754.
7. *Verfürth R.* A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
8. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // Int. J. Num. Meth. Engng. 1987. V. 24. P. 337–357.

9. *Repin S.* A posteriori estimates for partial differential equations. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
10. *Repin S.* Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations. In: Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society V. IX, P. 143–171, translation in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 209, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
11. *Repin S.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // *Math. Comp.* 2000. V. 69 № 230. P. 481–500.
12. *Repin S., Sauter S.* Accuracy of Mathematical Models, Tracts in Mathematics 33 Europ Math Soc, Berlin, 2020.
13. *Репин С.И.* Тождество для отклонений от точного решения задачи $\Lambda^* \mathcal{A}\Lambda u + \ell = 0$ и его следствия // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. V. 61. № 12. P. 1986–2009.
14. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. North-Holland, Amsterdam, 1976.
15. *Mikhlin S.G.* Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press, Oxford, 1964.
16. *Репин С.И.* Контроль точности приближенных решений одного класса сингулярно возмущенных краевых задач // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. V. 62. № 11. P. 1822–1839.
17. *Prager W., Synge J.L.* Approximations in elasticity based on the concept of functions space // *Quart. Appl. Math.* 1947. V. 5. P. 241–269.
18. *Braess D.* Finite elements. Cambridge Univer. Press, Cambridge, 1997.
19. *Braess D., Schöberl J.* Equilibrated residual error estimator for edge elements // *Math. Comp.* 2008. V. 77. № 262. P. 651–672.
20. *Clarkson J.A.* Uniformly convex spaces // *Transact. Am. Math. Soc.* 1936. V. 40. P. 396–414.
21. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Ленинград: Изд.-во ЛГУ, 1950.
22. *Мосолов П.П., Мясников В.П.* Механика жесткопластических сред. М.: Наука, 1981.
23. *Bildhauer M., Repin S.* Estimates from the deviation from the minimizer for variational problems with power growth functionals // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 2006. V. 336. P. 5–24.
24. *Pastukhova S.E., Khripunova A.S.* Gamma-closure of some classes of nonstandard convex integrands // *J. Math. Sci. (N.Y.).* 2011. V. 177. № 1. P. 83–108.
25. *Lindqvist P.* Notes on the p -Laplace equation. University of Jyväskylä Depart. of Math. and Statist., Rep. 161, 2017.
26. *DiBenedetto E.* Degenerate Parabolic Equations. Springer-Verlag, New York, 1993.
27. *Repin S.* A posteriori error estimates for approximate solutions of variational problems with power growth functionals // *Зап. научн. сем. ПОМИ.* 1997. V. 249. P. 244–255.
28. *Fuchs M., Repin S.* A posteriori error estimates of functional type for variational problems related to generalized Newtonian fluids // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2006. V. 29. № 18. P. 2225–2244.
29. *Пастухова С.Е.* Апостериорные оценки отклонения от точного решения в вариационных задачах с нестандартными условиями коэрцитивности и роста // *Алгебра и анализ.* 2020. V. 32. № 1. P. 51–77.
30. *Repin S.* Error identities for parabolic initial boundary value problems // *Zap. Nauchn. Sem. POMI.* 2021. V. 508. P. 147–172.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.615

ТЕОРИЯ p -РЕГУЛЯРНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ
НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ
РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ¹⁾

© 2023 г. Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, Б. Медак⁴, А. А. Третьяков^{1,3,4,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9,
Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

³ 01-447 Warsaw, Newelska, 6, System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Poland

⁴ 08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Poland

*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**e-mail: prof.tretyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 12.12.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассматривается проблема существования решения краевой задачи, непрерывно зависящего от граничных условий. Ранее такой факт был известен только для задачи Коши и является классическим в теории дифференциальных уравнений. В работе удалось обосновать аналогичную ситуацию и для краевых задач при наличии свойства p -регулярности задачи. В общем случае этот факт, вообще говоря, неверен. В данной работе доказывается несколько теорем о неявной функции в случае вырождения, что является развитием теории p -регулярности в направлении решения проблем существования решения нелинейных дифференциальных уравнений. Как иллюстрация полученных результатов, приводится пример классической краевой задачи – вырожденного уравнения Ван дер Поля и доказывается существование решения, непрерывно зависящего от граничных условий возмущенной задачи. Библи. 9.

Ключевые слова: вырожденность, p -регулярность, краевая задача, непрерывная зависимость решения, p -фактор оператор.

DOI: 10.31857/S0044466923060078, EDN: TUDVWN

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от граничных условий – сложная проблема в различных областях математики. Изучение вопроса существования решений в вырожденных задачах – типичная тема исследований, так как вырожденность тесно связана с нелинейностью (см., например, [1]). В случае вырождения характерной является ситуация, когда существует многообразие решений и поэтому построение хотя бы одного решения является существенным. Более того, важно доказать существование непрерывного решения соответствующей проблемы, а тем более построить это решение. В настоящей статье мы решаем эту проблему, используя аппарат теории p -регулярности (p -фактор анализ), описание и представление о котором можно найти, например, в [1–3]. Отметим, что в регулярном случае для исследования такого рода проблем часто используется теорема о неявной функции. В вырожденном (нерегулярном) случае классическая теорема о неявной функции не может быть применена. Результаты, полученные в данной статье, базируются на конструкциях теории p -регулярности и обобщениях теоремы о неявной функции для нерегулярных отображений, которые можно найти, например, в [2], [4], [5]. Далее мы дадим строгое определение и понятие конструкций этой теории. Главным в обосновании наших результатов является аналог теоремы Люстерника, который мы сформулируем в следующем виде.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 21-71-30005).

Теорема 1. Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M – конечномерное евклидово пространство, X, Z – банаховы пространства. Пусть отображения $f_i(x, \mu)$, $i = 1, \dots, p$, определены в (8). Предположим, что $F(x^*, \mu^*) = 0$ для всех $\bar{\mu} \in M$, $\|\bar{\mu}\| = 1$, элемент $(0, \bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$ и F – сильно p -регулярно на каждом элементе $(0, \bar{\mu})$, $\bar{\mu} \in M$, т.е.

$$\|\{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}]^{p-1}\}^{-1}\| \leq C. \tag{1}$$

(Здесь $\{\cdot\}^{-1}$ означает правый обратный оператор.)

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, где $V_\varepsilon(\mu^*)$ – окрестность μ^* , $x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$, достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu - \mu^*\|), \tag{2}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall \mu \in V_\varepsilon(\mu^*). \tag{3}$$

При доказательстве этой теоремы применим теорему Майкла о селекторе (см. [6]) в несколько модифицированной форме.

Теорема 2. Пусть X, Y – банаховы пространства, $A \in L(X, Y)$ и $A : X \xrightarrow{on} Y$. Тогда существует непрерывное отображение $M : Y \rightarrow X$ такое, что $AM(y) = y$ и $\|M(y)\| \leq c\|y\|$, где $c > 0$ – константа, независимая от y .

В качестве иллюстрации наших результатов рассмотрим краевую задачу вырожденного нелинейного уравнения Ван дер Поля $\ddot{x} + \sigma(x^2 - 1)\dot{x} + x + x^p = 0$, $x(0) = v$, $x(2\pi) = 0$, где $\sigma = 0$ или

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho, \tag{4}$$

где v и ρ – малые параметры из $U(v^*, \rho^*) = U(0, 0)$, $v^* = 0, \rho^* = 0, p = 2$. Покажем, что для любых h_v, h_ρ таких, что $h_v \neq h_\rho$, отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [0, h_v, h_\rho]$. Таким образом, исходя из теоремы 1, можно заключить, что существует непрерывное решение (4), зависящее от параметров $\mu = (v, \rho)$ для $h_v \neq h_\rho$, при этом для $h_v = h_\rho$ отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [\sin t, h_v, h_\rho]$. Отсюда следует, что, исходя из нашей теоремы, непрерывное решение уравнения (4), зависящее от параметра μ , существует для всех достаточно малых μ .

1. ОБОБЩЕННАЯ p -ФАКТОР ТЕОРЕМА ЛЮСТЕРНИКА И ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p -ГО ПОРЯДКА

Аппарат p -регулярности является важным инструментом исследования нелинейных задач. В данном разделе будут представлены некоторые определения, обозначения и теоремы теории p -регулярности, которые будут использованы ниже (см. [1–5], [7]).

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x, \mu) = 0, \tag{5}$$

где отображение $F : X \times M \rightarrow Z$, а X, M и Z являются банаховыми пространствами.

Предположим, что в некоторой точке $(x^*, \mu^*) \in X \times M$, $\text{Im } F'(x^*, \mu^*) \neq Z$. Пусть

$$Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p, \tag{6}$$

где $Z_1 = \text{cl}(\text{Im } F'(x^*, \mu^*))$ и $W_1 = Z$. В качестве W_2 берем замкнутое дополнение к Z_1 в Z . Пусть $P_{W_2} : Z \rightarrow W_2$ – проектор на W_2 вдоль Z_1 . Определим Z_2 как замыкание линейной оболочки образа квадратичного отображения $P_{W_2} F''(x^*, \mu^*)[\cdot, \cdot]^2$. Далее, индуктивно,

$$Z_i = \text{cl}(\text{span } \text{Im } P_{W_i} F^{(i)}(x^*, \mu^*)[\cdot, \cdot]^i) \subseteq W_i, \quad i = 2, \dots, p-1, \tag{7}$$

где W_i – замкнутое дополнение к $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$, до пространства Z и $P_{W_i} : Z \rightarrow W_i$ проектор на W_i вдоль $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, \dots, p$. Наконец, $Z_p = W_p$. Порядок p – это минимальное число (если оно существует), для которого выполняется представление (6). Далее обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$ для любого отображения φ .

Определим следующее отображение:

$$f_i : U \subset X \times M \rightarrow Z_i, \quad f_i(x, \mu) = P_{Z_i} F(x, \mu), \quad i = 1, \dots, p, \tag{8}$$

где $P_{Z_i} : Z \rightarrow Z_i$ – оператор проектирования на Z_i вдоль $Z_1 \oplus \dots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \dots \oplus Z_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x, \mu) = f_1(x, \mu) + \dots + f_p(x, \mu) \tag{9}$$

или

$$F(x, \mu) = (f_1(x, \mu), \dots, f_p(x, \mu)). \tag{10}$$

Пусть $h = [h_x, h_\mu]$, $h_x \in X$, $h_\mu \in M$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : X \times M \rightarrow Z$, определенный как

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[h] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1} \tag{11}$$

и такой, что

$$\Psi_p(h)[x, \mu] = f_1'(x^*, \mu^*)[x, \mu] + f_2''(x^*, \mu^*)[h][x, \mu] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}[x, \mu] \tag{12}$$

называется p -фактор оператором.

Определение 2. Будем говорить, что F абсолютно вырождено на (x^*, μ^*) до порядка p , если $F^{(i)}(x^*, \mu^*) = 0$, $i = 1, \dots, p - 1$.

Замечание 1. В случае абсолютной вырожденности p -фактор оператор сводится к

$$F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}.$$

Замечание 2. Для каждого отображения f_i , имеем (см. [1], с. 145)

$$f_i^{(k)}(x^*, \mu^*) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, i - 1, \quad \forall i = 1, \dots, p. \tag{13}$$

Замечание 3. Каждое отображение $f_i^{(k)}(x^*, \mu^*)$ будет абсолютно вырождено и

$$f_i^{(i)}(x^*, \mu^*)[h]^{i-1} = P_{Z_i} F^{(i)}(x^*, \mu^*)[h]^{i-1}, \quad i = 1, \dots, p. \tag{14}$$

Это означает, что f_i является i -фактор оператором, соответствующим абсолютно вырожденному отображению f_i до порядка i . Поэтому общий случай вырожденности F может быть сведен к изучению абсолютной вырожденности отображений f_i , $i = 1, \dots, p$, и их композиций.

Определение 3. p -ядро оператора $\Psi_p(h)$ есть множество

$$H_p(x^*, \mu^*) = \text{Ker}^p \Psi_p(h) = \{h \in X \times M : f_1'(x^*, \mu^*)[h] + f_2''(x^*, \mu^*)[h]^2 + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Отметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\text{Ker}^p \Psi_p(h) = \left\{ \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}^i f_i^{(i)}(x^*, \mu^*) \right\},$$

p -ядро оператора $F^{(p)}(x^*, \mu^*)$, в случае абсолютной вырожденности есть множество

$$\text{Ker}^p F^{(p)}(x^*, \mu^*) = \{h \in X \times M : F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется p -регулярным в точке (x^*, μ^*) на h ($p > 1$), если $\text{Im } \Psi_p(h) = Z$ (т.е. оператор $\Psi_p(h)$ сюръективен).

Определение 5. Отображение F называется p -регулярным в точке (x^*, μ^*) ($p > 1$), если либо оно является p -регулярным вдоль каждого $h \in H_p(x^*, \mu^*) \setminus \{0\}$, либо $H_p(x^*, \mu^*) = \{0\}$.

Определение 6. Пусть $F : X \times M \rightarrow Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p$. Отображение $F(x, \mu)$ называется сильно p -регулярным в точке (x^*, μ^*) , если существуют $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{h \in H_\gamma} \|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| \leq c < \infty,$$

где

$$H_\gamma = \{h = (h_x, h_\mu) \in X \times M : \|f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[h]^k\|_{Z_k} \leq \gamma, \forall k = 1, \dots, p, \|h\|_{X \times M} = 1\}.$$

Определим множество решений для отображения F как множество

$$S = S(x^*, \mu^*) = \{x \in X \times M : F(x, \mu) = F(x^*, \mu^*) = 0\} \tag{15}$$

и пусть $T_{(x^*, \mu^*)}S$ обозначает касательный конус к множеству S в точке (x^*, μ^*) , т.е.

$$T_{(x^*, \mu^*)}S = \{h \in X \times M : (x^*, \mu^*) + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in S, \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon), \varepsilon \in [0, \delta], \delta > 0\}. \tag{16}$$

Следующие теоремы описывают касательный конус к множеству решений уравнения (5) в случае p -регулярности.

Теорема 3. Пусть X, M и Z – банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p -регулярным на $(x^*, \mu^*) \in X \times M$ вдоль h . Тогда $h \in T_{(x^*, \mu^*)}S$.

Теорема 4 (обобщенная теорема Люстерника, [1]). Пусть X, M и Z – банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p -регулярным на $(x^*, \mu^*) \in X \times M$. Тогда

$$T_{(x^*, \mu^*)}S = H_p(x^*, \mu^*). \tag{17}$$

При доказательстве теоремы 1, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. Пусть $F : X \times M \rightarrow Z$, где X, M, Z – банаховы пространства, $z = z_1 + \dots + z_p, z_i \in Z_i, i = 1, \dots, p, \|h\| = 1$ и

$$\|\{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[h] + \dots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1}\}^{-1}\| = C < \infty.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \|\{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[th] + \dots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[th]^{p-1}\}^{-1}(z_1 + \dots + z_p)\| \leq \\ & \leq C \left(\frac{1}{\alpha_1} \|z_1\| + \frac{1}{\alpha_2 t} \|z_2\| + \dots + \frac{1}{\alpha_p t^{p-1}} \|z_p\| \right), \end{aligned}$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, i = 1, \dots, p, t \neq 0$.

Следующая лемма будет иметь важное значение для исследования суръективности p -фактор оператора в нашем примере.

Лемма 2. Предположим, что $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1, Y_2 – замкнутые подпространства в $Y, A, B \in \mathcal{L}(X, Y), \text{Im } A = Y_1$. Пусть также P_2 является проекцией на Y_2 вдоль Y_1 . Тогда $(A + P_2 B)X = Y \Leftrightarrow (P_2 B) \text{Ker } A = Y_2$.

Эта лемма является следствием следующей леммы.

Лемма 3. *Предположим, что $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1, Y_2 – замкнутые подпространства в Y , $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A_1 X \subset Y_1$, $A_2 X \subset Y_2$. Тогда $(A_1 + A_2)X = Y$, если $A_1 \text{ Ker } A_2 = Y_1$ и $A_2 \text{ Ker } A_1 = Y_2$.*

Доказательство очевидно. Лемма 2 следует из леммы 3, если положить $A_1 = A$ и $A_2 = P_2 B$.

Некоторые обобщения теоремы о неявной функции на теорему о неявной функции p -порядка для нерегулярных отображений и теорему о неявной функции p -порядка для нетривиального ядра можно найти в [8].

При доказательстве теоремы 1 используется теорема о многозначном сжимающем отображении (см. [9]).

2. НЕКОТОРОЕ ОБОЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЮСТЕРНИКА О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ

В этом разделе мы докажем теорему 1, которая является аналогом и обобщением теоремы Люстерника о касательном конусе, и в которой говорится о существовании непрерывного решения уравнения $F(x, \mu) = 0$.

Замечание 4. Элемент $\mu - \mu^*$ играет роль $\bar{\mu}$ в теореме 1.

Доказательство (теоремы 1). Любой элемент $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$ можно представить как $\mu^* + t\bar{\mu}$, где $t \in [0, \delta]$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Отсюда необходимо найти решение уравнения

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0,$$

где $\tilde{\mu} \in V_\varepsilon(0)$, $\bar{\mu} \in M$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : C(V_\varepsilon(0)) \times V_\varepsilon(0) \rightarrow 2^{X \times M}$, определяемое по формуле

$$\Phi(x, \tilde{\mu}) = (x, \tilde{\mu}) - \{\Psi_p(h)\}^{-1} F(x^* + x, \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}), \tag{18}$$

где

$$h = (0, t\bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$$

и p -фактор оператор $\Psi_p(h) : X \times M \rightarrow Z$ представлен в форме

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[h] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}.$$

Отметим, что обратный оператор многозначного отображения имеет вид

$$\{\Psi_p(h)\}^{-1}(z) = \{[\xi, \eta] \in X \times M : f_1'(x^*, \mu^*)[\xi, \eta] + f_2''(x^*, \mu^*)[h][\xi, \eta] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}[\xi, \eta] = z\},$$

где $z = z_1 + \dots + z_p$ или $z = (z_1, \dots, z_p)$, $z_i \in Z_i$, $i = 1, \dots, p$.

“Норма” этого оператора:

$$\|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\| = \sup_{\|z\|=1} \inf \{\|(x, \mu)\| : \Psi_p(h)[x, \mu] = z\}.$$

Покажем, что существует элемент $(x, \tilde{\mu})$ такой, что

$$\|(x, \tilde{\mu})\| = \|x\| + \|\tilde{\mu}\| = o\|(t\bar{\mu})\|$$

и $(x, \tilde{\mu}) \in \Phi(x, \tilde{\mu})$, т.е. $(x, \tilde{\mu})$ – неподвижная точка отображения Φ . Тогда

$$(0, 0) \in \{-\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получим

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0$$

и $\|(x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\| = o(t)$.

Сначала, докажем, что

$$\text{dist}((0, 0), \Phi(0, 0)) = \|\Phi(0, 0)\| \leq ct^2 = O(t^2) = o(t).$$

Имеем

$$\Phi(0, 0) = -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1}F(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}),$$

$$\Phi(0, 0) = -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1}(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + \dots + f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))$$

и

$$\|\Phi(0, 0)\| = \left\| -\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1}(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) + \dots + f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})) \right\|.$$

По лемме 1 получаем

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq \|c(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))\| + \frac{c}{t}\|f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| + \dots + \frac{c}{t^{p-1}}\|f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\|. \quad (19)$$

Применив формулу Тейлора к выражениям $f_i(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})$ при $i = 1, \dots, p$, получаем

$$\begin{aligned} \|\Phi(0, 0)\| &\leq c \left\| f_1(x^*, \mu^*) + f_1'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + O_Z(t^2) \right\| + \\ &+ \frac{c}{t} \left\| f_2(x^*, \mu^*) + f_2'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + \frac{1}{2!} f_2''(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}]^2 + O_Z(t^3) \right\| + \dots \\ &\dots + \frac{c}{t^{p-1}} \left\| f_p(x^*, \mu^*) + f_p'(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}] + \dots + \frac{1}{p!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[t \cdot 0, t\bar{\mu}]^p + O_Z(t^{p+1}) \right\|. \end{aligned}$$

Поэтому, исходя из соотношений (13), можно оценить

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq ct^2 + \frac{c}{t}t^3 + \dots + \frac{c}{t^{p-1}}t^{p+1} = pct^2 \quad (20)$$

и

$$\|\Phi(0, 0)\| = O(t^2) = o(t). \quad (21)$$

Теперь покажем, что для любого $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in V_{O(t^2)}(0, 0)$, справедлива следующая оценка:

$$\text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) \leq \theta \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|, \quad (22)$$

где $0 < \theta < 1$.

Сначала заметим, что

$$\Psi_p(th)\Phi(x_1, \mu_1) = \Psi_p(th)(x_1, \mu_1) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) \quad (23)$$

и

$$\Psi_p(th)\Phi(x_2, \mu_2) = \Psi_p(th)(x_2, \mu_2) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)). \quad (24)$$

Пусть $(z_1, \xi_1) \in \Phi(x_1, \mu_1)$, $(z_2, \xi_2) \in \Phi(x_2, \mu_2)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) &= \inf\{\|(z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)\| : (z_i, \xi_i) \in \Phi(x_i, \mu_i), i = 1, 2\} = \\ &= \inf\{\|(z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)\| : \Psi_p(th)((z_1, \xi_1) - (z_2, \xi_2)) = \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \\ &- [F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))]\} = \inf\{\|(z, \xi)\| : \Psi_p(th)(z, \xi) = \\ &= \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - [F((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - F((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))]\} = \\ &= \inf\left\{ \|(z, \xi)\| : \Psi_p(th)(z, \xi) = \Psi_p(th)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\sum_{i=1}^p (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] = \\
 = & \inf \left\{ \left\| \left\{ \Psi_p(th) \right\}^{-1} \left[f_1'(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) + \sum_{i=2}^p f_i^{(i)}(x^*, \mu^*) [th]^{i-1} ((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \left[\sum_{i=1}^p (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] \right] \right\| \right\} = \\
 = & \inf \left\{ \left\| \left\{ \Psi_p(th) \right\}^{-1} \left[f_1'(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - (f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] + \sum_{i=2}^p \left[f_i^{(i)}(x^*, \mu^*) [th]^{i-1} ((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - (f_i((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2))) \right] \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

По лемме 1, получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
 \text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) & \leq c \|f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
 - f_1'(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| & + \frac{c}{t} \|f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
 - f_2'[th](x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| & + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_p((x^*, \mu^*) + \\
 + th + (x_2, \mu_2)) - f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\| & = A_1 + A_2 + \dots + A_p,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 & = c \|f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_1((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - f_1'(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|, \\
 A_2 & = \frac{c}{t} \|f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_2((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - f_2'[th](x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|, \\
 & \vdots \\
 A_p & = \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_1, \mu_1)) - f_p((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2)) - \\
 & \quad - f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*, \mu^*)((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))\|.
 \end{aligned}$$

К компоненте A_1 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_1'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$. Получаем

$$\begin{aligned}
 A_1 & \leq c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_1'((x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))) - f_1'(x^*, \mu^*)\| \times \\
 & \times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_1'(x^*, \mu^*) + O_Z(t) - f_1'(x^*, \mu^*)\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \\
 & = c \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|O_Z(t)\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| \leq cc_1 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = k_1 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,
 \end{aligned}$$

где $k_1 M_1$. Положим $\theta_1 = k_1 t$, где $t \in (0, \delta)$, δ достаточно мало и тогда

$$A_1 \leq \theta_1 \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

К компоненте A_2 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_2'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$. Получаем

$$A_2 \leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] - f_2''(x^*, \mu^*)[th]\| \times \\ \times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + \\ + O_Z(t^2) - f_2''(x^*)[th]\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[th] + \\ + f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + O_Z(t^2) - f_2''(x^*, \mu^*)[th]\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

Поскольку $f_2'(x^*, \mu^*) = 0$ (см. (13)), получаем

$$A_2 \leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \|f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + O_Z(t^2)\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

следовательно,

$$A_2 \leq \frac{c}{t} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} (\|f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]\| + \|O_Z(t^2)\|) \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

И, наконец, принимая во внимание, что порядок выражения $f_2''(x^*, \mu^*)[(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$ есть t^2 , порядок выражения $O_Z(t^2)$ есть t^2 и свойства нормы, заключаем, что

$$A_2 \leq \frac{c}{t} (d_1 t^2 + d_2 t^2) \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| \leq 2k_2 t \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

где $k_2 = \max\{cd_1, cd_2\}$. Можно положить $\theta_2 = 2k_2 t$, и тогда

$$A_2 \leq \theta_2 \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|,$$

где $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, достаточно мало.

Аналогично, оценим теперь компоненту A_p , используя теорему о среднем значении и разложении выражения $f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]$ по формуле Тейлора.

Итак, отметим, что

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} \right\| \times \quad (25) \\ \times \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\|.$$

По формуле Тейлора получаем:

$$f_p'[(x^*, \mu^*) + th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] = f_p'(x^*, \mu^*) + f_p''(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \\ + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + \dots + \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]^{p-1} + O_Z(t^p).$$

Согласно (13), отображение $f_p^{(i)}(x^*, \mu^*) = 0$, $i = 1, 2, \dots, p-1$. Поэтому

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th + (x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))]^{p-1} + O_Z(t^p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} \right\| \|(x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2)\| = \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[th]^{p-1} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + \\
 & + O_Z(t^p) - \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-1} \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|,
 \end{aligned}$$

т.е.

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} \left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] + O_Z(t^p) \right\| \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|.$$

Согласно свойствам нормы, получаем

$$\begin{aligned}
 A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} \sup_{\bar{\theta} \in [0,1]} & \left(\left\| \frac{1}{(p-1)!} f_p^{(p)}(x^*, \mu^*) [th]^{p-2} [(x_2, \mu_2) + \bar{\theta}((x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2))] \right\| + \left\| O_Z(t^p) \right\| \right) \times \\
 & \times \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|.
 \end{aligned}$$

Поскольку $(x_1, \mu_1), (x_2, \mu_2) \in V_{O(t^2)}(0, 0)$, то

$$A_p \leq \frac{c}{t^{p-1}} (\bar{d}_1 t^{p-2+2} + \bar{d}_2 t^p) \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\| \leq 2k_p t \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\| = \theta_p \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|,$$

где $k_2 = \max\{c\bar{d}_1, c\bar{d}_2\}$, $t \in (0, \delta)$, $\delta > 0$, достаточно мало и $\theta_p = 2k_p t$.

Подставляя $\theta = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_p = \bar{c}t$, $\bar{c} > 0$, получаем

$$\text{dist}_H(\Phi(x_1, \mu_1), \Phi(x_2, \mu_2)) \leq \theta \left\| (x_1, \mu_1) - (x_2, \mu_2) \right\|, \tag{26}$$

и $0 < \theta < 1$.

Покажем, что согласно принципу многозначных сжимающих отображений, будет

$$\varrho((0, 0), \Phi(0, 0)) = \left\| \Phi(0, 0) \right\| < (1 - \theta)\varepsilon,$$

где $\theta = \bar{c}t$, $\varepsilon = 4pct^2$, для t достаточно малых.

Можно положить $0 < \theta = \bar{c}t < \frac{1}{2}$. Это неравенство эквивалентно $1 < 2(1 - \bar{c}t)$. Отсюда и из неравенства $\left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq pct^2$, получаем

$$\left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq pct^2 \leq 2p(1 - \bar{c}t)ct^2 < (1 - \bar{c}t)4pct^2 = (1 - \theta)\varepsilon,$$

что и следовало доказать.

Таким образом, мы доказали, что отображение Φ является сжимающим на множестве $V((0, 0), ct^2)$. Из принципа многозначных сжимающих отображений следует, что для $(z_0, \mu_0) = (0, 0)$ существует элемент $(x, \tilde{\mu})$ такой, что

$$\left\| (x, \tilde{\mu}) \right\| \leq \frac{2}{1 - \theta} \left\| \Phi(0, 0) \right\| \leq ct^2, \tag{27}$$

т.е. $\left\| (x, \tilde{\mu}) \right\| = o(t)$ и $(x, \tilde{\mu}) \in \Phi(x, \tilde{\mu})$. Отсюда $(x, \tilde{\mu})$ – неподвижная точка отображения Φ . Тогда

$$(0, 0) \in \{-\{\Psi_p(0, t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получаем

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0 \tag{28}$$

и $\left\| (x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) \right\| = o(t)$.

Итак, было показано, что для параметра $\mu^* + t\bar{\mu}$ имеется решение $(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))$ уравнения $F(x, \mu) = 0$, т.е.

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0.$$

Теперь, без ограничения общности, можно предположить, что множество M совпадает с \mathbb{R}^2 . Тогда, для любого достаточно малого элемента μ из \mathbb{R}^2 существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что

$$\|\bar{\mu}(\mu) - \mu\| = o(\mu) \tag{29}$$

и, как было показано выше,

$$F(x^* + x(\bar{\mu}(\mu)), \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\bar{\mu}(\mu))) = 0. \tag{30}$$

Отметим важный момент. Вернемся к μ . Согласно допущению, мы полагаем $\mu = \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \tilde{\mu}(\bar{\mu}(\mu))$ и, обозначив $x^* + x(\bar{\mu}(\mu))$ через $x(\mu)$, получаем уравнение

$$F(x(\mu), \mu) = 0. \tag{31}$$

Данное равенство выполняется, поскольку мы взяли любой $\bar{\mu}$ из \mathbb{R}^2 и доказали, что (28) выполняется для любого $\bar{\mu}$. Следовательно, исходя из вышесказанного, для любого μ из \mathbb{R}^2 существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что сжимающий процесс начинается в точке $(0, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))$, генерирует решение (30) и в конце концов (31).

На этом закончим первую часть доказательства (мы доказали существование решения).

Пусть U – достаточно малая окрестность (x^*, μ^*) .

Возьмем $\mu^* + t\bar{\mu}$, где $t > 0$ достаточно мало, и положим

$$h = \frac{(0, t\bar{\mu})}{\|t\bar{\mu}\|} = (0, \bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*),$$

где $\|\bar{\mu}\| = 1$. Тогда для любого $k \leq p$

$$f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}]^k = 0, \quad k = 1, \dots, p.$$

Мы показали, что в уравнении (19)

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq \|c(f_1(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}))\| + \frac{c}{t} \|f_2(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| + \dots + \frac{c}{t^{p-1}} \|f_p(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\| \tag{32}$$

или

$$\|\Phi(0, 0)\| \leq c \sum_{k=1}^p \left\| \frac{f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})}{t^{k-1}} \right\|. \tag{33}$$

Для $\mu^* + t\bar{\mu}$ имеем

$$\|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| \leq \|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*, t\bar{\mu}\| \leq C \|\Phi(0, 0)\|. \tag{34}$$

Отметим, что выполняется следующее неравенство:

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\| \leq C_k \|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{1/k} \|(0, t\bar{\mu})\|^{k-1} \tag{35}$$

или

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{k-1} \leq C_k^k \|(0, t\bar{\mu})\|^{k(k-1)}. \tag{36}$$

Это верно, поскольку из разложения по формуле Тейлора и соотношения (13), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| f_k(x^*, \mu^*) + f_k'(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}] + \dots + \frac{1}{(k-1)!} f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}]^k + O(t^{k+1}) - f_k(x^*, \mu^*) \right\|^{k-1} = \\ & = \left\| \frac{1}{(k-1)!} f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\bar{\mu}]^k + O(t^{k+1}) \right\|^{k-1} \leq C t^{k(k-1)} = C \|(0, t\bar{\mu})\|^{k(k-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (35) выполнено.

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| &\leq C \|\Phi(0, 0)\| \leq Cc \sum_{k=1}^p \left\| \frac{f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})}{t^{k-1}} \right\| \leq \\ &\leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \frac{\|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{1/k}}{\|t^{k-1}\|} \|(0, t\bar{\mu})\|^{k-1} \end{aligned}$$

или

$$\|x(\mu^* + t\bar{\mu}) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + t\bar{\mu})\|^{1/k}, \tag{37}$$

так как $f_k(x^*, \mu^*) = 0$.

Затем, из (37) для любого достаточно малого μ существует $\bar{\mu}(\mu)$ такое, что

$$\|x(\mu^* + \bar{\mu}(\mu)) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k}.$$

Отсюда получаем

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k} \leq \bar{C} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \check{\mu}(\mu))\|^{1/k} = \bar{\bar{C}} \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|^{1/k},$$

где

$$\mu = \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \check{\mu}(\mu). \tag{38}$$

Мы воспользовались тем фактом, что

$$\|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\| \leq 2 \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu) + \check{\mu}(\mu))\| = 2 \|f_k(x^*, \mu)\|, \tag{39}$$

поскольку

$$\|\check{\mu}(\mu)\| = o\left(\sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu^* + \bar{\mu}(\mu))\|^{1/k}\right),$$

где μ – достаточно мало.

Таким образом, мы доказали, что (3) выполнено. Из этого следует, что (2) верно для $\omega(\mu) = x(\mu) - x^*$ и $\|\omega(\mu)\| = o(\mu - \mu^*)$.

Последний этап доказательства, а именно непрерывность $x(\mu)$, следует из модифицированной формы теоремы Майкла о селекторе теоремы 2. Следовательно, многозначное отображение $\Phi : C(V_\epsilon(0)) \times V_\epsilon(0) \rightarrow 2^{X \times M}$, определенное в (18) по формуле

$$\Phi(x, \check{\mu}) = (x, \check{\mu}) - \{\Psi_p(h)\}^{-1} F(x^* + x, \mu^* + t\bar{\mu} + \check{\mu}),$$

дает непрерывный селектор, т.е. можно выбрать непрерывное решение $(x(t\bar{\mu}), \check{\mu}(t\bar{\mu}))$ отображения F . Из непрерывности функции $x(t\bar{\mu})$ следует непрерывность функции $x(\mu)$.

На этом доказательство теоремы заканчивается.

Замечание 5. Если предположить, что пространства $X \times M$ и Z конечномерны, то можно доказать существование непрерывной функции $x(\mu)$, рассмотрев следующий сжимающий процесс:

$$(x_{k+1}, \check{\mu}_{k+1}) = (x_k, \check{\mu}_k) - \{\Psi_p(h)\}_R^{-1} F(x^* + x_k, \mu^* + t\bar{\mu} + \check{\mu}_k), \tag{40}$$

где $\{\Psi_p(h)\}_R^{-1} z = (x_z, \mu_z)$ – правый обратный оператор и

$$\|(x_z, \mu_z)\| = \min_{\Psi_p(h)(x, \mu) = z} \|(x, \mu)\|. \tag{41}$$

Такой процесс будет сходиться к непрерывному отображению $x(t\bar{\mu})$.

Аналогично, можно доказать две следующие теоремы.

Теорема 5 (теорема о неявной функции для нетривиального ядра). Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M – конечномерное пространство, X, Z – банаховы пространства. Предположим, что $F(x^*, \mu^*) = 0$ и $\forall \bar{\mu} \in M, \|\bar{\mu}\| = 1; (0, \bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)$, т.е.

$$\|\{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[0, \bar{\mu}]^{p-1}\}^{-1}\| \leq C. \tag{42}$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu), \mu \in V_\varepsilon(\mu^*), x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*)), \varepsilon > 0$, достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu - \mu^*\|), \tag{43}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^*, \mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall \mu \in V_\varepsilon(\mu^*). \tag{44}$$

Теорема 6. Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \rightarrow Z$, где M – конечномерное пространство, X, Z – банаховы пространства. Пусть для $h_\mu \neq 0, h_\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$ существует $\bar{h}_x \in X, \|\bar{h}_x\| \leq c < \infty$ такое, что F является p -регулярным вдоль $\bar{h} = [\bar{h}_x, \bar{h}_\mu]$, т.е.

$$\begin{aligned} \|\{f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[\bar{h}] + \dots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[\bar{h}]^{p-1}\}^{-1}\| \leq C, \\ \bar{h} \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*), \quad \bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}. \end{aligned} \tag{45}$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu), \mu \in V_\varepsilon(\mu^*), x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*)), \varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что $F(x(\mu), \mu) = 0$ и

$$\mu = \mu^* + h_\mu, \quad x(\mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu\|), \|c(\mu)\| = \|\mu\|, \tag{46}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \leq C \sum_{k=1}^p \|f_k(x^* + h_x, \mu)\|_{Z_k}^{1/k}. \tag{47}$$

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Вернемся к нашему примеру и покажем, что отображение $F(\cdot)$ будет p -регулярным в решении $x^*(\cdot) = 0$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $p = 2$, так как случай $p > 2$ рассматривается аналогично.

Примем во внимание уравнение

$$\ddot{x} = f(x, v, \rho), \quad f : C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow C[0, 2\pi], \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho, \tag{48}$$

или

$$F(x, v, \rho) = \ddot{x} - f(x, v, \rho) = 0, \quad x(0) = v, \quad x(2\pi) = \rho,$$

с граничными условиями, где $\mu \triangleq (v, \rho)$, v и ρ – малые параметры из $U(v^*, \rho^*) = U(0, 0), v^* = 0, \rho^* = 0$.

Если отображение $x(t, v, \rho)$ невырожденно в точке решения $x^* = x(t, 0, 0)$ (в дальнейшем будем рассматривать именно такие отображения), то из теоремы о неявной функции следует, что для достаточно малого (v, ρ) существует Δ_v, Δ_ρ и функция x_μ такие, что

$$x_\mu(0 + \Delta_v) = 0, \quad x_\mu(2\pi + \Delta_\rho) = 0, \quad x_\mu(0) = v, \quad x_\mu(2\pi) = \rho, \tag{49}$$

и

$$c_1(|v| + |\rho|) \leq |\Delta_v| + |\Delta_\rho| \leq c_2(|v| + |\rho|). \tag{50}$$

В этом случае можно преобразовать (48) к виду

$$\ddot{x} = f(x, v, \rho), \quad x(\Delta_v) = 0, \quad x(2\pi + \Delta_\rho) = 0 \tag{51}$$

и, подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v, \quad (52)$$

получим задачу (51) в форме

$$\bar{F}(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = 0, \quad (53)$$

где $\bar{F} : X \rightarrow C[0, 2\pi]$, $X = \{C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \mid \bar{x}(0) = 0, \bar{x}(2\pi) = 0\}$ и

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v\right).$$

Отображение \bar{F} будем называть *канонической формой* отображения F .

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = \nu, \quad x(2\pi) = \rho, \quad (54)$$

где ν и ρ – малые параметры из $U(\nu^*, \rho^*) = U(0, 0)$, $\nu^* = 0$, $\rho^* = 0$.

Подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v, \quad (55)$$

получаем следующее уравнение:

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_p - \Delta_v} \bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (56)$$

где

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}(2\pi + \Delta_p - \Delta_v)\tau + \Delta_v\right). \quad (57)$$

С учетом вышесказанного, рассмотрим следующую задачу, эквивалентную (48):

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_p - \Delta_v} \bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (58)$$

Пусть

$$\bar{F}(\bar{x}(\tau), \Delta_v, \Delta_p) = \bar{x}'' + \left(1 + \frac{\Delta_p}{2\pi} - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right)(\bar{x} + \bar{x}^2) = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \quad (59)$$

является канонической формой уравнения (54). Тогда

$$\bar{F}'(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{\Delta_p}{2\pi} - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right)(1 + 2\bar{x}), -\frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2), \frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2) \right], \quad (60)$$

$$\bar{F}'(0, 0, 0) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + 1, 0, 0 \right]. \quad (61)$$

Определим ядро первой производной отображения \bar{F} по переменной \bar{x}

$$\text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \{\bar{x} : \bar{x}'' + \bar{x} = 0, \bar{x}(0) = \bar{x}(2\pi) = 0\}. \quad (62)$$

Отсюда $\bar{x}(\tau) = c_1 \cos \tau + c_2 \sin \tau$. С учетом граничных условий получаем $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin \tau\}. \quad (63)$$

Оценим вторую производную отображения \bar{F}

$$\bar{F}''(\bar{x}, \Delta_v, \Delta_p) = \begin{bmatrix} 2\left(1 + \Delta_p - \frac{\Delta_v}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) \\ -\frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi}(1 + 2\bar{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (64)$$

$$\bar{F}''(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{2\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Отметим, что

$$\bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2\pi} & \frac{1}{2\pi} \\ -\frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{\bar{x}} \\ h_v \\ h_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2h_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi}h_v + \frac{1}{2\pi}h_p \\ -\frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \\ \frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \end{bmatrix}, \quad (66)$$

$$\bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p]^2 = 2h_{\bar{x}}^2 - \frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_v + \frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_p. \quad (67)$$

Введя скалярное произведение в виде

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \int_0^{2\pi} z_1(\tau)z_2(\tau)d\tau \quad \forall z_1, z_2 \in Z = C[0, 2\pi], \quad (68)$$

мы опишем пространство $Z_1 = \text{Im } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$ такое, что $Z = Z_1 \oplus W_2$, $W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$.

Отсюда имеем

$$Z_1 = \text{Im } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \left\{ z \in C[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} z(\tau) \sin \tau d\tau \right\}. \quad (69)$$

Легко показать, что проекция на W_2 имеет форму

$$P_{W_2}z = \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} z(\tau) \sin \tau d\tau. \quad (70)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} Z_2 &= \text{span}(\text{Im } P_{W_2} \bar{F}''(0, 0, 0)[\cdot]^2) = \\ &= \text{span} \left\{ z \in Z : z(t) = \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \bar{F}''(0, 0, 0)[\cdot]^2 \sin \tau d\tau \right\} = \text{span}\{\sin t\} = W_2, \end{aligned} \quad (71)$$

т.е. $P_{W_2} = P_{Z_2}$.

Определим 2-фактор оператор

$$\begin{aligned} \forall \bar{h} = [h_{\bar{x}}, h_v, h_p] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Psi_2(h)[\bar{h}] &= \Psi_2((0, 0, 0), [h_{\bar{x}}, h_v, h_p])[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \\ &= (\bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) + P_{Z_2} \bar{F}''(0, 0, 0)[h_{\bar{x}}, h_v, h_p])[h_{\bar{x}}, h_v, h_p] = \frac{d^2 h_{\bar{x}}}{dt^2} + h_{\bar{x}} + \end{aligned} \quad (72)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(2h_{\bar{x}}\bar{h}_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{v}}\bar{h}_{\bar{x}} + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}}\bar{h}_{\bar{x}} - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{x}}\bar{h}_{\bar{v}} + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{x}}\bar{h}_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau$$

и 2-ядро 2-фактор оператора $\Psi_2(h)$

$$\begin{aligned} \text{Ker}^2 \Psi_2(h) = & \left\{ h = [h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \Psi_2((0, 0, 0), [h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}])[h_{\bar{x}}, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = \right. \\ & \left. = \frac{d^2 h_{\bar{x}}}{dt^2} + h_{\bar{x}} + \frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(2h_{\bar{x}}^2 - \frac{1}{\pi} h_{\bar{x}} h_{\bar{v}} + \frac{1}{\pi} h_{\bar{x}} h_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{73}$$

С учетом уравнений

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \tau d\tau = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \tau d\tau = \pi \tag{74}$$

и того факта, что $h_{\bar{x}} = q \sin t$ (так как $h_{\bar{x}} \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$), мы должны решить следующее уравнение с неизвестными $q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}$:

$$\frac{1}{\pi} \sin t \left[q \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} h_{\bar{p}} - \frac{1}{\pi} h_{\bar{v}} \right) \sin^2 \tau d\tau + 2q^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \tau d\tau \right] = 0. \tag{75}$$

Получаем $\left(\frac{1}{\pi} h_{\bar{p}} - \frac{1}{\pi} h_{\bar{v}}\right)q = 0$, т.е. $[q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = [0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]$ или $[q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}] = [q, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$, где $q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}$ – любые константы, принадлежащие \mathbb{R} . Отсюда

$$\text{Ker}^2 \Psi_2(h) = \{[0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]\} \cup \{[q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]\}, \quad q, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}} \in \mathbb{R}. \tag{76}$$

Теперь проверим, является ли 2-фактор оператор сюръекцией на $C[0, 2\pi]$ для элементов H , принадлежащих 2-ядру 2-фактор оператору.

Пусть $H = [q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$. Проверим следующее

$$\forall z \in C[0, 2\pi] \quad \exists [\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] \in C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \text{что} \quad \Psi_2(H)[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] = z. \tag{77}$$

Исходя из леммы 2, достаточно показать, что это утверждение выполнено для любого элемента $z = z_2 = a \sin t \in Z_2 = W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}} = b \sin t \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$. После подстановки в полученную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(q \sin t b \sin \tau - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau - \frac{1}{2\pi} q \sin t \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{1}{2\pi} q \sin t \bar{h}_{\bar{p}} \right) \sin \tau d\tau = a \sin t. \tag{78}$$

Отсюда $\frac{1}{2\pi} q(-\bar{h}_{\bar{v}} + \bar{h}_{\bar{p}}) = a$. Следовательно, $\bar{h}_{\bar{p}} = \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{2\pi a}{q}$ и $[\bar{h}_{\bar{x}}, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{p}}] = \left[b \sin t, \bar{h}_{\bar{v}}, \bar{h}_{\bar{v}} + \frac{2\pi a}{q} \right]$ для любого b . Поэтому $\Psi_2(H)$ является сюръективным и это означает, что отображение F является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на элементе $H = [q \sin t, h_{\bar{p}}, h_{\bar{p}}]$.

Пусть $H = [0, h_{\bar{v}}, h_{\bar{p}}]$.

Согласно лемме 2, берем любой элемент $z = z_2 = a \sin t \in Z_2 = W_2 = \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0) = \text{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}} = b \sin t \in \text{Ker } \bar{F}'_{\bar{x}}(0, 0, 0)$. Подставив в указанную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi} \sin t \int_0^{2\pi} \left(0 - \frac{1}{2\pi} h_{\bar{v}} b \sin \tau + \frac{1}{2\pi} h_{\bar{p}} b \sin \tau - 0 + 0 \right) \sin \tau d\tau = a \sin t. \tag{79}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi} \sin t \left(-\frac{1}{2\pi} h_v b \pi + \frac{1}{2\pi} h_p b \pi \right) = a \sin t, \tag{80}$$

и

$$b = \frac{2\pi a}{h_p - h_v}, \tag{81}$$

для $h_v \neq h_p$.

Тогда \bar{F} является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на элементе $H = [0, h_v, h_p]$ таком, что $h_v \neq h_p$. Поэтому, согласно нашей теореме 1, можно сформулировать следующий результат для примера 1.

Теорема 7. *Отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$ является 2-регулярным в точке $(0, 0, 0)$ на $\bar{h} = (\bar{h}_x, \bar{h}_\mu)$, где $\bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$, $h_\mu = (v, \rho)$, и*

$$\bar{h}_x(t, \mu) = \begin{cases} b \sin t, & b \neq 0, \quad v = \rho, \\ 0, & v \neq \rho. \end{cases}$$

Тогда для $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малых существует непрерывная функция $x(t, \mu)$ такая, что

$$x(t, \mu) = c(\mu) \sin t + \omega(t, \mu), \quad x(0, \mu) = v, \quad x(2\pi, \mu) = \rho,$$

где

$$c(\mu) = \begin{cases} \|\mu\|, & v = \rho, \\ o(\|\mu\|), & v \neq \rho. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение теории p -регулярности позволило нам сформулировать и доказать некоторый аналог теоремы Люстерника о касательном конусе, т.е. теорему 1, связанный с проблемой существования непрерывного решения сингулярного уравнения $F(x^*, \mu^*) = 0$, где $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$ и $F : X \times M \rightarrow Z$, M является конечномерным пространством, а X, Z — банаховы пространства. Мы проиллюстрируем этот результат решением дифференциального уравнения второго порядка (54) с граничными условиями.

Ниже приведем общий результат данной статьи.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$F(x, \mu) = F(x^{(k)}, \dots, x', x, v, \rho) = 0, \quad x(a) = v, \quad x(\mu) = \rho, \tag{82}$$

где $F : C_m^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow C[a, b]$, $x(t) \in C_m^k[a, b]$, $v, \rho \in \mathbb{R}$, $\mu = (v, \rho)$. Аналогично (53), введем \bar{x} и каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$, где $\bar{F} : X \rightarrow C[a, b]$, $X = \{C_m^k[a, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \bar{x}(a) = 0, \bar{x}(b) = 0\}$.

Теперь можно сформулировать общий результат.

Теорема 8. *Пусть $F(x, \mu) \in C^{p+1}(C_m^k[a, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и для любого $h_\mu \neq 0$, $h_\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $h_\mu = (v, \rho)$ существует $\bar{h}_x(t, \mu) \in X$, $\|\bar{h}_x(t, \mu)\| \leq c < \infty$ такие, что каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x}, \mu)$ является p -регулярным в (\bar{x}^*, μ^*) на $\bar{h}(\mu) = [\bar{h}_x(t, \mu), \bar{h}_\mu]$, где $\bar{h}(\mu) \in \bigcap_{k=1}^p \text{Ker}^k \bar{f}_k^{(k)}(\bar{x}^*, \mu^*)$.*

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(t, \mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $t \in [a, b]$, $x(t, \mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$ и $\varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что

$$F(x(t, \mu), \mu) = 0, \quad x(a) = \nu, \quad x(b) = \rho, \quad (83)$$

где

$$x(t, \mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x(t, \mu) + \omega(t, \mu) \quad (84)$$

и

$$c(\mu) = \begin{cases} O(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t, \mu) \neq 0, \omega(t, \mu) = o(\mu - \mu^*), \\ o(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t, \mu) = 0, \omega(t, \mu) = o(c(\mu)). \end{cases} \quad (85)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
2. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач: теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
3. *Marsden J.E., Tret'yakov A.A.* Factor analysis of nonlinear mappings: p -regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
4. *Medak B., Tret'yakov A.A.* Existence of periodic solutions to nonlinear p -regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. Art. № 91. P. 1–24.
5. *Медак Б., Третьяков А.А.* Теория p -регулярности. Анализ и приложения. М.: Физматлит, 2017.
6. *Michael E.A.* Continuous selector // Ann. Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
7. *Третьяков А.А.* Теорема о неявной функции в вырожденных задачах // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. № 5. С. 215–216.
8. *Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A.* Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.
9. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

**ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ**

УДК 519.642.8

**ON NORMALITY IN OPTIMAL CONTROL PROBLEMS
WITH STATE CONSTRAINTS¹⁾**

© 2023 г. D. Yu. Karamzin^{1,*}, F. Lobo Pereira²

¹ *Federal Research Center Computer Science and Control of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

² *F. Lobo Pereira Research Center for Systems and Technologies (SYSTEC), University of Porto, Porto, Portugal*

*e-mail: d.yu.karamzin@gmail.com

Поступила в редакцию 20.09.2022 г.

Переработанный вариант 25.12.2022 г.

Принята к публикации 02.02.2023 г.

Нормальность в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Рассмотрена общая задача оптимального управления с концевыми, смешанными и фазовыми ограничениями. Исследуется вопрос о нормальности известных необходимых условий оптимальности. Нормальность означает положительность множителя Лагранжа при минимизируемом функционале. Для доказательства условия нормальности конструируется оператор производной для отображения, задающего фазовые ограничения, который действует в определенном гильбертовом пространстве и обладает нужными свойствами сюръекции и непрерывности.

Ключевые слова: оптимальное управление, принцип максимума, фазовые ограничения, нормальность.

DOI: 10.31857/S004446692306011X, **EDN:** UWRZVX

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.977

О РЕКОНСТРУКЦИИ ВХОДНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ
РЕАКЦИИ–ДИФФУЗИИ

© 2023 г. В. И. Максимов^{1,*}

¹ 620990 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, Институт математики и механики УрО РАН, Россия

*e-mail: maksimov@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 02.11.2022 г.
Переработанный вариант 02.11.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Рассматривается задача динамической реконструкции граничного неизвестного входного воздействия для нелинейной системы дифференциальных уравнений с распределенными параметрами типа реакции–диффузии. Представлен алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теории управления с обратной связью. Библ. 19.

Ключевые слова: реконструкция, система реакции–диффузии.

DOI: 10.31857/S0044466923060169, **EDN:** TULVKW

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} x_t(\eta, t) - D_1 \Delta x(\eta, t) + k_1 x(\eta, t) &= -\gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t), & (t, \eta) \in Q, \\ y_t(\eta, t) - D_2 \Delta y(\eta, t) + k_2 y(\eta, t) &= -\gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t), & (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu x(s, t) + b(s, t, x(s, t)) &= u(s, t), & (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu y(s, t) + k_3 y(s, t) &= 0, & (t, s) \in \Sigma, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} x(\eta, 0) &= x_0(\eta), & \eta \in \Omega, \\ y(\eta, 0) &= y_0(\eta), & \eta \in \Omega. \end{aligned}$$

Здесь $Q = T \times \Omega$, $\Sigma = T \times \partial\Omega$, Ω – ограниченная область в \mathbb{R}^n с липшицевой границей $\partial\Omega$, $n \geq 1$, $b(\cdot)$ – фиксированная функция, свойства которой будут уточнены ниже, $T = [0, \vartheta]$, $\vartheta > 0$, – конечный момент времени, $u(\cdot)$ – входное воздействие, D_1 и D_2 – положительные постоянные, а k_1, k_2, k_3, γ_1 и γ_2 – неотрицательные постоянные. Символ ∂_ν означает производную по внешней нормали к $\partial\Omega$.

В дальнейшем считаем начальное состояние $\{x_0, y_0\}$ системы (1.1), где $x_0 = x_0(\eta) \in C(\tilde{\Omega})$, $y_0 = y_0(\eta) \in C(\tilde{\Omega})$, $\eta \in \Omega$ – неотрицательные функции, известным.

Здесь и всюду ниже $\tilde{\Omega}$ означает замыкание множества Ω .

Введем пространство

$$W(T) = \{x(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega)) : y_t(\cdot) \in L_2(T; (H^1(\Omega))^*)\}$$

с нормой

$$\|x\|_{W(T)} = \left(\int_0^\vartheta (|x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + |x_t(t)|_{(H^1(\Omega))^*}^2) dt \right)^{1/2}.$$

Здесь $H^1(\Omega)$ – пространства Соболева, $(H^1(\Omega))^*$ – сопряженное к $H^1(\Omega)$ пространство, производная $x_t(\cdot)$ понимается в смысле пространства распределений, $L_2(T; H^1(\Omega))$ – пространство эквивалентных классов абстрактных функций $x(\cdot) : T \rightarrow H^1(\Omega)$, $\int_0^\vartheta |x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt < \infty$ с нормой

$$|x(\cdot)|_{L_2(T; H^1(\Omega))} = \left(\int_0^\vartheta |x(t)|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}.$$

Можно дать другое (эквивалентное [1, с. 23]) определение пространства $W(T)$. Это есть пространство абсолютно непрерывных функций $x(\cdot) : T \rightarrow H^1(\Omega)$, которые почти всюду на T дифференцируемые и таковы, что $t \rightarrow dx(t)/dt \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Заметим, что пространство $W(T)$ непрерывно вложено в пространство $C(T; L_2(\Omega))$ – пространство непрерывных функций, действующих из T в пространство $L_2(\Omega)$. Поэтому существует постоянная $c^* > 0$ такая, что для всех $x(\cdot) \in W(T)$ выполняется неравенство

$$|x(\cdot)|_{C(T; L_2(\Omega))} \leq c^* |x(\cdot)|_{W(T)}.$$

В дальнейшем считаем выполненными следующие два условия из работы [2].

Условие 1. Нелинейная функция $b(s, t, x) : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является непрерывной по совокупности переменных и монотонно неубывающей по x при всех $(s, t) \in \Sigma$. Кроме того, функция b дважды непрерывно дифференцируема по x , причем функция $\partial^2 b(s, t, x) / \partial x^2$ является локально липшицевой, т.е. для любого $\rho > 0$ можно указать $L = L(\rho) > 0$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_j| \leq \rho$, $j = 1, 2$, и любых $(s, t) \in \Sigma$, выполняется неравенство

$$|\partial^2 b(s, t, x_1) / \partial x_1^2 - \partial^2 b(s, t, x_2) / \partial x_2^2| \leq L(\rho) |x_1 - x_2|.$$

Здесь и всюду ниже символ $|\cdot|$ означает модуль числа.

Условие 2. Справедливо неравенство $b(s, t, 0) \leq u(s, t)$ при почти всех $(s, t) \in \Sigma$. Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |b(\cdot, \cdot, x)|_{C(\bar{Q})} = \infty.$$

Следуя [2], [3], пару функций $\{x(\cdot), y(\cdot)\} : x(\cdot) = x(\cdot; 0, \{x_0, y_0\}, u(\cdot))$, $y(\cdot) = y(\cdot; 0, \{x_0, y_0\}, u(\cdot)) \in (W(T) \cap L_\infty(Q))^2$, назовем решением (слабым) уравнения (1.1), если выполняются равенства

$$x(\cdot, 0) = x_0, \quad y(\cdot, 0) = y_0,$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\vartheta \langle x_t(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \iint_\Sigma b(s, t, x(s, t)) \varphi(s, t) ds dt + \iint_Q (D_1 \nabla x(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + \\ & + k_1 x(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t) \varphi(\eta, t)) d\eta dt = \iint_\Sigma u(s, t) \varphi(s, t) ds dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^\vartheta \langle y_t(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + k_3 \iint_\Sigma y(s, t) \varphi(s, t) ds dt + \\ & + \iint_Q (D_2 \nabla y(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + k_2 y(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t) \varphi(\eta, t)) d\eta dt = 0 \end{aligned}$$

при всех $\varphi(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Здесь и всюду ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(\Omega)}$ означает двойственность между соболевскими пространствами $H^1(\Omega)$ и $(H^1(\Omega))^*$, символ ∇ означает градиент соответствующей функции, а символ ds – меру Лебега на внешней границе $\partial\Omega$. В дальнейшем для всякой функции $\varphi(\eta) \in H^1(\Omega)$ под $\varphi(s)$ понимаем след функции φ на границе области Ω .

Прямым следствием теоремы 2.2. из [2] является теорема 1.

Теорема 1. Пусть $x_0(\eta)$ и $y_0(\eta)$ – неотрицательные функции. Тогда, каково бы ни было входное воздействие $u(\cdot) \in L_\infty(\Sigma)$, если функция $b(\cdot)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то существует единственное решение системы (1) $\{x(\cdot), y(\cdot)\} \in (W(T) \cap C(\tilde{Q}))^2$.

Обсуждаемая в настоящей работе задача формулируется следующим образом. Имеется система (1.1) с некоторым входным воздействием $u(\cdot)$. Заранее как это воздействие, так и отвечающее ему решение $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ системы не заданы. В каждый момент времени $t \in T$ измеряется решение системы (1.1), т.е. измеряются величины $x(t)$ и $y(t)$. Эти измерения неточны: вместо функций $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$ вычисляются функции $\xi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$, $\psi^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega))$ и $\xi_1^h(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами

$$|x(t) - \xi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \leq h, \quad |y(t) - \psi^h(t)|_{L_\infty(\Omega)} \leq h \quad \text{при п.в. } t \in T, \quad (1.2)$$

$$\left(\int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \leq h \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (1.3)$$

Здесь число $h \in (0, 1)$ характеризует “ошибку” измерений. Задача заключается в том, чтобы построить алгоритм приближенного восстановления неизвестного входного воздействия $u(\cdot)$.

Сформулированная задача относится к классу обратных задач (см. [4–8]). Описываемая ниже методика ее решения развивает подход к решению проблемы динамического восстановления входа, получивший развитие в ряде работ (по поводу этих работ см. монографии [9–12] и обзорную статью [13]). Этот подход основывается на комбинации известного в теории гарантированного управления принципе позиционного управления с моделью (см. [14]), а также одним из основополагающих методов теории некорректных задач – методе сглаживающего функционала (см. [4], [5]). Заметим, что в [9], [10] задачи динамической реконструкции входов изучались для систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Вопросы реконструкции граничных входных воздействий для параболических и гиперболических уравнений обсуждались в [15–19]. В настоящей работе, продолжающей цикл цитированных выше работ, мы указываем алгоритм решения задачи реконструкции граничного входного воздействия для системы распределенных уравнений реакции–диффузии.

В соответствии с подходом из цитированных выше работ задача восстановления неизвестного входного воздействия по результатам измерения величин $\{\xi^h(\cdot), \psi^h(\cdot)\}$ заменяется некоторой другой задачей, а именно, задачей позиционного управления вспомогательной системой M (моделью). Таким образом, задача восстановления $u(\cdot)$ сводится к следующим двум задачам:

1) задаче выбора вспомогательной системы M (функционирующей “синхронно” с реальной системой);

2) задаче управления этой системой по принципу обратной связи.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

В гл. I из [11] было отмечено, что для достаточно широкого класса параболических систем в качестве моделей удобно брать “копии” реальных систем. Там же приведены примеры таких систем. Оказывается, что и для рассматриваемой в настоящей работе системы в качестве модели M можно брать ее “копию”. Эта “копия” имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_t^h(\eta, t) - D_1 \Delta z^h(\eta, t) + k_1 z^h(\eta, t) &= -\gamma_1 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ w_t^h(\eta, t) - D_2 \Delta w^h(\eta, t) + k_2 w^h(\eta, t) &= -\gamma_2 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^h(s, t) + b(s, t, z^h(s, t)) &= u^h(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu w^h(s, t) + k_3 w^h(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^h(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^h(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, модель состоит из двух независимых подсистем. Первая подсистема представляет собой нелинейное параболическое уравнение с управлением $u^h(\cdot)$:

$$\begin{aligned} z_t^h(\eta, t) - D_1 \Delta z^h(\eta, t) + k_1 z^h(\eta, t) &= -\gamma_1 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^h(s, t) + b(s, t, z^h(s, t)) &= u^h(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^h(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Вторая подсистема также описывается параболическим уравнением. Но уже линейным, к тому же не содержащим управления

$$\begin{aligned} w_t^h(\eta, t) - D_2 \Delta w^h(\eta, t) + k_2 w^h(\eta, t) &= -\gamma_2 \xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_2 \partial_\nu w^h(s, t) + k_3 w^h(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ w^h(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Заметим, что вторая подсистема на выбор управления $u^h(\cdot)$ не влияет. Поэтому при решении задачи ее можно опустить, взяв в качестве модели вместо системы (2.1) подсистему (2.2). Подсистема (2.3) потребуется при доказательстве приведенной ниже теоремы 1. Существование и единственность решений $z^h(\cdot) \in W(T) \cap C(\bar{Q})$ и $w^h(\cdot) \in W(T) \cap C(\bar{Q})$ приведенных выше подсистем следует, например, из [3, теорема 5.5, с. 268].

Управление $u^h(\cdot)$ в модели (2.1) (подсистеме (2.2)) зададим по формуле

$$u^h(s, t) = u^{h,\alpha}(s, t) = 1/2\alpha^{-1}(\xi_1^h(s, t) - z^h(s, t)) \quad \text{при п.в.} \quad (s, t) \in \Sigma, \tag{2.4}$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – вспомогательный параметр.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $q \in (0, 1)$ – некоторая постоянная. Пусть управление $u^h(\cdot)$ находится по формуле (7). Тогда справедливы неравенства

$$\varepsilon(t) \leq v_1(h; q), \quad t \in T, \tag{2.5}$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + v_2(h; q). \tag{2.6}$$

Здесь

$$v_1(h; q) = d^{(1)}(h + \alpha + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}), \quad v_2(h; q) = d^{(2)}(h^q + h\alpha^{-1} + h^2 \alpha^{-2} + h^{2-q} \alpha^{-3}),$$

$$\varepsilon(t) = 1/2|\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + 1/2|v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_\Omega \{D_1 |\nabla \mu^h(\eta, \tau)|^2 + D_2 |\nabla v^h(\eta, \tau)|^2\} d\eta d\tau + k_3 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (v^h(s, \tau))^2 ds d\tau,$$

$\mu^h(t) = z^h(t) - x(t)$, $v^h(t) = w^h(t) - y(t)$, $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ и $\{z^h(\cdot), w^h(\cdot)\}$ – решения систем (1) и (4) соответственно, $d^{(1)}$ и $d^{(2)}$ – положительные постоянные, не зависящие от $u(\cdot)$, $u^h(\cdot)$, $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z^h(\cdot)$, $w^h(\cdot)$.

Доказательство. Учитывая правило определения функций $\mu^h(\cdot)$ и $v^h(\cdot)$, заключаем, что справедливы равенства

$$\mu^h(\cdot, 0) = 0, \quad v^h(\cdot, 0) = 0,$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\vartheta} \langle \mu_t^h(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^{\vartheta} \int_\Omega \{b(s, t, z^h(s, t)) - b(s, t, x(s, t))\} \varphi(s, t) ds dt + \int_0^{\vartheta} \int_\Omega (D_1 \nabla \mu^h(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + \\ + k_1 \mu^h(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_1 \{\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)\} \varphi(\eta, t) d\eta dt = \int_0^{\vartheta} \int_{\partial\Omega} \{u^h(s, t) - u(s, t)\} \varphi(s, t) ds dt \end{aligned} \tag{2.7}$$

и

$$\int_0^\vartheta \langle v_t^h(t), \varphi(t) \rangle_{H^1(\Omega)} dt + \int_0^\vartheta \int_{\partial\Omega} k_3 v^h(s, t) \varphi(s, t) ds dt + \iint_{\partial\Omega} (D_2 \nabla v^h(\eta, t) \nabla \varphi(\eta, t) + k_2 v^h(\eta, t) \varphi(\eta, t) + \gamma_2 \{\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)\} \varphi(\eta, t)) d\eta dt = 0. \tag{2.8}$$

Равенства (2.7) и (2.8) справедливы при любых $\phi(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. Положив в (2.7)

$$\phi(\eta, t) = \begin{cases} \mu^h(\eta, t), & \eta \in \Omega, t \in [0, r], \\ 0, & \eta \in \Omega, t \in (r, \vartheta], \end{cases}$$

а в (2.8)

$$\phi(\eta, t) = \begin{cases} v^h(\eta, t), & \eta \in \Omega, t \in [0, r], \\ 0, & \eta \in \Omega, t \in (r, \vartheta], \end{cases}$$

и сложив полученные выражения, будем иметь

$$\int_0^r (d\varepsilon(t)/dt + I_{1t} + I_{2t}) dt \leq \int_0^r \left(\sum_{j=3}^5 I_{jt}^h \right) dt \quad \forall r \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$

где

$$\begin{aligned} I_{1t}^h &= \int_{\partial\Omega} (b(s, t, z^h(t, s)) - b(s, t, x(t, s)))(z^h(s, t) - x(s, t)) ds, \\ I_{2t}^h &= k_1 |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + k_2 |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \\ I_{3t}^h &= \int_{\partial\Omega} \{u^h(s, t) - u(s, t)\} (z^h(s, t) - x(s, t)) ds, \\ I_{4t}^h &= \gamma_1 \int_{\Omega} |\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |\mu^h(\eta, t)| d\eta, \\ I_{5t}^h &= \gamma_2 \int_{\Omega} |\xi^h(\eta, t) \psi^h(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |v^h(\eta, t)| d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что справедливо неравенство

$$I_{1t}^h \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{2.10}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, не зависящие от $h \in (0, 1)$, что при п.в. $t \in T$ справедливы оценки

$$I_{4t}^h \leq C_1 h \int_{\Omega} |\mu^h(\eta, t)| d\eta, \quad I_{5t}^h \leq C_2 h \int_{\Omega} |v^h(\eta, t)| d\eta. \tag{2.11}$$

Из (2.11) получаем в силу неравенства Гёльдера

$$I_{4t}^h \leq C_3 h |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_4 h + C_5 h |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \quad I_{5t}^h \leq C_6 h |v^h(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_7 h + C_8 h |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2. \tag{2.12}$$

Кроме того, в виду (1.3) имеем

$$\begin{aligned} I_{3t}^h &\leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + \int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)| \{|u^h(s, t)| + |u(s, t)|\} ds \leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + \\ &+ \left(\int_{\partial\Omega} |\xi_1^h(s, t) - x(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |u^h(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} + \left(\int_{\partial\Omega} |u(s, t)|^2 ds \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \pi_t(z, \xi, u, u^h) + h \{ |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\pi_t(z, \xi, u, u^h) = \int_{\partial\Omega} (z^h(s, t) - \xi_1^h(s, t))(u^h(s, t) - u(s, t)) ds.$$

В силу (2.4) справедливо неравенство

$$\pi_t(z, \xi, u, u^h) + \alpha\{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 - |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2\} \leq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (2.14)$$

Из (2.9), учитывая (2.10), (2.12)–(2.14), получаем

$$\int_0^s (d\varepsilon(t)/dt + \alpha\{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 - |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2\})dt \leq C_9 h + h \int_0^s (C_5 |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + C_8 |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \{|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\})dt \quad \forall s \in T. \quad (2.15)$$

Обозначим

$$\gamma_\alpha(t) = \varepsilon(t) + \alpha \int_0^t |u^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau.$$

Тогда из (2.15) получим

$$d\gamma_\alpha(t)/dt \leq C_{10} h \{1 + |\mu^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + |v^h(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}\} + \alpha |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 \quad (2.16)$$

при п.в. $t \in T$. Далее, имеем

$$|u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq \alpha^{-1} |\xi^h(t) - z^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}.$$

Поэтому, каково бы ни было $q \in (0, 2)$, ввиду (1.3), при п.в. $t \in T$ имеет место неравенство

$$h |u^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq h^2 \alpha^{-1} + h \alpha^{-1} |\mu^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)} \leq h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^2 + h^q |\mu^h(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2. \quad (2.17)$$

Из (2.16), учитывая (2.17), получаем

$$\frac{d\gamma_\alpha(t)}{dt} \leq C_{11} \max\{h, h^q\} \gamma_\alpha(t) + C_{12} (h + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2} + h |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)} + \alpha |u(t)|_{L_2(\partial\Omega)}^2) \quad \text{при п.в. } t \in T. \quad (2.18)$$

Воспользовавшись неравенством Гронуолла, отсюда получаем

$$\gamma_\alpha(t) \leq C_{13} \{h + \alpha + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}\}, \quad t \in T. \quad (2.19)$$

Из (2.19) следует неравенство (2.5). Установим справедливость неравенства (2.6). Если $q \in (0, 1)$, $h \in (0, 1)$, то из (2.18), учитывая (2.19), получаем

$$\alpha \int_0^t |u^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau \leq \alpha \int_0^t |u(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)}^2 d\tau + C_{15} (h + \alpha h^q + h^2 \alpha^{-1} + h^{2-q} \alpha^{-2}).$$

Следовательно,

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + C_{16} (h^q + h \alpha^{-1} + h^2 \alpha^{-2} + h^{2-q} \alpha^{-3}). \quad (2.20)$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 2 доказана.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие. Если $\alpha = h^\rho$, $q = 1 - \rho$, $\rho = \text{const} \in (0, 1/2)$, то справедливы неравенства

$$\varepsilon(t) \leq d^{(3)} h^\rho,$$

$$|u^h(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 + d^{(4)} h^{1-2\rho}.$$

Теорема 3. Пусть $\alpha(h) \rightarrow 0$, $h^{2-q} \alpha^{-3}(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где $q = \text{const} \in (0, 1)$. Тогда имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 = L_2(T; L_2(\partial\Omega)) \quad \text{при } h \rightarrow 0.$$

Доказательство. Покажем, что, каковы бы ни были последовательности чисел $h_j \rightarrow 0+$ при $j \rightarrow \infty$, а также последовательности функций $\xi^{h_j}(\cdot), \psi^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\Omega)), \xi_1^{h_j}(\cdot) \in L_\infty(T; L_\infty(\partial\Omega))$ со свойствами (1.2), (1.3) (в (1.2) и (1.3) мы полагаем $h = h_j$), имеет место сходимость

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 \quad \text{при } j \rightarrow \infty.$$

Здесь и ниже управления $u^{h_j}(\cdot)$ определяются согласно (2.4), где полагается $h = h_j$. Предполагая противное, заключаем, что найдется подпоследовательность последовательности $u^{h_j}(\cdot)$ (для простоты обозначаем ее тем же символом, т.е. $u^{h_j}(\cdot)$) такая, что

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u_0(\cdot) \quad \text{слабо в } L_2 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \tag{2.21}$$

$$u_0(\cdot) \neq u(\cdot). \tag{2.22}$$

Пусть $q^{h_j}(t) = z^{h_j}(t) - z^0(t), p^{h_j}(t) = w^{h_j}(t) - w^0(t)$, где $\{z^{h_j}(\cdot), w^{h_j}(\cdot)\}$ – решение системы (2.1) при $h = h_j$, а $\{z^0(\cdot), w^0(\cdot)\}$ – решение системы

$$\begin{aligned} z_t^0(\eta, t) - D_1 \Delta z^0(\eta, t) + k_1 z^0(\eta, t) &= -\gamma_1 x(\eta, t) y(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ w_t^0(\eta, t) - D_2 \Delta w^0(\eta, t) + k_2 w^0(\eta, t) &= -\gamma_2 x(\eta, t) y(\eta, t), \quad (t, \eta) \in Q, \\ D_1 \partial_\nu z^0(s, t) + b(s, t, z^0(s, t)) &= u_0(s, t), \quad (t, s) \in \Sigma, \\ D_2 \partial_\nu w^0(s, t) + k_3 w^0(s, t) &= 0, \quad (t, s) \in \Sigma, \\ z^0(\eta, 0) &= x_0(\eta), \quad \eta \in \Omega, \\ w^0(\eta, 0) &= y_0(\eta), \quad \eta \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.23}$$

В (2.23) $\{x(\cdot), y(\cdot)\}$ означает решение системы (1.1). Аналогично (2.9), устанавливаем неравенство

$$\int_0^s (d\tilde{\varepsilon}^{h_j}(t)/dt + \tilde{I}_{1t}^{h_j} + \tilde{I}_{2t}^{h_j}) dt \leq \int_0^s \left(\sum_{j=3}^5 \tilde{I}_{jt}^{h_j} \right) dt, \quad s \in T, \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) &= 1/2 |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + 1/2 |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ &+ \int_0^t \int_\Omega \{D_1 |\nabla q^{h_j}(\eta, \tau)|^2 + D_2 |\nabla p^{h_j}(\eta, \tau)|^2\} d\eta d\tau + k_3 \int_0^t \int_{\partial\Omega} (p^{h_j}(s, \tau))^2 ds d\tau, \quad t \in T, \\ \tilde{I}_{1t}^{h_j} &= \int_{\partial\Omega} (b(s, t, z^{h_j}(t, s)) - b(s, t, z^0(t, s)))(z^{h_j}(s, t) - z^0(s, t)) ds, \\ \tilde{I}_{2t}^{h_j} &= k_1 |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2 + k_2 |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \\ \tilde{I}_{3t}^{h_j} &= \int_{\partial\Omega} \{u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)\}(z^{h_j}(s, t) - z^0(s, t)) ds, \\ \tilde{I}_{4t}^{h_j} &= \gamma_1 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta, t) \psi^{h_j}(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |q^{h_j}(\eta, t)| d\eta, \\ \tilde{I}_{5t}^{h_j} &= \gamma_2 \int_\Omega |\xi^{h_j}(\eta, t) \psi^{h_j}(\eta, t) - x(\eta, t) y(\eta, t)| |p^{h_j}(\eta, t)| d\eta. \end{aligned}$$

Учитывая монотонность функции $b(\cdot)$ (см. условие 1), заключаем, что верно неравенство

$$\tilde{I}_{1t}^{h_j} \geq 0 \quad \text{при п.в. } t \in T. \tag{2.25}$$

В свою очередь, в силу неравенств (1.2) можно указать такие числа $C_1^* > 0$ и $C_2^* > 0$, не зависящие от $h \in (0, 1)$, что при п.в. $t \in T$ справедливы оценки

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \leq C_1^* h_j \int_{\Omega} |q^{h_j}(\eta, t)| d\eta, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \leq C_2^* h_j \int_{\Omega} |p^{h_j}(\eta, t)| d\eta. \quad (2.26)$$

Из (2.26) получаем, воспользовавшись неравенством Гёльдера,

$$\tilde{I}_{4t}^{h_j} \leq C_3^* h_j |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_4^* h_j + C_5^* h_j |q^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \tilde{I}_{5t}^{h_j} \leq C_6^* h_j |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)} \leq C_7^* h_j + C_8^* h_j |p^{h_j}(t)|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (2.27)$$

Рассмотрим $\tilde{I}_3^{h_j}(t)$. Имеем

$$\tilde{I}_3^{h_j}(t) = \int_{\partial\Omega} (z^{h_j}(s, t) - z(s, t))(u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)) ds + \int_{\partial\Omega} (z(s, t) - z^0(s, t))(u^{h_j}(s, t) - u_0(s, t)) ds.$$

Тогда

$$\sup_{t \in T} \left| \int_0^t \tilde{I}_3^{h_j}(\tau) d\tau \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Этот факт вытекает из теоремы 2 и слабой сходимости последовательности функций $u^{h_j}(\cdot)$ к $u_0(\cdot)$ (см. (2.21)). В таком случае из (2.24)–(2.28) получаем

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \tilde{\varepsilon}^{h_j}(t) \rightarrow 0. \quad (2.29)$$

Учитывая (2.29), а также теорему 2, устанавливаем справедливость равенств

$$\sup_{t \in T} |z^0(t) - z(t)|_H = 0, \quad \sup_{t \in T} |y^0(t) - y(t)|_H = 0.$$

Значит,

$$y^0(\cdot) = y(\cdot), \quad z^0(\cdot) = z(\cdot).$$

Поэтому

$$u_0(\cdot) = u(\cdot).$$

Последнее противоречит (2.21), (2.22). Следовательно,

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{слабо в } L_2 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.30)$$

Ввиду известного свойства слабого предела, из (2.30) вытекает неравенство

$$\underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \geq |u(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.31)$$

Кроме того, в силу (2.6) имеет место оценка

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}^2 \leq |u(\cdot)|_{L_2}^2 + v_2(h; q).$$

В таком случае

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leq |u(\cdot)|_{L_2}. \quad (2.32)$$

Значит (см. (2.31), (2.32)),

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \leq |u(\cdot)|_{L_2} \leq \underline{\lim}_{j \rightarrow \infty} |u^{h_j}(\cdot)|_{L_2}.$$

Отсюда следует сходимость

$$|u^{h_j}(\cdot)|_{L_2} \rightarrow |u(\cdot)|_{L_2} \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (2.33)$$

Учитывая (2.30) и (2.33), в силу теоремы Ефимова–Стечкина заключаем

$$u^{h_j}(\cdot) \rightarrow u(\cdot) \quad \text{в } L_2 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Теорема 3 доказана.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА

При некоторых дополнительных условиях можно указать оценку скорости сходимости алгоритма (см. ниже теорему 4).

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1 (см. [11], с. 47). Пусть $V(\cdot) \in L_\infty(T_*; V^*)$ и $\tilde{v}(\cdot) \in W(T_*; V)$, $T_* = [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,

$$\left| \int_a^t V(\tau) d\tau \right|_{V^*} \leq \varepsilon_*, \quad |\tilde{v}(t)|_V \leq K \quad \forall t \in T_*.$$

Тогда для всех $t \in T_*$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^t \langle V(\tau), \tilde{v}(\tau) \rangle_V d\tau \right| \leq \varepsilon_*(K + \text{var}(T_*; \tilde{v}(\cdot))).$$

Здесь V банахово пространство с нормой $|\cdot|_V$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – двойственность между V и V^* . Символ $\text{var}(T_*; v(\cdot))$ означает вариацию функции $v(\cdot)$ на отрезке T_* , а символ $W(T_*; V)$ – множество функций $y(\cdot) : T_* \rightarrow H_1$ ограниченной вариации.

Теорема 4 Пусть функция $z \rightarrow b(s, t, z)$ липшицева и выполнены условия теоремы 3. Пусть также $u(s, t) = u_*(s, t)$ при п.в. $(s, t) \in \Sigma$, где $u_*(\cdot) \in W(T; H^1(\Omega))$. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости алгоритма:

$$\|u(\cdot) - u^h(\cdot)\|_{L_2(T; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq c^{(0)} \{v_1^{1/2}(h; q) + v_2(h; q)\},$$

где $c^{(0)}$ – некоторая постоянная, не зависящая от $h \in (0, 1)$.

Доказательство. Введем оператор $B : L_2(\partial\Omega) \rightarrow (H^1(\Omega))^*$ по формуле

$$\langle Bv, \phi \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} v(s)\phi(s) ds \quad \forall \phi \in H^1(\Omega).$$

Пусть

$$\phi_t(\tau) = \begin{cases} \phi, & \tau \in [0, t], \\ 0, & \tau \in (t, \vartheta], \end{cases}$$

где $\phi \in H^1(\Omega)$. Вычтем (2.2) из соответствующих соотношений в (1.1) и умножим полученную разность на $\phi_t(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))$. После интегрирования получим

$$\left\langle \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau, \phi \right\rangle_{H^1(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{j=5} |J_{jt}^h| \tag{3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} J_{1t}^h(\phi) &= \langle \mu_t^h(t), \phi \rangle_{H^1(\Omega)}, \\ J_{2t}^h(\phi) &= \int_0^t \int_{\partial\Omega} (b(s, \tau, z^h(s, \tau)) - b(s, \tau, z(s, \tau))) \phi(s) ds, \\ J_{3t}^h(\phi) &= D_1 \int_0^t \int_Q \nabla \mu^h(\eta, \tau) \nabla \phi(\eta, \tau) d\eta d\tau, \\ J_{4t}^h(\phi) &= \gamma_1 \int_0^t \int_\Omega (\xi^h(\eta, \tau) \psi^h(\eta, \tau) - x(\eta, \tau) y(\eta, \tau)) \phi(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$J_{5r}^h(\varphi) = k_1 \int_0^t \int_{\partial\Omega} \mu^h(\eta, \tau) \varphi(\eta) d\eta d\tau.$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{1r}^h(\varphi)| \leq c_1 |\mu^h(t)|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_2 |\mu^h(t)|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.2)$$

Учитывая липшицевость функции $b(\cdot)$, получаем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{2r}^h(\varphi)| \leq c_3 \sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{L_2(\partial\Omega)} |\varphi|_{L_2(\partial\Omega)} d\tau \leq c_4 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.3)$$

Кроме того,

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{3r}^h(\varphi)| \leq c_5 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.4)$$

В свою очередь, в силу (1.2)

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{4r}^h(\varphi)| \leq c_6 h. \quad (3.5)$$

Далее, имеем

$$\sup_{|\varphi|_{H^1(\Omega)} \leq 1} |J_{5r}^h(\varphi)| \leq c_7 \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau. \quad (3.6)$$

Объединив (3.2)–(3.6), получим из (3.1)

$$\left| \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_8 \left(h + \int_0^t |\mu^h(\tau)|_{H^1(\Omega)} d\tau \right). \quad (3.7)$$

Из (3.7) в силу теоремы 2 (см. неравенство (2.5)) вытекает оценка

$$\left| \int_0^t B\{u^h(\tau) - u(\tau)\} d\tau \right|_{(H^1(\Omega))^*} \leq c_9 v_1^{1/2}(h; q).$$

Отсюда, учитывая правило определения оператора B , а также лемму 2, получаем

$$\left| \int_0^t \int_{\partial\Omega} (u^h(s, \tau) - u(s, \tau)) u(s, \tau) d\tau \right| \leq c_{10} v_1^{1/2}(h; q). \quad (3.8)$$

Далее, воспользовавшись (2.6), (3.8), устанавливаем неравенство

$$|u^h(\cdot) - u(\cdot)|_{L_2(\Gamma; L_2(\partial\Omega))}^2 \leq 2 \left| \int_0^{\vartheta} \int_{\partial\Omega} (u(s, \tau) - u : p(s, \tau)) u(s, \tau) ds d\tau \right| + v_2(h; q) \leq c_{11} \{v_1^{1/2}(h; q) + v_2(h; q)\}.$$

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Barbu V.* Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces. N.Y.: Springer, 2010.
2. *Barthel W., John C., Tröltzsch F.* Optimal boundary control of a system of reaction diffusion equations // *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2010. V. 90. P. 966–982.
3. *Tröltzsch F.* Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications. AMS, 2010.
4. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1985.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, 1980.

7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. *Kabanikhin S.I.* Inverse and ill-posed problems. Berlin: De Gruyter, 2011.
9. *Osipov Yu.S., Kryazhimskii A.V.* Inverse problems for ordinary differential equations: dynamical solutions. Gordon and Breach, 1995.
10. *Осипов Ю.С., Васильев Ф.П., Потапов М.М.* Основы метода динамической регуляризации. М.: МГУ, 1999.
11. *Maksimov V.I.* Dynamical inverse problems of distributed systems. VSP, Netherlands, 2002.
12. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Методы динамического восстановления входов управляемых систем. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2011.
13. *Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2011. Т. 17. № 1. С. 129–161.
14. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
15. *Osipov Yu.S., Pandolfi L., Maksimov V.I.* Problems of dynamic reconstruction and robust boundary control: the case of Dirichlet boundary conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2001. V. 9. № 2. P. 149–162.
16. *Максимов В.И., Осипов Ю.С.* О граничном управлении распределенной системой на бесконечном промежутке времени // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 14–26.
17. *Максимов В.И.* Моделирование неизвестных возмущений в нелинейных параболических системах – вариационных неравенствах // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1992. № 1. С. 157–162.
18. *Maksimov V.I., Pandolfi L.* Dynamical reconstruction of inputs for contraction semigroup systems: boundary input case // J. Optim. Theory Appl. 1999. V. 103. № 2. P. 401–420.
19. *Maksimov V.* On reconstruction of boundary controls in a parabolic equations // Adv. Differ. Equ. 2009. V. 14. № 11–12. P. 1193–1211.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.85

**MIXED VIRTUAL ELEMENT APPROXIMATION OF A FOURTH ORDER
OPTIMAL CONTROL PROBLEM¹⁾**

© 2023 г. Minghui Yang¹, Yue Shen², Zhaojie Zhou^{1,*}

¹ 250014 Ji'nan, School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, People's Republic of China

² 710055 Xi'an, School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, China

*e-mail: zhouzhaojie@sdu.edu.cn

Поступила в редакцию 09.07.2022 г.

Переработанный вариант 05.01.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Аппроксимация смешанными виртуальными элементами задачи оптимального управления четвертого порядка. Изучается метод смешанных виртуальных элементов для задачи распределенного оптимального управления дифференциальным уравнением в частных производных четвертого порядка. Путем введения вспомогательной переменной уравнение преобразуется к системе уравнений второго порядка. Предложена дискретная схема смешанного виртуального элемента для возникающей задачи. Получены априорные оценки погрешности для вспомогательного состояния, сопряженного состояния и управляющей переменной в нормах H^1 и L_2 . Приведенные численные эксперименты иллюстрируют полученные теоретические оценки.

Ключевые слова: метод смешанных виртуальных элементов, задача оптимального управления, оценка априорной ошибки.

DOI: 10.31857/S0044466923060200, **EDN:** UXBZNT

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

ОПТИМАЛЬНОЕ
УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.68

**ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ И ПАРАМЕТРОВ
В СИСТЕМАХ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

© 2023 г. А. И. Тятюшкин^{1,*}

¹ 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, Институт динамики систем и теории управления
им. В.М. Матросова СО РАН, Россия

*e-mail: tjat@icc.ru

Поступила в редакцию 09.10.2022 г.
Переработанный вариант 10.12.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Для задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты рассматривается итерационный метод поиска численного решения, основанный на редукции к конечномерной задаче и применении к последней алгоритма последовательной линеаризации с использованием модифицированной функции Лагранжа. Для решения линейных вспомогательных задач на итерациях метода используется метод приведенного градиента. Эффективность учета фазовых ограничений при расчете оптимального управления иллюстрируется численным решением задач из области аэродинамики и робототехники. Библ. 12. Фиг. 2.

Ключевые слова: оптимальное управление, управляющие параметры, фазовые ограничения, градиентные методы, модифицированная функция Лагранжа, метод приведенного градиента.

DOI: 10.31857/S0044466923060194, **EDN:** TRPXCS

ВВЕДЕНИЕ

Для прикладных задач оптимального управления характерны нелинейность управляемой системы, высокая размерность фазового пространства и наличие ограничений как на управление, так и на фазовые координаты (см. [1–10]). Дискретный аналог непрерывной задачи управления предполагает табличное представление управляющих функций на заданной сетке временного интервала. На итерациях численного метода оптимизации обычно осуществляется выбор таких числовых значений управляющих функций в узлах этой сетки, при которых с некоторой заданной точностью будут выполнены все ограничения задачи и улучшено значение целевого функционала. Таким образом, редукция к конечномерной задаче открывает возможность использования богатого арсенала методов нелинейного программирования для приближенного решения сложных задач оптимального управления (см. [2–4]).

Основой алгоритмического обеспечения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями являются специальные методы решения больших задач линейного программирования. Для решения задач линейного программирования, полученных дискретизацией линейных задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, в [4] рассматриваются различные по трудоемкости и по требованиям к объему памяти алгоритмы, учитывающие специфические свойства этих задач. Например, задачам, в которых доминирующую роль играют фазовые ограничения, соответствуют задачи линейного программирования с большим числом основных ограничений, а задачам с ограничениями только на правом конце траектории – задачи с большим числом переменных. Решение этих задач алгоритмами со специальным правилом выбора опорных строк и столбцов позволяет избежать появления плохо обусловленных матриц. Кроме того, применение специальной мультипликативной формы с плотной записью мультипликаторов для обратной опорной матрицы блочной структуры позволяет решать задачи больших размеров.

Рассматриваемый в настоящей статье численный метод также основан на редукции к конечномерной задаче оптимизации и конструктивно учитывает фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования (см. [3], [4]) для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала – модифицированного лагранжиана (см. [2]) при линеаризованных на полученном приближении фа-

зовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений (см. [7]). Программное обеспечение, разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления (см. [5], [6]), успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники (см. [5–12]).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан управляемый процесс с управляющими функциями $u_i(t)$, $i = \overline{1, r}$, и управляющими параметрами w_i , $i = \overline{1, p}$, в правых частях, а также с параметрами v_i , $i = \overline{1, \gamma}$, в начальных условиях

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, t), \quad x(t) \in E^n, \quad u(t) \in E^r, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ x(t_0) &= \Theta(v), \quad w \in R^p, \quad v \in R^\gamma, \end{aligned} \quad (1)$$

с терминальными условиями

$$I_i(u, w, v) = h_i(x(t_1)) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

и фазовыми ограничениями

$$J_i(u, w, v) = g_i(x(t), t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3)$$

Управление и параметры стеснены следующими ограничениями:

$$c_i(u, t) = 0, \quad t \in T, \quad i = \overline{1, l}, \quad (4)$$

$$u^H(t) \leq u(t) \leq u^B(t), \quad t \in T, \quad (5)$$

$$v^H \leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B. \quad (6)$$

Отметим, что размерности n , m , r , s , l , γ независимы между собой, T – отрезок времени, на котором управляющие функции могут изменять свои значения, а управляющие параметры остаются постоянными. Индексом “н” обозначены нижние границы изменения управляющих функций и параметров, а индексом “в” – верхние границы.

Требуется среди управляющих функций и параметров, удовлетворяющих ограничениям (4)–(6), найти такие, которые обеспечивают выполнение условий (3) для управляемого процесса (1) и приводят его в точку фазового пространства, где с заданной точностью будут выполнены условия (2), а функционал

$$I_0(u, w, v) = \Phi_0(x(t_1)) \quad (7)$$

достигнет наименьшего значения.

1.1. Редукция к конечномерной задаче

Для построения конечномерной задачи на заданном интервале T вводится сетка дискретизации с узлами t_0, t^1, \dots, t^N такими, что

$$t_0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = t_1. \quad (8)$$

Эта сетка может быть и неравномерной.

Управляющие функции $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, ищутся только в узлах (8), а для получения промежуточных значений $u^i(t)$, $i = \overline{1, r}$, используется либо кусочно-постоянная аппроксимация

$$u^i(t) = u^i(t^j) = u_j^i, \quad t \in [t^j, t^{j+1}],$$

либо кусочно-линейная

$$u^i(t) = \frac{(t^{j+1} - t)u_j + (t - t^j)u_{j+1}}{(t^{j+1} - t^j)}, \quad t \in [t^j, t^{j+1}]. \tag{9}$$

Тогда конечномерная задача, полученная дискретизацией на сетке (8) задачи (1)–(7), будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, w, t), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad x(t_0) = \Theta(v), \\ h_i(x(t^N)) &= 0, \quad i = \overline{1, m}, \\ g_i(x(t^j), t^j) &= 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N}, \\ c_i(u(t^j), t^j) &= 0, \quad i = \overline{1, l}, \quad j = \overline{0, N}, \\ u^H(t^j) &\leq u(t^j) \leq u^B(t^j), \quad t^j \in T, \\ u_j^H &= u^H(t^j), \quad u_j^B = u^B(t^j), \quad j = \overline{0, N}, \\ v^H &\leq v \leq v^B, \quad w^H \leq w \leq w^B, \\ \varphi(x(t^N)) &\rightarrow \min. \end{aligned} \tag{10}$$

Заметим, что в задаче (10) управляемый процесс (1) остается непрерывным, а в процессе счета он с требуемой точностью моделируется численным методом интегрирования.

1.2. Градиенты функционалов

Градиенты функционалов $I_j(u, w, v)$ с помощью функций

$$H^j(\psi_j, x, u, w, t) = \psi_j'(t) f(x, u, w, t)$$

и сопряженной системы

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_j &= -f_x(x, u, w, t)' \psi_j(t), \\ \psi_j(t_1) &= -h_x'(x(t_1)) \quad \text{при } j = \overline{1, m}, \quad \psi_j(t_1) = -\varphi_x^j(x(t_1)) \quad \text{при } j = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

традиционно определяются по формулам

$$\nabla_u I_j(u, w, v) = -H_u^j(\psi_j, x, u, w, v, t), \quad j = \overline{0, m}. \tag{12}$$

Фазовые ограничения (3) будем учитывать только в узлах сетки (8). Для каждого узла t^j , $j = \overline{1, N}$, и каждого ограничения $g_i(x(t^j), t^j) = 0$, $i = \overline{1, s}$, введем в рассмотрение вектор-функцию $\bar{\psi}_i^j(t)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\bar{\psi}}_i^j = -\frac{\partial f(x, u, w, v, t)}{\partial x} \bar{\psi}_i^j(t), \quad t \in [t_0, t^j], \quad \bar{\psi}_i^j(t^j) = -\frac{\partial g_i^j(x(t^j))}{\partial x}. \tag{13}$$

Введем также соответствующие этим решениям функции $\bar{H}^i(\bar{\psi}_i^j, x, u, w, v, t) = \bar{\psi}_i^j(t)' f(x, u, w, v, t)$. Тогда градиенты функций $g_i(x(t^j), t^j) = 0$, $i = \overline{1, s}$, для каждого узла t^j можно вычислить по формуле

$$\nabla_u J_i^j(u, w, v) = -\bar{H}_u^i(\bar{\psi}_i^j, x, u, w, v, t), \quad t_0 \leq t \leq t^j. \tag{14}$$

1.3. Линеаризация ограничений

Пусть теперь на k -й итерации внешнего метода на сетке (8) найдено $u^k(t^j)$ и ему соответствующее $x^k(t^j)$, $j = \overline{1, N}$. Тогда для расчета градиентов по управлению $\nabla_u I_i(u^k, w^k, v^k)$, $i = \overline{1, m}$, на этом приближении сопряженная система (11) m раз интегрируется от t_1 до t_0 с разными начальными условиями.

Далее по формуле (14) вычисляются градиенты по управлению $\Delta_u J_i^j(u^k, w^k, v^k)$, $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$. Для этого нужно s раз решить задачу Коши (13) для каждого узла t^j сетки (8), т.е. проинтегрировать систему $s \times N$ раз в среднем на половине отрезка T .

Так как правые части и начальные условия системы (1) зависят еще и от параметров, то необходимо иметь также градиенты функционалов I_i , $i = \overline{1, m}$, и J_i^j , $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$, по этим параметрам (см. [1]):

$$\nabla_v I_i(u^k, w^k, v^k) = -\Psi_i(t_0)' \Theta_v(v^k), \quad i = \overline{1, m}, \quad \nabla_w I_i(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t_1} \Psi_i(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (15)$$

$$\nabla_w J_i^j(u^k, w^k, v^k) = -\int_{t_0}^{t^j} \bar{\Psi}_i^j(t)' f_w(x^k, u^k, w^k, t) dt, \quad (16)$$

$$\nabla_v J_i^j(u^k, w^k, v^k) = -\bar{\Psi}_i^j(t_0)' \Theta_v(v^k), \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (17)$$

Используя полученные формулы (12)–(17) для расчета градиентов, линеаризуем ограничения (2) на k -м приближении:

$$I(u^k, w^k, v^k) + \sum_{j=0}^N \nabla_u I(u^k, w^k, v^k)'(u_j - u_j^k) + \nabla_w I(u^k, w^k, v^k)'(w - w^k) + \nabla_v I(u^k, w^k, v^k)'(v - v^k) = 0. \quad (18)$$

Здесь $I = (I_1, I_2, \dots, I_m)$, следовательно, имеем m линейных ограничений (18).

Далее линеаризуем ограничения (3) на k -м приближении. В силу громоздкости используем запись линеаризованных функционалов J_i^j , $i = \overline{1, s}$, $j = \overline{1, N}$, без аргументов в скобках для градиентов:

$$J_i^j(u^k, w^k, v^k) + \sum_{i=0}^j (\nabla_u J_i^j)'(u_i - u_i^k) + (\nabla_w J_i^j)'(w - w^k) + (\nabla_v J_i^j)'(v - v^k) = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (19)$$

Ограничения (19) представляют собой явную форму (через искомые переменные u, w, v) линеаризованных ограничений (3), причем вместо равенств, заданных для каждого момента $t \in T$, имеем N равенств, определенных в узлах сетки (8), и, следовательно, всего будем иметь $s \times N$ равенств.

Далее линеаризуем также условия (4):

$$c(u^k, t^j) + \nabla_u c(u^k, t^j)'(u_j - u_j^k) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (20)$$

где $c = (c_1, c_2, \dots, c_l)$, следовательно, в (20) имеем систему из l равенств.

Прямые ограничения на управление и параметры оставим без изменений:

$$u_j^H \leq u_j \leq u_j^B, \quad j = \overline{1, N}, \quad (21)$$

$$v_j^H \leq v_j \leq v_j^B, \quad j = \overline{1, \gamma}, \quad w_i^H \leq w_i \leq w_i^B, \quad i = \overline{1, p}. \quad (22)$$

Из полученной системы линейных уравнений (18)–(20) составляется матрица условий A со специальной блочной структурой для задачи линейного программирования. Прямыми ограничениями на переменные в задаче линейного программирования будут ограничения (20), (21).

2. МЕТОД ПРИВЕДЕННОГО ГРАДИЕНТА

Вместо линейной задачи, решаемой на итерациях известного метода линеаризации, в рассматриваемом здесь методе спроектированного лагранжиана на каждой его итерации решается задача минимизации нелинейной модифицированной функции Лагранжа при линеаризованных ограничениях исходной задачи. Эта задача решается методом приведенного градиента, который в отличие от симплекс-метода минимизирует нелинейную целевую функцию, и поэтому на его итерациях, кроме базисных и небазисных переменных, используются еще супербазисные переменные. Так как минимум нелинейной функции на итерациях может достигаться внутри допустимого многогранника решений, то некоторые небазисные переменные не будут принимать граничные значения, поэтому необходимо использовать еще и супербазисные переменные.

2.1. Модифицированная функция Лагранжа

Вводя векторные обозначения для равенств (2)–(4), построим модифицированную функцию Лагранжа для задачи (1)–(7):

$$\begin{aligned}
 L = & \varphi(x(t_1)) - \lambda^{k'} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h(x(t_1)) - \bar{h}^L] - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \mu^{k'}(t) [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [g(x(t), t) - \bar{g}^L]' [g(x(t), t) - \bar{g}^L] dt - \\
 & - \int_{t_0}^{t_1} \gamma^k(t) [c(u, t) - \bar{c}^L] dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} [c(u, t) - \bar{c}^L]' [c(u, t) - \bar{c}^L] dt,
 \end{aligned} \tag{23}$$

где $\bar{h}^L = h(x^k(t_1)) + h_x(x^k(t_1))\delta x(t_1)$, $\bar{g}^L = g(x^k(t), t) + g_x(x^k(t), t)\delta x(t)$, $\bar{c}^L = c(u^k(t), t) + c_u(u^k(t), t)\delta u(t)$, $\delta u = u - u^k$, $\delta x = x - x^k$, $0 \leq \rho \leq 1$, λ^k , $\mu^k(t)$, $\gamma^k(t)$ – множители Лагранжа.

Конечномерный аналог функционала (23), в котором переменные $x^k(t)$ определены через систему (1) по управлению $u^k(t)$, $t^j \in T$, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 L = & \varphi(x^N) - \lambda^{k'} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] + \frac{\rho}{2} [h(x(t^N)) - \bar{h}^L]' [h(x(t^N)) - \bar{h}^L] - \\
 & - \sum_{j=0}^N \mu_j^{k'} [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L]' [g(x(t^j), t^j) - \bar{g}^L] - \\
 & - \sum_{j=0}^N \gamma_j^{k'} [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L] + \frac{\rho}{2} \sum_{j=0}^N [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L]' [c(u_j, t^j) - \bar{c}^L],
 \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{h}^L &= h(x^k(t^N)) + h_x(x^k(t^N))(x(t^N) - x^k(t^N)), \\
 \bar{g}^L &= g(x^k(t^j), t^j) + g_x(x^k(t^j), t^j)(x(t^j) - x^k(t^j)), \\
 \bar{c}^L &= c(u^k(t^j), t^j) + c_u(u^k(t^j), t^j)(u_j - u_j^k), \quad j = \overline{0, N}.
 \end{aligned}$$

2.2. Матрица линеаризованных ограничений.

Построение вспомогательной задачи

Обозначив через $A[m + (l + s)(N + 1)] \times [r(N + 1) + p + \gamma]$ матрицу коэффициентов линейных равенств (11)–(15), через b – вектор их свободных членов размерности $m + (l + s)(N + 1)$ и через z -вектор искоемых переменных $(u_j, j = \overline{0, N}; w; v)$ размерности $r(N + 1) + p + \gamma$ соответственно, поставленную задачу запишем так:

$$L(z) \rightarrow \min, \quad Az = b, \quad z^H \leq z \leq z^B. \tag{25}$$

Для удобства изложения алгоритма будем, как принято в линейном программировании, считать размеры задачи (25) равными m, n . Для вектора z и матрицы A введем разбиение $z = (z_B, z_S, z_N)$, $A = (B, S, N)$, соответствующее базисным, супербазисным и небазисным переменным. Такое разбиение отличается от традиционного наличием супербазисных переменных, которые не достигают граничных значений из-за нелинейности целевой функции, но и не являются базисными.

В соответствии с таким разбиением система уравнений (25) переписывается в виде

$$Bz_B = -Sz_S - Nz_N + b. \tag{26}$$

2.3. Итерации метода приведенного градиента

Шаг. 1. Вычисление градиента целевой функции. Чтобы применить традиционную схему для расчета градиента функции $L(z)$ (через функцию $H^j(\psi, x, u, t) = \dot{\psi}'(t)f(x, u, t) - F(x, u, t)$, где $F(x, u, t)$ – подинтегральная функция целевого функционала) используем непрерывное представление функционала (23):

$$H(\psi, x, u, w, t) = \psi'(t)f(x, u, w, t) + \mu^k(t)'[g(x, t) - \bar{g}^L] - \frac{\rho}{2}[g(x, t) - \bar{g}^L]'[g(x, t) - \bar{g}^L] + \\ + \gamma^k(t)'[c(u, t) - \bar{c}^L] - \frac{\rho}{2}[c(u, t) - \bar{c}^L]'[c(u, t) - \bar{c}^L], \tag{27}$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x, u, w, t)' \psi(t) - \mu^k(t)' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)] + \\ + \rho [g(x, t) - \bar{g}^L]' [g_x(x, t) - g_x(x^k, t)], \\ \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) + \lambda^{k'} [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))] - \\ - \rho [h(x(t_1)) - \bar{h}^L]' [h_x(x(t_1)) - h_x(x^k(t_1))], \tag{28}$$

тогда

$$\nabla_u L = H_u(\psi, x, u, w, t) = -f_u(x, u, w, t)' \psi(t) + \\ + [c_u(u, t) - c_u(u^k, t)]' [-\gamma^k(t) + \rho(c(u, t) - \bar{c}^L)]. \tag{29}$$

Здесь для $\bar{h}^L, \bar{g}^L, \bar{c}^L$ использованы те же обозначения, что и в (23). Интегрируя в обратном времени сопряженную систему (27)–(28), будем считать интегралы в формулах для градиентов и запоминать их значения в узлах сетки. Одновременно аналогично вычисляются градиенты по параметрам $\nabla_w L$ и $\nabla_v L$. Таким образом, будет найден градиент $L(z)$:

$$\nabla L(z) = (\nabla_u L, \nabla_v L, \nabla_w L).$$

Обозначим его через g и выполним соответствующее разбиение $g = (g_B, g_S, g_N)$.

Из решения системы $B'\pi = g_B$, где B – базисная матрица, найдем вектор двойственных переменных (потенциалов) π и вычислим $\Delta = g - A'\pi$ – вектор оценок.

Выполним разбиение $\Delta = (\Delta_B, \Delta_S, \Delta_N)$, в котором Δ_S называется вектором приведенного градиента.

При $\|\Delta_S\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – заданная погрешность, имеем локальный оптимум по супербазисным переменным и проверим следующий критерий оптимальности (п. 2). В противном случае перейдем к п. 3.

Шаг. 2. Проверка критерия оптимальности

$$\Delta_i \geq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^{H_i}; \quad \Delta_i \leq 0 \quad \text{при} \quad z_i = z_i^B, \quad i \in I_N,$$

и расширение множества супербазисных переменных. При выполнении этих условий процесс прекращается. В противном случае среди небазисных компонент в Δ_N , нарушающих эти условия, находится максимальная по модулю компонента Δ_{j_0} , $j_0 \in I_N$, к матрице S добавляется столбец

A_{j_0} , к вектору Δ_S — компонента Δ_{j_0} . Здесь можно выполнить также перенос и других столбцов матрицы N , оценки Δ_j которых близки по значениям к Δ_{j_0} , в матрицу S , чтобы сократить число дальнейших итераций.

Шаг 3. Построение направления спуска. Оно строится по супербазисным переменным

$$p_S = \Delta_S, \quad Bp_B = S\Delta_S, \quad p_N = 0,$$

т.е., решив линейную систему, найдем p_B и получим $p = (p_B, p_S, p_N)'$.

Шаг 4. Определение максимально возможного шага вдоль направления p . Находим максимальное значение α , при котором $z + \alpha p$ остается допустимым: $\alpha_{\max} = \alpha_{i_0} = \min \alpha_i$,

$$\alpha_i = \begin{cases} (z_i^B - z_i)/p_i, & \text{если } p_i > 0, \\ (z_i^H - z_i)/p_i, & \text{если } p_i < 0, \\ \infty, & \text{если } p_i = 0. \end{cases}$$

Если $\alpha_{\max} = 0$, то перейти к п. 6.

Шаг 5. Определение оптимального шага

$$\alpha^* = \arg \min_{0 \leq \alpha \leq \alpha_{\max}} L(z + \alpha p).$$

Полагаем $z = z + \alpha^* p$. Если $\alpha^* < \alpha_{\max}$, то переходим в п. 1. В этом случае ни одна из компонент z_B и z_S не достигла своей границы.

Шаг 6. Изменение базиса. При $\alpha^* = \alpha_{\max}$ одна из базисных или супербазисных переменных z_{i_0} достигает своей границы. Тогда она переводится в небазисные, а вместо нее вводим в базис одну из супербазисных переменных. При этом выбирается наиболее удаленная от своих границ переменная, чтобы обеспечить хорошую обусловленность новой базисной матрицы.

Здесь можно также присвоить граничные значения супербазисным переменным, близким к своим границам, чтобы избежать лишних итераций, переводящих их на границы. Однако нужно следить за тем, чтобы вектор z_B , найденный из соотношения (26), удовлетворял заданным ограничениям. В противном случае нужно сделать более жесткий отбор близких к границе переменных (уменьшив ε , по которому определяются близкие элементы). Это сокращает поиск управлений, например, релейного типа, которые состоят в основном из граничных, т.е. небазисных, переменных вектора z .

Далее, изменив разбиение z и A , переходим в п. 1 на повторение итерации метода приведенного градиента.

3. АЛГОРИТМ МЕТОДА СПРОЕКТИРОВАННОГО ЛАГРАНЖИАНА

Рассмотрим теперь полный алгоритм решения исходной задачи (1)–(7).

1. С заданным управлением $u_j^k, j = \overline{0, N}$, интегрируется система (1), и в узлах сетки запоминаются точки фазовой траектории $x_j^k, j = \overline{0, N}$. Здесь k — номер итерации (первый раз $k = 0$).

На полученном решении линеаризуются ограничения исходной задачи и строится вспомогательная задача (18)–(22), (24).

2. Методом приведенного градиента решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа (24) при линейных ограничениях (18)–(22).

В результате будут найдены новые приближения для управления $u_j^{k+1}, j = \overline{0, N}$, параметров w^{k+1} и v^{k+1} , а также для двойственных переменных λ^{k+1} и $\mu_j^{k+1}, j = \overline{0, N}$.

3. Проверяется критерий окончания итерационного процесса, как по прямым, так и по двойственным переменным:

$$\begin{aligned} |J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})| / (1 + \alpha^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, m}, \\ |J_i(u^{k+1}, w^{k+1}, v^{k+1})| / (1 + \alpha^{k+1}) &\leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha^{k+1} = \max \left\{ \left\| u_j^{k+1} \right\|, \quad j = \overline{0, N}; \quad |w_i|, \quad i = \overline{1, p}; \quad |v_l|, \quad l = \overline{1, \gamma} \right\};$$

$$\left| \lambda_j^k - \lambda_j^{k+1} \right| / (1 + \Theta^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad j = \overline{1, m};$$

$$\left| \mu_{ij}^k - \mu_{ij}^{k+1} \right| / (1 + \Theta^{k+1}) \leq \varepsilon, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N};$$

$$\Theta^{k+1} = \max \left\{ \left| \lambda_j^{k+1} \right|, \quad j = \overline{1, m}; \left| \mu_{ij}^{k+1} \right|, \quad i = \overline{1, s}, \quad j = \overline{0, N} \right\}.$$

При нарушении хотя бы одного из этих условий выполняется новая $(k + 1)$ -я итерация из п. 1. Если же эти неравенства выполняются для заданного $\varepsilon > 0$, то итерационный процесс прекращается, а найденные u_j^{k+1} , $j = \overline{0, N}$, w^{k+1} и v^{k+1} выдаются в качестве приближенного решения задачи оптимального управления.

Таким образом, на каждой итерации метода спроектированного лагранжиана решается вспомогательная задача минимизации модифицированной функции Лагранжа при линейризованных на k -м приближении ограничениях. При решении вспомогательной задачи находятся новые значения двойственных переменных – множителей Лагранжа λ_j^{k+1} , $j = \overline{1, m}$, и $\mu_j^{k+1}(t)$, $j = \overline{1, s}$, $t \in T$. Связь между значениями λ^k , $\mu^k(t)$ и λ^{k+1} , $\mu^{k+1}(t)$ устанавливается необходимым условием оптимальности для управления u^{k+1} :

Теорема. Если u^{k+1} – оптимальное решение вспомогательной задачи (18)–(22), (24), то найдутся такие λ^{k+1} и $\mu^{k+1}(t)$, $t \in T$, которые будут удовлетворять следующим условиям стационарности:

$$G(t) = -f_u(x^k, u^k, w^k, t)' \eta(t) - f_u(x^{k+1}, u^{k+1}, w^{k+1}, t)' \psi(t) = 0,$$

где $\eta(t)$ и $\psi(t)$ – решения систем

$$\dot{\eta}(t) = -f_x(x^k, u^k, w^k, t)' \eta(t) - g_x(x^k)' (\mu^{k+1}(t) - \bar{\mu}^k(t)), \quad t \in T, \quad \eta(t_1) = \varphi_x(x^k(t_1))' (\lambda^{k+1} - \bar{\lambda}^k);$$

$$\dot{\psi}(t) = -f_x(x^{k+1}, u^{k+1}, w^{k+1}, t)' \psi(t) - g_x(x^{k+1})' \bar{\mu}^k, \quad t \in T,$$

$$\psi(t_1) = -\varphi_x^0(x^{k+1}(t_1)) + \varphi_x(x^{k+1}(t_1))' \bar{\lambda}^k;$$

$$\bar{\lambda}^k = \lambda^k - \rho (I(u^{k+1}) - I^L(u^k, u^{k+1})), \quad \bar{\mu}^k(t) = \mu^k(t) - \rho (J(u^{k+1}, t) - J^L(u^k, u^{k+1}, t)),$$

$$t \in T, \quad \varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)', \quad g = (g^1, \dots, g^s)'.$$

Доказательство теоремы для аналогичной задачи приведено в [6].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

На основе изложенных в настоящей статье численных методов разработано программное обеспечение (см. [6]), с помощью которого были решены приведенные ниже задачи оптимального управления. Задача п. 4.1 содержит параметры в начальных условиях и имеет ограничения, как на управляющие функции, так и на фазовые координаты, а также терминальные условия типа равенств, что соответствует общей постановке, приведенной в начале статьи. Задача быстрого действия в этой постановке решается путем объявления времени T – длительности процесса параметром. Задача п. 4.2 иллюстрирует случай, когда фазовые ограничения (3) заданы функциями от фазовых координат и тоже является задачей быстрого действия – перевода из точки в точку за минимальное время. В обеих задачах управлением является вектор-функция, состоящая из 4 и 2 управляющих функций соответственно.

4.1. Задача об оптимальном развороте самолета (см. [2])

Управляемый процесс описывается системой

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4 \cos x_5 \cos x_6, & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2 &= x_4 \sin x_5, & x_2(0) &= 5000, \\ \dot{x}_3 &= -x_4 \cos x_5 \sin x_6, & x_3(0) &= 0, \\ \dot{x}_4 &= g \left[\frac{x_8 P \cos \alpha - C_x q s}{x_7} - \sin x_5 \right], & x_4(0) &= 300, \\ \dot{x}_5 &= g \frac{x_9 N \cos x_{11} - \cos x_5}{x_4}, & x_5(0) &= 0, \\ \dot{x}_6 &= -g \frac{x_9 N \sin x_{11}}{\cos x_5}, & x_6(0) &= 0, \\ \dot{x}_7 &= -C_s, & x_7(0) &= 20000, \\ \dot{x}_8 &= u_1, & x_8(0) &= V_1, \\ \dot{x}_9 &= u_2, & x_9(0) &= 1/N(0), \\ \dot{x}_{10} &= u_3, & x_{10}(0) &= V_2, \\ \dot{x}_{11} &= u_4, & x_{11}(0) &= 0, \quad t \in [0, T], \\ q &= \frac{(3.3 \times 10^{-10} x_2^2 - 1.155 \times 10^{-5} x_2 + 0.125) x_4^2}{2}, & s &= 55, \quad g = 9.81, \\ P &= \left(10 - \frac{x_4^2}{a^2(x_2)} \right) \frac{25000 - x_2}{12.5}, & C_s &= \frac{[0.7 + 2(x_8 - 0.3)^2] x_8 P}{3600}, \\ N &= \min \left(\frac{q s}{x_7}, \frac{150000}{x_7}, 8 \right), & C_x &= 0.02 + 3.174 \alpha^2 + 0.03 x_{10}, \\ a(x_2) &= 340.3 - 4.08 \times 10^3 x_2, & \alpha &= x_9 N x_7 / (x_8 P + 4.6 q s), \end{aligned}$$

где V_1, V_2 – оптимизируемые параметры.

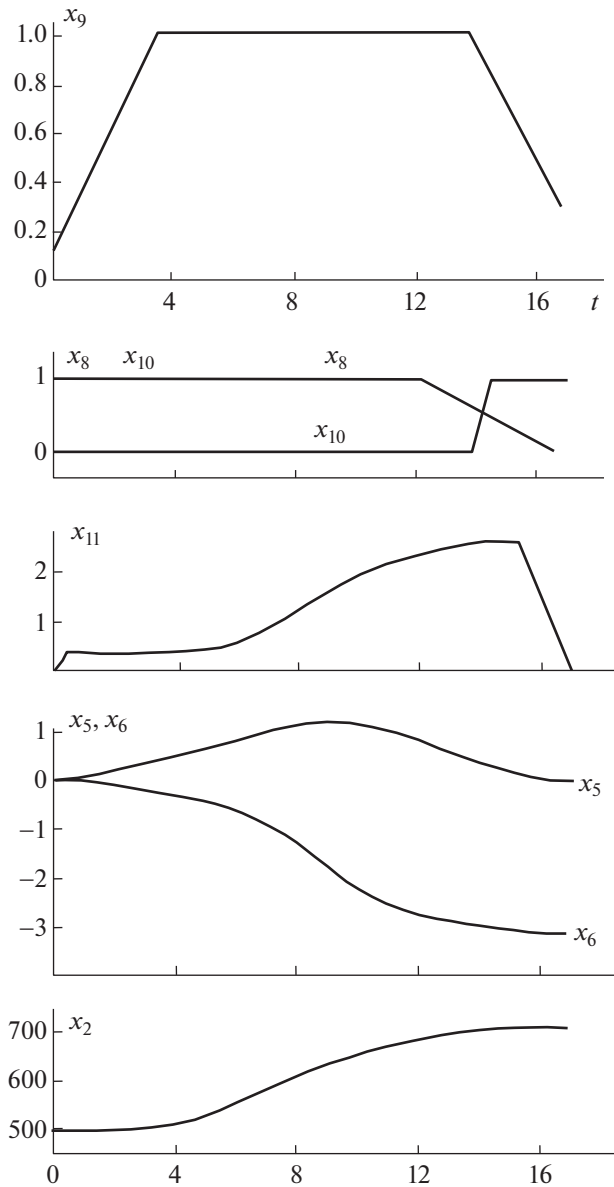
Требуется найти минимум функционала $I(u) = T$ и удовлетворить ограничениям

$$x_2(T) = 7000, \quad x_5(T) = 0, \quad x_6(T) = -\pi, \quad x_9(T) = \frac{1}{N(T)}, \quad x_{11}(T) = 0,$$

$$0.05 \leq x_8(t) \leq 1, \quad 0.01 \leq x_9(t) \leq 1, \quad 0 \leq x_{10}(t) \leq 1, \quad t \in [0, T],$$

$$|u_1(t)| \leq 0.2, \quad |u_2(t)| \leq 0.25, \quad |u_3(t)| \leq 1, \quad |u_4(t)| \leq 1.57, \quad t \in [0, T].$$

Для сглаживания функции $N(x)$ применялся специальный метод аппроксимации (как и в [2]). Начиная с приближения $T = 21, V_1 = 1, V_2 = 1, u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0, u_4(t) = 1.5 \cos\left(\frac{\pi}{21}t\right) \frac{\pi}{21}$, $t \in [0, T]$, получены наименьшее значение функционала $I = 16.9944$ и следующие значения оптимизируемых параметров $V_1 = 1, V_2 = 0$. На найденном решении ограничения выполнены с максимальной по модулю невязкой, равной 8×10^{-7} . На фиг. 1 приведен вид фазовых координат, графики управляющих функций совпадают с графиками, приведенными в [2].

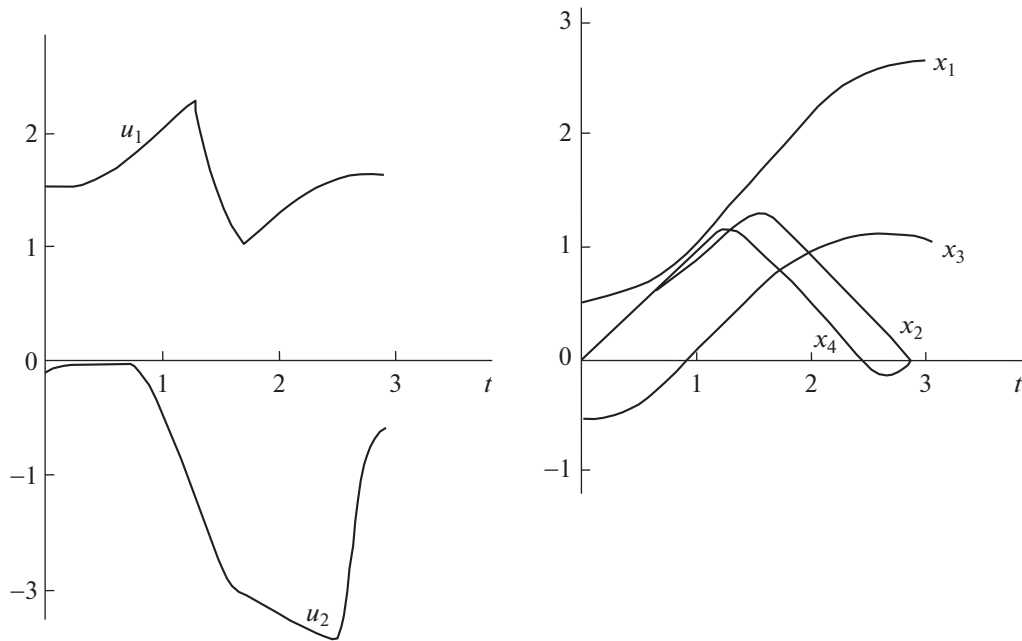


Фиг. 1. Графики фазовых координат в задаче о развороте самолета.

4.2. Задача об оптимальном управлении манипулятором робота

Динамика движения манипулятора промышленного робота описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{[M_1(x, u) - F_1(x)]a_{22} - [M_2(x, u) - F_2(x)]a_{12}(x)}{a_{11}a_{22} - a_{12}(x)a_{21}(x)}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= \frac{[M_2(x, u) - F_2(x)]a_{11} - [M_1(x, u) - F_1(x)]a_{21}(x)}{a_{11}a_{22} - a_{12}(x)a_{21}(x)}, \end{aligned}$$



Фиг. 2. Графики управлений и фазовых координат для задачи о роботе.

где

$$M_1(x, u) = -c_1(x_1 - u_1), \quad M_2(x, u) = -c_2(x_3 - x_1 - u_2),$$

$$F_1(x) = -m_1 l_1 R_2 \sin(x_3 - x_1) x_2^2, \quad F_2(x) = m_2 l_2 R_2 \sin(x_3 - x_1) x_4^2,$$

$$a_{11} = m_1 \rho_1^2 + m_2 l_1^2, \quad a_{12} = a_{21} = m_2 R_1 l_1 \cos(x_3 - x_1), \quad a_{22} = m_2 \rho_2^2.$$

Для рассматриваемой модели робота $m_1 = 7.62$, $m_2 = 8.73$, $R_1 = 0.239$, $R_2 = 0.251$, $\rho_1 = 0.968$, $\rho_2 = 0.973$, $l_1 = 0.5$, $l_2 = 0.67$, $c_1 = c_2 = 10$. На траекторию движения накладываются ограничения $|M_i(x, u)| \leq 10$, $i = 1, 2$, $\pi/6 \leq x_1(t) \leq 5/6\pi$, $\pi/3 \leq x_1(t) - x_3(t) \leq 5/6\pi$, $t \in [0, T]$.

Необходимо найти управление, переводящее систему из точки $x'(0) = (\pi/6, 0, -\pi/6, 0)$ в точку $x'(T) = (5/6\pi, 0, \pi/3, 0)$ за минимальное время T .

Начиная с приближения $T = 4$, $u_1(t) = 0$, $u_2(t) = 0$, $t \in [0, T]$, было получено решение, на котором невязки по ограничениям не превысили 10^{-3} , а значение функционала (за минимальное время T) составило 2.88. Вид оптимального управления и соответствующих ему фазовых координат приведен на фиг. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в статье численные методы оптимизации параметров и управляющих функций конструктивно учитывают фазовые ограничения путем применения эффективных алгоритмов линейного и нелинейного программирования (см. [3], [4]) для решения вспомогательных задач большой размерности. На внешних итерациях этого метода решаются задачи минимизации специально сконструированного нелинейного функционала – модифицированного лагранжиана при линеаризованных на полученном приближении фазовых ограничениях. Приближенное решение этих задач находится итерационным методом приведенного градиента с использованием сопряженной системы для расчета градиентов. Высокая трудоемкость внешней итерации этого алгоритма окупается тем, что наряду с улучшением управления здесь одновременно уточняются и значения двойственных переменных, через которые формируются необходимые условия оптимальности и вычисляется оптимальное управление в задаче с фазовыми ограничениями. Вместе с тем следует отметить, что современные информационные технологии и многопроцессорная

вычислительная техника допускают достаточно эффективную реализацию сложных алгоритмов, например, путем применения параллельных вычислений. Программное обеспечение (см. [6]), разработанное на основе данного подхода и реализующее многометодную технологию расчета оптимального управления и оптимальных параметров, успешно применяется для решения сложных прикладных задач оптимального управления из различных областей науки и техники. Применение эффективной технологии расчета управления особенно актуально в управляемых системах реального времени, например, в системах управления летательными аппаратами, обладающими высокой маневренностью. Например, при проектировании СУ-57 (мирового лидера по маневренности) для решения серии задач оптимального маневрирования (см. [11], [12]) использовалось данное программное обеспечение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971.
2. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
3. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Тятюшкин А.И.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1: Линейные задачи. Минск: Университетское, 1984.
5. *Тятюшкин А.И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1992.
6. *Тятюшкин А.И.* Многометодная технология оптимизации управляемых систем. Новосибирск: Наука, 2006.
7. *Тятюшкин А.И.* Параллельные вычисления в задачах оптимального управления // Сиб. журнал вычисл. матем. 2000. Т. 3. № 2. С. 181–190.
8. *Тятюшкин А.И.* Численные методы решения задач оптимального управления с параметрами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 10. С. 1615–1630.
9. *Тятюшкин А.И.* Многометодная оптимизация управления в сложных прикладных задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 2. С. 235–246.
10. *Тятюшкин А.И.* Многометодные алгоритмы для решения сложных задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 189–205.
11. *Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е.* Численное исследование свойств оптимального управления в одной задаче преследования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2005. № 3. С. 104–113.
12. *Тятюшкин А.И., Федунев Б.Е.* Возможности защиты от атакующей ракеты задней полусферы самолета вертикальным маневром // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 1. С. 111–125.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.96

**ОБ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ВОЗМУЩЕНИЯМИ
В ВИДЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

© 2023 г. В. Ф. Чистяков^{1,*}

¹ 664033 Иркутск, ул. Лермонтова, 134, ИДСТУ СО РАН, Россия

*e-mail: chist@icc.ru

Поступила в редакцию 31.08.2022 г.
Переработанный вариант 27.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Рассматриваются линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка с тождественно вырожденной в области определения матрицей при старшей производной искомой вектор-функции и с нагружениями в виде интегральных операторов Вольтерра и Фредгольма. При постановке начальных задач задаются проекторы на допустимые множества начальных векторов. Особое внимание уделено системам при наличии на отрезке интегрирования особых точек. В статье формализовано понятие особой точки. В случае дифференциальных уравнений дана их классификация. Приведен ряд примеров, иллюстрирующих теоретические результаты. Библ. 30.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, линейные системы, операторы Вольтерра и Фредгольма, пространство решений, размерность, индекс, особые точки.

DOI: 10.31857/S0044466923060066, **EDN:** TRQOZZ

1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\Lambda_k x := \sum_{i=0}^k A_i(t)x^{(i)}(t) = f, \quad t \in T, \quad (1)$$

и соответствующие им системы интегродифференциальных уравнений (ИДУ)

$$(\Lambda_k + \mathcal{V})y := \sum_{i=0}^k A_i(t)y^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^t \mathcal{K}(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in T, \quad (2)$$

$$(\Lambda_k + \mathcal{V} + \lambda\Phi)z := \sum_{i=0}^k A_i(t)z^{(i)}(t) + \int_{\alpha}^t \mathcal{K}(t,s)z(s)ds + \lambda \int_{\alpha}^{\beta} K(t,s)y(s)ds = f(t), \quad t \in T, \quad (3)$$

где $T = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}^1$, $A_i(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, $K(t,s)$ суть $(n \times m)$ -матрицы, определенные в областях T и $T \times T$ соответственно, $x \equiv x(t)$, $y \equiv y(t)$, $z \equiv z(t)$ – искомые и $f \equiv f(t)$ – известная вектор-функции соответственно, $x^{(i)}(t) = (d/dt)^i x(t)$, $x^{(0)}(t) = x(t)$, λ – скалярный параметр (в общем случае комплексный). Ниже предполагается, что входные данные систем (1)–(3) обладают гладкостью, необходимой при проведении рассуждений, и выполнено условие

$$\det A_k(t) = 0 \quad \forall t \in T. \quad (4)$$

При моделировании природных и технических процессов, начиная с 70-х годов прошлого века, встречаются системы, включающие в себя взаимосвязанные ОДУ различных порядков, алгебраические уравнения, интегральные уравнения (ИУ) Вольтерра и Фредгольма I и II рода (см., например, [1–5]). Эту совокупность уравнений можно записать в общем случае в виде систем вида (1)–(3), удовлетворяющих условию (4). Но в общем случае, есть примеры систем (1)–(3), ко-

торые нельзя разделить неособенными преобразованиями на подсистемы ОДУ, алгебраические уравнения и ИУ.

Системы (1), удовлетворяющие условию (4), называют обычно в настоящее время линейными дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ) (см., например, [4]). Используются также термины “сингулярные системы” (см. [1]), “дескрипторные системы” (см. [5]), “алгебро-дифференциальные системы” (АДС) (см. [6]). Системы вида (2), (3) авторы называют вырожденными системами интегродифференциальных уравнений (ИДУ).

Под решениями систем (1)–(3) мы понимаем любые k -раз дифференцируемые на T вектор-функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, которые обращают системы в тождество на T при подстановке.

При изучении систем вида (1)–(3) обычно ставится задача Коши: предполагается, что в начальной точке решения систем удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} x(\alpha) &= (a_0^\top a_1^\top \dots a_{k-1}^\top)^\top, \\ y(\alpha) &= (b_0^\top b_1^\top \dots b_{k-1}^\top)^\top, \quad z(\alpha) = (e_0^\top e_1^\top \dots e_{k-1}^\top)^\top, \end{aligned} \tag{5}$$

где $x = (x^\top \dot{x}^\top \dots (x^{(k-1)})^\top)^\top$, $y = (y^\top \dot{y}^\top \dots (y^{(k-1)})^\top)^\top$, $z = (z^\top \dot{z}^\top \dots (z^{(k-1)})^\top)^\top$, $\dot{x}^\top \equiv (d/dt)x^\top$, a_i, b_i, e_i – заданные векторы из \mathbf{R}^n , $i = \overline{0, k-1}$, \top – символ транспонирования.

Замечание 1. Очевидно, что для существования решений задач Коши для систем (1)–(3) необходимо (но не всегда достаточно) выполнение критерия Кронекера–Капелли в точке $t = \alpha$ для векторов $x^{(k)}(\alpha)$, $y^{(k)}(\alpha)$, $z^{(k)}(\alpha)$, а именно,

$$\begin{aligned} \text{rank } A_k(\alpha) &= \text{rank} \left(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i \right), \quad \text{rank } A_k(\alpha) = \text{rank} \left(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{b}_i \right), \\ \text{rank } A_k(\alpha) &= \text{rank} \left(A_k(\alpha) \mid f(\alpha) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{e}_i - \int_{\alpha}^{\beta} K(\alpha, s) z(s) ds \right), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\bar{a}_i = A_i(\alpha)a_i$, $\bar{b}_i = A_i(\alpha)b_i$, $\bar{e}_i = A_i(\alpha)e_i$. Итак, для разрешимости задач Коши необходимо, чтобы начальные векторы a_i, b_i, e_i в формулах (5) принадлежали некоторым линейным многообразиям $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z \subset \mathbf{R}^m$.

Поэтому начальные задачи для систем (1)–(3) ставятся ниже в виде соотношений

$$P_x x(\alpha) = a, \quad P_y y(\alpha) = b, \quad P_z z(\alpha) = e, \tag{7}$$

где P_x, P_y, P_z суть $(m \times n)$ – заданные матрицы полного ранга, $m = kn$, $m \leq m$, a, b, e – заданные векторы, Задачи (1)–(3), (7) при $P_x, P_y, P_z = E_m$ совпадает с задачами Коши, где E_m – единичная матрица размерности m . Матрицы P_x, P_y, P_z в формулах (7) выбираются проекторами начальных данных на $\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z$. В школе Г.А. Свиридюка условия вида (7) называют условиями Шоуолтера–Сидорова (см. [7]). Для ДАУ в такой форме начальные условия записывал Ю.Е. Бояринцев (см. [8]).

Если вектор-функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ являются решениями и удовлетворяют условиям (7), то они являются решениями задач (1)–(3), (7).

Под особыми точками (ОТ) систем (1)–(3) мы неформально будем понимать любую точку на отрезке T , при наличии которой система не имеет решений на T , теряется единственность, меняется размерность многообразия решений и т.д.

Системы (1)–(3) приводимы к нормальной форме (форме Коши) умножением на матрицы $A_k^{-1}(t)$, $t \in T$, если $\det A_k(t) \neq 0 \forall t \in T$. При непрерывных входных данных для систем ОДУ (1) в нормальной форме справедлив ряд теорем существования (см., например, [9]), на которых базируются теоремы о разрешимости систем ИДУ (2), (3). При наличии изолированных точек $t_* \in T$ со свойством $\det A_k(t_*) = 0$ условия этих теорем нарушаются.

В [9–11] изложены методы исследования систем ОДУ при $A_k(t) = (t - t_*)^i E_n$, $i = 1, 2, \dots$. Часто предполагается, что t – комплексная переменная и $t_* = 0$. В ряде работ ОТ указаны в виде усло-

вий $\det A_k(\alpha) = 0, A_k(\alpha) = 0$ (см., например, [12–17]). Большое внимание уделено методам исследования, основанных на введении малого параметра в системы ОДУ или ДАУ с ОТ и построении асимптотических приближений к решениям (см., например, [18], [19]). Точки изменения ранга матрицы $A_k(t)$ для вырожденных систем ИДУ, в частности, для ДАУ, в отличие от систем с вырождением $A_k(t)$ в изолированных точках, не всегда совпадают с ОТ, и нужны методики их поиска. Для ДАУ исследования в этом направлении проводились в [2], [6], [20].

Основными задачами настоящей статьи являются: 1) формализация понятия ОТ систем ИДУ и ДАУ и их классификация; 2) изучение влияния ОТ на разрешимость ДАУ.

Замечание 2. Для упрощения записи указание зависимости от t в работе будет иногда опускаться, если это не вызывает путаницы. Используются следующие обозначения: включения $M(\zeta) \in C(U), M(\zeta) \in C^i(U), i \geq 1, M(\zeta) \in C^\infty(U), M(\zeta) \in C^A(U)$, где $M(\zeta)$ – некоторая матрица (вектор-функция) $U = T, \zeta = t$ или $U = T \times T, \zeta = (t, s)$, означают, что все элементы $M(\zeta)$ являются непрерывными, i -раз дифференцируемыми, бесконечно-дифференцируемыми, вещественно-аналитическими функциями в U соответственно.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Нам потребуются следующие понятия и факты.

Определение 1 (см., например, [1]). Полуобратной матрицей к $(m \times n)$ -матрице M , называется $(n \times m)$ -матрица M^- , удовлетворяющая уравнению $MM^-M = M$.

Полуобратная матрица определена для любой $(m \times n)$ -матрицы M . Если матрица M квадратная и неособенная, то $M^{-1} = M^-$. Матрица M^- определена в общем случае неединственным образом (ее частным случаем является псевдообратная матрица M^+).

Важную роль в статье играет утверждение В. Долезая (см., например, [21]).

Лемма 1. Пусть

- 1) $(m \times n)$ -матрица $M(t) \in C^A(T)$;
- 2) $\text{rank } M(t) \leq r, t \in T$.

Тогда существуют $(m \times m)$ -матрица $L(t) \in C^A(T)$ и $(n \times n)$ -матрица $R(t) \in C^A(T)$ со свойствами $\det L(t) \det R(t) \neq 0 \forall t \in T, L(t)M(t)R(t) = \begin{pmatrix} M_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $M_{11}(t)$ – $(r \times r)$ -блок, $\det M_{11}(t) \neq 0$ на T .

Из формулы Лейбница для дифференцирования произведений вытекает формула

$$d_i[MF] = \mathcal{M}_i[M]d_i[F], \tag{8}$$

где $M \equiv M(t), F \equiv F(t)$ – некоторые матрицы подходящей размерности из $C^i(T)$,

$$d_i[M] = \begin{pmatrix} M \\ (d/dt)M \\ \dots \\ (d/dt)^i M \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i[M] = \begin{pmatrix} C_0^0 M & 0 & \dots & 0 \\ C_1^0 M^{(1)} & C_1^1 M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_i^0 M^{(i)} & C_i^1 M^{(i-1)} & \dots & C_i^i M \end{pmatrix},$$

$C_i^j = i!/j!(i-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Поставим в соответствие системе (1) эквивалентное ДАУ первого порядка

$$A(t)\dot{x} + B(t)x = \begin{pmatrix} E_\nu & 0 \\ 0 & A_k(t) \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 0 & -E_\nu \\ A_0(t) & \tilde{A}(t) \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in T, \tag{9}$$

где $\nu = (k-1)n, \tilde{A}(t) = (A_1(t) A_2(t) \dots A_{k-1}(t))$. Следствием известных теорем (см., например, [9, с. 66]) является такое утверждение.

Теорема 1. Пусть в системе (1)

- 1) $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}(T), i = \overline{0, k}$;
- 2) $\det A_k(t) \neq 0 \forall t \in T$.

Тогда

1. Система (1) разрешима на T и все ее решения представимы в виде суммы

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \quad \psi(t) = Vf = \int_{\alpha}^t K(t, s)f(s)ds, \quad (10)$$

где $X_d(t)$ есть $(n \times d)$ -матрица из $\mathbf{C}^k(T)$, $d = nk$, $\check{X}_{k-1}(t) = d_{k-1}[X_d(t)]$ – фундаментальная матрица системы (9), $d_{k-1}[\cdot]$ – оператор из формул (8), $\det \check{X}_{k-1}(t) \neq 0 \forall t \in T$, $K(t, s)$ есть $(n \times n)$ -матрица, $\partial^j K(t, s)/\partial t^j|_{t=s} = 0 \forall t \in T, j = \overline{0, k-1}$, c – вектор произвольных постоянных;

2. Существует единственное решение системы (1), проходящее через любую заданную точку $(x(\vartheta) = a \in \mathbf{R}^m, \vartheta \in T)$.

Следствие 1. Пусть в системах (2), (3)

- 1) $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}(T), i = \overline{0, k}, \mathcal{H}(t, s), K(t, s) \in \mathbf{C}(T \times T)$;
- 2) $\det A_k(t) \neq 0 \forall t \in T$.

Тогда

1. Система (2) разрешима на T и все ее решения представимы в виде суммы

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_{\alpha}^t \hat{K}(t, s)\psi(s)ds, \quad (11)$$

где $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}$, $\check{V} = V \circ \mathcal{V}$, $\det \check{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$, $\check{Y}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Y_d(t)]$, $\hat{K}(t, s)$ есть $(n \times n)$ -матрица, $\partial^j \hat{K}(t, s)/\partial t^j|_{t=s} = 0 \forall t \in T, j = \overline{0, k-1}$, c – вектор произвольных постоянных;

2. Существует единственное решение системы (2), проходящее через точку $y(\alpha) = b$;

3. Система (3) разрешима на T за исключением счетного множества значений параметра λ и все ее решения представимы в виде суммы

$$z(t, c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda\hat{\Phi}\hat{\psi}, \quad \hat{\Phi}\hat{\psi} = \int_{\alpha}^{\beta} \hat{K}(t, s, \lambda)\hat{\psi}(s)ds, \quad (12)$$

где $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda\hat{\Phi}Y_d] \in \mathbf{C}^k(T)$, $(I + \lambda\check{\Phi})^{-1} = I + \lambda\hat{\Phi}$, $\check{\Phi} = \hat{V} \circ \Phi$, $\hat{K}(t, s, \lambda)$ – $(n \times n)$ -резольвента оператора $\check{\Phi}$, c – вектор произвольных постоянных;

4. При значениях параметра $\lambda : |\lambda| \leq \varepsilon$, где ε – некоторое малое положительное число, существует единственное решение системы (3), проходящее через точку $z(\alpha) = e$.

Доказательство. Докажем п. 1 утверждения. Запишем систему (2) в виде равенства $\Lambda_k y = -\mathcal{V}y + f, t \in T$, из нее согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода $y + \check{Y}y = X_d(t)c + \psi(t), t \in T$. Используя формулу обращения $(I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}$ (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (11).

Докажем п. 2. Система $\check{X}_{k-1}(\alpha)c = b - \check{\mathfrak{w}}_{k-1}(\alpha)$, $\check{\mathfrak{w}}_{k-1}(t) = d_{k-1}[\hat{\psi}(t)]$ однозначно разрешима относительно вектора c , так как согласно теореме 1 матрица $\check{Y}_{k-1}(\alpha)$ неособенная, производные матрицы $\hat{K}(t, s)$ по t равны нулю на диагонали $t = s$.

Докажем п. 3. Запишем систему (3) в виде равенства $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda\check{\Phi}z + f, t \in T$. Из формулы (11) следует система ИУ Фредгольма II рода $z + \lambda\check{\Phi}z = Y_d(t)c + \hat{\psi}, t \in T$, разрешая которую получаем формулу (12) (см. [22, с. 120]).

Для доказательства четвертого пункта достаточно заметить, что $\det \check{Z}_{k-1}(\alpha) \neq 0$, где $\check{Z}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Z_d(t)]$ при малых λ , так как $\det \check{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0$.

Замечание 3. Если $A_i(t), f(t) \in C^A(T), i = \overline{0, k-1}, \mathcal{H}(t, s), K(t, s) \in C^A(T \times T)$, то в формулах (10)–(12) справедливы включения $X_d(t), \psi(t), Y_d(t)c, \hat{\psi}(t), Z_d(t), \varphi(t) \in C^A(T), \hat{K}(t, s) \in C^A(T \times T)$. Любая точка $t_* \in T$ со свойством $\det A_k(t_*) = 0$ является особой, и число их конечно на отрезке T . Других ОТ на отрезке нет.

Более того, найдутся вектор $a \in \mathbf{R}^m$ и свободный член $f(t)$ такие, что имеет место неравенство $\text{rank } A_k(t_*) \neq \text{rank} \left(A_k(t_*) | f(t_*) - \sum_{i=0}^{k-1} \bar{a}_i \right), \bar{a}_i = A_i(t_*)a_i$, вследствие которого решение задачи $\Lambda_k x = f, t \in T, x(t_*) = a$, не существует на T (ср. с теоремой 1).

Замечание 4. Часть утверждений следствия 1 можно найти в литературе по ИДУ (см., например, [23]), но автор изложил их в удобной для себя форме.

Для ИДУ теряется важное свойство общих решений ОДУ (ср. с теоремой 1).

Пример 1. Рассмотрим ИДУ $\dot{y}(t) + \int_0^t \gamma^2 y(s) ds = 0, t \in T = [0, 1]$, с условием $y(\vartheta) = a \in \mathbf{R}^1, \vartheta \in T$, где γ – вещественный параметр. Общее решение ИДУ здесь имеет вид $y(t, c) = c \cos(\gamma t), c \in \mathbf{R}^1$. Начальная задача с условием $y(0) = a$ имеет единственное решение $y(t) = a \cos(\gamma t)$.

Если $a \neq 0, \vartheta \in (0, 1]$ и $\vartheta\gamma = \pi/2$, то исходная задача не имеет на T решений, так как $y(\vartheta) = 0$. В случае $y(\vartheta) = 0, \vartheta\gamma = \pi/2$ видим, что $y(t, c) = c \cos(\gamma t)$ при любом c .

Итак, в отличие от ОДУ решения ИДУ “помнят” отрезок, на котором определены, и при сужениях отрезка $T_0 \subset T$ решения меняются (или могут не существовать).

3. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ДАУ БЕЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК

Выделим класс линейных ДАУ без ОТ в области определения.

Определение 2. Система (1) имеет решение типа Коши на отрезке T , если она разрешима для любой вектор-функции $f(t) \in C^m(T), m = kn$, и ее решения представимы в виде линейной комбинации

$$x(t, c) = X_d(t)c + \psi(t), \tag{13}$$

где $X_d(t)$ есть $(n \times d)$ -матрица из $C^k(T)$ со свойством $\text{rank } d_{k-1}[X_d(t)] = d \forall t \in T, c$ – вектор произвольных постоянных, $\psi(t)$ – вектор-функция со свойством $\Lambda_k \psi(t) = f(t), t \in T$, и на любом подотрезке $[\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$ нет решений, отличных от $x(t, c)$.

Замечание 5. Из работы [24] следует, что для ДАУ (1) с постоянными коэффициентами $\bar{\Lambda}_k x := \sum_{i=0}^k \bar{A}_i x^{(i)} = f, t \in T$, параметр $d = \deg \xi(\lambda) = \deg \det \left[\sum_{i=0}^k \lambda^i \bar{A}_i \right], 0 \leq d \leq kn$, где λ – скалярный параметр (возможно комплексный), \deg – символ степени многочлена. Предполагается, что многочлен $\xi(\lambda)$ ненулевой. Если $\xi(\lambda) \equiv 0$, то $\dim \ker \bar{\Lambda}_k = \infty$.

Замечание 6. Если ДАУ (1) имеет решение типа Коши, то сохраняются важнейшие свойства линейных систем ОДУ в нормальной форме (форме Коши): 1) множества решений на отрезках T и $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$ совпадают (отсутствует “память”); 2) если через заданную точку ($a \in \mathbf{R}^m, \vartheta \in T$) проходит решение ДАУ, то оно единственно.

Определение 3. Если существуют операторы

$$\Omega_l = \sum_{j=0}^l L_j(t)(d/dt)^j, \quad \Omega_r = \sum_{j=0}^{\bar{r}} R_j(t)(d/dt)^j,$$

где $L_j(t), R_j(t)$ суть $(n \times n)$ -матрицы из $C(T)$, обладающие свойствами

$$\Omega_l \circ \Lambda_k v = \hat{\Lambda}_k v, \quad \Lambda_k \circ \Omega_{\bar{r}} v = \check{\Lambda}_k v \quad \forall v \equiv v(t) \in C^{v+k}(T),$$

где $\hat{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \hat{A}_i(t)v^{(i)}$, $\check{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \check{A}_i(t)v^{(i)}$, $v = \{\hat{l} \text{ или } \check{r}\}$, $\hat{A}_i(t), \check{A}_i(t)$ суть $(n \times n)$ -некоторые матрицы из $\mathbf{C}(T)$, $\det \hat{A}_k(t) \neq 0$, $\det \check{A}_k(t) \neq 0 \forall t \in T$, то они называются левым и правым регуляризирующими операторами (ЛРО и ПРО) для оператора системы (1), а наименьшие возможные \hat{l}, \check{r} называются ее индексами (левым и правым). Индексы оператора Λ_k , $t \in T$, где $\det A_k(t) \neq 0 \forall t \in T$, полагаются равными нулю.

Далее, нам потребуются сводка результатов из [25, теоремы 1, 2, леммы 4, 5] и [6, леммы 4.1–4.3]. Для аналитических входных данных эти утверждения формулируются в более компактном виде.

Теорема 2. Пусть в ДАУ (1) $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0, k}$.

Тогда три условия на систему (1) эквивалентны:

- 1) на отрезке T определено решение типа Коши;
- 2) на отрезке T определен ЛРО;
- 3) на отрезке T определен ПРО.

Теорема 3. Пусть в ДАУ (1) $A_i(t), f(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0, k-1}$, и левый индекс ДАУ равен \hat{l} .

Тогда

1. Правый и левый индексы ДАУ равны, и справедливы неравенства $0 \leq \hat{l} \leq m$;
2. В формуле (13) $X_d(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, при $d = 0$ вектор-функция $\psi(t) = x = \sum_{j=0}^{\hat{l}-1} C_j(t)f^{(j)}(t)$, иначе

$$\psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t,s)f(s)ds + \sum_{j=0}^{\hat{l}-k} C_j(t)f^{(j)}(t), \quad \hat{l} \geq k, \quad \psi(t) = \int_{\alpha}^t K(t,s)f(s)ds, \quad \hat{l} < k, \quad (14)$$

где $K(t,s), C_j(t)$ суть $(n \times n)$ -матрицы, причем $K(t,s) \in \mathbf{C}^A(T \times T)$, $C_j(t) \in \mathbf{C}^A(T)$ и $\partial^j K(t,s)/\partial t^j|_{t=s} = 0 \forall t \in T, j = \overline{0, k-\hat{l}-1}$, если $\hat{l} < k$.

Следствие 2. Пусть для произведения операторов $\Lambda_v = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}, t \in T$, выполнены условия

- 1) входные данные операторов $\Lambda_{k_j}, t \in T, j = \overline{1, i}$, принадлежат пространству $\mathbf{C}^A(T)$;
- 2) для оператора произведения Λ_v определен ЛРО.

Тогда для каждого сомножителя $\Lambda_{k_j}, j = \overline{1, i}, t \in T$, определен свой ЛРО. Более того, если для каждого оператора $\Lambda_{k_j}, j = \overline{1, i}, t \in T$, определен ЛРО, то для оператора произведения Λ_v определен ЛРО.

Следствие 3. Пусть оператор $\Lambda_{k_1}, t \in T$, является ЛРО для оператора $\Lambda_{k_2}, t \in T$, с входными данными из пространства $\mathbf{C}^A(T)$.

Тогда начальная задача $\Lambda_{k_1} v = 0, t \in T, v^{(j)}(\alpha) = 0, j = \overline{0, k_1-1}$, имеет на отрезке T только нулевое решение.

Следствие 4. Пусть для каждого оператора $\Lambda_{k_j}, j = \overline{1, i}, t \in T$, с матрицами и коэффициентами из $\mathbf{C}^A(T)$ определен ЛРО.

Тогда для их произведения $\Lambda_v, t \in T$, справедливо равенство $d_v = \sum_{j=0}^i d_j$, где d_v, d_j – размерности ПР операторов Λ_v и $\Lambda_{k_j}, t \in T$, из формулы (13).

К сожалению, нет пока общей формулы, позволяющей вычислить индекс произведения операторов ДАУ по их индексам. Он может меняться достаточно произвольно, например,

$$[E_n - (d/dt)A_1]^j = E_n - (d/dt)jA_1, \quad [E_n - (d/dt)A_1] \circ [E_n + (d/dt)A_1] = E_n,$$

где A_1 – постоянная матрица со свойством $A_1^2 = 0$, оператор $E_n \pm (d/dt)^j A_1, j = 1, 2, \dots$, имеет индекс 2. Но имеются исключения из общего правила (см. ниже лемму 2).

Лемма 2. Пусть входные данные операторов $\Lambda_{k_j}, t \in T, j = \overline{1, i}$, принадлежат пространству $C^A(T)$. Тогда

1. Индекс оператора $\Lambda_{k+j} = (d/dt)^j \Lambda_k, t \in T, j = 1, 2, \dots$, равен индексу $\Lambda_k, t \in T$;

2. Если индексы сомножителей $\Lambda_{k_j}, t \in T$, не превосходят 1, то индекс оператора $\Lambda_\omega = \prod_{j=1}^i \Lambda_{k_j}, t \in T$, не превосходит i .

Доказательство вытекает из теорем 2, 3 и вида формулы обращения (14), в которой при выполнении условия $\hat{l} \leq k$ отсутствуют операторы $C_j(t)(d/dt)^j, j \geq 1$.

Очевидно, что задача (1), (7) разрешима в условиях теоремы 3 тогда и только тогда, когда разрешима система $\hat{X}_{k-1}(\alpha)c = a - \Psi_{k-1}(\alpha)$ (где $\hat{X}_{k-1}(t) = P_x d_{k-1}[X_d(t)], \Psi_{k-1}(t) = P_x d_{k-1}[\Psi(t)]$) относительно вектора c . Решение $x(t) \in C^A(T)$ единственно, если решение c единственно. Чтобы сформулировать утверждение о разрешимости задачи (1), (7) в терминах входных данных, нам требуется такое понятие.

Определение 4. Совокупность самой системы (1) и ее производных до порядка i включительно: $d_i[\Lambda_k x - f] = 0, t \in T$, где $d_i[\cdot]$ – оператор из формул (8), называется i -продолженной системой (1).

С учетом формулы (8) i -продолженную систему из определения 3 запишем в виде равенств

$$D_i[\mathbf{A}]x_{i+k} = d_i[f(t)], \quad D_i[\mathbf{A}] = \sum_{j=0}^k (O_j \mathcal{M}_i[A_j(t)] \tilde{O}_j), \tag{15}$$

где $\mathbf{A} = (A_k \ A_{k-1} \ \dots \ A_0)$, матрица $D_i[\mathbf{A}]$ имеет размер $[(i+1)n \times (i+k+1)n]$, нулевые матрицы O_j, \tilde{O}_j имеют размеры $[(i+1)n \times jn], [(i+1)n \times (k-j)n], j = \overline{0, k}$, соответственно, $x_{i+k} = d_{i+k}[x]$. Ниже используются разбиения матрицы из формул (15) на блоки вида $D_i[\mathbf{A}] = (\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[\mathbf{A}(t)])$, где $\Gamma_i[\mathbf{A}]$ – блочно-треугольная квадратная матрица с блоками $A_k(t)$ на диагонали.

Замечание 7. На разбиении $D_i[\mathbf{A}] = (\tilde{B}_i(t) \ \Gamma_i[\mathbf{A}(t)])$ базируется способ вычисления индекса (левого) и матричных коэффициентов ЛРО (см. [2]). При вычислении ПРО для системы (1) нужно решать матричные ДАУ (см. [26]). Поэтому это понятие пока представляет только теоретический интерес.

Лемма 3. Начальная задача (1), (17), в условиях теоремы 3 разрешима тогда и только тогда, когда для некоторого вектора $c \in \mathbf{R}^{nk}$ выполнены соотношения

$$\text{rank } G_{i-1} = \text{rank } (G_{i-1} | h - g), \tag{16}$$

где $G_{i-1} = \Gamma_{i-1}[\mathbf{A}]|_{t=\alpha}, h = d_{i-1}[f(t)]|_{t=\alpha}, g = B_{i-1}(\alpha)[P_x^- a + (E_{nk} - P_x^- P_x)c]$.

Более того, если вектор g вычисляется единственным образом, то решение начальной задачи единственно.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши, где $P_x = E_{nk}$. Формула (16) является необходимым и достаточным условием выполнения равенства $D_{i-1}[\mathbf{A}]d_{k+i-1}[x] = d_{i-1}[f]$ в точке $t = \alpha$. Согласно разбиению матрицы $D_{i-1}[\mathbf{A}]$ это равенство эквивалентно разрешимости СЛАУ $G_{i-1} \mathcal{L} = h - B_{i-1}(\alpha)a, \mathcal{L} = d_{i-1}[x^{(k)}]|_{t=\alpha}$.

Если ввести вектор-функции $z^{(i)}(t) = (d/dt)^i[\Lambda_k x - f], t \in T, i = \overline{0, \hat{l}-1}$, то они в силу вышесказанного удовлетворяют условиям $z^{(i)}(\alpha) = 0$. Начальная задача

$$\Omega_i z = 0, \quad t \in T, \quad z^{(i)}(\alpha) = 0, \quad i = \overline{0, \hat{l}-1},$$

где Ω_i – ЛРО для системы (1), имеет согласно следствию 2 только одно решение $z \equiv z(t) = [\Lambda_k x - f] = 0$. ДАУ $\Lambda_k x = f$ имеет решение типа Коши и СЛАУ $\hat{X}_{k-1}(\alpha)\chi = a - \hat{\Psi}_{k-1}(\alpha)$, где $\hat{X}_{k-1}(t) = d_{k-1}[X_d], \hat{\Psi}_{k-1}(t) = d_{k-1}[\Psi]$, имеет единственное решение χ . Для завершения доказа-

тельства отметим, что согласно (см. [1, с. 33]) все начальные вектора $x(\alpha)$ принадлежат многообразию $P_x^- a + (E_2 - P_x^- P_x) c$, где вектор c пробегает \mathbf{R}^{nk} .

Пример 2. Рассмотрим начальную задачу

$$\bar{A}_1 x = \bar{A}_1 \dot{x} + \bar{A}_0 x = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 2 + \gamma & 1 \\ 4 + 4\gamma & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} (2 + \gamma)e^t + 5e^{2t} \\ (4 + 4\gamma)e^t + 12e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0, 1], \quad (17)$$

$$P_x x(\alpha) = (1 \ 2) x(0) = a = 3.$$

Если $\gamma \neq 0$, то индекс ДАУ $\hat{l} = 1$, размерность ПР $d = 1$, в качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\}L$, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Матрицы и векторы в формуле (16) имеют вид $G_0 = \bar{A}_1$, $B_0 = \bar{A}_0$, $c = (c_1 \ c_2)^\top \in \mathbf{R}^2$,

$$P_x^- a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x) c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 7 + \gamma \\ 16 + 4\gamma \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 3 + 2\gamma \\ 4 + 8\gamma \end{pmatrix} c_2.$$

Из условия равенства рангов (16) следует уравнение $(1 - 2\gamma)c_2 = 1 - 2\gamma$; $c_2 = 1 \ \forall \gamma \neq 1/2$. Итак, для любого $\gamma \neq 1/2$ имеем $x(0) = P_x^- a + (E_2 - P_x^- P_x) c = (1 \ 1)^\top$, $x = (e^t \ e^{2t})^\top$.

Если $\gamma = 1/2$, то умножением ДАУ (17) на матрицу L мы выделим алгебраическое уравнение $(1 \ 2)x = e^t + 2e^{2t}$, $t \in T$, и начальное условие является его следствием при $t = 0$. Начальная задача совместна, но ее решение неединственно.

Если $\gamma = 0$, то $d = 0$, $\hat{l} = 2$. В формуле (16) матрицы и векторы имеют вид

$$G_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_1 & 0 \\ \bar{A}_0 & \bar{A}_1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad h = d_1[f(t)]|_{t=0}, \quad P_x^- a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 3, \quad (E_2 - P_x^- P_x) c = \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Проделав аналоги выкладок при $l = 1$, получим $c_2 = 1$, $x(0) = (1 \ 1)^\top$.

4. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ПОНЯТИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК ЛИНЕЙНЫХ ДАУ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Введем понятия.

Определение 5. Если существует $(n \times d)$ -матрица $\tilde{X}_d(t) \in \mathbf{C}^k(T)$ такая, что любой элемент линейного пространства решений (ПР) однородной системы (1) на отрезке T представим в виде произведения $\tilde{X}_d(t)c$, где c – вектор произвольных постоянных, то будем говорить, что это ПР конечномерно ($\dim \ker \Lambda_k < \infty$). Минимально возможное значение целочисленного параметра d назовем *размерностью* ПР ДАУ (1).

ПР однородной системы (1) бесконечномерно ($\dim \ker \Lambda_k = \infty$), если оно содержит бесконечное количество линейно независимых решений.

Определение 6. Пусть существует оператор $\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^l \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j$, $t \in T$, где $\tilde{L}_j(t)$ суть $(n \times n)$ -матрицы из $\mathbf{C}(T)$, со свойствами

- 1) для системы $\tilde{\Omega}_l u = 0$, $t \in T$, определен ЛРО;
- 2) $\Omega_l \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v \ \forall v \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{l+k}(T)$, где $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)}(t)$, $\det \tilde{A}_k(t) \neq 0$, $t \in T$;
- 3) на T определены изолированные точки t_j , $j = \overline{1, q}$, в которых $\det \tilde{A}_k(t_j) = 0$.

Тогда точки t_j называются ОТ системы (1).

Пример 3. Рассмотрим однородное ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} \kappa(t-t_1)^i & \xi(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (t_2-t)^j \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [0,1], \tag{18}$$

где $i, j \geq 1$, $t_1, t_2 \in T$, $\kappa \in \mathbf{R}^1$, $\xi(t)$ – функция из $\mathbf{C}^1(T)$. В определении 6 можно принять $\tilde{\Omega}_1 = \text{diag}\{1, (d/dt)\}$, $\det \tilde{A}_1(t) = \kappa(t-t_1)^i(t_2-t)^j$, $t \in T$. ОТ $t_* = t_2$ имеет вид разрыва второго рода при любом j . В ОТ $t_* = t_1$ в зависимости от i поведение решений существенно отличается (см., например, [9–11]).

Если $\kappa = 0$ и ДАУ (18) рассматривается на отрезке $\tilde{T} = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$, $t_2 \notin \tilde{T}$, то система имеет решение типа Коши, где $d = 0$ при $f_1 \in \mathbf{C}^1(T)$, $f_2 \in \mathbf{C}^2(T)$ независимо от количества точек изменений ранга матрицы $A_1(t)$ (нулей функции $\xi(t)$).

Пример 4. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_1 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T = [-1,1]. \tag{19}$$

Здесь $\text{rank } A_1(t) = \text{const} = 1$, $t \in T$. Умножая ДАУ на матрицу $L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ и выражая x_2 через x_1 , ДАУ расщепляем на дифференциальное и алгебраическое уравнения

$$(\gamma - 2)t\dot{x}_1(t) + 2\gamma x_1(t) = \tilde{f}_1, \quad x_2(t) = \gamma t x_1(t) + \tilde{f}_2, \quad t \in T, \tag{20}$$

где $\tilde{f}_1 = 2f_1 + t\dot{f}_1 - \dot{f}_2$, $\tilde{f}_2 = f_2(t) - t\dot{f}_1(t)$. При $\gamma = 2$ существует решение системы (19) типа Коши, где $d = 0$, индекс $l = 2$.

При $\gamma \neq 2$ свойства ДАУ качественно меняются. Система имеет ОТ $t_* = 0$ в смысле определения 6, где $\tilde{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt) \end{pmatrix} L(t)$, $\tilde{A}_1(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}$, $\det \tilde{A}_1(t) = t(\gamma - 2)$.

В однородной системе (19) формально $x_1(t) = c_1 t^{-\mu}$, где $\mu = 2\gamma/(\gamma - 2)$, c_1 – произвольная константа. При $\gamma > 2$ имеем $\mu > 0$. В этом случае ненулевых решений однородного ДАУ (19) на T нет, $d = 0$. На любом отрезке $T_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset T$, $0 \notin T_0$, оператор $\tilde{\Omega}_1$ является ЛРО, существует решение типа Коши, размерность ПР ДАУ (19) $d = 1$.

Рассмотрим влияние ОТ на разрешимость ДАУ (19). Для первого уравнения (20) имеем

$$d_i [t\dot{x}_1(t) + \mu x_1(t) - \tilde{f}_1] = \begin{pmatrix} \mu & t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu + 1 & t & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mu + 2 & t & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)} \\ x_1^{(3)} \\ \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g \\ g^{(1)} \\ g^{(2)} \\ \dots \end{pmatrix} = 0,$$

где $g(t) = \tilde{f}_1(t)/(\gamma - 2)$, $i \rightarrow \infty$. Формально разрешая эту систему как алгебраическую относительно функций $x_1, x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \dots$, для решения получим формулу

$$x_1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} v_i g^{(i)}(t)(-t)^i, \quad v_i = 1/\mu(\mu + 1)(\mu + 2)\dots(\mu + i). \tag{21}$$

Ряд (21) сходится при $\gamma > 2$ для любой функции $g(t) \in \mathbf{C}^A(T)$.

Иная ситуация при $\gamma < 2$. Например, при $\gamma = 1$ и произвольном свободном члене ДАУ не имеет решений. Необходимо выполнение условия $g^{(2)}(0) = 0$, так как здесь $\mu + 2 = 0$.

Из равенств (20) следует, что однородная система (19) имеет семейства аналитических решений $(x_1 \ x_2)^T = c_1(t^2 \ t^3)^T$ и семейство неаналитических решений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{X}_2(t)c = \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ t\phi_1(t) & t\phi_2(t) \end{pmatrix}c, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2,$$

где $\phi_1(t) = \{0, t \in T_1; t^2, t \in T_2\}$, $\phi_2(t) = \{t^2, t \in T_1; 0, t \in T_2\}$, $T_1 = [-1, 0]$, $T_2 = (0, 1]$. Здесь (в смысле определения 5) размерность ПР $d = 2$. Любая начальная задача $(x_1(\vartheta) \ x_2(\vartheta))^T = (a \ \vartheta a)^T$, $\vartheta \in T$, имеет бесконечное число решений ДАУ на T . Например, если $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \in T_1$, то

$$x_1(t) = \{(a/\vartheta^2)t^2, t \in T_1; c_2t^2, t \in T_2\}, \quad x_2(t) = tx_1(t), \quad t \in T,$$

где c_2 произвольно.

Теорема 4. Пусть в системе (1)

1. Матрицы $A_i(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $i = \overline{0, k-1}$;
2. ПР конечномерно ($\dim \ker \Lambda_k < \infty$).

Тогда для ДАУ (9) существуют $(m \times m)$ -матрицы $P(t), Q(t) \in \mathbf{C}^A(T)$, $m = kn$, такие, что $\det P(t)Q(t) \neq 0 \ \forall t \in T$,

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t)\dot{y} + \tilde{B}(t)y &= P(t)A(t)Q(t)\dot{y} + [P(t)B(t)Q(t) + P(t)A(t)\dot{Q}(t)]y = \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix}\dot{y} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_{11}(t) & \tilde{B}_{12}(t) \\ 0 & \tilde{B}_{22}(t) \end{pmatrix}y \quad \forall y(t) \in \mathbf{C}^l(T), \end{aligned} \tag{22}$$

где $x(t) = Q(t)y(t)$, $\tilde{A}_{22}(t), \tilde{B}_{22}(t)$ суть $([m-d] \times [m-d])$ – верхнетреугольные блоки с идентичной блочной структурой, диагональ $N(t)$ содержит l квадратных нулевых блоков, $\det \tilde{A}_{11}(t) \neq 0$, $\det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0$ на T .

Доказательство. Если $\det A \neq 0, t \in T$, то теорема справедлива. Пусть $\det A = 0 \ \forall t \in T$. Тогда согласно лемме 1 существует $(m \times m)$ -матрица $L \in \mathbf{C}^A(T)$ такая, что

$$\det L \neq 0 \quad \forall t \in T, \quad L(A\dot{x} + Bx) = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}x, \quad LA = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad LB = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $([m-r] \times m)$ – блок B_2 имеет полный ранг для любого $t \in T$, $r = \max\{\text{rank } A, t \in T\}$, за исключением может быть конечного числа точек.

Если это не так, то $\text{rank}(A|B) < m \ \forall t \in T$, и согласно [6, теорема 3.1] имеем $\dim \ker \Lambda_k = \infty$. Произведем замену $x = Ry$, где $R \in \mathbf{C}^A(T)$, $\det R \neq 0 \ \forall t \in T$ и

$$B_2R = (0 \ B_{22}), \quad \det B_{22} \neq 0, \quad t \in T.$$

При этом получим равенство

$$L\left(A \frac{d}{dt}(Ry) + BRy\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $y = (y_1^T \ y_2^T)^T$. Если $\det A_{11} \neq 0$ на T , то теорема справедлива. В противном случае повторяем рассуждения для системы $A_{11}\dot{y}_1 + B_{11}y_1 = 0, t \in T$. За l шагов такого процесса мы исчерпаем систему, причем $l \leq r+1$, так как на каждом шаге к размерности блока B_{22} будут добавляться размерности блоков $B_{22}^1, B_{22}^2, \dots, B_{22}^l$, по меньшей мере, равные единице.

Следствие 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда

1. Число точек $t_j \in T, j = \overline{1, q}$ со свойством $\det \tilde{A}_{11}(t_j) = 0, \det \tilde{B}_{22}(t_j) = 0, t \in T$, конечно, и на отрезках $T_j = [\alpha_j, \beta_j] \subset (t_j, t_{j+1}), j = \overline{1, q-1}$, определены решения типа Коши, где точки t_j занумерованы по правилу $t_1 < \dots < t_q$;

2. Существует оператор $\tilde{\Omega}_l$ из определения 6, и равенство $\det \tilde{A}_k(t_*) = 0, t_* \in T$, выполняется тогда и только тогда, когда справедливо одно из условий: $\det \tilde{A}_{11}(t_*) = 0$ или $\det \tilde{B}_{22}(t_*) = 0$.

Доказательство. Докажем п. 1 следствия. В силу аналитичности матриц $\tilde{A}(t), \tilde{B}(t)$ в формуле (22) число точек t_j конечно. Выпишем две подсистемы:

$$\dot{y}_1 + J(t)y_1 = \tilde{g}_1, N(t)\dot{y}_2 + y_2 = \tilde{g}_2, \quad t \in T_j, \tag{23}$$

$$J(t) = A_{11}^{-1}(t)\tilde{B}_{11}(t), \quad N(t) = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)\tilde{A}_{22}(t), \quad \tilde{g}_1 = A_{11}^{-1}(t)[\tilde{g}_1 - \tilde{A}_{12}(t)y_2 - \tilde{B}_{12}(t)y_2], \quad \tilde{g}_2 = \tilde{B}_{22}^{-1}(t)g_2, \\ g = (g_1^\top \ g_2^\top)^\top = P(t)(0^\top \ f^\top(t))^\top. \text{ Тогда решение системы (9) на } T_j \text{ имеет вид}$$

$$x(t, c) = Q(t) \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} c + \int_{\alpha_j}^t Q(t) \begin{pmatrix} Y(t)Y^{-1}(s) \\ 0 \end{pmatrix} \tilde{g}_1(s) ds + Q(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Lambda}_{\varrho-1} g_2 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $y_2(t) = \tilde{\Lambda}_{\varrho-1} \tilde{g}_2 = \tilde{g}_2 + \mathcal{T} \tilde{g}_2 + \dots + \mathcal{T}^{\varrho-1} \tilde{g}_2, \mathcal{T} = -N(t)(d/dt), \varrho$ – количество нулевых блоков на диагонали матрицы $= \tilde{B}_{22}(t), Y(t)$ – матрицант первой подсистемы (23), c – вектор произвольных постоянных. Из неособенности матриц $Q(t), Y(t), t \in T_j$, следует свойство $\text{rank } Q(t) \begin{pmatrix} Y(t) \\ 0 \end{pmatrix} = d \forall t \in T_j$. Интегрируя по частям и приводя подобные в формуле (24), мы получим вектор-функцию $\psi(t)$ в виде формулы из равенств (11).

Докажем п. 2. Выпишем равенство

$$\omega_0 \circ \Lambda_k v = \tilde{\Lambda}_k v, \quad \omega_0 = \text{diag}\{E_r, (d/dt)E_{n-r}\}L(t), \quad L(t)A_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in T,$$

где $\tilde{\Lambda}_k v = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)}(t), \tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}, L(t)A_{k-1}(t) = \begin{pmatrix} A_{k-1,1}(t) \\ A_{k-1,2}(t) \end{pmatrix}, t \in T, L(t)$ – матрица из леммы 1 применительно к матрице $A_k(t)$. Размерность ПР оператора ω_0 равна $n - r \geq 1$. Согласно следствию 4 она суммируется на отрезках T_j с размерностью ПР оператора Λ_k . Если $\det \tilde{A}_k(t) \equiv 0 \forall t \in T$, то процесс повторяем, получая оператор ω_1 . Размерность ПР дифференциального оператора порядка k , приводимого к нормальной форме, не превышает nk , и процесс построения операторов $\omega_i, i \geq 0$ завершится за конечное число шагов χ . Искомый оператор $\Omega_\chi = \prod_{i=0}^{\chi-1} \omega_i$. Согласно формуле (24) $\chi = \varrho$.

Определение 7. Нули функции $\det \tilde{A}_{11}(t), t \in T$, будем называть *дифференциальными* ОТ системы (1), а нули функции $\det \tilde{B}_{22}(t), t \in T$, назовем *алгебраическими* ОТ системы (1).

Следствие 6. Пусть выполнены условия теоремы 4 и на отрезке T определена хотя бы одна алгебраическая ОТ. Тогда найдется свободный член $f(t) \in C^A(T)$, при котором не существует решений системы (1) на T .

Доказательство очевидно. Сделаем замечания о влиянии дифференциальных ОТ на разрешимость ДАУ (1). Анонсируем следующий результат.

Теорема 5. Пусть

1. Выполнены условия теоремы 4 и на отрезке T определена хотя бы одна дифференциальная ОТ;
2. Однородное ДАУ (1) имеет нетривиальные решения. Тогда найдется свободный член $f(t) \in C^A(T)$, при котором не существует решений системы (1) на T .

5. СВЕДЕНИЯ О СВОЙСТВАХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ИДУ

Введем для вырожденных систем ИДУ понятие, аналогичное ЛРО для ДАУ.

Определение 8. Если существуют операторы

$$\tilde{\Omega}_l = \sum_{j=0}^{\tilde{l}} \tilde{L}_j(t)(d/dt)^j, \quad \tilde{\Omega}_r = \sum_{j=0}^{\tilde{r}} \tilde{R}_j(t)(d/dt)^j,$$

где $\tilde{L}_j(t), \tilde{R}_j(t)$ суть $(n \times n)$ -матрицы из $\mathbf{C}(T)$, обладающие свойствами

$$\tilde{\Omega}_l \circ (\Lambda_k + \mathcal{V})_V = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})_V, \quad (\Lambda_k + \mathcal{V}) \circ \tilde{\Omega}_r = (\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})_V \quad \forall V \equiv v(t) \in \mathbf{C}^{v+k}(T),$$

где $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})_V = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)} + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)v(s)ds$, $(\tilde{\Lambda}_k + \tilde{\mathcal{V}})_V = \sum_{i=0}^k \tilde{A}_i(t)v^{(i)} + \int_{\alpha}^t \tilde{K}(t,s)v(s)ds$, $v = \{\tilde{l}$ или $\tilde{r}\}$, $\tilde{A}_i(t), \tilde{K}(t,s)$ суть $(n \times n)$ -некоторые матрицы из $\mathbf{C}(T)$,

$$\det \tilde{A}_k(t) \neq 0, \quad \det \tilde{A}_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T,$$

то они называются левым и правым регуляризирующими операторами (ЛРО и ПРО) для системы (2), а наименьшие возможные \tilde{l}, \tilde{r} называются ее индексами (левым и правым). Индекс оператора $\Lambda_k + \mathcal{V}$, $t \in T$, где $\det A_k(t) \neq 0 \quad \forall t \in T$, полагается равным нулю.

Пример 5. Рассмотрим систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \mathcal{V} + \lambda\Phi)z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \dot{z}(t) + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} z(t) + \int_0^t (t-s)^v \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds + \lambda \int_0^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} z(s)ds = f, \\ t \in T = [0, 1],$$

где $z = (z_1 \ z_2)^T$, $f = (f_1 \ f_2)^T \in \mathbf{C}^{v+2}(T)$. Здесь в качестве ЛРО в смысле определения 8 можно принять оператор

$$\tilde{\Omega}_{v+2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^{v+2} \end{pmatrix} L, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ПР системы $\Lambda_1 x = 0, t \in T$, бесконечномерно (в качестве базиса можно взять набор вектор-функций $\phi_j = (t^j, -t^j)^T, j = 0, 1, \dots$). ЛРО для оператора Λ_1 не существует. Умножим систему ИДУ на матрицу L . Второе уравнение новой системы имеет вид ИУ

$$\int_0^t (t-s)^v z_2(s)ds + \lambda \int_0^1 z_2(s)ds = g(t), \quad t \in T.$$

ИУ (следовательно, и наша система ИДУ) имеют решения при $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $(d/dt)^j g(t)|_{t=0} = 0, g(t) = [f_2(t) - 4f_1(t)], j = \overline{0, v}$.

Еще сложнее условия разрешимости выглядят при $\lambda \neq 0$. Для простоты предположим, что $v = 0$. Условие совместности ИУ имеет вид равенства $\lambda \int_0^1 z_2(s)ds = g(0)$. Дифференцируя ИУ по t , получаем $z_2(t) = \dot{g}(t), t \in T$. Тогда из условия совместности получим равенства $\lambda \int_0^1 \dot{g}(s)ds = \lambda[g(1) - g(0)] = g(0)$. Итак, ИУ разрешимо тогда и только тогда, когда $(1 + \lambda)g(0) - \lambda g(1) = 0$. При $\lambda = 0$ имеем условие $g(0) = 0$.

В отличие от ДАУ, существование ЛРО для вырожденной системы ИДУ не гарантирует ее разрешимость при сколь угодно гладких входных данных, причем в общем случае индекс ИДУ не ограничен числом m , так как v можно задавать произвольно.

Существование ЛРО для системы $\Lambda_k x = 0, t \in T$, не гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ (2), а следовательно, и для системы ИДУ (3).

Пример 6. Рассмотрим вырожденную систему ИДУ

$$(\Lambda_1 + \gamma V)y = A_1 \dot{y}(t) + A_0 y(t) + \gamma \int_0^t A_1^T y(s)ds = f, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0 = E_2, \quad t \in T = [0, 1],$$

где $A_1^2 = 0, y = (y_1 \ y_2)^T, f = (f_1 \ f_2)^T \in \mathbf{C}^2(T)$. Для ДАУ $\Lambda_1 x = 0, t \in T$, в качестве ЛРО можно принять оператор $\Omega_2 = A_1(d/dt)^2 - A_0(d/dt)$. Если $\gamma \neq 1$, то индекс системы ИДУ $\tilde{l} = 2$. В качестве

ЛРО можно принять оператор $\tilde{\Omega}_2 = \omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \omega$, $\omega = \text{diag}\{1, (d/dt)\}$. В определении 8 $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma - 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

$$y = \begin{pmatrix} y_1(t), f_2(t) - \gamma \int_0^t y_1(s) ds \end{pmatrix}^\top,$$

где $y_1(t) = [f_1(t) - \dot{f}_2(t)] / (1 - \gamma)$, существует при любой $f \in C^2(T)$ и единственно (ср. с примером 5). При $\gamma = 1$ индекс не определен и ПР системы $(\Lambda_1 + \gamma V)y = 0, t \in T$, бесконечномерно. В качестве базиса можно принять $\phi_j(t) = (-jt^{j-1} \ t^j)^\top, j = 1, 2, \dots$ Для совместности системы ИДУ необходимо выполнение условия $f_1(t) - \dot{f}_2(t) = 0, t \in T$.

С учетом формул (8), (15) для системы ИДУ (2) по аналогии с определением 4 запишем i -продолженную систему $d_i[(\Lambda_k + V)y - f] = 0, t \in T$, в виде равенства

$$\tilde{D}_i[A, \mathcal{K}]y_{i+k} + \int_\alpha^t d_i[\mathcal{K}(t, s)]y(s) ds = d_i[f(t)], \quad \tilde{D}_i[A, \mathcal{K}] = D_i[A] + \sum_{j=1}^i M_i[Q_{j-1}] \mathcal{E}_{-j}, \quad (25)$$

где $\mathcal{E}_{-j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{n(i+1-j)} & 0 \end{pmatrix}$, нулевые блоки в матрице \mathcal{E}_{-j} уравнивают размеры слагаемых матриц,

$$Q_{j-1} \equiv Q_{j-1}(t) = \partial^{j-1} \mathcal{K}(t, s) / \partial t^{j-1} \Big|_{t=s}.$$

Укажем условия, когда существование ЛРО для системы $\Lambda_k x = 0, t \in T$, гарантирует существование ЛРО для системы ИДУ и рассмотрим этот класс систем.

Теорема 6. Пусть в системах (2), (3)

- 1) $A_i(t), f(t) \in C^A(T), i = \overline{0, k}, \mathcal{K}(t, s), K(t, s) \in C^A(T \times T)$;
- 2) для ДАУ $\Lambda_k x = 0, t \in T$, определен ЛРО Ω_1 со свойством $1 \leq k$.

Тогда

1. Система (2) разрешима на T и все ее решения представимы в виде суммы

$$y(t, c) = Y_d(t)c + \hat{\psi}(t), \quad \hat{\psi}(t) = \psi(t) + \hat{V}\psi, \quad \hat{V}\psi = \int_\alpha^t \hat{K}(t, s)\psi(s) ds, \quad (26)$$

где $Y_d(t) = [X_d(t) + \hat{V}X_d] \in C^k(T), (I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}, \check{V} = C_0(t)V + V \circ V, C_0(t), V$ – матрица и интегральный оператор из теоремы 3, матрица $C_0(t) \equiv 0$, если $1 < k, \det \check{Y}_{k-1}(\alpha) \neq 0, \check{Y}_{k-1}(t) = d_{k-1}[Y_d(t)], \hat{K}(t, s)$ есть $(n \times n)$ -матрица, $\partial^j \hat{K}(t, s) / \partial t^j \Big|_{t=s} = 0 \ \forall t \in T, j = \overline{0, k-1}, c$ – вектор произвольных постоянных;

2. Система (3) разрешима на T за исключением счетного множества значений параметра λ и все ее решения представимы в виде суммы

$$z(t, c) = Z_d(t)c + \varphi(t), \quad \varphi(t) = \hat{\psi}(t) + \lambda \hat{\Phi}\hat{\psi}, \quad \hat{\Phi}\hat{\psi} = \int_\alpha^\beta \hat{K}(t, s, \lambda)\hat{\psi}(s) ds, \quad (27)$$

где $Z_d(t) = [Y_d(t) + \lambda \hat{\Phi}Y_d] \in C^k(T), (I + \lambda \hat{\Phi})^{-1} = I + \lambda \hat{\Phi}, \hat{\Phi} = \hat{C}_0(t)\Phi + \hat{V} \circ \Phi, \hat{C}_0(t), \hat{V}$ – матрица и интегральный оператор из п. 1 теоремы, $\hat{K}(t, s, \lambda)$ есть $(n \times n)$ -резольвента оператора $\hat{\Phi}$, c – вектор произвольных постоянных;

3. ОТ систем (1)–(3) совпадают на T .

Доказательство. Докажем п. 1 утверждения теоремы. Запишем систему (2) в виде равенства $\Lambda_k y = -V y + f, t \in T$, из которого согласно формуле (10) получаем систему ИУ Вольтерра II рода $y + \check{V}y = X_d(t)c + \psi(t), t \in T$. Используя формулу обращения $(I + \check{V})^{-1} = I + \hat{V}$ (см. [22, с. 111]) убеждаемся в справедливости формулы (26).

Докажем п. 2. Запишем систему (3) в виде равенства $(\Lambda_k + \mathcal{V})z = -\lambda\Phi z + f, t \in T$. Из формулы (26) следует система ИУ Фредгольма II рода $z + \lambda\tilde{\Phi}z = Y_d(t)c + \hat{\psi}, t \in T$, разрешая которую получаем формулу (27) (см. [22, с. 120]).

Третий пункт утверждения доказывается прямым вычислением. При действии на любую из систем (1)–(3) оператором Ω_1 мы получаем систему с одинаковой матрицей при старшей производной искомой вектор-функции. Теорема 6 доказана.

Некоторые свойства частных случаев вырожденных систем ИДУ (3) описаны в [25–28]. Приведем простейший критерий выполнения условий теоремы 6.

Теорема 7. Пусть в ДАУ (1) матрицы $A_i(t) \in C^A(T), i = \overline{0, k}$, и выполнены условия

$$1) \mathbf{r}[A_k(t)] = \max\{\text{rank } A_k(t), t \in T\} = r_k < n, \mathbf{r}[(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t))] = r_k, 1 \leq j \leq k-1;$$

$$2) \text{ в многочлене } \xi(t; \lambda) = \det[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)] = \mathbf{a}_0(t)\lambda^\varrho + \dots, \text{ степень } \varrho = r_k.$$

Тогда

1. Если $\mathbf{a}_0(t) \neq 0 \forall t \in T$, то $\text{rank } A_k(t) = \text{const}$ на T , ДАУ (1) имеет индекс $l = j$, причем размерность ПР $d = (k-j)n + r_k j$ (верно и обратное);

2. Любая точка $t_* \in T$ со свойством $\mathbf{a}_0(t_*) = 0$ является ОТ;

3. Если $\text{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)) = n \forall t \in T$, то на T отсутствуют алгебраические ОТ.

Доказательство. Для произвольного регулярного пучка постоянных матриц $\lambda A + B, \det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, справедливо неравенство $\text{rank } A \geq \deg \det(\lambda A + B)$, так как существуют неособенные матрицы P, Q со свойством $P(\lambda A + B)Q = \text{diag}\{\lambda E_d + J, \lambda N + E_{n-d}\}$, где $\det(\lambda N + E_{n-d}) = 1 \forall \lambda$.

Тогда из условия 2) теоремы следует равенство $\varrho = r_k = \text{const} \forall t \in T$. Следовательно, мы можем выбрать матрицы $L(t), R(t)$ из леммы 1 таким образом, что в равенстве

$$L(t)[\lambda A_k(t) + A_{k-j-1}(t)]R(t) = \begin{pmatrix} \lambda A_{k,11}(t) & \lambda A_{k,12}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{k-j-1,11}(t) & A_{k-j-1,12}(t) \\ 0 & A_{k-j-1,22}(t) \end{pmatrix}$$

$\det A_{k,11}(t) \neq 0, \det A_{k-j-1,22} \neq 0 \forall t \in T$. Все нули функции $\mathbf{a}_0(t), t \in T$, совпадают с нулями определителей $\det A_{k,11}(t), \det A_{k-j-1,22}, t \in T$. В произведении $L(t)(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t))$ последние $n - r_k$ строк нулевые, иначе $\text{rank}(A_k(t)|A_{k-1}(t)|\dots|A_{k-j}(t)) > r_k$ и можно принять, что ЛРО $\Omega_j = \text{diag}\{E_{r_k}, (d/dt)^j E_{n-r_k}\}L(t)$. Из следствия 4 получаем формулу для размерности ПР $d = nk - (n - r_k)j$.

Из вышесказанного следует справедливость п. 2 утверждения теоремы. Элементарно проверяется, что п. 3 утверждения верен, так как в теореме 4 на первом шаге процесса получаем $\det \tilde{A}_{11}(t) \not\equiv 0, \tilde{A}_{22}(t) \equiv 0, t \in T, \det \tilde{B}_{22}(t) \neq 0 \forall t \in T$.

Пример 7. Рассмотрим ДАУ

$$\Lambda_2 x = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -2t^2 & t \end{pmatrix} \ddot{x} + \begin{pmatrix} -2t^2 & t \\ -2t^3 & t^2 \end{pmatrix} \dot{x} + \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = f, \quad t \in T = [-1, 1], \tag{28}$$

где $\mathbf{r}[A_2(t)] = 1, \mathbf{r}[(A_2(t)|A_1(t))] = 1, \xi(t; \lambda) = \det[\lambda A_2(t) + A_0(t)] = t(\gamma - 2)\lambda + \dots$. Согласно теореме 7 ДАУ (28) имеет ОТ $t_* = 0$, если $\gamma \neq 2$. Точка является особой также в смысле определения 6, где

$$\tilde{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (d/dt)^2 \end{pmatrix} L(t), \quad L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_2(t) = \begin{pmatrix} -2t & 1 \\ -\gamma t & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A}_2(t) = t(\gamma - 2).$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Продемонстрируем на примере возможные эффекты наличия ОТ в области определения, влияющие на вычислительные процессы при решении ДАУ.

Пример 8. Рассмотрим задачу Коши для ДАУ и соответствующую неявную разностную схему (РС) Эйлера

$$\Lambda_1 x = A_1(t)\dot{x} + A_0(t)x = f(t), \quad x(\alpha) = a, \quad A_1(t) = \begin{pmatrix} t\zeta(t) & \zeta(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{pmatrix} \delta(t) & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$A_1(t_{i+1})\frac{v_{i+1} - v_i}{\tau} + A_0(t_{i+1})v_{i+1} = f(t_{i+1}), \quad v_0 = a,$$

где $t \in T$, $x = (x_1 \ x_2)^\top$, $f = (f_1 \ f_2)^\top$, a – заданный вектор, $\zeta(t)$, $\delta(t)$ – заданные функции из $C^1(T)$, $w(t) = \zeta(t) - \delta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, $\tau = (\beta - \alpha)/n$, $t_i = \alpha + i\tau$. Пусть $f \in C^2(T)$. Второе уравнение ДАУ (29) перепишем в виде равенства $x_2 = -tx_1 + f_2$, $t \in T$. Подставляя выражение для x_2 в первое уравнение ДАУ, получим формулу

$$x = \tilde{\Lambda}_1 f = \frac{1}{w(t)} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & w(t) \end{pmatrix} f + \begin{pmatrix} 0 & -\zeta(t) \\ 0 & t\zeta(t) \end{pmatrix} \dot{f} \right], \quad t \in T.$$

Несмотря на произвольные изменения ранга матрицы $A_1(t)$, для ДАУ определен ЛРО. Можно принять, что $\Omega_2 = (d/dt)\tilde{\Lambda}_1$. Если $w(t) = 0 \ \forall t \in T$, то $\dim \ker \Lambda_1 = \infty$, вектор-функции $\phi_j = (-t^j \ t^{j+1})^\top$, $j = 0, 1, \dots$, образуют базис в ПР. Изолированная точка $t_* \in T : w(t_*) = 0$ является алгебраической ОТ.

Аналогично, в РС (29) $v_{2,i} = -t_i v_{1,i} + f_{2,i}$, где $v_i = (v_{1,i} \ v_{2,i})^\top$. Подставляя выражение для $v_{2,i}$ в первое разностное уравнение, получим формулы

$$v_{1,i+1} = \frac{\zeta_{i+1}}{\delta_{i+1}} v_{1,i} + \frac{1}{\delta_{i+1}} \left[f_{1,i+1} - \zeta_{i+1} \frac{f_{2,i+1} - f_{2,i}}{\tau} \right], \quad v_{2,i+1} = -t_{i+1} v_{1,i+1} + f_{2,i+1},$$

где $f_i = f(t_i)$, $\zeta_i = \zeta(t_i)$, $\delta_i = \delta(t_i)$. Если выполнены равенство $a = x(\alpha)$ и неравенство $|\zeta(t)/\delta(t)| < 1$, то справедлива оценка $\|v_i - x(t_i)\| = O(\tau)$, $i = \overline{0, n}$, где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в \mathbf{R}^2 . В случае, когда $|\zeta(t)/\delta(t)| > 1$, $t \in [\alpha_0, \beta_0] \subseteq T$, справедливо соотношение $\|v_i - x(t_i)\| \rightarrow \infty$, $t_i \in [\alpha_0, \beta_0]$, $n \rightarrow \infty$. Если $w(t) \neq 0 \ \forall t \in T$, и $\delta(t_*) = 0$, $t_* \in T$, то по поведению векторов v_i , $t_i \rightarrow t_*$, точку t_* ошибочно можно принять за ОТ.

Отметим еще один момент. Если выполнены соотношения $w(t) = 0$, $\zeta(t) \neq 0 \ \forall t \in T$ и $f_1(t) \neq \zeta(t)f_2(t)$, то ДАУ (29) не имеет решений. Но решения РС v_i определены и ограничены при любом i . И обратно, при $\delta(t) = 0 \ \forall t \in T$ решение ДАУ (29) существует и единственно, но найдется свободный член $f(t)$, когда v_i не существуют для любого i .

Для численных расчетов использовался метод эрмитовой сплайн-коллокации. На отрезке T задается сетка $\{t_i = \alpha + i\tau, i = 0, 1, \dots, n-1, \tau = (\beta - \alpha)/n\}$. На отрезке $[t_0, t_1]$ приближенное решение ДАУ (1) с начальными данными $a = (a_0^\top \ a_1^\top \ \dots \ a_{k-1}^\top)^\top$ ищется в виде многочлена $\mu_{k+q}(t) = \mu_{k-1}(t) + \mu_{k,q}(t) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(t-t_j)^j/j! + \sum_{j=k}^{k+q} c_j(t-t_j)^j/j!$, где векторы c_j являются искомыми, и формируются выражения

$$D_q[A(t)]d_k[\mu_{k,q}(t)] = M_{k,q}(t)C, \quad D_q[A(t)]d_k[\mu_{k-1}(t)] = M_{0,k}(t)a, \quad \xi_q(t) = d_q[f(t)], \quad (30)$$

где $C = (c_k^\top \ c_{k+1}^\top \ \dots \ c_{k+q}^\top)^\top$. Вычисляем выражения из формул (30) в точке $\bar{t} \in (t_0, t_1]$ и формируем систему алгебраических уравнений

$$M_{k,q}(\bar{t})C = -M_{0,k}(\bar{t})a + \xi_q(\bar{t})$$

размерности $n(q+1)$. Если ее решение C существует, то многочлен $\mu_{k+q}(t)$ удовлетворяет в точке \bar{t} системе $D_q[A(t)]d_{k+q}[x] = d_q[f]$. Решая эту систему, находим новые вектора $a_j = [\mu_{k+q}(t)]^{(j)}|_{t=t_j}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, и повторяем вычисления на отрезке $[t_1, t_2]$ и т.д. Число q рекомендуется выбирать по правилу $q = l - 1$ либо $q = 1$, где l – индекс ДАУ. Особенностью этого метода является выпол-

нение равенства $x(\bar{t}) = \mu_{k+q}(\bar{t})$, $x(t) = \sum_{j=0}^{l-1} C_j(t) f^{(j)}(t)$, если ДАУ индекса l имеет нулевое ПР (см. теорему 3). Иначе говоря, решение ДАУ находится точно (независимо от шага сетки). Известно, что от численного процесса, описываемого формулами (30), можно перейти к (РС) (см. [29]). Тогда для ДАУ первого порядка РС при $q = 0$ совпадает с неявным методом Эйлера.

При тестовых расчетах применялись схемы при $q = 0, 1$. Решалась задача Коши для ДАУ (19) с решением $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \end{pmatrix}, t \in T_1 = [-1, 0]; \begin{pmatrix} e^t + c_2 t^2 \\ e^{2t} + c_2 t^3 \end{pmatrix}, t \in T_2(0, 1) \right\}$. Решению соответствуют начальные данные $(x_1(-1) \ x_2(-1))^T = (1/e \ 1/e^2)^T$ и свободный член $(f_1; f_2) = (2e^{2t} + e^t(\gamma - 2t); e^{2t}(2t + 1) - 2t^2 e^t)$, где c_2 – произвольное число, если $\gamma = 1$, и $c_2 = 0$, если $\gamma = 2$. Задавалась сетка $t_i = -1 + i\tau$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, $\tau = 2/n$, где число узлов n варьировалось от 10 до 10000.

При $\gamma = 2$, $q = 0$ РС сходилась с эмпирической оценкой $O(\tau)$. Метод при $q = 1$ выдавал результаты на уровне ошибок округления. Если узел сетки при $\gamma = 1$, $q = 0$ совпадал с ОТ $t = 0$, то происходил авост. В обратном случае получали решение с эмпирической оценкой $O(\tau)$. Метод при $\gamma = 1$, $q = 1$ независимо от расположения узлов сетки демонстрировал сходимость на отрезке T_1 с оценкой $O(\tau^2)$ с переходом на какую-то другую ветку решения в узлах $t_i > 0$.

При $\gamma = 1$ проводились расчеты для однородной системы с начальными данными $x_1(-1) = 1$, $x_2(-1) = -1$. Здесь $x_1(t) = \{t^2, t \in T_1, x_1(t) = c_2 t^2, t \in T_2\}$, $x_2(t) = t x_1(t)$, где $t \in T$. Если узел сетки схемы при $q = 0$ совпадал с ОТ, то происходил авост. В обратном случае метод сходился со скоростью $O(\tau)$ к аналитическому решению $(x_1 \ x_2) = (t^2 \ t^3)$, $t \in T$. В случае схемы при $q = 1$ авоста не происходило, даже если узел сетки совпадал с особой точкой, и наблюдался численный процесс, аналогичный численному процессу при решении неоднородной системы. Ряд похожих эффектов влияния ОТ при численном решении ОДУ (в основном в нелинейном случае) описан в [30].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980.
2. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1996.
3. Власенко Л.А. Эволюционные модели с неявными и вырожденными дифференциальными уравнениями. Днепропетровск: Системные технологии, 2006.
4. Latour R., Marz R., Tischendorf C. Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. Description: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH Co. KG, Germany, 2013.
5. Белов А.А. Дескрипторные системы и задачи управления / ред. А.А. Белов, А.П. Курдюков. М.: Физматлит, 2015. 270 с.
6. Бояринцев Ю.Е. Алгебро-дифференциальные системы. Методы решения и исследования / ред. Ю.Е. Бояринцев, В.Ф. Чистяков. Новосибирск: Наука, 1998.
7. Свиридюк Г.А., Загребина С.А. Задача Шоултера–Сидорова как феномен уравнений соболевского типа // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. 2010. Т. 3. № 1. С. 104–125.
8. Бояринцев Ю.Е., Корсуков В.М. Применение разностных методов к решению регулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В кн.: Вопросы прикладной математики. Иркутск: Изд. СЭИ СО АН СССР, 1975. С. 140–152.
9. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
10. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
11. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 2-е изд., дополненное. М.: Наука, 1966.
12. Сидоров Н.А., Дрегла А.И. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с необратимым оператором в главной части и неклассическими начальными условиями. В кн: Итоги науки и техн. Сер. Современ. матем. и ее прил. Темат. обз., 183, ВИНТИ РАН, М., 2020 С. 120–129.
13. Sidorov N.A. A study of the continuous solutions of the Cauchy problem in the neighborhood of a branch point // Sov. Math. (Iz. VUZ). 1976. V. 20. № 9. P. 77–87.

14. *Maerz R., Weinmuller E.B.* Solvability of Boundary Value Problems for Systems of Singular Differential-Algebraic Equations // *SIAM J. Math. Anal.* 1993. V. 24. № 1. P. 200–215.
<https://doi.org/10.1137/0524012>
15. *Gorbulov V.K., Gorobetz A., Sviridov V.* The method of normal splines for linear implicit differential equations of second order // *Lobachevskii J. Math.* 2005. V. 20. P. 59–75.
16. *Marz R., Riaz R.* Linear differential-algebraic equations with properly stated leading term: Regular points // *J. Math. Anal. Appl.* 2006. V. 323. № 2. P. 1279–1299.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.038>
17. *Estevez Schwarz D., Lamour R.* Diagnosis of singular points of structured DAEs using automatic differentiation // *Numer. Algorithm.* 2014. V. 69. № 4. P. 667–691.
<https://doi.org/10.1007/s11075-014-9919-8>
18. *Lomov S.A.* Introduction to the General Theory of Singular Perturbations. MONOGRAPHS, V. 112 i. Am. Math. Soc. 1992.
19. *Samoilenko A.M., Samusenko P.F.* Asymptotic integration of singularly perturbed differential algebraic equations with turning points. Part I // *Ukrains'kyi Mat. Zh.* Vol. 2020. V. 72. № 12. P. 1669–1681.
<https://doi.org/10.37863/umzh.v72i12.6261>
20. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Evaluation of the Index and Singular Points of Linear Differential-Algebraic Equations of Higher Order // *J. Math. Sci.* 2018. V. 231. Iss. 6. P. 827–845.
21. *Silverman L.M., Bucy R.S.* Generalizations of theorem of Dolezal // *Math. System Theory.* 1970. V. 4. P. 334–339.
22. *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. М: Наука, 1975.
23. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. 2-е изд., стереот. М.: Физматлит, 2002. 160 с.
24. *Лузин Н.Н.* К изучению матричной системы теории дифференциальных уравнений // *Автомат. и телемех.* 1940. № 5. С. 4–66.
25. *Chistyakov V.F., Chistyakova E.V.* Linear Differential-Algebraic Equations Perturbed by Volterra Integral Operators // *Different. Equat.* 2017. V. 53. № 10. P. 1274–1287.
26. *Шеглова А.А.* Исследование и решение вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью замен переменных // *Сиб. матем. журн.* 1995. V. 36. № 6. P. 1435–1445.
27. *Chistyakova E.V., Chistyakov V.F.* Solution of differential algebraic equations with the Fredholm operator by the least squares method // *Appl. Numer. Math.* 2020. V. 149. P. 43–51.
28. *Chistyakov V.F.* Improved Estimates of the Effect of Perturbations on the Solutions of Linear Differential-Algebraic Equations // *Different. Equat.* 2019. V. 55. P. 279–282.
29. *Булатов М.В., Чистяков В.Ф.* Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2002. Т. 42. № 4. С. 459–470.
30. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Численное интегрирование задач Коши с особыми точками. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2020. 076. 36 с.

**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 519.65

**О ЛОКАЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ
СПЛАЙНАХ ФАВАРА С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УЗЛАМИ¹⁾**

© 2023 г. В. Т. Шевалдин^{1,*}

¹ 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16,
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия

*e-mail: Valerii.Shevaldin@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 19.04.2022 г.

Переработанный вариант 13.12.2022 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Приведены явные формулы для интерполяционных параболических сплайнов на отрезке числовой оси, построенных Ж. Фаваром в 1940 г. Установлены оценки для нормы второй производной и погрешности аппроксимации в равномерной метрике построенными сплайнами на соболевском классе W_∞^2 дважды дифференцируемых функций. Библ. 18.

Ключевые слова: интерполяция, сплайны, равномерная метрика, разделенные разности, производная.

DOI: 10.31857/S0044466923060182, **EDN:** UYQYDE

1. ВВЕДЕНИЕ

В первых монографиях [1], [2] на русском языке по теории сплайнов отмечается, что теории интерполяции полиномиальными сплайнами и сам термин сплайн ведут свой отсчет со статьи И. Шёнберга [3], вышедшей в 1946 г. Однако еще раньше в своей статье 1940 г. локальные интерполяционные сплайны степени n появились (вероятно, впервые) в работе Ж. Фавара [4], посвященной решению одной экстремальной интерполяционной задачи о связи разделенных разностей n -го порядка и соответствующих производных. Развитие теории сплайнов происходило в различных направлениях. Например, они оказались экстремальными функциями во многих задачах по вычислению точных констант в теории приближения функций (см., например, [5–7]). Но самое главное применение сплайны и более общие конструкции (в частности, всплески) получили в вычислительной математике. В настоящее время трехмерные вычислительные схемы, построенные на основе одномерных сплайнов, используются для моделирования поверхностей летательных аппаратов, корпусов судов, гидротурбин, при описании различных геологических, физических и биологических явлений, а также при обработке изображений, в картографии, томографии, индустрии фильмов и т.д. При этом наиболее востребованы локальные сплайны. Понятие локальности означает, что значение сплайна в каждой точке зависит только от нескольких значений аппроксимируемой функции в окрестности этой точки, и для их построения не требуется решение систем линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Локальные сплайны (начиная с работы Т. Лича и Л. Шумейкера [8]) обычно строились из условия сохранения сплайном многочленов заданной степени. Первые параболические интерполяционные локальные сплайны построил Б.И. Квасов (см. [9]). Развитием новых методов в теории локальных сплайнов занимались многие математики (см., например, [10–13], монографию автора [14] и имеющиеся там ссылки). Каждый год появляются десятки статей по применению локальных сплайнов в различных задачах геометрического моделирования.

В настоящей работе мы, следуя Ж. Фавару [4], для функций f , заданных поточечно на отрезке числовой оси, строим локальные интерполяционные параболические сплайны (т.е. при $n = 2$), отличные от сплайнов Б.И. Квасова (см. [9]). При произвольном $n \in \mathbb{N}$ подобное построение сплайнов Фавара (в работе Ж. Фавара описан только метод их получения) также возможно, и это

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 075-02-2023-913) в рамках исследований, проводимых в Уральском математическом центре.

приводит к решению системы n линейных алгебраических уравнений относительно параметров этих сплайнов (значений n -й производной локального интерполяционного сплайна).

В разд. 2 мы решаем такую систему в случае $n = 2$ и затем исследуем простейшие свойства (оцениваем вторую производную и величину погрешности аппроксимации в равномерной метрике) интерполяционных параболических сплайнов, возникших в работе Ж. Фавара.

2. ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ ФАВАРА

Рассмотрим сетку узлов $\Delta: x_0 < x_1 < \dots < x_n$ на отрезке $[x_0; x_n]$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, и пусть $h_k = x_{k+1} - x_k$, $x_{k+1/2} = 0.5(x_k + x_{k+1})$. Пусть $y = \{y_k\}_{k=0}^n$ – произвольная последовательность действительных чисел. Введем последовательность $\{P_k(x)\}_{k=0}^{n-1}$ линейных функций, удовлетворяющих условиям

$$P_k(x_k) = y_k, \quad P_k(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

Ясно, что каждая функция $P_k(x)$ может быть записана в виде

$$P_k(x) = \frac{y_{k+1}(x - x_k) + y_k(x_{k+1} - x)}{x_{k+1} - x_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Будем строить параболический сплайн $S \in C^1[x_0; x_n]$ с основными узлами в точках $\{y_k\}_{k=0}^n$ и дополнительными узлами в точках $\{x_{k+1/2}\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющий условиям интерполяции

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Для этого на отрезке $[x_0; x_1]$ положим $S(x) = P_0(x)$. Тогда $S(x_0) = y_0$, $S(x_1) = y_1$. Пусть сплайн $S(x)$ уже построен на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$, $k \geq 1$. Тогда на следующем отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ положим

$$S(x) = P_{k-1}(x) + \int_{x_k}^x (x-t)u(t) dt, \quad (2.1)$$

где функция $u(t) = S''(t)$ подлежит дальнейшему определению. Продифференцируем обе части этой формулы. Получим

$$S'(x) = P'_{k-1}(x) + \int_{x_k}^x u(t) dt. \quad (2.2)$$

Разделенная разность второго порядка по узлам x_{k-1} , x_k , x_{k+1} определяется обычным образом с помощью равенства

$$[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}] = \frac{y_{k+1}}{h_k(h_{k-1} + h_k)} - \frac{y_k}{h_{k-1}h_k} + \frac{y_{k-1}}{h_{k-1}(h_{k-1} + h_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Функцию $u(t) = S''(t)$ будем строить в виде

$$u(t) = \begin{cases} Z_1[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], & x_k \leq t < x_{k+1/2}, \\ Z_2[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], & x_{k+1/2} \leq t < x_{k+1}, \end{cases}$$

где числа $Z_1 = Z_1^{(k)}$ и $Z_2 = Z_2^{(k)}$ определим, исходя из системы уравнений

$$S(x_{k+1}) = P_k(x_{k+1}), \quad S'(x_{k+1}) = P'_k(x_{k+1}).$$

Эта система уравнений с учетом (2.1) и (2.2) переписывается в виде

$$\begin{aligned} P_k(x_{k+1}) - P_{k-1}(x_{k+1}) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)u(t) dt, \\ P'_k(x_{k+1}) - P'_{k-1}(x_{k+1}) &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t) dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Левые части системы (2.3) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} P_k(x_{k+1}) - P_{k-1}(x_{k+1}) &= h_k(h_{k-1} + h_k)[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], \\ P'_k(x_{k+1}) - P'_{k-1}(x_{k+1}) &= (h_{k-1} + h_k)[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], \end{aligned}$$

а правые —

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)u(t) dt &= \frac{h_k^2(3Z_1 + Z_2)}{2}[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], \\ \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(t) dt &= \frac{h_k(Z_1 + Z_2)}{2}[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}]. \end{aligned}$$

Тогда из системы (2.3) выводим следующие равенства:

$$Z_1 = \frac{3(h_{k-1} + h_k)}{h_k}, \quad Z_2 = -\frac{h_{k-1} + h_k}{h_k}.$$

Таким образом, параболический сплайн Фавара, т.е. функция $S(x)$, построен на любом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. При этом $S \in C^1[x_0; x_n]$ и выполнены условия интерполяции $S(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Этот сплайн является локальным. На каждом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \geq 1$, он зависит только от трех значений y_{k-1}, y_k, y_{k+1} интерполируемой последовательности $y = \{y_k\}_{k=0}^n$. Узлами этого сплайна являются точки $\{x_k\}_{k=0}^n$ и $\{x_{k+1/2}\}_{k=1}^{n-1}$. С учетом определения чисел $Z_1 = Z_1^{(k)}$ и $Z_2 = Z_2^{(k)}$ сплайн $S(x)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{y_k(x - x_{k-1}) + y_{k-1}(x_k - x)}{h_{k-1}} + \frac{3(h_{k-1} + h_k)}{2h_k}(x - x_k)^2[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], \quad x \in [x_k; x_{k+1/2}], \\ S(x) &= \frac{y_k(x - x_{k-1}) + y_{k-1}(x_k - x)}{h_{k-1}} + \frac{h_{k-1} + h_k}{2h_k}(3(x - x_k)^2 - 4(x - x_{k+1/2})^2)[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}], \\ &x \in [x_{k+1/2}; x_{k+1}]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Пусть

$$W_\infty^2 = W_\infty^2[x_0; x_n] = \left\{ f : f' \in AC[x_0; x_n], \|f''\|_{L_\infty[x_0; x_n]} \leq 1 \right\}$$

есть соболевский класс дважды дифференцируемых функций с обычным определением нормы в пространстве L_∞ . Пусть $f \in W_\infty^2$ и $f(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Теорема 1. *Имеет место неравенство*

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \|S''\|_{L_\infty[x_0; x_n]} \leq 3.$$

Доказательство теоремы 1 следует из (2.4), равенства $S'''(x) = 0$, $x \in (x_0; x_1)$, и следующего соотношения (см., например, [3], с. 63):

$$[y_{k+1}, y_k, y_{k-1}] = \frac{1}{h_{k-1} + h_k} \left[\frac{1}{h_k} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t) f'''(t) dt + \frac{1}{h_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (t - x_{k-1}) f'''(t) dt \right]. \tag{2.5}$$

Теорема 2. При $k \geq 1$ имеет место неравенство

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \|f - S\|_{L_\infty[x_k; x_{k+1}]} \leq 0.5 \max\{h_{k-1}h_k, h_k^2\}.$$

Доказательство. Используя формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \int_{x_k}^x (x - t) f''(t) dt,$$

соотношение (2.5) и тот факт, что сплайн из формул (2.4) сохраняет линейные функции, получим

$$S(x) - f(x) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} K_1^{(1)}(x, t) f'''(t) dt + \int_{x_k}^x K_2^{(1)}(x, t) f'''(t) dt + \int_x^{x_{k+1}} K_3^{(1)}(x, t) f'''(t) dt, \quad x \in [x_k; x_{k+1/2}], \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} K_1^{(1)}(x, t) &= \frac{(x_{k-1} - t)(x - x_k)}{h_{k-1}} \left(1 - \frac{3(x - x_k)}{2h_k} \right), \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \\ K_2^{(1)}(x, t) &= \frac{3(x_{k+1} - t)(x - x_k)^2}{2h_k^2} - x + t, \quad t \in [x_k; x], \\ K_3^{(1)}(x, t) &= \frac{3(x_{k+1} - t)(x - x_k)^2}{2h_k^2}, \quad t \in [x; x_{k+1}]; \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$S(x) - f(x) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} K_1^{(2)}(x, t) f'''(t) dt + \int_{x_k}^x K_2^{(2)}(x, t) f'''(t) dt + \int_x^{x_{k+1}} K_3^{(2)}(x, t) f'''(t) dt, \quad x \in [x_{k+1/2}; x_{k+1}],$$

где

$$\begin{aligned} K_1^{(2)}(x, t) &= \frac{x_{k-1} - t}{h_{k-1}} \left(x - x_k - \frac{3(x - x_k)^2 - 4(x - x_{k+1/2})^2}{2h_k} \right), \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \\ K_2^{(2)}(x, t) &= \frac{(x_{k+1} - t)(3(x - x_k)^2 - 4(x - x_{k+1/2})^2)}{2h_k^2} - x + t, \quad t \in [x_k; x], \\ K_3^{(2)}(x, t) &= \frac{(x_{k+1} - t)(3(x - x_k)^2 - 4(x - x_{k+1/2})^2)}{2h_k^2}, \quad t \in [x; x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Нетрудно установить, что при $x_k \leq x \leq x_{k+1/2}$

$$K_1^{(1)}(x, t) \leq 0, \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \quad K_3^{(1)}(x, t) \geq 0, \quad t \in [x; x_{k+1}],$$

а функция $K_2^{(1)}(x, t)$ (как функция от переменной t) является линейной на отрезке $[x_k; x]$ и меняет знак на этом отрезке один раз с минуса на плюс. Аналогично при $x_{k+1/2} \leq x \leq x_{k+1}$ имеют место неравенства

$$K_1^{(2)}(x, t) \leq 0, \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \quad K_3^{(2)}(x, t) \geq 0, \quad t \in [x; x_{k+1}],$$

а функция $K_2^{(2)}(x, t)$ (как функция от переменной t) является линейной на отрезке $[x_k; x]$ и тоже на этом отрезке меняет знак один раз с минуса на плюс. Эти соображения позволяют точно вычислить величину

$$\sup_{f \in W_\infty^2} |f(x) - S(x)|$$

при каждом фиксированном $x \in [x_k; x_{k+1}]$, но приводят к весьма громоздким выкладкам. Поэтому величину

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \|f - S\|_{L_\infty[x_k; x_{k+1}]}, \quad k \geq 1,$$

в настоящей работе оценим сверху более простым способом. Непосредственно из определения функций $K_j^{(1)}(x, t)$, $j = 1, 2, 3$, при $x \in [x_k; x_{k+1/2}]$ имеем

$$|K_1^{(1)}(x, t)| \leq \frac{h_k}{2}, \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \quad |K_2^{(1)}(x, t)| \leq \frac{h_k}{8}, \quad t \in [x_k; x],$$

$$|K_3^{(1)}(x, t)| \leq \frac{3h_k}{8}, \quad t \in [x; x_{k+1}],$$

а из определения функций $K_j^{(2)}(x, t)$, $j = 1, 2, 3$, при $x \in [x_{k+1/2}; x_{k+1}]$ следует, что

$$|K_1^{(2)}(x, t)| \leq \frac{h_k}{8}, \quad t \in [x_{k-1}; x_k], \quad |K_2^{(2)}(x, t)| \leq \frac{h_k}{2}, \quad t \in [x_k; x],$$

$$|K_3^{(2)}(x, t)| \leq \frac{h_k}{8}, \quad t \in [x; x_{k+1}].$$

Из этих оценок и формул (2.6), (2.7) следует утверждение теоремы 2.

Замечание 1. В [15] для функций f , заданных сеточно на числовой оси или на отрезке оси, предложен общий метод построения локальных параболических сплайнов с дополнительными узлами при произвольном расположении основных узлов сплайна. Частными случаями этой схемы являются сплайны Ю.Н. Субботина (см. [11], а также [16]) и Б.И. Квасова (см. [9]). Сплайны Субботина сохраняют линейные функции и обладают хорошими аппроксимативными свойствами (в периодическом случае для равномерной сетки узлов эти сплайны реализуют поперечники по Колмогорову класса функций W_∞^2). В то же время они не являются интерполяционными ($S(x_k) \neq f(x_k)$), но сохраняют локально знак, монотонность и выпуклость исходных значений аппроксимируемой функции f (см. [11], [16]). Параболические сплайны Квасова (в статье автор называет их эрмитовыми) интерполируют значения аппроксимируемой функции в основных узлах $\{x_k\}$ и тоже имеют дополнительные узлы в точках $\{x_{k+1/2}\}$. Сравнение этих конструкций, проведенное в [15], показывает, что для прикладных исследований обе конструкции примерно равноценны. Интерполяционные параболические сплайны Квасова сохраняют квадратичные функции, но не обладают формосохраняющими свойствами. Рассмотренные в настоящей работе интерполяционные сплайны Фавара не совпадают со сплайнами Квасова, но тоже являются частным случаем общей схемы построения локальных параболических сплайнов (см. § 2, систему (3.1) в [15]). Сплайны Фавара не сохраняют функцию $f(x) = x^2$ и реализуют на каждом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \geq 1$, трехточечную схему локальной аппроксимации функции f (в том смысле, что значения сплайна на отрезке зависят только от трех значений функции).

Подчеркнем, что при практическом использовании локальных сплайнов Фавара вопрос о трудоемкости вычислений является излишним, поскольку формулы (2.4) представляют собой явные выражения для таких сплайнов в каждой точке $x \in [x_0; x_n]$.

3. ОБОБЩЕНИЕ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

В данном разделе мы по методу Фавара построим локальные интерполяционные экспоненциальные сплайны с произвольным расположением узлов, соответствующие линейному дифференциальному оператору второго порядка вида

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2, \quad \beta > 0.$$

Следуя § 1 в [17], построим разностный оператор $\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k$, соответствующий дифференциальному оператору \mathcal{L}_2 , определенный на пространстве последовательностей $y = \{y_k\}_{k=0}^n$ и сетке $\Delta = \{x_k\}_{k=0}^n$, который является аналогом разделенной разности второго порядка. А именно, положим

$$\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k = \text{sh } \beta h_k y_{k+2} - \text{sh } \beta (h_{k+1} + h_k) y_{k+1} + \text{sh } \beta h_{k+1} y_k.$$

Нетрудно заметить, что разность $\Delta_{\mathcal{L}_2} y_k$ обращается в нуль на сеточных значениях $y_k = f(x + x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n - 2$, любой функции f из ядра оператора \mathcal{L}_2 при любом $x \in \mathbb{R}$. Отметим, что при $h_k = h$, $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. для равномерной сетки), оператор обобщенной конечной разности в явном виде впервые был выписан в работе А. Шармы и И. Цимбаларио [18] для любого линейного дифференциального оператора произвольного порядка с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен которого имеет только действительные корни.

Рассмотрим интерполяционные экспоненциальные многочлены вида

$$p_k(x) = C_1^{(k)} \text{sh } \beta x + C_2^{(k)} \text{ch } \beta x, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1,$$

удовлетворяющие условиям

$$p(x_k) = y_k, \quad p(x_{k+1}) = y_{k+1}.$$

Они могут быть записаны в виде

$$p_k(x) = \frac{y_{k+1} \text{sh } \beta(x - x_k) + y_k \text{sh } \beta(x_{k+1} - x)}{\text{sh } \beta(x_{k+1} - x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

На отрезке $[x_0; x_n]$ будем строить экспоненциальный сплайн $S(x)$ второго порядка с основными узлами в точках $\{x_k\}_{k=0}^n$ и дополнительными – в точках $\{x_{k+1/2}\}_{k=1}^{n-1}$, удовлетворяющий условиям интерполяции

$$S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

На отрезке $[x_0; x_1]$ положим $S(x) = p_0(x)$. Тогда $S(x_0) = y_0$ и $S(x_1) = y_1$. Далее, если сплайн $S(x)$ уже построен на отрезке $[x_{k-1}; x_k]$, $k \geq 1$, то на следующем отрезке $[x_k; x_{k+1}]$ положим

$$S(x) = p_{k-1}(x) + \int_{x_k}^x \varphi_2(x - t) u(t) dt, \tag{3.1}$$

где $\varphi_2(t) = \frac{1}{\beta} \text{sh } \beta t$, и функция $u(t) = \mathcal{L}_2(D)S(t)$. При этом функцию $u(t)$ будем искать в следующем виде:

$$u(t) = \begin{cases} Z_1 \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1}, & x_k \leq t < x_{k+1/2}, \\ Z_2 \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1}, & x_{k+1/2} \leq t < x_{k+1}, \end{cases}$$

где $Z_1 = Z_1^{(k)}$ и $Z_2 = Z_2^{(k)}$ – действительные числа, подлежащие дальнейшему определению. Дифференцируя функцию $S(x)$, имеем

$$S'(x) = p'_{k-1}(x) + \int_{x_k}^x \text{ch } \beta(x - t) u(t) dt. \tag{3.2}$$

Положим $S(x_{k+1}) = p_k(x_{k+1})$, $S'(x_{k+1}) = p'_k(x_{k+1})$. Эти условия обеспечивают, что $S \in C^1[x_0; x_n]$. Тогда из (3.1), (3.2) получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными для определения чисел Z_1 и Z_2 :

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \beta h_k} \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1} = \frac{Z_1 \left(\operatorname{ch} \beta h_k - \operatorname{ch} \frac{\beta h_k}{2} \right) + Z_2 \left(\operatorname{ch} \frac{\beta h_k}{2} - 1 \right)}{\beta^2} \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1},$$

$$\frac{\operatorname{ch} \beta h_k}{\operatorname{sh} \beta h_{k-1} \operatorname{sh} \beta h_k} \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1} = \frac{Z_1 \left(\operatorname{sh} \beta h_k - \operatorname{sh} \frac{\beta h_k}{2} \right) + Z_2 \operatorname{sh} \frac{\beta h_k}{2}}{\beta^2} \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1}.$$

Решая эту систему, окончательно получаем, что

$$Z_1 = \frac{\beta^2}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h_k}{4}} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\beta h_k}{4}}{\operatorname{sh} \beta h_{k-1}} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta h_k}{4}}{\operatorname{sh} \beta h_k} \right), \quad Z_2 = \frac{\beta^2}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{\beta h_k}{4}} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{3\beta h_k}{4}}{\operatorname{sh} \beta h_k} - \frac{\operatorname{ch} \frac{3\beta h_k}{4}}{\operatorname{sh} \beta h_{k-1}} \right). \quad (3.3)$$

Таким образом, интерполяционный экспоненциальный сплайн второго порядка (являющийся аналогом параболического сплайна Фавара) на любом отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $k \geq 1$, может быть записан в следующем виде:

$$S(x) = \frac{y_k \operatorname{sh} \beta(x - x_{k-1}) + y_{k-1} \operatorname{sh} \beta(x_k - x)}{\operatorname{sh} \beta h_{k-1}} + \frac{1 - \operatorname{ch} \beta(x - x_k)}{\beta^2} Z_1 \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1}, \quad x \in [x_k; x_{k+1/2}],$$

$$S(x) = \frac{y_k \operatorname{sh} \beta(x - x_{k-1}) + y_{k-1} \operatorname{sh} \beta(x_k - x)}{\operatorname{sh} \beta h_{k-1}} +$$

$$+ \frac{Z_1 (\operatorname{ch} \beta(x - x_k) - \operatorname{ch} \beta(x - x_{k+1/2})) + Z_2 (\operatorname{ch} \beta(x - x_{k+1/2}) - 1)}{\beta^2} \Delta_{\mathcal{L}_2} y_{k-1}, \quad x \in [x_{k+1/2}; x_{k+1}],$$

где числа $Z_1 = Z_1^{(k)}$ и $Z_2 = Z_2^{(k)}$ определены равенствами (3.3).

Замечание 2. Локальные экспоненциальные и тригонометрические сплайны второго порядка, соответствующие операторам $\mathcal{L}_2(D) = D^2 - \beta^2$, $\beta > 0$, и $\mathcal{L}_2(D) = D^2 + \alpha^2$, $\alpha > 0$, изучались в монографии [14]. Там же (в комментариях и в списке литературы) приведена вся необходимая библиография. Но все сплайны, рассмотренные в [14], были неинтерполяционными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.
3. Schoenberg I.J. Contributions to problem of approximation of equidistant data by analytic functions // Quart. Appl. Math. 1946. № 4. P. 45–99.
4. Favard J. Sur l'interpolation // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. № 9. P. 281–306.
5. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
6. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближений. М.: Наука, 1984.
7. Корнейчук Н.П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
8. Luche T., Schumaker L.L. Local spline approximation methods // J. Approx. Theory. 1975. V. 15. № 4. P. 294–325.
9. Квасов Б.И. Интерполяция эрмитовыми параболическими сплайнами // Изв. вузов. Математика. 1984. Т. 28. № 5. С. 25–32.
10. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
11. Субботин Ю.Н. Наследование свойств монотонности и выпуклости при локальной аппроксимации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 7. С. 996–1003.

12. *Шевалдина Е.В.* Аппроксимация локальными параболическими сплайнами функций по их значениям в среднем // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2007. Т. 13. № 4. С. 169–189.
13. *Волков Ю.С., Богданов В.В.* О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами // Сиб. матем. ж. 2020. Т. 61. № 5. С. 795–802.
14. *Шевалдин В.Т.* Аппроксимация локальными сплайнами. Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2014.
15. *Субботин Ю.Н., Шевалдин В.Т.* Об одном методе построения локальных параболических сплайнов с дополнительными узлами // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 2. С. 205–219.
16. *Шевалдин В.Т.* Аппроксимация локальными параболическими сплайнами с произвольным расположением узлов // Сиб. журнал вычисл. матем. 2005. Т. 8. № 1. С. 77–88.
17. *Шевалдина Е.В.* Аппроксимация локальными экспоненциальными сплайнами с произвольными узлами // Сиб. журнал вычисл. матем. 2006. Т. 9. № 4. С. 391–402.
18. *Шарма А., Цимбаларио И.* Некоторые линейные дифференциальные операторы и обобщенные разности // Матем. заметки. 1977. Т. 21. № 2. С. 161–173.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.956.25

**ОБ ОТСУТСТВИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ¹⁾**

© 2023 г. В. Е. Адмасы^{1,*}

¹ 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: mihretesme@gmail.com

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 19.02.2023 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Доказывается отсутствие решений полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка с сингулярным потенциалом и нелокальными источниками. Доказательства основаны на методе пробных функций, разработанном Э. Митидиери и С.И. Похожаевым. Библ. 13.

Ключевые слова: сингулярный потенциал, нелокальный источник, метод пробных функций.

DOI: 10.31857/S0044466923060029, **EDN:** TQSKVV

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большое внимание уделялось проблеме нахождения необходимых условий разрешимости уравнений и неравенств различных типов в частных производных. Многие авторы исследовали проблему условий локальной и глобальной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений, неравенств и их систем. Сейчас исследователи интересуются оценкой условий существования и поведения решений для различных классов уравнений и неравенств в частных производных в соответствующих функциональных пространствах. Например, большое значение придается проблеме существования и разрушения решений параболических уравнений и неравенств в частных производных с сингулярными коэффициентами или начальными данными в соответствующих функциональных классах.

Получено много пионерских результатов об отсутствии локальных и глобальных решений задач Коши для дифференциальных уравнений или неравенств параболического типа без потенциального члена (см. [1–6] (эллиптические или параболические уравнения без сингулярных переменных коэффициентов) и ссылки там). Исследования локальной разрешимости квазилинейных параболических уравнений и неравенств с потенциальными членами можно найти в [7–10]. Что касается нелокальных задач, в [11] рассмотрены некоторые вырожденные параболические неравенства с локальными и нелокальными нелинейностями, причем было доказано отсутствие глобальных нетривиальных решений методом пробных функций. Позднее в [12] было доказано отсутствие глобального слабого решения для однородных квазилинейных параболических неравенств при наличии сингулярного потенциала и нелокального источника. Однако условия отсутствия решений при наличии потенциала и весового источника не рассматривались для полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка.

В настоящей работе мы обобщаем результаты [12] на параболические неравенства и системы высокого порядка, модифицируя условия на источник, и получаем условия отсутствия решений при наличии сингулярного потенциала и нелокального весового источника. Мы используем метод пробных функций (см. [1], [2], [4], [13]), чтобы определить влияние сингулярного потенциала, весовой функции и нелокального источника на отсутствие неотрицательного нетривиального глобального слабого решения.

В разд. 2 мы доказываем отсутствие решений для рассматриваемого неравенства, а в разд. 3 – для системы таких неравенств.

¹⁾Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

2. СИНГУЛЯРНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Рассмотрим неравенство вида

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t &\geq \Delta^k u - V(x)u^q + |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, t) &\geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$k \in \mathbb{N}, \quad \min\{q, s, r, \alpha\} > 0, \quad q(s + r) > q + rs > q, \tag{2.2}$$

начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна и локально интегрируема, $V(x)$ – положительный сингулярный потенциал, удовлетворяющий оценке $V(x) \sim |x|^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, а $\beta(x)$ – положительная весовая функция, сингулярная в начале координат, т.е. $\beta(x) \geq c|x|^{-l}$, $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ с некоторым $c > 0$ и $l \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1. Неотрицательная функция $u(x, t)$ называется *слабым решением нелинейного неравенства* (2.1), если $u(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ такова, что $V(x)u^q, |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$, и соотношение

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x, 0) dx \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \Delta^k \phi \right) dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q \phi dx dt \tag{2.3}$$

выполняется для любой пробной функции $\phi \in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty); \mathbb{R}_+)$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (2.2). Если $\alpha > lr/q$ и предположим, что

$$N \leq \frac{(\alpha + \sigma)q - lr}{q(q + r - s) - r}, \tag{2.4}$$

то задача (2.1) не имеет нетривиального глобального слабого решения.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ – слабое решение неравенства (2.1), а ϕ – неотрицательная пробная функция. Тогда по определению слабого решения имеем

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \phi| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q \phi dx dt. \tag{2.5}$$

Теперь оценим правую часть неравенства (2.5). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (2.5), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-r\lambda_2/q\lambda_1}(x) |x|^{-\alpha\lambda_2/\lambda_1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\lambda_2/\lambda_1} dx \right)^{1/\lambda_2}. \tag{2.6}$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x)u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-r\lambda_2/q\lambda_1}(x) |x|^{-\alpha\lambda_2/\lambda_1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\lambda_2/\lambda_1} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-r\lambda_2/q\lambda_1}(x) |x|^{-\alpha\lambda_2/\lambda_1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\lambda_2/\lambda_1} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{-r\lambda_2/q\lambda_1}(x) |x|^{-\alpha\lambda_2/\lambda_1} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\lambda_2/\lambda_1} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r) - (q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Используя рассуждения, аналогичные рассмотрению первого члена в (2.5), ко второму и третьему членам, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \phi| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \quad (2.8)$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \phi| dx dt &\leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \phi dx \right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1'} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r) - (q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Аналогично третий член в правой части (2.5) становится

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^q \phi dx \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt, \quad (2.10)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{s+r}{q} > 1, \quad \lambda_4 = \frac{s+r}{s-q} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_3'} = 1 - \frac{1}{\lambda_3}.$$

Тогда из (2.5)–(2.10) следует

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \phi \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \phi(x, 0) dx &\leq 4C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + \\ &+ 4C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \phi|^{\lambda_2} \phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt + 4C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Теперь положим $R > 0$ и введем пробные функции вида $\phi(x, t) = \phi_R(x, t) = \phi_0(t/R^\theta) \phi_0(|x|^2/R^2)$ с $\theta \geq 1$. Здесь ϕ_0 – функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\phi_0(s) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq 1, \\ 0, & s \geq 2. \end{cases} \quad (2.12)$$

Далее оценим правую часть (2.11). Рассмотрим замену переменных вида $x = R\xi, t = R^\theta \tau$, тогда

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt = R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau, \tag{2.13}$$

где $\gamma_1 = \theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \Delta^k \Phi \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1/\lambda_2} dt = R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \Delta^k \Phi \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau, \tag{2.14}$$

где $\gamma_2 = \theta + \left(N - 2k\lambda_2 + \frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3/\lambda_4} dt = R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3/\lambda_4} d\tau, \tag{2.15}$$

где $\gamma_3 = \theta + \left(N - \left(\sigma + \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3} \right) \frac{\lambda_3}{\lambda_4}$.

Тогда из (2.11)–(2.15) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \Phi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq 4C_1 R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau + \\ + 4C_2 R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \Delta^k \Phi \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau + 4C_3 R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3/\lambda_4} d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Теперь выберем φ_0 так, что

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\ \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\frac{r\lambda_2}{q\lambda_1} \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \Delta^k \Phi \right|^{\lambda_2} \Phi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\ \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} \left| \xi \right|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r\lambda_4}{q\lambda_3}} \Phi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3/\lambda_4} d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Тогда из неравенства (2.16) следует, что

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \Phi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq \sum_{i=1}^3 C_i^* R^{\gamma_i} \tag{2.17}$$

с некоторыми $C_1^*, C_2^*, C_3^* > 0$ и положительным параметром R .

Затем мы выбираем θ так, что

$$\begin{aligned} \theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{r/\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2} &= \theta + \left(N - 2k\lambda_2 + \frac{r/\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2} = \\ &= \theta + \left[N - \left(\sigma + \frac{\alpha}{\lambda_3} \right) \lambda_4 + \frac{r/\lambda_4}{q\lambda_3} \right] \frac{\lambda_3'}{\lambda_4}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Такой выбор дает следующее общее значение экспоненты R в соотношении (2.17):

$$\gamma = \frac{1}{s+r-q} \left[\left(\frac{r(q-1) + q(s-q)}{q} \right) N + \left(\frac{rl}{q} - \alpha \right) - \sigma \right]. \tag{2.19}$$

Теперь рассмотрим следующие два случая для значений γ .

Случай 1: $\gamma < 0$.

Очевидно, что правая часть (2.17) стремится к нулю, если $R \rightarrow \infty$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано для $\gamma < 0$.

Случай 2: $\gamma = 0$.

В этом случае из (2.13)–(2.15) имеем

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = c_1, \tag{2.20}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = c_2, \tag{2.21}$$

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt = c_3, \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r/\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_1 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_1 < 0. \end{cases} \\ c_2 &= \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r/\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^k \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_2 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_2 < 0. \end{cases} \\ c_3 &= \begin{cases} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{r/\lambda_4}{q\lambda_3}} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau, & \text{если } \gamma = \gamma_3 = 0, \\ 0, & \text{если } \gamma_3 < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда соотношение (2.17) принимает вид

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\| \beta^{1/q}(x) u \right\|_q^r dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq c. \tag{2.23}$$

Перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt \leq c. \tag{2.24}$$

Теперь вернемся к неравенству (2.5). Применяя неравенство Гёльдера, из соотношения (2.5) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^k \varphi| dxdt + \\ & + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q \varphi dxdt \leq c_1^{1/\lambda_1} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt \right)^{1/\lambda_1} + \\ & + c_2^{1/\lambda_1} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt \right)^{1/\lambda_1} + c_3^{1/\lambda_3} \left(\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt \right)^{1/\lambda_3}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Однако в силу (2.24) и абсолютной сходимости интеграла имеем

$$\int_{R^0}^{2R^0} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt \rightarrow 0 \tag{2.26}$$

при $R \rightarrow \infty$. Перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (2.25), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \|\beta^{1/q}(x)u\|_q^r dxdt = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ п.в. и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 1.

3. СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим систему параболических неравенств вида

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t & \geq \Delta^{k_1} u - V_1(x)v^{q_1} + |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \partial v / \partial t & \geq \Delta^{k_2} v - V_2(x)u^{q_2} + |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, t) & \geq 0, \quad v(x, t) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ u(x, 0) & = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{aligned} k_1, k_2 & \in \mathbb{N}, \quad \min\{q_1, q_2, s_1, s_2\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2\} > 0, \quad q_2(r_1 + s_1) > (q_2 + r_1), \\ s_2 > q_1, \quad q_1(r_2 + s_2) > (q_1 + r_2), \quad s_1 > q_2, \quad \beta_1(x) & \geq c|x|^{-l_1}, \quad \beta_2(x) \geq c|x|^{-l_2}, \\ x & \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad V_1(x) \sim |x|^{-\sigma_1}, \quad V_2(x) \sim |x|^{-\sigma_2} \end{aligned} \tag{3.2}$$

для некоторых $c > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x)$ и $v(x)$ – неотрицательные локально интегрируемые функции.

Определение 2. Пара неотрицательных функций $(u(x, t), v(x, t))$ называется *слабым решением системы нелинейных неравенств (3.1)*, если $u(x, t), v(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ таковы, что $V_1(x)v^{q_1}, V_2(x)u^{q_2}, |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1}, |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))$ и соотношения

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x, 0)dx \leq \\ & \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \Delta^{k_1} \phi \right) dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)v^{q_1} \phi dxdt, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\phi(x, 0)dx \leq \\ & \leq - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(v \frac{\partial \phi}{\partial t} + v \Delta^{k_2} \phi \right) dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)u^{q_2} \phi dxdt \end{aligned} \tag{3.4}$$

выполняются для любой пробной функции $\phi \in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N \times (0, \infty); \mathbb{R}_+)$, где $k = \max(k_1, k_2)$.

Теорема 2. Пусть условия (3.2), $\alpha_1 > l_1 r_1 / q_2$ и $\alpha_2 > l_2 r_2 / q_1$ выполняются. Предположим, что $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \max_{i=1, \dots, 6} \gamma_i \leq 0$, где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{[q_2(r_1 + s_1) - (q_2 + r_1)]N - q_2\theta + l_1 r_1 - \alpha_1 q_2}{q_2(r_1 + s_1 - 1)}, \\ \gamma_2 &= \frac{(N + \theta - 2k_1)q_2 s_1 + (N + \theta - 2k_1)q_2 r_1 + (l_1 - N)r_1 - (\alpha_1 + N)q_2 - \theta}{q_2(r_1 + s_1 - 1)}, \\ \gamma_3 &= \frac{(N + \theta - \sigma_2)s_1 + (\theta + l_1 - \sigma_2)r_1 - (\theta - \alpha_1)q_2}{r_1 + s_1 - q_2}, \\ \gamma_4 &= \frac{[q_1(r_2 + s_2) - (q_1 + r_2)]N - q_1\theta + l_2 r_2 - \alpha_2 q_1}{q_1(r_2 + s_2 - 1)}, \\ \gamma_5 &= \frac{(N + \theta - 2k_2)q_1 s_2 + (N + \theta - 2k_2)q_1 r_2 + (l_2 - N)r_2 - (\alpha_2 + N)q_1 - \theta}{q_1(r_2 + s_2 - 1)}, \\ \gamma_6 &= \frac{(N + \theta - \sigma_1)s_2 + (\theta + l_2 - \sigma_1)r_2 - (\theta - \alpha_2)q_1}{r_2 + s_2 - q_1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

с некоторым параметром $\theta \geq 1$. Тогда задача (3.1) не имеет нетривиального глобального слабого решения.

Доказательство. Пусть пара функций (u, v) – слабое решение системы неравенств (3.1), а ϕ – неотрицательная гладкая пробная функция, тогда по определению слабого решения известно, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x, 0)dx \leq \\ & \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \Delta^{k_1} \phi \right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)v^{q_1} \phi dxdt, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\phi(x, 0) dx \leq \\ & \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v |\Delta^{k_2} \phi| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) u^{q_2} \phi dx dt. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Теперь оценим правую часть неравенства (3.6). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \tag{3.8}$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга, придем к

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right| dx dt \leq \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2} dt \leq \\ & \leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^2 dx dt \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \right)^{1/\lambda_1'} \leq \\ & \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^2 dx dt + C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где

$$\lambda_1 = s_1 + r_1 > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q_2(s_1 + r_1)}{q_2(s_1 + r_1) - (q_2 + r_1)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Применяя аналогичные рассуждения ко второму и третьему слагаемым (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \|\Delta^{k_1} \phi\| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi dx \right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1(x) u^{q_2} dx \right)^{r_1/(q_2\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \phi|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{1/\lambda_2}. \tag{3.10}$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга в (3.10), придем к

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \|\Delta^{k_1} \phi\| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^2 dx dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{q_2\lambda_1}(x) |x|^{-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \phi|^{\lambda_2} \phi^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt \tag{3.11}$$

и

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) v^{q_1} \phi dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^2 dx dt + C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{q_1\mu_1}(x) |x|^{(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1})\mu_2} \phi^{\mu_1/\mu_2} dx \right)^{\mu_1'/\mu_2} dt, \tag{3.12}$$

где

$$\mu_1 = \frac{s_2 + r_2}{q_1} > 1, \quad \mu_2 = \frac{r_2 + s_2}{s_2 - q_1} > 1, \quad \frac{1}{\mu_1'} = 1 - \frac{1}{\mu_1}.$$

Комбинируя соотношения (3.6) и (3.9)–(3.12), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \phi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\phi(x, 0) dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \phi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^2 dx dt \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1' / \lambda_2} dt + C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1} \varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1' / \lambda_2} dt + \\ &+ C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_2}{q_1 \mu_1}}(x) |x|^{\left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2} \varphi^{\mu_1'} dx \right)^{\mu_1' / \mu_2} dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогично, применяя такие же рассуждения, как в (3.6), получим следующие три оценки слагаемых правой части соотношения (3.7):

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3' / \mu_4} dt, \quad (3.14)$$

где

$$\mu_3 = s_2 + r_2 > 1, \quad \mu_4 = \frac{q_1(s_2 + r_2)}{q_1(s_2 + r_2) - (q_1 + r_2)} > 1, \quad \frac{1}{\mu_3} = 1 - \frac{1}{\mu_4},$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v |\Delta^{k_2} \varphi| dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2} \varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3' / \mu_4} dt, \quad (3.15)$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x) u^{q_2} \varphi dx dt \leq \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_4}{q_2 \lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right) \lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3' / \lambda_4} dt, \quad (3.16)$$

где

$$\lambda_3 = \frac{s_1 + r_1}{q_2} > 1, \quad \lambda_4 = \frac{r_1 + s_1}{s_1 - q_2} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_3} = 1 - \frac{1}{\lambda_4}.$$

Комбинируя соотношения (3.7) и (3.14)–(3.16), получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx - \frac{1}{4} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt \leq \\ &\leq C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3' / \mu_4} dt + C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2} \varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu_3' / \mu_4} dt + \\ &+ C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_4}{q_2 \lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right) \lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda_3' / \lambda_4} dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Складывая (3.13) с (3.17) и упрощая, будем иметь

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x) u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x) v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx + \\ &+ 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x) \varphi(x, 0) dx \leq 4C_1 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2 \lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1' / \lambda_2} dt + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ 4C_2 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} dt + 4C_3 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_1^{\frac{-\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3}}(x) |x|^{\left(-\sigma_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} dx \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} dt + \quad (3.18) \\
 &+ 4C_4 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x) |x|^{\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu'_3/\mu_4} dt + \\
 &+ 4C_5 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x) |x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} dx \right)^{\mu'_3/\mu_4} dt + 4C_6 \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta_2^{\frac{-\eta_2\mu_2}{q_1\mu_1}}(x) |x|^{\left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2} \varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} dx \right)^{\mu'_1/\mu_2} dt.
 \end{aligned}$$

Затем, в силу (2.12) и замены переменных $x = R\xi, t = R^\theta\tau$ на (3.18), имеем

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{\eta_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{\eta_2} dx dt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + \\
 &+ 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \leq 4C_1 R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau + \\
 &+ 4C_2 R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau + 4C_3 R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3} - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} d\tau + \quad (3.19) \\
 &+ 4C_4 R^{\gamma_4} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau + 4C_5 R^{\gamma_5} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau + \\
 &+ 4C_6 R^{\gamma_6} \int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_2}{q_1\mu_1} - \left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2} \varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1}} d\xi \right)^{\mu'_1/\mu_2} d\tau.
 \end{aligned}$$

Выберем φ так, что

$$\begin{aligned}
 &\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\
 &\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}} |\Delta^{k_1}\varphi|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda'_1/\lambda_2} d\tau < \infty, \\
 &\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_1\eta\lambda_4}{q_2\lambda_3} - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3}} d\xi \right)^{\lambda'_3/\lambda_4} d\tau < \infty, \\
 &\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} \right|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau < \infty, \\
 &\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2\eta_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}} |\Delta^{k_2}\varphi|^{\mu_4} \varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}} d\xi \right)^{\mu'_3/\mu_4} d\tau < \infty,
 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \left(\int_{1 \leq |\xi| \leq \sqrt{2}} |\xi|^{\frac{r_2 \mu_2}{q_1 \mu_1} + \left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2} \varphi^{\mu_1} d\xi \right)^{\mu_1 / \mu_2} d\tau < \infty.$$

Тогда из неравенства (3.19) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + \\ & + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \leq C_1^* R^{\theta + \left(N - \theta \lambda_2 + \frac{r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + C_2^* R^{\theta + \left(N - 2k_1 \lambda_2 + \frac{r_1 \lambda_2}{q_2 \lambda_1} - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1}\right) \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} + \\ & + C_3^* R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right) \lambda_4 + \frac{r_1 \lambda_4}{q_2 \lambda_3}\right) \frac{\lambda_3}{\lambda_4}} + C_4^* R^{\theta + \left(N - \theta \mu_4 + \frac{r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3} - \frac{\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}\right) \frac{\mu_3}{\mu_4}} + C_5^* R^{\theta + \left(N - 2k_2 \mu_4 + \frac{r_2 \mu_4}{q_1 \mu_3} - \frac{\alpha_2 \mu_4}{\mu_3}\right) \frac{\mu_3}{\mu_4}} + \\ & + C_6^* R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right) \mu_2 + \frac{r_2 \mu_2}{q_1 \mu_1}\right) \frac{\mu_1}{\mu_2}} \leq \sum_{i=1}^6 C_i^* R^{\gamma_i} \end{aligned} \tag{3.20}$$

с некоторыми $C_i^* > 0, i = 1, \dots, 6$. Если выполнено любое из неравенств (3.3), т.е. если $\gamma = \max_{i=1, \dots, 6} \gamma_i \leq 0$, имеем два случая.

Случай 1: $\gamma < 0$.

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.20), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt \rightarrow 0. \tag{3.21}$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$.

Случай 2: $\gamma = 0$.

Тогда соотношение (3.20) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + \\ & + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + 4 \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \leq c. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.22), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt \leq c. \tag{3.23}$$

Теперь вернемся к неравенствам (3.6) и (3.7). Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u |\Delta^{k_1} \varphi| dxdt + \\ & + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) v^{q_1} \varphi dxdt \leq \left(c_1^{1/\lambda_1} + c_2^{1/\lambda_1} \right) \left(\int_{R^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \|\beta_1^{1/q_2}(x)u\|_{q_2}^{r_1} dxdt \right)^{1/\lambda_1} + \\ & + c_6^{1/\mu_1} \left(\int_{R^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2} dxdt \right)^{1/\mu_1}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x)v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x, 0) dx \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right| dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} v \left| \Delta^{k_2} \varphi \right| dx dt + \\ & + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)u^{q_2} \varphi dx dt \leq \left(c_4^{1/\mu'_3} + c_5^{1/\mu'_3} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \varphi \left\| \beta_2^{1/q_1}(x)v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt \right)^{1/\mu_3} + \\ & + c_3^{1/\lambda'_3} \left(\int_{\mathbb{R}^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \varphi \left\| \beta_1^{1/q_2}(x)u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt \right)^{1/\lambda_3}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Однако в силу (3.23) и абсолютной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x)u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x)v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = c$$

имеем

$$\int_{\mathbb{R}^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x)u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_{\mathbb{R}^9} \int_{R^2 \leq |x|^2 \leq 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x)v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = 0 \tag{3.26}$$

при $R \rightarrow \infty$.

Переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (3.24) и (3.25), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\| \beta_1^{1/q_2}(x)u \right\|_{q_2}^{r_1} dx dt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\| \beta_2^{1/q_1}(x)v \right\|_{q_1}^{r_2} dx dt = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. Можно также выбрать θ , как показано выше в доказательстве теоремы 1, и получить достаточное условие теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность Евгению Галахову за постановку задачи, руководство и полезное обсуждение результатов работы в ходе подготовки этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в \mathbb{R}^N // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 186–216.
2. Mitidieri E., Pohozaev S.I. Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on R^n // J. Evolut. Equat. 2001. V. 1. № 2. P. 189–220.
3. Kartsatos A.G., Kurta V.V. On the critical Fujita exponents for solutions of quasilinear parabolic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 269. № 1. P. 73–86.
4. Jiang Z.X., Zheng, S.N. A Liouville-type theorem for a doubly degenerate parabolic inequality // Acta Math. Scientia. 2010. V. 30. № 3. P. 639–643.
5. Admasu W.E., Galakhov E.I., Salieva O.A. Nonexistence of nontrivial weak solutions of some nonlinear inequalities with gradient nonlinearity // Contemporary Math. Fundament. Direct. 2021. V. 67. № 1. P. 1–13.
6. Галахов Е.И. Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 337–349.
7. Yang C., Zhao L., Zheng S. The critical Fujita exponent for the fast diffusion equation with potential // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 398. № 2. P. 879–885.

8. *Liu C.* The critical Fujita exponent for a diffusion equation with a potential term // *Lithuanian Math. J.* 2014. V. 54. № 2. P. 182–191.
9. *Ishige K.* On the Fujita exponent for a semilinear heat equation with a potential term // *J. Math. Anal. Appl.* 2008. V. 344. № 1. P. 231–237.
10. *Pinsky R.* The Fujita exponent for semilinear heat equations with quadratically decaying potential or in an exterior domain // *J. Diff. Eq.* 2009. V. 246. № 6. P. 2561–2576.
11. *Chen C.S., Huang J.C.* Some nonexistence results for degenerate parabolic inequalities with local and nonlocal nonlinear terms // *J. Nanjing Univ. Math. Biq.* 2004. V. 21. № 1. P. 12–20.
12. *Xiao S., Fang Z.B.* Nonexistence of solutions for the quasilinear parabolic differential inequalities with singular potential term and nonlocal source // *J. Ineq. Appl.* 2020. V. 2020. № 1. P. 1–9.
13. *Галахов Е.И.* Об эллиптических и параболических неравенствах высокого порядка с особенностями на границе // *Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова.* 2010. Т. 269. № 1. С. 76–84.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.958

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ
НАВЬЕ–СТОКСА ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ
В ШАРЕ И СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ¹⁾**

© 2023 г. В. А. Галкин^{1,2,*}

¹ 628422 Сургут, ХМАО-Югра, ул. Базовая, 34, Сургутский филиал ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, Россия

² 628422 Сургут, ХМАО-Югра, пр-т Ленина, 1, Сургутский государственный университет, Россия

*e-mail: val-gal@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.10.2022 г.
Переработанный вариант 21.11.2022 г.
Принята к публикации 13.01.2023 г.

В работе получен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для вихревого течения несжимаемой жидкости. Построено трехпараметрическое семейство решений в шаре, сферических слоях и во всем пространстве \mathbb{R}_3 .

Ключевые слова: уравнения несжимаемой жидкости, точные решения, точные решения системы Навье–Стокса.

DOI: 10.31857/S004446692306008X, **EDN:** UW0XQH

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В трехмерной области $D \subset \mathbb{R}_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3)\}$ рассматривается система Навье–Стокса для динамики во времени t поля скоростей $V(x, t) \in \mathbb{R}_3$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P(x, t) = \varepsilon^2 \Delta V, \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} V = 0, \quad x \in D, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

где $P = P(x, t)$ – давление жидкости, ε^2 – неотрицательная постоянная, характеризующая вязкость жидкости, $\bar{\rho} > 0$ – постоянная плотность жидкости. Поле скоростей течения $V(x, t)$ подчиним условию непротекания (“скольжения”) на гладкой границе ∂D области D , выражающемся в требовании ортогональности поля $V(x, t)$ к нормальному вектору $n(x)$ к границе ∂D в каждой точке $x \in \partial D$

$$(V(x, t), n(x))|_{x \in \partial D} = 0. \quad (1.3)$$

Определение. Назовем решением задачи (1.1), (1.2), (1.3) пару $\{V, P\}$, состоящую из гладкого векторного поля $V : D \times \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}_3 \left(\overset{\circ}{\mathbb{R}}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{t > 0\} \right)$, непрерывного на $(D \cup \partial D) \times \mathbb{R}_+ \left(\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{t \geq 0\} \right)$, и скалярной функции $P(x, t)$, гладкой по $x \in D$ при всех $t \in \overset{\circ}{\mathbb{R}}_+$.

В рамках модели гидродинамики (1.1), (1.2), (1.3), описывающей течение несжимаемой жидкости в пространственных областях D в случае шара

$$B_R = \left\{ x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2} < R \right\},$$

¹⁾ Работа выполнена в рамках государственного задания ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН (Выполнение фундаментальных научных исследований ГП 47) по теме № 0580-2021-0007 “Развитие методов математического моделирования распределенных систем и соответствующих методов вычисления”.

сферических слоев

$$B_{R_1, R_2} = \{x \in \mathbb{R}_3 : R_1 < \|x\| < R_2\}, \quad R_1 > 0,$$

и всего пространства \mathbb{R}_3 (в последнем случае, естественно, без условия (3)), рассмотрены точные вихревые нестационарные решения в классе бесконечно дифференцируемых функций C^∞ . Данная работа является развитием идей и подходов, представленных в [1–6].

Верификация точными решениями результатов вычислительных экспериментов моделирования течения жидкости в указанных областях весьма немногочисленна, что связано с малым количеством известных точных решений рассматриваемых задач [2–6].

Моделированию течения жидкости в области изменяющейся во времени в рамках модели слоистого течения жидкости и исследованию точного решения этой задачи посвящена работа авторов [7].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

С целью упрощения записи дальнейших соотношений для каждого вектора $x \in \mathbb{R}_3$ обозначим символом $r \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|$ его евклидову норму. Границу шара B_R обозначим $S_R \stackrel{\text{def}}{=} \partial B_R$ – сфера радиуса R . Отметим, что для каждой сферы S_R при $R > 0$ значения вектора нормали $\mathbf{n}(x)$ можно выбрать равными $\mathbf{n}(x) \equiv x \in S_R$.

Значения радиусов сфер S_R , являющихся границами шаровых областей D в уравнениях (1.1)–(1.3), подчиним условию

$$\text{tg}(R) = R, \quad R \geq 0. \tag{2.1}$$

Обозначим через ρ_k неотрицательные корни уравнения (2.1), которые упорядочим по возрастанию номеров $k \in \mathbb{N}$:

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_k < \dots$$

При $k \rightarrow \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\rho_k \sim \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \gg 1. \tag{2.2}$$

Положим

$$\bar{u}(r) = \begin{cases} r^{-1} \sin(r), & r > 0, \\ 1, & r = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Определим для каждой точки $x \in \mathbb{R}_3 \setminus \{0\}$ с евклидовой нормой $r(x) > 0$ трехпараметрическое семейство векторных полей, зависящих от произвольных параметров

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}_3,$$

заданное следующими формулами:

$$U_\alpha(x) = \left\{ \frac{\bar{u}'(r)}{r} \begin{bmatrix} x_2 & -2 & -x_3 \\ -x_1 & x_3 & -2 \\ -2 & -x_2 & x_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{r^2} \left(\bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right) \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_2 & -(x_1^2 + x_3^2) \\ -(x_1^2 + x_2^2) & x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

$$r \equiv r(x) > 0.$$

Векторное поле $U_\alpha(x)$ может быть продолжено в классе бесконечно дифференцируемых функций $C^\infty(\mathbb{R}_3)$ в точку $x = 0$. Для доказательства установим свойства коэффициентов при матрицах в выражении (2.4) в окрестности точки $r = 0$.

Рассмотрим на комплексной плоскости \mathbb{C} с выколотой точкой $z = 0$ мероморфные функции, заданные следующими соотношениями:

$$f(z) = \frac{1}{z} \sin(z), \quad g(z) = \frac{1}{z} f'(z), \quad q(z) = \frac{1}{z^2} f''(z), \quad p(z) = q(z) - \frac{1}{z^2} g(z). \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.5}$$

Лемма 1. *Функции f, g, p имеют аналитическое продолжение в точку $z = 0$ до целых функций на \mathbb{C} .*

Доказательство. Для построения искомого продолжения заметим, что при $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливы следующие разложения:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} z^{2n-2}, \quad q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4}, \quad z \neq 0. \quad (2.6)$$

Таким образом, при $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ справедливо разложение

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n(2n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{(2n+1)!} z^{2n-4} \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4n(n-1)}{(2n+1)!} z^{2n-4}. \quad (2.7)$$

Поскольку в силу сходимости разложений (2.6), (2.7) в области $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функции f, g, p представляются сходящимися рядами Тейлора, то эти ряды дают искомое продолжение функций f, g, p в точку $z = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Векторное поле $U_\alpha(x)$, определенное формулой (2.4) при $x \neq 0$, может быть продолжено с $\mathbb{R}_3 \setminus \{0\}$ на пространство \mathbb{R}_3 в классе функций $C^\infty(\mathbb{R}_3)$.*

Доказательство. Отметим, что функция

$$r(x) \equiv \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$$

принадлежит классу $C^\infty(\mathbb{R}_3 \setminus \{0\})$. Для построения искомого продолжения векторного поля $U_\alpha(x)$ в начало координат $x = 0$ воспользуемся леммой 1. Очевидно, что для этого нужно установить существование C^∞ продолжения в точку $r = 0$ для коэффициентов $\frac{\bar{u}'(r)}{r}$ и $\frac{1}{r^2} \left(\bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right)$. Поскольку для вещественных значений переменной $z = r + i0$ справедливы тождества

$$\begin{aligned} g(z)|_{z=r+i0} &\equiv \frac{\bar{u}'(r)}{r}, \quad r \neq 0, \\ p(z)|_{z=r+i0} &\equiv \frac{1}{r^2} \left(\bar{u}''(r) - \frac{\bar{u}'(r)}{r} \right), \quad r \neq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

то правые части формулы (2.8) представляются в виде сходящихся рядов Тейлора (2.6) и (2.7) по четным степеням переменной $r(x) \equiv \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2 \right)^{1/2}$. Следовательно, коэффициенты в формуле (2.4) имеют продолжение класса $C^\infty(\mathbb{R}_3)$ в начало координат $x = 0$.

Отметим, что в начале координат справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} U_\alpha(x) \stackrel{\text{def}}{=} U_\alpha(0) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \quad (2.9)$$

В дальнейшем поле (2.4) с продолжением (2.9) будем обозначать тем же символом $U_\alpha(x) \forall x \in \mathbb{R}_3$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Векторное поле U_α является касательным в каждой точке x на сфере S_{ρ_k} , где ρ_k являются корнями уравнения (2.1), упорядоченными по возрастанию номеров $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. В силу соотношений (2.1), (2.3) справедливы равенства

$$\bar{u}'(\rho_k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Следовательно, учитывая (2.4), получаем

$$U_\alpha(x)|_{x \in S_{\rho_k}} = A_x \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

где матрица

$$A_x = \frac{1}{\rho_k^2} \left(\bar{u}''(\rho_k) - \frac{\bar{u}'(\rho_k)}{\rho_k} \right) \begin{bmatrix} x_1 x_3 & -(x_2^2 + x_3^2) & x_1 x_2 \\ x_2 x_3 & x_1 x_2 & -(x_1^2 + x_3^2) \\ -(x_1^2 + x_2^2) & x_1 x_3 & x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Для доказательства утверждения леммы заметим, что для каждого вектора $x \in \mathbb{R}_3$ справедливо тождество

$$A_x^* x = 0, \tag{2.13}$$

где A_x^* – транспонированная к матрице A_x . Каждый вектор $x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| = \rho_k$ ортогонален к поверхности сферы S_{ρ_k} . Используя формулы (2.11), (2.12), (2.13), вычислим скалярное произведение

$$(U_\alpha(x), x)|_{x \in S_{\rho_k}} \equiv (A_x \alpha, x) \equiv (\alpha, A_x^* x) \equiv 0.$$

Таким образом, в каждой точке $x \in S_{\rho_k}$ векторное поле $U_\alpha(x)$ является касательным к сфере S_{ρ_k} . Лемма доказана.

Лемма 4. Векторное поле $U_\alpha(x)$, определенное на \mathbb{R}_3 формулами (2.4), (2.9), удовлетворяет следующим дифференциальным тождествам:

$$\operatorname{div} U_\alpha = 0, \tag{2.14}$$

$$\Delta U_\alpha + U_\alpha = 0, \tag{2.15}$$

$$(U_\alpha \cdot \nabla) U_\alpha = \frac{1}{2} \nabla (U_\alpha, U_\alpha). \tag{2.16}$$

Доказательство. В силу леммы 2 векторное поле $U_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}_3)$. Поэтому во всех точках $x \in \mathbb{R}_3$ определены дифференциальные операторы в формулах (2.14)–(2.16). Получение этих формул выполняется прямым вычислением значений указанных операций на основе формул (2.3), (2.4), (2.9). Для обоснования формул (2.15), (2.16) существенно используется то, что функция $\bar{u}(r(x))$, где \bar{u} определяется соотношением (2.3), является собственной функцией трехмерного оператора Лапласа, т.е.

$$\Delta \bar{u}(r(x)) + \bar{u}(r(x)) \equiv 0, \quad r(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad x \in \mathbb{R}_3.$$

Лемма доказана.

3. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2), (1.3). НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ

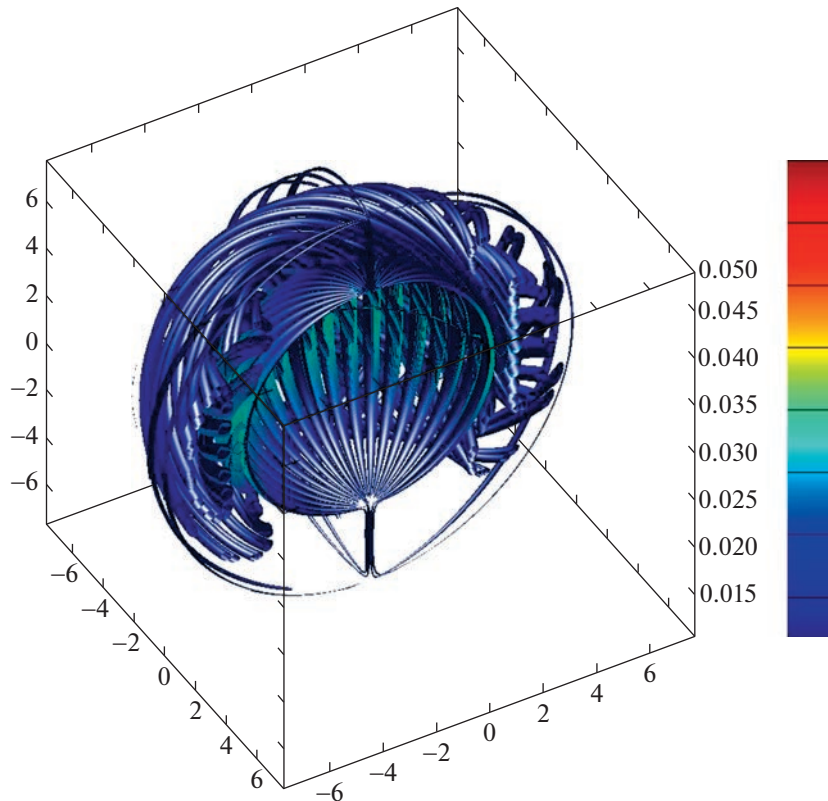
В следующей теореме предлагается построение трехпараметрического семейства решений системы уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в шаре, сферических слоях и во всем пространстве \mathbb{R}_3 на основе векторных полей $U_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}_3)$, свойства которых установлены в леммах 1–4.

Теорема. Пусть векторное поле

$$V_\alpha(x, t) = U_\alpha(x) \exp(-\varepsilon^2 t), \quad x \in \mathbb{R}_3, \quad t \geq 0, \quad \varepsilon = \text{const}, \tag{3.1}$$

и скалярная функция

$$P(x, t) = -\frac{\bar{\rho}}{2} (V_\alpha(x, t), V_\alpha(x, t)) + \beta(t), \quad \bar{\rho} \equiv \text{const} > 0, \tag{3.2}$$



Фиг. 1. Визуализация решения в сферическом слое B_{ρ_1, ρ_2} .

где $\beta(t)$ – произвольная функция, зависящая от времени t . Тогда пара $\{V_\alpha, P\}$ является решением системы уравнений Навье–Стокса (1.1), (1.2) в области $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$. Более того, на границе S_{ρ_k} каждого шара $B_{\rho_k} = \left\{x \in \mathbb{R}_3 : \|x\| \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^3 x_i^2\right)^{1/2} < \rho_k\right\}$, $k = 1, 2, \dots$, выполняются условия скольжения (1.3), т.е. формулы (3.1), (3.2) дают решение задачи (1.1), (1.2), (1.3) в каждом пространственном шаре $D = B_{\rho_k}$ и сферическом слое $D = B_{\rho_k, \rho_l}$, $1 \leq k < l \leq +\infty$. (Равенство $l = +\infty$ по определению означает, что $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$.) Векторное поле скоростей (3.1), рассматриваемое в области $D = \{x \in \mathbb{R}_3\}$ и сферических слоях $D = \mathbb{R}_3 \setminus (B_{\rho_k} \cup S_{\rho_k})$, стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$.

Доказательство. Утверждение теоремы получается прямой подстановкой выражений (3.1), (3.2) в соотношения (1.1), (1.2), (1.3) с учетом утверждений лемм 3 и 4.

Теорема доказана.

Отметим, что результаты теоремы переносятся на шары с произвольным радиусом посредством соответствующего масштабирования пространственно-временных переменных.

Замечание. Формулы (3.1), (3.2) дают решение задачи Коши для системы (1.1), (1.2) в области $D = \mathbb{R}_3$ с начальным условием

$$V_\alpha(x, t) = U_\alpha(x), \quad x \in \mathbb{R}_3, \quad (3.3)$$

удовлетворяющее при $x \rightarrow \infty$ условию регулярности

$$V_\alpha(x, t) \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{r(x)}\right) \rightarrow 0, \quad r(x) \rightarrow \infty. \quad (3.4)$$

Соотношение (3.4) является непосредственным следствием формулы (2.4).

Остановимся на некоторых свойствах решений, построенных в теореме. Отметим, что решения (3.1), (3.2) имеют слоистую, стратифицированную по сферическим слоям B_{ρ_k, ρ_l} структуру.

Нетрудно выявить некоторые инвариантные подмножества течения, исследуя линии тока. В частности, для значения параметров $\alpha = (1, 0, 0)$ линии тока располагаются в экваториальной плоскости на окружностях с радиусами орбит $R_k : \operatorname{tg}(R_k) = \frac{R_k}{1 - R_k^2}$, $\rho_{k-1} < R_k < \rho_k$, $\rho_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $k \in \mathbb{N}$.

На сферах S_{ρ_k} в этом случае линии тока расположены вдоль меридианов, соединяющих “северный” и “южный” полюсы, меняя поочередно на противоположное направление “течения” при изменении номера сферы на 1. Инвариантной является ось “север”–“юг”. При этом полюса являются стационарными точками. Направление “течения” на отрезках этой оси, заключенных между сферами S_{ρ_k} , меняется на противоположное при переходе от слоя к слою. Аналогичные явления наблюдаются на вышеупомянутых круговых орбитах в экваториальной плоскости. Детальное качественное исследование решений и их визуализация будут представлены в последующих публикациях. Пример визуализации решения $V_{(1,0,0)}$ в сферическом слое B_{ρ_1, ρ_2} был выполнен Д.А. Моргуном и представлен на фиг. 1.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получен класс точных решений уравнений Навье–Стокса для вихревого течения несжимаемой жидкости. Построено трехпараметрическое семейство решений в шаре, сферических слоях и во всем пространстве \mathbb{R}_3 .

Автор выражает благодарность за обсуждение работы и участие в исследованиях по визуализации построенных решений сотрудникам Сургутского филиала ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН Д.А. Моргуну и А.О. Дубовику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бетелин В.Б., Галкин В.А. Управление параметрами несжимаемой жидкости при изменении во времени геометрии течения // Докл. АН. 2015. Т. 463. № 2. С. 149–151.
2. Бетелин В.Б., Галкин В.А., Дубовик А.О. Точные решения системы Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в случае задач, связанных с нефтегазовой отраслью // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. № 1. С. 13–16.
3. Trkal V. A note on the hydrodynamics of viscous fluids // Czechoslovak Journal of Physics. 1994. V. 44. № 2. P. 97–106.
4. Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 84–96.
<https://doi.org/10.26456/vtpmk557>
5. Арнольд. “Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits”. C. R. Acad. Sci. Paris, 261:17–20, 1965.
6. Богоявленский О. И. О задаче Кельвина 1880 года и точных решениях уравнений Навье–Стокса // Общественный семинар “Математика и ее приложения” Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук 21 мая 2015 г. Москва, конференц-зал МИАН (ул. Губкина, 8). Электронный ресурс: www.mathnet.ru
7. Галкин В.А., Дубовик А.О. О моделировании слоистого течения вязкой проводящей жидкости в области, изменяющейся во времени // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 4. С. 31–42.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

О КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ДЛЯ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО 2 + 1-МЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА С ГРАДИЕНТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ¹⁾

© 2023 г. М. О. Корпусов^{1,*}, А. К. Матвеева^{1,2,**}¹ 119992 Москва, Ленинские горы, Кафедра математики физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия² 115409 Москва, Каширское ш., 31, НИЯУ МИФИ кафедра высшей математики, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: matveeva2778@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.05.2022 г.
Переработанный вариант 22.12.2022 г.
Принята к публикации 03.03.2023 г.

Рассматривается задача Коши для одного модельного нелинейного уравнения с градиентной нелинейностью. Для этой задачи Коши в работе доказано существование двух критических показателей $q_1 = 2$ и $q_2 = 3$ таких, что при $1 < q \leq q_1$ отсутствует локальное во времени в некотором смысле слабое решение, при $q > q_1$ локальное во времени слабое решение появляется, однако при $q_1 < q \leq q_2$ отсутствует глобальное во времени слабое решение. Библ. 17.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923060133, EDN: TUIYYS

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая задача Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u(x, t) = |\nabla u(x, t)|^q, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Вывод уравнения (1.1) имеется в работе [1]. Уравнение (1.1) относится к классу нелинейных уравнений типа С.Л. Соболева. Отметим, что исследованию линейных и нелинейных уравнений соболевского типа посвящено много работ. Так, в работах Г.А. Свиридюка, С.А. Загребинной, А.А. Замышляевой [2–4] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально-краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

Отметим, что впервые теория потенциала для неклассических уравнений типа С.Л. Соболева была рассмотрена в работе Б.В. Капитонова [5]. В дальнейшем теория потенциала изучалась в работах С.А. Габова и А.Г. Свешникова [6], [7], а также в работах их учеников (см., например, работу Ю.Д. Плетнера [8]).

В классической работе [9] С.И. Похожаева и Э. Митидиери достаточно простым методом нелинейной емкости были получены глубокие результаты о роли так называемых критических показателей. Отметим также работы Е.И. Галахова и О.А. Салиевой [10] и [11]. В настоящей работе мы получили результат о существовании двух критических показателей $q_1 = 2$ и $q_2 = 3$ таких, что в широких классах начальных функций $u_0(x)$ при $1 < q \leq q_1$ отсутствуют даже локальные во вре-

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Фонда теоретической физики и математики "БАЗИС" и при финансовой поддержке РФФИ (проект № 23-11-00056) Российский университет дружбы народов.

мени слабые решения задачи Коши (1.1), (1.2), а при $q_1 < q$ локальные во времени слабые решения уже существуют, однако при $q_1 < q \leq q_2$ глобальных во времени слабых решений нет – все слабые решения разрушаются за конечное время.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые нами в работах [12–16]. Причем в работе [16] была рассмотрена задача Коши

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_x u + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta_x u = |u|^q, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad q > 1,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2},$$

для которой были тоже получены два критических показателя $q_1 = 3$ и $q_2 = 4$ для аналогичных утверждений, что и в настоящей работе.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом $[x, y]$ мы обозначаем отрезок, соединяющий точки $x, y \in \mathbb{R}^2$:

$$[x, y] = \{z \in \mathbb{R}^2 : z = sy + (1 - s)x, s \in [0, 1]\}.$$

Символом $|a, b|$ при $a, b \in \mathbb{R}^1$ мы обозначаем следующее множество:

$$|a, b| = \begin{cases} [a, b], & \text{если } a \leq b; \\ [b, a], & \text{если } b \leq a. \end{cases}$$

Под классом функций $C_b(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ мы понимаем ограниченные функции из класса $C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, причем это линейное пространство является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f(x, t)\|_{T,0} := \sup_{t \in [0, T]} |f(x, t)|_0, \quad |f(x, t)|_0 := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} f(x, t).$$

Под классом функций $C^{(n+m)}(D \times [0, T])$, $D \subset \mathbb{R}^2$ мы понимаем множество таких функций $u(x, t)$, что

$$D_t^k D_x^\beta u(x, t) \in C(D \times [0, T]) \quad \text{при } |\beta| \leq n, \quad 0 \leq k \leq m,$$

$$D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} D_{x_2}^{\beta_2}, \quad \beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \quad |\beta| = \beta_1 + \beta_2,$$

причем все смешанные частные производные в (2.1) коммутируют.

Под классом функций $W_{q,loc}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ при $q \geq 1$ мы понимаем такие функции $f(x, t)$, что для $f(x, t) \in W_{q,loc}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ и для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2 \times [0, T]$ имеем

$$f(x, t) \in L^q(D),$$

причем существуют слабые производные

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} \in L^q(D), \quad j = 1, 2.$$

Под классом функций $W_{q,loc}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ при $q \geq 1$ понимаем такие функции $f(x, t)$, что для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ имеем

$$f(x, t) \in L^q(D),$$

причем существуют слабые производные

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x_j} \in L^q(D), \quad j = 1, 2.$$

Под классом функций $W_{1,loc}^1(\mathbb{R}^2)$ понимаем такие функции $f(x) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$, что существуют все слабые частные производные

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2), \quad j = 1, 2.$$

Символами $W_q^1(\mathbb{R}^2)$ и $H^2(\Omega)$ при $q \geq 1, \Omega \subset \mathbb{R}^2$ обозначаем классические пространства Соболева. Символами $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ и $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$ стандартным образом обозначаем векторные топологические пространства основных функций с компактными носителями.

Кроме того, символом $\phi'(x, t)$ мы обозначаем для краткости частную производную по переменной t , символом $\phi_{x_1}(x, t)$ — частную производную по переменной x_1 , символом $\nabla\phi(x, t)$ — градиент по пространственным переменным.

Рассмотрим линейное подпространство линейного пространства $\mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций $f(x)$, для которых конечна следующая норма:

$$\|f\|_B := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{|f(x)|}{\ln(2 + |x|)} + \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (1 + |x|^2)^{1/2} \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \right|.$$

Это нормированное пространство обозначим символом B .

Лемма 1. *Нормированное пространство B является банаховым.*

В дальнейшем мы будем использовать банахово пространство $\mathcal{C}([0, T]; B)$ относительно нормы

$$\|f(x, t)\|_T := \sup_{t \in [0, T]} \|f(x, t)\|_B.$$

Символом $\mathcal{C}_b((1 + |x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^2)$ при $\beta > 0$ обозначаем те функции $f(x)$ из $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$, для которых $(1 + |x|^2)^{\beta/2} f(x) \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^2)$.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим следующее уравнение в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}'_+$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathcal{E}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta \mathcal{E}(x, t) = \delta(x) \delta(t), \quad x = (x_1, x_2),$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

Применим преобразование Фурье по переменной $x = (x_1, x_2)$ и получим из (3.1) следующее уравнение в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \times \mathcal{D}'_+$:

$$-|k|^2 \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}(k, t)}{\partial t} + ik_1 |k|^2 \hat{\mathcal{E}}(k, t) = \delta(t), \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Решение уравнения (3.2) имеет вид

$$\hat{\mathcal{E}}(k, t) = -\mathcal{P} \frac{1}{|k|^2} e^{ik_1 t} \theta(t),$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, а обобщенная функция $\mathcal{P}1/|k|^2$ из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ определена в § 11.8 работы [18]. Используя результаты § 11.8 работы [18], мы получим равенство

$$\mathcal{E}(x, t) = F^{-1}[\hat{\mathcal{E}}(k, t)](x, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \ln|x^*|, \quad x^* = (x_1 - t, x_2).$$

Рассмотрим следующую неоднородную задачу Коши:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{x,t}[u](x,t) &= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times (0,T], \quad T > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

где

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\phi](x,t) := \frac{\partial}{\partial t} \Delta \phi(x,t) + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta \phi(x,t).$$

Доказано, что функция

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\theta(t)}{2\pi} \ln|x^*|, \quad x^* = (x_1 - t, x_2),$$

является фундаментальным решением оператора $\mathfrak{M}_{x,t}$ как решение уравнения

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\mathcal{E}](x,t) = \delta(x,t)$$

в смысле пространств обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$. Дадим сначала определение классического решения задачи Коши (3.3), (3.4).

Определение 1. Классическим локальным во времени решением задачи Коши (3.3), (3.4) называется функция $u(x,t) \in C^{3+1}(\mathbb{R}^2 \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$, удовлетворяющая уравнению (3.3) и начальному условию (3.4) поточечно, причем $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(x,t) \in C_b(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$.

Дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши (3.3), (3.4).

Определение 2. Функция $u(x,t) \in W_{1,loc}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$ называется локальным во времени слабым решением задачи Коши (3.3), (3.4), если для любой функции $\phi(x,t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ справедливо равенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [(\nabla u(x,t), \nabla \phi(x,t)) + (\nabla u(x,t), \nabla \phi_{x_1}(x,t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x,0)) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} f(x,t) \phi(x,t) dx dt,$$

где $u_0(x) \in W_{1,loc}^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x,t) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2 \times [0,T])$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x,t) &:= \begin{cases} u(x,t), & \text{если } t \in [0,T], \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \\ \tilde{f}(x,t) &:= \begin{cases} f(x,t), & \text{если } t \in [0,T], \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Если $u(x,t)$ – локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 2, то в смысле распределений из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ функция $\tilde{u}(x,t)$ удовлетворяет равенству

$$\mathfrak{M}_{x,t}[\tilde{u}](x,t) = \tilde{f}(x,t) + \Delta u_0(x) \delta(t),$$

где все производные понимаются в смысле распределений.

В силу результата теоремы 11.3 из [18] справедлива следующая основная теорема.

Теорема 1. Пусть функции $f(x,t)$, $\Delta u_0(x)$ таковы, что существуют свертки

$$V_2(x,t) := \mathcal{E}(x,t) * \tilde{f}(x,t), \quad V_2^{(0)}(x,t) := \mathcal{E}(x,t) * \Delta u_0(x) \delta(t)$$

в смысле $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$. Тогда локальное во времени решение задачи Коши (3.3), (3.4) в смысле определения 2 представимо в виде суммы двух потенциалов:

$$\tilde{u}(x,t) = V_2(x,t) + V_2^{(0)}(x,t).$$

Из этой теоремы вытекает следующее важное утверждение.

Теорема 2. Всякое локальное во времени слабое решение $u(x, t)$ задачи Коши (3.3), (3.4) в смысле определения 2 удовлетворяет поточечному равенству

$$\tilde{u}(x, t) = V_2(x, t) + V_2^{(0)}(x, t) \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, T),$$

если

$$V_2(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \tilde{f}(y, \tau) dy d\tau \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)),$$

$$V_2^{(0)}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_0(y) dy \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)),$$

а $\mathcal{E}(x, t)$ – фундаментальное решение, определенное равенством (3.6).

Теперь дадим определение глобального во времени слабого решения следующей задачи Коши:

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty),$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством (3.5).

Определение 3. Функция $u(x, t) \in W_{1,loc}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ называется *глобальным во времени слабым решением задачи Коши* (3.8), (3.9), если для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$ справедливо равенство

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} [(\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) + (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_i}(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, t) \phi(x, t) dx dt,$$

где $u_0(x) \in W_{1,loc}^1(\mathbb{R}^2)$, $f(x, t) \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$.

Справедливо следующее утверждение, аналогичное утверждению теоремы 2.

Теорема 3. Всякое глобальное во времени слабое решение $u(x, t)$ задачи Коши (3.8), (3.9) в смысле определения 3 удовлетворяет поточечному равенству

$$\tilde{u}(x, t) = V_2(x, t) + V_2^{(0)}(x, t) \quad \text{для почти всех } (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty),$$

если

$$V_3(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \tilde{f}(y, \tau) dy d\tau \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty)),$$

$$V_2^{(0)}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_0(y) dy \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty)),$$

а $\mathcal{E}(x, t)$ – фундаментальное решение, определенное равенством (3.6).

Отметим, что в дальнейшем мы докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Если $u_0(x) \in C_b^{(2)}(\mathbb{R}^2)$, причем найдутся такие постоянные $a > 0$ и $\beta > 2$, что выполнено неравенство

$$|\Delta u_0(x)| \leq \frac{a}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^2,$$

то справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t) \Delta u_0(y) dy = \frac{\theta(t)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u_0(y) \ln |x^* - y| dy = \theta(t) u_0(x^*),$$

где $x^* = (x_1 - t, x_2)$.

Замечание 1. При условиях леммы 3 и теорем 2, 3 равенства (3.7) и (3.10) примут следующий вид:

$$\tilde{u}(x, t) = \theta(t)u_0(x_1 - t, x_2) + \theta(t) \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) \tilde{f}(y, \tau) dy d\tau.$$

Определение 4. Будем говорить, что функция

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C_b^{(2)}(\mathbb{R}^2)) \cap C([0, T]; C_b^{(3)}(\mathbb{R}^2))$$

является *регулярной в окрестности бесконечно удаленной точки*, если для всех $t \in [0, T]$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &\leq \frac{A_1(T)}{|x|}, & \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right| &\leq \frac{A_2(T)}{|x|^\alpha \ln|x|}, & |\Delta_x u(x, t)| &\leq \frac{A_3(T)}{|x|^\alpha \ln|x|}, \\ |\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t)| &\leq \frac{A_4(T)}{|x|^{2+\alpha} \ln|x|} \end{aligned}$$

при $|x| \rightarrow +\infty$, и $\alpha > 1$, где $i, j = 1, 2$ и $A_m(T) > 0$ – некоторые постоянные при $m = 1, 2, 3, 4$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Любая функция*

$$u(x, t) \in C^{(1)}([0, T]; C_b^{(2)}(\mathbb{R}^2)) \cap C([0, T]; C_b^{(3)}(\mathbb{R}^2))$$

регулярная в окрестности бесконечно удаленной точки в смысле определения 4 удовлетворяет уравнению

$$u(x, t) = u_0(x_1 - t, x_2) + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \ln \sqrt{(x_1 - y_1 - t + \tau)^2 + (x_2 - y_2)^2} \mathfrak{M}_{y,\tau}[u](y, \tau) dy d\tau$$

для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$, где $T > 0$ может быть сколь угодно большим, чтобы только было выполнено условие (3.12), где оператор $\mathfrak{M}_{x,t}$ определен равенством

$$\mathfrak{M}_{x,t}[u](x, t) := \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u.$$

Доказательство в целом повторяет аналогичное утверждение из работы [16].

Рассмотрим потенциал

$$\begin{aligned} U_\beta(x, t) &:= U_\beta[\rho](x, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} G_\beta(x, y, t - \tau) \rho(y, \tau) dy d\tau, \\ G_\beta(x, y, t - \tau) &:= \frac{\ln|x^* - y|}{(1 + |y|^2)^{\beta/2}}, \quad x^* = (x_1 - t + \tau, x_2). \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Для любой плотности $\rho(x, t) \in C([0, T]; C_b(\mathbb{R}^2))$ объемный потенциал $U_\beta(x, t) \in C([0, T]; B) \cap C^{(1)}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ при $\beta > 2$, а определение банахова пространства B дано в разд. 3, причем справедлива оценка*

$$\|U_\beta(x, t)\|_T \leq T c_1(T) \sup_{t \in [0, T]} |\rho(x, t)|_0, \quad \|v(x, t)\|_T := \sup_{t \in [0, T]} |v(x, t)|_B,$$

а функция $c_1 = c_1(T) > 0$ и является монотонно неубывающей, ограниченной.

Доказательство в целом повторяет доказательство аналогичного утверждения работы [16].

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(x, t) = A(u)(x, t), \quad A(u)(x, t) = u_0(x_1 - t, x_2) + U_q(x, t),$$

$$U_q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\ln|x^* - y|}{(1 + |y|^2)^{q/2}} \rho(y, \tau) dy d\tau, \quad \rho(x, t) = (1 + |y|^2)^{q/2} |\nabla u(x, t)|^q.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 4. Если $u(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; B)$, то $\rho(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2))$.

Доказательство. Заметим, что функцию $\rho(x, t)$ можно переписать в следующем виде:

$$\rho(x, t) = \left(\sum_{j=1}^2 \left((1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \right)^2 \right)^{q/2} = (z_1^2(x, t) + z_2^2(x, t))^{q/2},$$

$$z_j(x, t) = (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому

$$z_1^2(x, t) + z_2^2(x, t) \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)) \Rightarrow (z_1^2(x, t) + z_2^2(x, t))^{q/2} \in \mathbb{C}([0, T]; \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^2)).$$

Лемма доказана.

Справедливо неравенство

$$|\rho_1(x, t) - \rho_2(x, t)| \leq q \max \{ [(1 + |x|^2)^{1/2} |\nabla u_1|]^{q-1}, [(1 + |x|^2)^{1/2} |\nabla u_2|]^{q-1} \} \times \\ \times |(1 + |x|^2)^{1/2} \nabla u_1 - (1 + |x|^2)^{1/2} \nabla u_2|, \quad q > 1,$$

где

$$\rho_j(x, t) = (1 + |x|^2)^{q/2} |\nabla u_j(x, t)|^q, \quad j = 1, 2.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5. Пусть выполнены условия

$$u_0(x), \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_1} \in B,$$

тогда для каждого $T > 0$

$$u_0(x^*) \in \mathbb{C}([0, T]; B), \quad x^* = (x_1 - t, x_2).$$

Доказательство. Если $u_0(x) \in B$, то $u_0(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ и

$$|u_0|_B := \left| \frac{u_0(x)}{\ln(2 + |x|)} \right|_0 + \sum_{j=1}^2 \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j} \right|_0 < +\infty.$$

Но тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{u_0(x^*)}{\ln(2 + |x|)} \right| + \sum_{j=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_j} \right| \leq \left| \frac{u_0(x^*)}{\ln(2 + |x^*|)} \right|_0 \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]} \left| \frac{\ln(2 + |x^*|)}{\ln(2 + |x|)} \right| + \\ + \sum_{j=1}^2 \left| (1 + |x^*|^2)^{1/2} \frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_j} \right|_0 \sup_{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]} \left| \frac{(1 + |x|^2)^{1/2}}{(1 + |x^*|^2)^{1/2}} \right| \leq A_1(T) < +\infty.$$

Аналогичным образом получаем оценку

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{\ln(2 + |x|)} \frac{\partial u_0(x^*)}{\partial t} \right| + \sum_{j=1}^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left| (1 + |x|^2)^{1/2} \frac{\partial^2 u_0(x^*)}{\partial x_j \partial t} \right| \leq A_2(T) < +\infty,$$

поскольку

$$\frac{\partial u_0(x^*)}{\partial t} = - \frac{\partial u_0(x^*)}{\partial x_1}.$$

Справедливы выражения

$$u_0(x_1 - t_2, x_2) - u_0(x_1 - t_1, x_2) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u_0(x_1 - s, x_2)}{\partial s} ds, \quad t_2 > t_1,$$

$$|u_0(x_1 - t_2, x_2) - u_0(x_1 - t_1, x_2)|_B \leq \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial u_0(x_1 - s, x_2)}{\partial s} \right|_B ds \leq A_2(T) |t_2 - t_1|.$$

Следовательно, $u_0(x^*) \in C([0, T]; B)$. Лемма доказана.

В силу результата теоремы 5 и леммы 5 приходим к следующему утверждению.

Лемма 6. *Оператор $A(u)(x, t)$, определенный равенством (4.1), при $q > 2$ действует следующим образом:*

$$A : C([0, T]; B) \rightarrow C([0, T]; B),$$

если $u_0(x), u_{0x_1}(x) \in B$.

Осталось воспользоваться стандартным алгоритмом метода сжимающих отображений и продолжения решения интегрального уравнения (4.1) во времени в классе решений $C([0, T]; B)$ и в результате получить следующий результат.

Теорема 6. *При $q > 2$ для любой начальной функции $u_0(x)$ такой, что $u_0(x), u_{0x_1} \in B$ найдется такое максимальное $T_0 = T_0(u_0) > 0$, что для любого $T \in (0, T_0)$ существует единственное решение интегрального уравнения (4.1) в классе $u(x, t) \in C([0, T]; B)$, причем либо $T_0 = +\infty$ либо $T_0 < +\infty$ и в этом случае справедливо предельное свойство*

$$\lim_{t \uparrow T_0} |u(x, t)|_B = +\infty.$$

5. КРИТИЧЕСКИЕ ПОКАЗАТЕЛИ

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta u(x, t) + \frac{\partial}{\partial x_1} \Delta u(x, t) = |\nabla u(x, t)|^q, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, T], \tag{5.1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad q > 1. \tag{5.2}$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 5. Функция $u(x, t) \in C^{3+1}(\mathbb{R}^2 \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, удовлетворяющая уравнению (5.1) и начальному условию (5.2) поточечно, называется *классическим решением задачи Коши* (5.1), (5.2).

Теперь дадим определение локального во времени слабого решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 6. Функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$ называется *локальным во времени слабым решением задачи Коши* (5.1), (5.2), если для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [(\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) + (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_1}(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt, \quad u_0(x) \in W_{1, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Теперь дадим определение глобального во времени слабого решения задачи Коши (5.1), (5.2).

Определение 7. Функция $u(x, t) \in W_{q, \text{loc}}^{1,0}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$ называется *глобальным во времени слабым решением задачи Коши* (5.1), (5.2), если для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} [(\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) + (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_1}(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = \\ = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, t)|^q \phi(x, t) dx dt, \quad u_0(x) \in W_{1, \text{loc}}^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Справедлива важная вспомогательная лемма.

Лемма 7. Пусть $u(x, t)$ – локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 6. Тогда для любых $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и $\phi_2(t) \in \mathcal{C}_0^{(1)}[0, T]$ выполнено равенство (5.3), в котором $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Всякое глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 7 является локальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения 6.

Доказательство основано на том, что имеет место вложение $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)) \subset \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, +\infty))$, если функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ продолжить нулем при $t \geq T$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 8. Пусть $u(x, t)$ – глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 7. Тогда для любых $\phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и $\phi_2(t) \in \mathcal{C}_0^{(1)}[0, +\infty)$ справедливо равенство (5.4) при $\phi(x, t) \in \phi_1(x)\phi_2(t)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.

Дадим определение класса начальных функций.

Определение 8. Функция $u_0(x) \in U$, если $u_0(x) \in W_q^1(\mathbb{R}^2)$ и найдутся такие $x_0 \in \mathbb{R}^2$ и $R_0 > 0$, что $u_0(x) \in H^2(O(x_0, R_0))$ и

$$\mu \{x \in O(x_0, R_0) : \Delta_2 u_0(x) \neq 0\} > 0,$$

где μ – это стандартная мера Лебега в \mathbb{R}^2 .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Если $u_0(x) \in U$ и $q \in (1, 2]$, то не существует локального во времени слабого решения задачи Коши ни для какого $T > 0$.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ – локальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 5. Тогда воспользуемся результатом леммы 7.

Доказательство этого утверждения основано на применении метода нелинейной емкости С.И. Похожаева и Э. Митидиери (см. [9]) и специальном выборе пробной функции $\phi(x, t)$ в равенстве (5.3) определения 6. Именно, возьмем

$$\phi(x, t) = \phi_T(t)\phi_R(x), \quad \phi_T(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda, \quad \lambda > \max\{2, q'\},$$

$$\phi_R(x) = \phi_0\left(\frac{|x|^2}{R^2}\right), \quad \phi_0(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } s \in [0, 1/2], \\ 0, & \text{если } s \geq 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in C_0^\infty[0, +\infty),$$

где $\phi_0(s)$ – это монотонно невозрастающая функция. Справедливы следующие оценки, основанные на применении неравенства Гёльдера с соответствующими показателями:

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) dx dt \right| \leq \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-1} |\nabla u(x, t)| |\nabla \phi_R(x)| dx dt =$$

$$= \frac{\lambda}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda/q} |\nabla u(x, t)| \phi_R^{1/q}(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda/q'-1} \frac{|\nabla \phi_R(x)|}{\phi_R^{1/q}(x)} dx dt \leq \frac{\lambda}{T} c_1(R, T) I_R^{1/q},$$

где

$$I_R := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_T(t)\phi_R(x) |\nabla u|^q dx dt,$$

$$c_1(R, T) := \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\lambda-q'} \frac{|\nabla \phi_R(x)|^{q'}}{\phi_R^{q'/q}(x)} dx dt \right)^{1/q'} = \left(\frac{T}{\lambda - q' + 1} \right)^{1/q'} c_2 R^{(2-q')/q'}, \quad c_2 > 0;$$

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_1}(x, t)) dx dt \right| \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda |\nabla u(x, t)| |\nabla \phi_{x_1}(x, t)| dx dt \leq c_3(R, T) I_R^{1/q},$$

$$c_3(R, T) := \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda \frac{|\nabla \phi_{R x_1}|^{q'}}{\phi_R^{q'/q}} dx dt \right)^{1/q'} = c_4 \left(\frac{T}{1 + \lambda} \right)^{1/q'} R^{(2-2q')/q'}, \quad c_4 > 0;$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u_0(x), \nabla \phi_R(x)) dx \right| \leq \|\nabla u_0(x)\|_q \|\nabla \phi_R(x)\|_{q'} = c_5 R^{(2-q')/q'} \|\nabla u_0\|_q, \quad c_5 > 0.$$

Из равенства (5.3), примененного с пробной функцией (5.5), и из оценок (5.6), (5.8) и (5.10) мы получим неравенство

$$\frac{\lambda}{T} c_1(R, T) I_R^{1/q} + c_3(R, T) I_R^{1/q} + c_5 R^{(2-q')/q'} \|\nabla u_0\|_q \geq I_R.$$

Теперь воспользуемся следующим трехпараметрическим неравенством Юнга:

$$ab \leq \varepsilon a^q + \frac{1}{q'(\varepsilon q)^{q'/q}} b^{q'}, \quad a, b \geq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Применим это неравенство к (5.11) с $\varepsilon = 1/4$. Тогда получим неравенство

$$\frac{2}{q'(q/4)^{q'/q}} \left[\left(\frac{\lambda}{T} c_1(R, T) \right)^{q'} + (c_3(R, T))^{q'} \right] + 2c_5 R^{(2-q')/q'} \|\nabla u_0\|_q \geq I_R.$$

Положим теперь $R = N \in \mathbb{N}$ и рассмотрим последовательность функций

$$H_N(x, t) := |\nabla u(x, t)|^q \phi_N(x) \phi_T(t), \quad H_{N+1}(x, t) \geq H_N(x, t)$$

для почти всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$. Далее требуем выполнения неравенств

$$q > 1 \quad \text{и} \quad 1 - q' \leq 0 \Rightarrow 1 < q \leq 2.$$

Тогда из (5.7)–(5.12) вытекает, что правая часть неравенства (5.12) ограничена некоторой константой $K > 0$, следовательно,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} H_N(x, t) dx dt \leq K < +\infty.$$

И поэтому в силу теоремы Беппо Леви приходим к выводу о том, что

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} H_N(x, t) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_T(t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt \leq K < +\infty.$$

Рассмотрим отдельно случаи $1 < q < 2$ и $q = 2$. В случае $1 < q < 2$ из формулы (5.12) и оценок (5.7), (5.9) приходим к выводу о том, что

$$I_N := \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi_T(t) \phi_N(x) |\nabla u|^q dx dt \rightarrow +0 \quad \text{при} \quad N \rightarrow +\infty.$$

Случай $q = 2$ является критическим и рассматривается, как все критические случаи из работы [9].

Таким образом, при $q \in (1, 2]$ приходим к равенству

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, t)|^q \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\lambda dx dt = 0 \Rightarrow u(x, t) = F(t) \quad \text{для почти всех} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T].$$

После подстановки полученного равенства $u(x, t) = F(t)$ в равенство (5.3) мы получим равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = 0$$

для всех функций $\phi(x, t)$, удовлетворяющих условиям определения 6. Поэтому для произвольных функций $\phi(x, t)$ вида

$$\phi(x, t) = \phi_1(x) \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2, \quad \phi_1(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \phi_1(x) \subset O(x_0, R_0)$$

в классе $u_0(x) \in U$ после интегрирования по частям получим следующее равенство:

$$\int_{O(x_0, R_0)} \Delta u_0(x) \phi_1(x) dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \phi_1(x) \in C_0^\infty(O(x_0, R_0)).$$

В силу основной леммы вариационного исчисления приходим к выводу о том, что

$$\Delta u_0(x) = 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in O(x_0, R_0),$$

что противоречит определению класса $U \ni u_0(x)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. Пусть $2 < q \leq 3$ и $u_0(x) \in U$. Тогда не существует глобального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 7.

Доказательство. Пусть $u(x, t)$ – глобальное во времени слабое решение задачи Коши в смысле определения 7. Выберем пробную функцию из определения 7:

$$\phi(x, t) = \phi_0 \left(\frac{|x|^2 + t^2}{R^2} \right), \quad R > 1,$$

$$\phi_0(s) := \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq s \leq 1/2, \\ 0 & \text{при } s \geq 1, \end{cases} \quad \phi_0(s) \in C_0^{(\infty)}[0, +\infty),$$

где функция $\phi_0(s)$ – монотонно невозрастающая. Справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) dx dt \right| \leq J_R^{1/q} c_6(R),$$

$$\left| \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_1}(x, t)) dx dt \right| \leq J_R^{1/q} c_7(R),$$

где

$$J_R := \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt,$$

$$c_6(R) := \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla \phi'(x, t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt \right)^{1/q'} = c_{60} R^{(3-2q')/q'}, \quad c_{60} > 0,$$

$$c_7(R) := \left(\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla \phi_{x_1}(x, t)|^{q'}}{\phi^{q'/q}(x, t)} dx dt \right)^{1/q'} = c_{70} R^{(3-2q')/q'}, \quad c_{70} > 0,$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) \Delta \phi(x, 0) dx \right| \leq \|u_0(x)\|_q c_8(R),$$

$$c_8(R) := \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta \phi(x, 0)|^{q'} dx \right)^{1/q'} = c_{80} R^{(2-2q')/q'}, \quad c_{80} > 0.$$

Теперь потребуем, чтобы были выполнены неравенства $q > 1$ и $3 - 2q' \leq 0$, тогда верно $1 < q \leq 3$. Заметим, что при выполнении этих неравенств выполнено неравенство $2 - 2q' < 0$. Таким образом, из оценок (5.13)–(5.15) и равенства (5.4) получим оценку

$$J_R^{1/q} c_6(R) + J_R^{1/q} c_7(R) + \|u_0(x)\|_q c_8(R) \geq J_R.$$

Дальнейшие рассуждения повторяют рассуждения при доказательстве теоремы 8.

В результате предельного перехода при $R = N \rightarrow +\infty$ в неравенстве (5.16) мы приходим к равенству

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = 0$$

для всех функций $\phi(x, t)$, удовлетворяющих условиям определения 7. Воспользуемся результатом леммы 8. Возьмем в качестве функции $\phi(x, t)$ функцию вида $\phi_1(x)\phi_2(t)$, где

$$\phi_2(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 & \text{при } t \in [0, T], \\ 0 & \text{при } t \geq T, \end{cases} \quad \phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Несложно заметить, что $\phi(x, t) = \phi_1(x)\phi_2(t) \in C_0^{2+1}(\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty))$. Тогда из равенства (5.17) получим

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi_1(x)) dx = 0 \quad \text{для всех } \phi_1(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2).$$

Далее точно так же, как при доказательстве теоремы 8, из (5.18) получим противоречие с тем, что $u_0(x) \in U$.

Теорема доказана полностью.

Теперь мы докажем результат о существовании локального во времени слабого решения задачи Коши в смысле определения 6.

Теорема 10. Пусть $q > 2$, $u_0(x), u_{0,x_1}(x) \in B$ и найдутся такие постоянные $a > 0$ и $\beta > 2$, что справедливо следующее неравенство:

$$|\Delta u_0(x)| \leq \frac{a}{(1 + |x|^2)^{\beta/2}} \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^2.$$

Тогда существует единственное локальное во времени слабое решение задачи Коши (5.1), (5.2) в смысле определения 6.

Доказательство. В силу условий теоремы выполнены все условия теоремы 6 о существовании непродолжаемого во времени решения интегрального уравнения (4.1) в классе $v(x, t) \in C([0, T]; B)$ для любого $T \in (0, T_0)$, причем если $T_0 < +\infty$, то выполнено предельное свойство (4.2):

$$u(x, t) = u_0(x_1 - t, x_2) + U_q(x, t),$$

$$U_q(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, \tau)|^q \ln|x^* - y| dy d\tau, \quad x^* = (x_1 - t + \tau, x_2).$$

В силу результатов теоремы 5 справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_q(x, t)}{\partial x_j} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial x_j} \ln|x^* - y| |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau, \\ \frac{\partial U_q(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, t)|^q \ln|x - y| dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau. \end{aligned}$$

Лемма 9. Справедливо поточечное равенство

$$\frac{\partial U_q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial U_q(x, t)}{\partial x_1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, t)|^q \ln|x - y| dy.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное фиксированное. Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_q(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial U_q(x, t)}{\partial x_1} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, t)|^q \ln|x - y| dy + \\ &+ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2 \setminus O(x^*, \varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1} \ln|x^* - y| \right) |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_{O(x^*, \varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1} \ln|x^* - y| \right) |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, t)|^q \ln|x - y| dy + \int_0^t \int_{O(x^*, \varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1} \ln|x^* - y| \right) |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau, \end{aligned}$$

где мы воспользовались равенством

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \ln|x^* - y| = 0 \quad \text{при} \quad y \neq x^* = (x_1 - t + \tau, x_2).$$

Осталось заметить, что

$$\left| \int_0^t \int_{O(x^*, \varepsilon)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \ln|x^* - y| + \frac{\partial}{\partial x_1} \ln|x^* - y|\right) |\nabla u(y, \tau)|^q dy d\tau \right|$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Лемма доказана.

Поскольку $u_0(x) \in C^{(1)}(\mathbb{R}^2)$, то справедливо следующее поточечное равенство:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u_0(x_1 - t, x_2) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty).$$

Сначала сформулируем следующий классический результат, который непосредственно вытекает из работы [17].

Лемма 10. Пусть $\rho_0(x) \in C_b((1 + |x|^2)^{\beta/2}; \mathbb{R}^2)$ при $\beta > 2$. Тогда классический объемный логарифмический потенциал

$$W_0(x) := W_0[\rho_0](x) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \ln|x - y| \rho_0(y) dy$$

удовлетворяет равенству

$$\langle \Delta_x W_0(x), \phi(x) \rangle = \langle \rho_0(x), \phi(x) \rangle$$

для любых $\phi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – это скобки двойственности между $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, а оператор Δ_x понимается в смысле производных обобщенных функций.

Применим это утверждение к потенциалу

$$W_0(x, t) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(y, t)|^q \ln|x - y| dy$$

и с учетом (5.22) из (5.20) получим равенство

$$\left\langle \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) U_q(x, t), \phi(x, t) \right\rangle = \langle |\nabla u(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle$$

для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ и для всех $t \in [0, T]$. Отсюда с учетом (5.19) и (5.21) приходим к выводу о том, что справедливо равенство

$$\left\langle \Delta_x \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u(x, t), \phi(x, t) \right\rangle = \langle |\nabla u(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle$$

для любой функции $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ и для всех $t \in [0, T]$, где $u(x, t)$ – решение интегрального уравнения (5.19) такого класса, что $(1 + |x|^2)^{1/2} u(x, t) \in C_b^{(1,0)}((1 + |x|^2)^{1/2}; \mathbb{R}^2 \times [0, T])$ для всех $T \in (0, T_0)$. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u(x, t), \Delta_x \phi(x, t) \right\rangle = \langle |\nabla u(x, t)|^q, \phi(x, t) \rangle,$$

которое можно переписать в виде

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1}\right) u(x, t) \Delta \phi(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, t)|^q \phi(x, t) dx.$$

Теперь проинтегрируем обе части равенства (5.23) по $t \in [0, T]$ и после интегрирования по частям получим равенство

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [u(x, t) \Delta \phi'(x, t) + u(x, t) \Delta \phi_{x_1}(x, t)] dx dt - \int_{\mathbb{R}^2} \Delta u_0(x) \phi(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt$$

для любых $\phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$. В левой части этого равенства можно снова проинтегрировать по частям, поскольку $u_0(x) \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2)$ и $U_q(x, t) \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, поэтому $u(x, t) \in \mathcal{C}^{(1)}(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$, и в результате получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} [(\nabla u(x, t), \nabla \phi'(x, t)) + (\nabla u(x, t), \nabla \phi_{x_1}(x, t))] dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0(x), \nabla \phi(x, 0)) dx = \\ & = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x, t) |\nabla u(x, t)|^q dx dt \quad \text{для любых } \phi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T)). \end{aligned}$$

Таким образом, построенное $u(x, t)$ является локальным во времени слабым решением задачи Коши в смысле определения 6.

Теперь докажем единственность построенного локального во времени слабого решения задачи Коши. В силу теоремы 2, леммы 3 всякое слабое решение задачи Коши в смысле определения 6 должно удовлетворять уравнению (3.11), которое в нашем случае имеет вид

$$\tilde{u}(x, t) = \theta(t) u_0(x_1 - t, x_2) + \theta(t) \int_{-\infty}^t \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{E}(x - y, t - \tau) |\widetilde{\nabla u}|^q(y, \tau) dy d\tau,$$

где $\mathcal{E}(x, t)$ – фундаментальное решение, определенное равенством (3.6). Рассмотрим функцию

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & \text{если } t \in [0, T], \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases}$$

где $u(x, t)$ – это найденное единственное решение интегрального уравнения (4.1). Заметим, что

$$|\widetilde{\nabla u}|^q(x, t) = \begin{cases} |\nabla u(x, t)|^q, & \text{если } t \in [0, T], \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Но тогда построенная функция $\tilde{u}(x, t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \times (-\infty, T))$ является единственным решением интегрального уравнения (5.24) в классе функций, равных нулю при $t < 0$. Отсюда вытекает единственность локального во времени слабого решения в смысле определения 6.

Теорема доказана полностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Багдоев Г.А., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Физматлит, 2009. 320 с.
2. Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. № 4. Р. 47–74.
3. Загребина С.А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. № 2. С. 39–48.
4. Zamyshlyayeva A.A., Sviridyuk G.A. Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. мех. физ. 2016. Т. 8. № 4. С. 5–16.
5. Капитонов Б.В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). № 4(8). С. 607–628.
6. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990. С. 344.
7. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998. С. 448.
8. Плетнер Ю.Д. Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. № 12. С. 1885–1899.
9. Похожаев С.И., Митидиери Э. Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.

10. Galakhov E.I. Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. № 1. P. 256–277.
11. Галахов Е.И., Салиева О.А. Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // Современ. матем. Фундамент. направл. 2017. Т. 63. № 4. С. 573–585.
12. Корпусов М.О. Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. № 5. С. 103–162.
13. Корпусов М.О. О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова–Заболотской // Теор. и матем. физ. 2018. Т. 194. № 3. С. 403–417.
14. Korpusov M.O., Ovchinnikov A.V., Panin A.A. Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41. № 17. P. 8070–8099.
15. Корпусов М.О., Панин А.А. Мгновенное разрушение versus локальная разрешимость задачи Коши для двумерного уравнения полупроводника с тепловым разогревом // Изв. РАН. Сер. матем. 2019. Т. 83. № 6. С. 1174–1200.
16. Корпусов М.О., Матвеева А.К. О критических показателях для слабых решений задачи Коши для одного нелинейного уравнения составного типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2021. Т. 85. № 4. С. 96–136.
17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, М.: Наука, 1988. С. 512.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.957

**OPTICAL SOLITARY WAVES AND SOLITON SOLUTIONS
OF THE (3 + 1)-DIMENSIONAL GENERALIZED KADOMTSEV–
PETVIASHVILI–BENJAMIN–BONA–MAHONY EQUATION¹⁾**

© 2023 г. А. А. Mahmud^{1,*}, Н. М. Baskonus^{2,**}, Т. Tanriverdi^{1,***}, К. А. Muhamad^{1,****}

¹ 63290 Sanliurfa, Harran University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, Turkey

² 63190 Sanliurfa, Harran University, Faculty of Education,
Department of Mathematics and Science Education, Turkey

*e-mail: mathematic79@yahoo.com

**e-mail: hmbaskonus@gmail.com

***e-mail: tanriverdi@harran.edu.tr

****e-mail: kalsumabdulrahman58@gmail.com

Поступила в редакцию 23.12.2022 г.

Переработанный вариант 08.01.2023 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Оптические уединенные волны и солитонные решения (3 + 1)-мерного обобщенного уравнения Кадомцева–Петвиашвили–Бенджамина–Бона–Махони. Анализ нелинейного (3 + 1)-мерного обобщенного уравнения четвертого порядка Кадомцева–Петвиашвили–Бенджамина–Бона–Махони был проведен с использованием преобразования бегущей волны. Рассматриваемая модель является интегрируемой, имеет постоянные коэффициенты и описывает поток морской жидкости. Исследуемая система преобразуется с помощью метода функций выравнивания Бернулли, а затем с помощью модифицированного расширенного метода с использованием гиперболических функций $\tanh(x)$, что позволяет явно получать бегущие волны, периодические волны и солитонные решения. Приведены множественные численные расчеты, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: метод функций выравнивания Бернулли, модифицированный метод функций $\tanh(x)$, преобразование бегущей волны, солитонные решения.

DOI: 10.31857/S0044466923060145, **EDN:** UXACJM

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 517.956

**WELL-POSEDNESS AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR
FOR THE DISSIPATIVE p -BIHARMONIC WAVE EQUATION
WITH LOGARITHMIC NONLINEARITY AND DAMPING TERMS¹⁾**

© 2023 г. Mengyuan Zhang^{1,*}, Zhiqing Liu^{1,2,**}, Xinli Zhang^{1,2,***}

¹ 266061 Qingdao, School of Mathematics and Physics, Qingdao University of Science and Technology, P. R. China

² 266061 Qingdao, Research Institute for Mathematics and Interdisciplinary Sciences,
Qingdao University of Science and Technology, P. R. China

*e-mail: zmy1774552@163.com

**e-mail: Lzhiqing1005@163.com

***e-mail: zxl@qust.edu.cn

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 12.12.2022 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Корректность и асимптотическое поведение диссипативного p -бигармонического волнового уравнения с логарифмической нелинейностью и затухающими членами. Исследуется начально-краевая задача для p -бигармонического волнового уравнения с логарифмической нелинейностью и демпфирующими членами. Комбинируя приближение Фаэдо-Галеркина, метод потенциальной ямы и вводя соответствующий функционал Ляпунова, получено как полиномиальное, так и экспоненциальное затухание полной энергии. Используя затем метод дифференциальных неравенств, получено условие существования решения в течение определенного конечного времени.

Ключевые слова: корректность задачи, асимптотическое поведение, p -бигармоническое волновое уравнение, логарифмическая нелинейность, демпфирование решения.

DOI: 10.31857/S0044466923060224, **EDN:** UXCRYM

¹⁾ Полный текст статьи печатается в английской версии журнала.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.634

СРАВНЕНИЕ ПРОТИВОПОТОЧНЫХ И СИММЕТРИЧНЫХ
WENO-СХЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ БАЗОВЫХ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ¹⁾© 2023 г. С. Бахнэ^{1,*}, А. И. Трошин¹¹ 140180 Жуковский, ул. Жуковского, 1, ЦАГИ им. Н.Е. Жуковского, Россия

*e-mail: bakhne@phystech.edu

Поступила в редакцию 14.11.2022 г.
Переработанный вариант 14.11.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

Работа посвящена изучению свойств современных схем семейства WENO с целью их дальнейшего применения в вихреразрешающих расчетах методом крупных вихрей (LES). Выбрана схема WENO-ZM5, которая относится к классу WENO-схем с модификацией индикаторов гладкости (“противопоточных”), и схема WENO-SYMBOO6, использующая симметричный шаблон (“симметричная WENO-схема”). Проведено сравнение схем на модельных одномерных задачах (уравнение переноса, Хопфа, Бюргерса) как с гладкими, так и с разрывными решениями. Представлены результаты LES-моделирования распада изотропной турбулентности. Решения, полученные по новым схемам, сопоставлены с решениями по центрально-разностной схеме, классической схеме WENO5 и гибридной схеме. На основе анализа энергетического спектра проведено сравнение уровня диссипативности схем. Аналогичное сравнение проведено в LES-расчете задачи о временном слое смешения, где в дополнение к энергетическому спектру рассмотрены профили средней скорости и напряжений Рейнольдса. Библ. 29. Фиг. 13. Табл. 2.

Ключевые слова: WENO, WENO-ZM, WENO-SYMBOO, LES, распад изотропной турбулентности, турбулентный слой смешения.

DOI: 10.31857/S0044466923060030, **EDN:** UWNSSL

ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия все более широкую популярность в области вычислительной аэродинамики набирают схемы семейства ENO [1], [2] с переменным шаблоном, зависящим от решения. Среди них выделяются WENO-схемы [3], обладающие лучшими индикаторами гладкости и большим порядком аппроксимации на одинаковом с ENO шаблоне. Стоит отметить, что расчетные программы, ориентированные на решение практических задач газовой динамики в рамках метода конечного объема, обладают, как правило, вторым порядком точности, поскольку реальное распределение параметров течения на грани ячейки воспроизводится одной гауссовой точкой. При таком подходе схемы ENO и WENO не реализуют свой теоретический порядок точности, однако все равно позволяют существенно снизить уровень ошибки по сравнению с классическими TVD-схемами. Это связано с тем, что коэффициент в разложении в ряд Тейлора перед h^2 оказывается меньшим. Однако эти схемы, являясь противоположными, обладают численной диссипацией, которая хоть и существенно меньше, чем в случае постоянной или линейной реконструкции, все еще оказывается избыточной для корректного применения в методе крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES).

Наиболее популярным подходом, пригодным для LES-расчетов, является использование гибридной схемы. Она комбинирует какую-либо противоположную схему с центрально-разностной (Central Difference, CD), номинально не обладающей диссипацией (в случае линейного уравнения переноса), с помощью весовой функции. Это обеспечивает и высокое пространственное разрешение, и устойчивый счет вблизи больших градиентов решения. Однако у этого подхода есть недостатки. Во-первых, как правило, весовая функция является достаточно сложной и

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 21-71-10105), <https://rscf.ru/project/21-71-10105/>.

включает в себя зависящую от течения константу [4]. Во-вторых, гибридная схема не полностью отключает противопоточную составляющую, что затрудняет оценку уровня ее диссипативности. В связи с этим интересен и актуален вопрос изучения схем, которые не являются гибридными и не используют эмпирические константы, но пригодны для LES-расчетов.

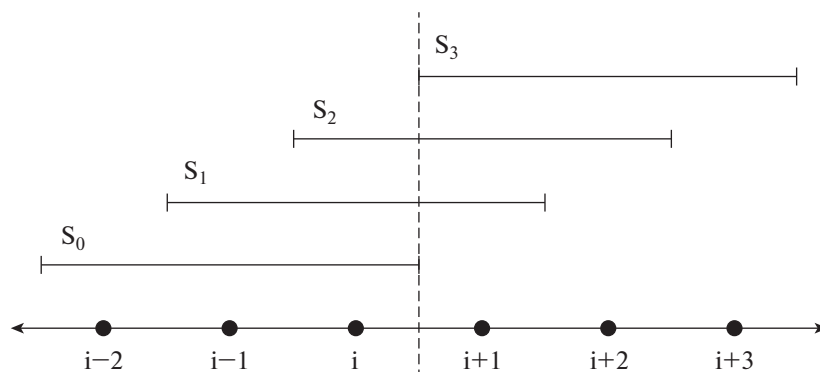
Основная цель данной работы – оценить современные схемы семейства WENO, которые могут составить конкуренцию гибридной схеме [4] в рамках LES. Требование низкого уровня диссипативности приводит к тому, что внимание будет сосредоточено на двух схемах семейства WENO, одна из которых использует в рамках одномерной реконструкции симметричный шаблон [5], [6], а другая использует модифицированные индикаторы гладкости на несимметричном шаблоне [7], [8]. Достаточно полные обзоры по современным схемам семейства WENO можно найти, например, в [9], [10].

Статья состоит из 5 разделов, в первом из которых характеризуются выбранные схемы, наиболее перспективные с точки зрения LES-методов. В разд. 2 приводятся формулировки выбранных численных методов. В третьем разделе рассматриваются результаты одномерных расчетов модельных задач. Четвертый раздел посвящен задаче о распаде изотропной турбулентности. В пятой части работы рассмотрена задача о турбулентном слое смешения. За ней следуют выводы.

1. ИССЛЕДУЕМЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В классической постановке WENO5 для реконструкции функции с левой стороны грани $i + 1/2$ используется 3 трехточечных шаблона (S_0 , S_1 и S_2 на фиг. 1), комбинация которых в случае гладкого решения обеспечивает 5-й порядок аппроксимации. Идея WENO-схем на симметричном шаблоне состоит в том, чтобы добавить еще один трехточечный шаблон (S_3 на фиг. 1) и пересчитать их оптимальные весовые коэффициенты с целью улучшения диссипативных свойств. Пересчет может быть выполнен так, чтобы вместо противопоточной аппроксимации 5-го порядка “оптимальной” стала бездиссипативная центрально-разностная аппроксимация 6-го порядка [6]; другой способ основывается на том, чтобы сдвинуть диссипативную ошибку схемы в область коротких волн, для которых дисперсионная ошибка превышает 10%, из-за чего они в любом случае воспроизводятся неверно. Результатом эволюции второго направления стала схема WENO-SYMB006 (Symmetrical Bandwidth and Order-Optimized, 6-точечный шаблон). В данной статье именно эта схема выбрана для сравнения в качестве представителя симметричных WENO-схем.

Другой способ снижения диссипативности схемы WENO5 основан на модификации индикаторов гладкости решения без расширения шаблона. Дело в том, что порядок точности классической схемы WENO5 опускается до 3-го, если обнуляется 1-я производная решения, и до 2-го, если обнуляется также и 2-я производная. В [11] рассматривается возможность использовать функцию преобразования итоговых весовых коэффициентов, что позволяет сохранить 5-й порядок в случае обнуления первой производной (такие схемы принято называть WENO-M), однако данный подход все равно обладает 2-м порядком в случае обнуления обеих производных одновременно. Для решения второй проблемы в [12] предложен дополнительный индикатор гладкости на “широком” шаблоне, использующем все 5 точек. Кроме этого, в [12] было обнаружено, что значение константы ϵ , прибавляемой к индикаторам гладкости в WENO-схемах, влияет на реше-



Фиг. 1. Шеститочечный шаблон для реконструкции значения на грани $x_{i+1/2}$, изображение взято из [6].

ние в окрестности критических точек, поэтому стандартное значение $\varepsilon = 10^{-6}$ (см. [3]) было предложено заменить на $\varepsilon = 10^{-40}$. Полученная схема обладает 4-м порядком в окрестности любых критических точек. Для нее принято обозначение WENO-Z. Объединение подходов WENO-M и WENO-Z рассмотрено в [7], а полученную схему принято называть WENO-ZM5. В ней функция преобразования применяется к весам, полученным в WENO-Z, а не к исходным. Схема WENO-ZM5 будет рассматриваться в данной статье как представитель WENO-схем с модифицированными индикаторами гладкости.

Два вышеперечисленных метода будут сравниваться с классической схемой WENO5 с МР-монотонизатором [13], с центрально-разностной схемой 2-го порядка точности (далее – CD2), а также с гибридной схемой, комбинирующей монотонизированную схему WENO5 с CD2 с помощью весовой функции [4].

2. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДОВ WENO-ZM5 И WENO-SYMB006

Без ограничения общности будем рассматривать реконструкцию решения на грань $i + 1/2$ слева. Тогда в случае пятиточечного шаблона итоговую реконструкцию можно представить как линейную комбинацию трех реконструкций по трем точкам:

$$f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^2 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)},$$

где

$$f_{i+1/2}^{(0)} = (2f_{i-2} - 7f_{i-1} + 11f_i)/6, \quad f_{i+1/2}^{(1)} = (-f_{i-1} + 5f_i + 2f_{i+1})/6, \quad f_{i+1/2}^{(2)} = (2f_i + 5f_{i+1} - f_{i+2})/6,$$

а ω_k – нелинейные весовые коэффициенты, определяемые конкретным методом. В базовой аппроксимации WENO5 веса ω_k определяются через оптимальные веса d_k , индикаторы гладкости IS_k и условие нормировки:

$$\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^2 \alpha_l, \quad \alpha_k = d_k / (\varepsilon + IS_k)^2,$$

где оптимальные веса $d_0 = 0.1$, $d_1 = 0.6$, $d_2 = 0.3$. Сами индикаторы гладкости выражаются следующим образом:

$$IS_0 = \frac{13}{12}(f_{i-2} - 2f_{i-1} + f_i)^2 + \frac{1}{4}(f_{i-2} - 4f_{i-1} + 3f_i)^2,$$

$$IS_1 = \frac{13}{12}(f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})^2 + \frac{1}{4}(f_{i-1} - f_{i+1})^2,$$

$$IS_2 = \frac{13}{12}(f_i - 2f_{i+1} + f_{i+2})^2 + \frac{1}{4}(f_{i+2} - 4f_{i+1} + 3f_i)^2.$$

Малая положительная константа ε предотвращает деление на ноль вблизи экстремумов и, следуя [12], в данной работе выбрана равной 10^{-40} . В методе WENO-ZM5 сперва необходимо модифицировать индикаторы гладкости [12]:

$$\frac{1}{\beta_k^Z} = C + \left(\frac{\tau_5}{\varepsilon + IS_k} \right)^p, \quad \tau_5 = |IS_0 - IS_2|, \quad \varepsilon = 10^{-40}, \quad p = 1, \quad C = 1.$$

Положительная константа C добавлена для того, чтобы избежать ошибок округления в окрестностях критических точек, где все индикаторы гладкости стремятся к нулю [12].

Далее весовые коэффициенты шаблонов составляются из оптимальных значений d_k и модифицированных индикаторов гладкости: $\alpha_k^Z = d_k / \beta_k^Z$. Затем полученные веса необходимо нормировать так, чтобы сумма всех коэффициентов оставалась равной 1: $\omega_k^Z = \alpha_k^Z / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^Z$. Наконец, к полученным весам ω_k^Z необходимо применить функцию, исправляющую потерю порядка в

окрестности гладкого экстремума [7]: $\alpha_k^{ZM} = g_k(\omega_k^Z)$, и снова нормировать: $\omega_k^{ZM} = \alpha_k^{ZM} / \sum_{l=0}^2 \alpha_l^{ZM}$. Сама функция определяется следующим образом [11]:

$$g_k(\omega) = \frac{\omega(d_k + d_k^2 - 3d_k\omega + \omega^2)}{d_k^2 + \omega(1 - 2d_k)}.$$

Окончательные веса ω_k^{ZM} подставляются в формулу для $f_{i+1/2}$ вместо ω_k .

В методе WENO-SYMB006 в реконструкции участвует еще один трехточечный шаблон 3-го порядка: $f_{i+1/2}^{(3)} = (11f_{i+1} - 7f_{i+2} + 2f_{i+3})/6$, так что $f_{i+1/2} = \sum_{k=0}^3 \omega_k f_{i+1/2}^{(k)}$. Соответствующий ему индикатор гладкости задается формулой

$$IS_3 = \frac{13}{12}(f_{i+1} - 2f_{i+2} + f_{i+3})^2 + \frac{1}{4}(-5f_{i+1} + 8f_{i+2} - 3f_{i+3})^2.$$

Новые оптимальные веса, полученные в [5] применением к схеме [14] процедуры из [6], определяются следующим образом: $d_0 = 0.1 - \psi$, $d_1 = 0.6 - 3\psi$, $d_2 = 0.3 + 3\psi$, $d_3 = \psi$, где $\psi = 0.044973$. При этом вклад от самого правого шаблона ограничивается соответствующим выбором индикатора гладкости: $\beta_k = IS_k$, $k = 0, 1, 2$; $\beta_3 = \max_k IS_k$. Далее составляется комбинация оптимальных

весов и индикаторов гладкости: $\alpha_k = d_k \left(1 + \frac{\tau_p}{\varepsilon + \beta_k} \right)$, где $\varepsilon = 10^{-40}$, τ_p – индикатор гладкости, построенный на шеститочечном шаблоне:

$$\tau_p = (-f_{i-2} + 5f_{i-1} - 10f_i + 10f_{i+1} - 5f_{i+2} + f_{i+3})^2,$$

который в случае гладкого решения оказывается на порядок меньше любого из β_k . Таким образом, добавление единицы позволяет выбирать оптимальные веса d_k . Завершающий этап, как и ранее, – это нормировка: $\omega_k = \alpha_k / \sum_{l=0}^3 \alpha_l$.

3. СРАВНЕНИЕ СХЕМ В МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ

В данном разделе свойства выбранных схем анализируются численно на модельных задачах. Для этого была написана программа, позволяющая решать одномерные уравнения переноса, Хопфа и Бюргерса.

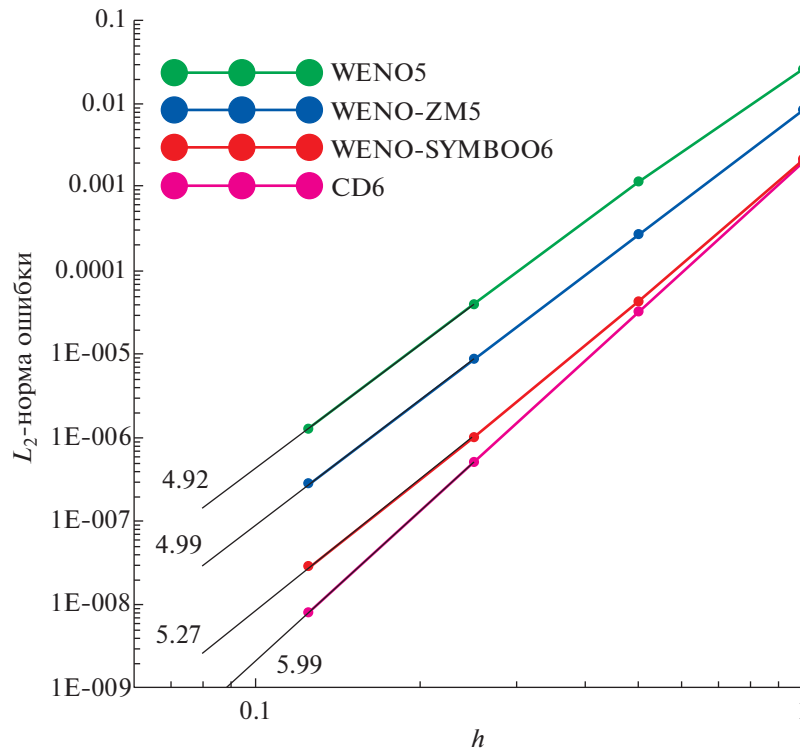
Рассмотрим уравнение переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad c = 1.$$

Будем использовать расчетную область $1 \leq x \leq 3000$ с равномерной сеткой шага $h = 1$. На границах значения функции u фиксированы. Моделируемый промежуток времени $T = 100$. В первом тесте в качестве начальных условий в середине расчетной области задается полупериод синуса в степени 9:

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 1480) \cup (1520, 3000], \\ \sin^9[(x - 1480) \cdot \pi/40], & x \in [1480, 1520], \end{cases}$$

что обеспечивает достаточную гладкость начального профиля. Количество узлов выбрано таким, чтобы исключить влияние на решение граничных условий за время задачи. Шаг по времени τ удовлетворяет условию $c\tau/h = 1$. Интегрирование по времени ведется по 9-стадийному методу Рунге–Кутты 7 порядка аппроксимации [15]. Это обеспечивает пренебрежимо малый вклад временной аппроксимации в ошибку, которая вычисляется как L_2 -норма разности между численным решением и точным. На фиг. 2 представлена зависимость ошибки от шага расчетной сетки h для схем WENO5, WENO-ZM5 и WENO-SYMB006. Видно, что все схемы достигают своего теоретического порядка сходимости.



Фиг. 2. Численный порядок сходимости при решении уравнения переноса с гладкими начальными условиями.

Во втором тесте задается разрывное начальное поле в форме прямоугольного импульса:

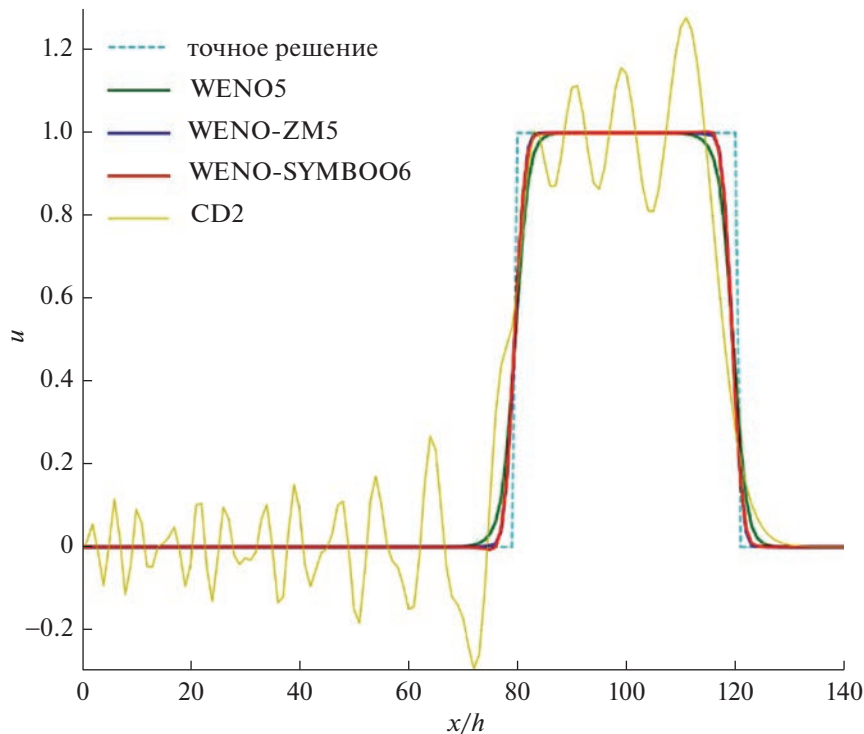
$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [1, 1480) \cup (1520, 3000], \\ 1, & x \in [1480, 1520]. \end{cases}$$

Все параметры расчета такие же, как в первом тесте. На фиг. 3 представлено решение в конечный момент времени. Для сравнения приведено решение по центрально-разностной схеме CD2. Эта схема порождает осцилляции Гиббса, которые не затухают со временем. Решения по схемам класса WENO выглядят монотонными, при этом можно заметить, что классическая схема WENO5 сильнее сглаживает решение, чем две новые аппроксимации, качественной разницы между которыми не наблюдается. Однако, если вернуться к фиг. 2, то обнаружится, что в случае гладкого начального условия уровень ошибки схемы WENO-SYMB006 в несколько раз меньше, чем в случае WENO-ZM5 на всех сетках. На разрывах эта разница становится менее существенной, что и демонстрирует фиг. 3.

Сделанные выводы сохраняются при решении уравнения Хопфа с непрерывными начальными условиями, соответствующими волне сжатия:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \in [1, 1480), \\ -1, & x \in (1520, 3000], \\ -(x - 1500)/20, & x \in [1480, 1520]. \end{cases}$$

В табл. 1 представлены величины ошибок по норме L_2 для моментов времени $0.5T_c$ и $2T_c$, где T_c – время, за которое волна сжатия превращается в разрыв. При $T = 0.5T_c$ схема CD2 дает наибольшую ошибку среди рассмотренных схем, что связано с ее относительно высокой дисперсионной ошибкой [9], которая проявляется на негладком решении. Классическая схема WENO5 уступает двум новым вариантам WENO, между которыми, в свою очередь, различие невелико. При $T = 2T_c$ точное решение имеет разрыв, и центрально-разностная схема дает неудовлетворительный уровень ошибки. Все WENO-схемы, напротив, соответствуют точному решению.



Фиг. 3. Перенос прямоугольного импульса (ось абсцисс сдвинута таким образом, что координата 0 соответствует середине расчетной области).

Выводы не меняются и при добавлении в уравнение диффузионного члена (уравнение Бюргера):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Были рассмотрены два значения коэффициента вязкости: $\nu = 1$ и 0.4 . Вторая производная аппроксимировалась по центрально-разностной схеме 2-го порядка аппроксимации. Начальные условия были как в случае уравнения Хопфа. Рассматривалось стационарное решение, точная формула которого имеет вид $u_{ex} = -\text{th}((x - x_0)/(2\nu))$, где x_0 – середина расчетной области. Ошибки, полученные по разным схемам, приведены в табл. 2.

Таблица 1. Ошибки по норме L_2 для уравнения Хопфа

Схема	$T = 0.5T_c$	$T = 2T_c$
WENO5	0.0454	0
WENO-ZM5	0.0296	0
WENO-SYMBOO6	0.0281	0
CD2	0.0822	9.6099

Таблица 2. Ошибки по норме L_2 для уравнения Бюргера

Схема	$\nu = 1$	$\nu = 0.4$
WENO5	0.0547	0.1093
WENO-ZM5	0.0129	0.0158
WENO-SYMBOO6	0.0143	0.0269
CD2	0.0851	0.5684

При $\nu = 1$ волна сжатия хорошо разрешается сеткой, и ошибки схем находятся примерно в том же соотношении, как и в случае уравнения Хопфа при $T = 0.5T_c$. С коэффициентом вязкости $\nu = 0.4$ сеточное разрешение становится недостаточным, и схема CD2 порождает видимые осцилляции, приводящие к высокому уровню ошибки. С другой стороны, все схемы класса WENO сохраняют монотонный характер решения, причем уровень ошибки классической схемы WENO5 в несколько раз больше, чем двух других схем.

Итак, по результатам одномерных тестов обе аппроксимации — WENO-ZM5 и WENO-SYMB006 — демонстрируют заявленный порядок сходимости при гладком начальном условии, лучшее поведение в окрестности разрывов при сравнении с WENO5 и центральными разностями и приблизительно одинаковый уровень ошибки в случае нелинейных модельных уравнений Хопфа и Бюргерса. Обе схемы превосходят по точности центрально-разностную схему, что позволяет надеяться на хорошие результаты их работы в LES-расчетах газодинамических задач. Единственным отличием между двумя рассмотренными схемами является больший шаблон WENO-SYMB006 и сопутствующие большие вычислительные затраты, которые в случае трехмерной задачи могут стать существенными.

4. РАСЧЕТЫ ЗАТУХАНИЯ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Для всех трехмерных LES-расчетов в данной работе используется метод конечного объема 2-го порядка точности, реализованный на многоблочной структурированной сетке в расчетном модуле *zFlare*, основанном на ZEUS [16] из пакета программ EWT-ЦАГИ [17]. Диффузионные потоки вычисляются с помощью центрально-разностной схемы 2-го порядка. Для вихреразрешающих расчетов конвективные потоки аппроксимируются с помощью упомянутых выше центральных разностей 2-го порядка (CD2) либо гибридной схемы, которая работает как взвешенное среднее между WENO5 с монотонизатором MP [13] и CD2 с весовой функцией из работы [4]. В ходе данного исследования были также реализованы и верифицированы аппроксимации конвективных потоков по схемам WENO-ZM5 и WENO-SYMB006. Во всех расчетах в качестве временной аппроксимации используется 3-шаговая схема Хойна 3-го порядка точности. Решается полная отфильтрованная система уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа. Система замкнута подсеточной моделью из состава гибридного метода SST-DES [18] с масштабом длины SLA [20]. Это — дифференциальная двухпараметрическая подсеточная модель класса $k - \omega$. Константа C_{DES2} в этой модели, которая является аналогом константы Смагоринского и определяет форму энергетического спектра турбулентности, найдена в [20]: для центрально-разностной схемы она равняется 0.69, а для гибридной схемы — 0.56.

Задача о затухании изотропной турбулентности — широко используемый инструмент для изучения свойств численных схем и подсеточных моделей [21], [22]. Расчетная область для этой задачи представляет собой куб с периодическими граничными условиями. Каждая сторона куба имеет длину $2\pi L$, размерный параметр L выбран равным 1 м. Одна из основных характеристик турбулентности, представляющих интерес в данной задаче, — это форма энергетического спектра $E(k)$, определяемого как интеграл по сферам радиуса k от половины следа спектрального тензора $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ (см. [23]):

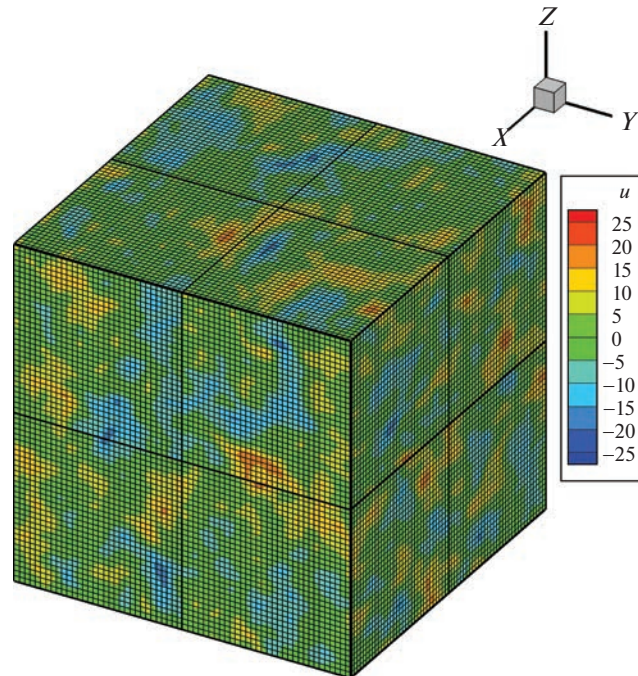
$$E(k) = \frac{1}{2} \iint \Phi_{ii}(\mathbf{k}) dS(k).$$

Здесь $k = |\mathbf{k}|$ — волновое число, $dS(k)$ — элемент сферы радиуса k . Спектральный тензор, в свою очередь, определяется как 3-мерное преобразование Фурье от корреляционного тензора поля скорости $R_{ij}(\mathbf{r})$:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint R_{ij}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \text{где} \quad R_{ij}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi L)^3} \iiint u_i(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{x}.$$

При высоких числах Рейнольдса спектр должен содержать инерционный интервал, подчиняющийся закону Колмогорова: $E(k) = C_K \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, где $\varepsilon = -dE_k/dt$ — скорость диссипации кинетической энергии турбулентности E_k , C_K — безразмерная константа.

В проведенных расчетах начальное поле скорости создавалось с помощью генератора синтетической турбулентности, реализованного на основе [24]. В начальный момент времени возмущения в виде суммы гармоник вносились во всей расчетной области. Амплитуды гармоник рас-

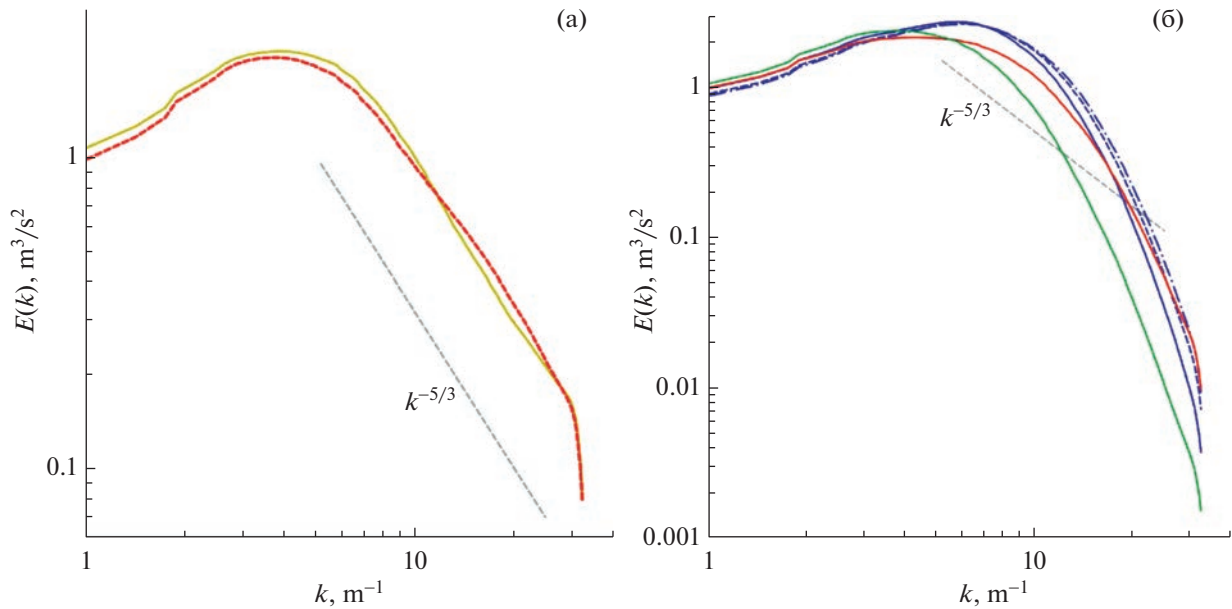


Фиг. 4. Расчетная область, сетка и мгновенное поле скорости в задаче о затухании изотропной турбулентности.

пределялись согласно спектру Кармана [25]. Начальная кинетическая энергия турбулентности E_{k0} составляла $1000 \text{ м}^2/\text{с}^2$ и соответствовала малому турбулентному числу Маха $M_t \approx 0.08$. Интегральный масштаб турбулентности L_0 был выбран равным $\pi L/2 \approx 1.57 \text{ м}$, т.е., составлял четверть длины расчетной области. Турбулентное число Рейнольдса $Re_{\tau_0} = \sqrt{E_{k0}}L_0/\nu \approx 3 \times 10^6$ взято заведомо большим, чтобы всеми эффектами молекулярной диффузии можно было пренебречь. Интегральный масштаб времени $T_0 = L_0/\sqrt{2E_{k0}/3}$, соответствующий начальному полю, составлял около 0.06 с . Все расчеты проводились до момента физического времени $2T_0$. Предполагается, что за два характерных времени оборота крупных вихрей энергетический спектр турбулентности приходит в равновесие, и его форма в конечный момент времени определяется уже только свойствами подсеточной модели и численного метода. Для задания начального поля параметров подсеточной турбулентности использовалась процедура согласования, описанная в [20]. Расчеты проводились на равномерной кубической сетке с 64 ячейками в каждом индексном направлении. Пример мгновенного поля скорости в расчетной области представлен на фиг. 4.

Энергетические спектры, полученные в расчетах, представлены на фиг. 5. В левой части показаны спектры, которые дают гибридная схема и CD2 с указанными выше значениями константы C_{DES2} . Видно, что оба спектра обладают протяженным инерционным интервалом. В правой части показаны спектры, полученные со схемами семейства WENO. В случае схемы WENO-ZM5 обнаруживается, что с оптимальным для гибридной схемы значением $C_{DES2} = 0.56$ диссипация в области коротких волн избыточна, и даже при $C_{DES2} = 0.1$ участок спектра, выдерживающий инерционный интервал, недостаточно протяжен. Аналогичные результаты получены со схемой WENO-SYMB006. Отметим, что классическая схема WENO5 с монитором MP [13], расчеты по которой были проведены для сравнения, оказалась еще более диссипативной.

Таким образом, в случае трехмерных задач, решаемых в рамках конечно-объемного метода с одной гауссовой точкой на грани ячейки, схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMB006 потеряли преимущество перед центрально-разностной схемой, которое было обнаружено выше на одномерных модельных уравнениях. Также они проиграли по диссипативности гибридной схеме. Вероятно, проблема связана с появлением ошибки порядка $O(h^2)$, хоть и малой по величине, но существенно влияющей на наименьшие разрешаемые масштабы течения. Фактически, две



Фиг. 5. Энергетический спектр в задаче о затухании изотропной турбулентности. (а) CD2 – желтая сплошная линия, гибридная схема – красный пунктир. (б) Синие кривые – WENO-ZM5: сплошная – $C_{DES2} = 0.56$, пунктир – $C_{DES2} = 0.3$, штрихпунктир – $C_{DES2} = 0.1$. Красная кривая – WENO-SYMB006 с $C_{DES2} = 0.1$. Зеленая – WENO5 с $C_{DES2} = 0.1$. Линия $E \sim k^{-5/3}$ – серый пунктир.

рассмотренные схемы не выдерживают инерционный интервал даже при малом значении константы C_{DES2} , равном 0.1. Это означает, что в дальнейшем данные схемы следует использовать в режиме ILES (Implicit LES) – без явной подсеточной модели.

5. РАСЧЕТЫ ВРЕМЕННОГО СЛОЯ СМЕШЕНИЯ

Во второй задаче рассматривается эволюция турбулентного слоя смешения, разделяющего два неограниченных противоположно направленных потока. В отличие от предыдущей задачи, в этом течении есть механизм производства кинетической энергии турбулентности на градиентах среднего поля скорости. На автомодельном режиме ширина слоя смешения растет линейно по времени, а максимальные значения напряжений Рейнольдса выходят на постоянные значения, пропорциональные ΔU^2 , где ΔU – разность скоростей между потоками. Закон нарастания ширины и профили напряжений Рейнольдса можно сравнить с экспериментальными данными, а в продольном энергетическом спектре в центре слоя смешения должен наблюдаться протяженный инерционный интервал, если число Рейнольдса течения велико.

В данной работе рассматривается расчетная область в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами $L_x = 4L$, $L_y = L_z = 2L$ вдоль осей x , y , z соответственно, где $L = 2\pi$ м. Центр параллелепипеда помещен в начало координат. Установлены периодические граничные условия по всем направлениям. Область покрыта кубической расчетной сеткой, состоящей из $512 \times 256 \times 256$ ячеек.

Начальное поле скорости формировалось за два этапа. На первом этапе, следуя [26], задавалось предварительное поле $\tilde{\mathbf{V}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= f(z) + a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_1(x, y, z) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= a(z) \left[\cos(2k_x^0 x) + A_y \sin(k_y^0 y) + A_g g_2(x, y, z) \right], \\ \tilde{w}(x, y, z) &= a(z) \left[\sin(2k_x^0 x) + A_y \cos(k_y^0 y) + A_g g_3(x, y, z) \right],\end{aligned}$$

где

$$f(z) = \frac{\Delta U}{2} \left[\operatorname{th} \left(\frac{z}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z - L_z/2}{2\theta_0} \right) - \operatorname{th} \left(\frac{z + L_z/2}{2\theta_0} \right) \right],$$

$$a(z) = A\Delta U \left[\exp \left(-\frac{(z - L_z/2)^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{z^2}{\theta_0} \right) + \exp \left(-\frac{(z + L_z/2)^2}{\theta_0} \right) \right].$$

Здесь $k_x^0 = 16\pi/L$, $k_y^0 = 32\pi/L$ – начальные волновые числа возмущений вдоль осей x и y соответственно; $A = 0.05$, $A_y = 1$, $A_g = 1$ – относительные амплитуды возмущений; $\theta_0 = L/200$ – начальная толщина слоя смешения. Функция $f(z)$ задает среднее поле скорости (за счет условия периодичности по оси z в расчете реализуется не один слой смешения, а два: в центре и на границе), функция $a(z)$ – это профиль амплитуды возмущений, налагаемых на среднее поле, g_i – случайные нескоррелированные поля, значения которых в каждой точке равномерно распределены на отрезке $[-0.5, 0.5]$. Разность скоростей между потоками ΔU была выбрана равной 69 м/с, что соответствует числу Маха 0.2.

На втором этапе, снова как в [26], вычисляется поправка к $\tilde{\mathbf{V}}$, чтобы “исправленное” поле скорости $\bar{u}_i = \tilde{u}_i - \partial p' / \partial x_i$ стало соленоидальным. Для нахождения поля $p'(x, y, z)$ необходимо решить трехмерное уравнение Пуассона $\Delta p' = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}$. В данной работе оно решалось итерационным методом Якоби [27]. Для аппроксимации дивергенции скорости использовалась центрально-разностная схема 2-го порядка. На фоне полученного начального поля скорости проводилась процедура согласования, описанная в [20], от однородных начальных значений $k = (0.05\Delta U)^2$, $\omega = \Delta U / \theta_0$.

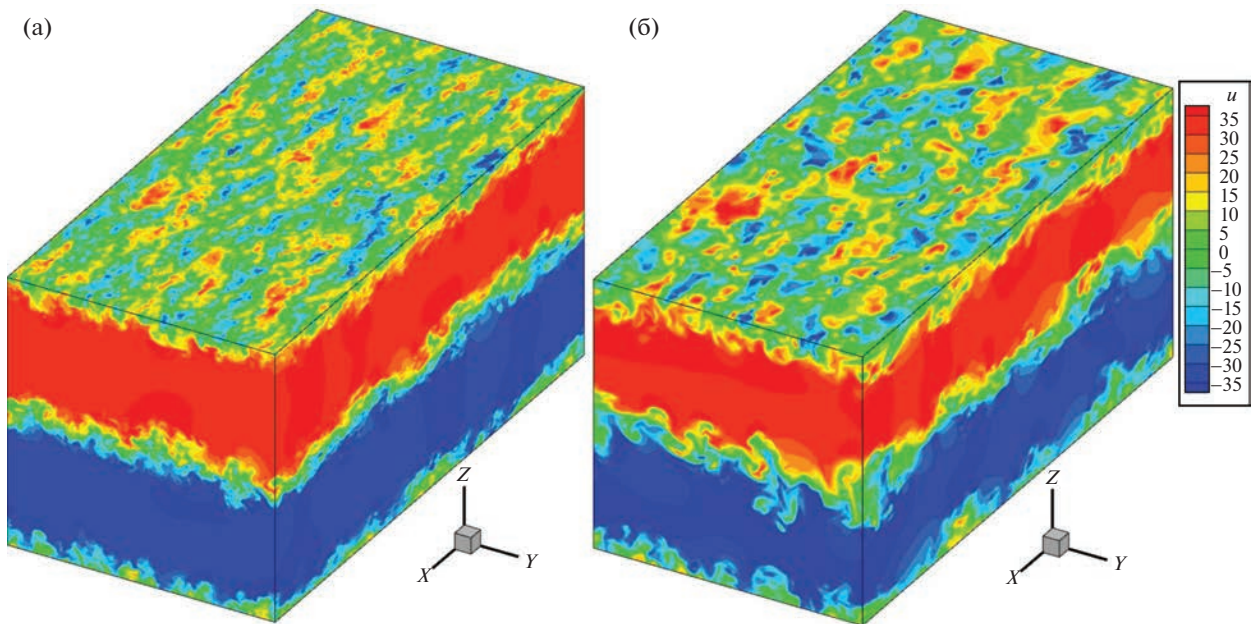
В расчетах данного течения использовались схемы WENO-ZM5, WENO-SYMB006, а также классическая схема WENO5 с монотонизатором MP, центрально-разностная схема CD2 и гибридная схема. Для CD2 и гибридной схемы значения подсеточной константы C_{DES2} задавались как в предыдущей задаче. Для остальных схем полагалось $C_{DES2} = 10^{-3}$, что фактически соответствует отключению явной подсеточной модели и переходу системы уравнений в режим ILES.

Расчеты велись до момента времени $t = 5L/\Delta U$. Это время ограничено условием изолированности соседних слоев смешения, которое определялось по отсутствию взаимодействия профилей напряжений Рейнольдса между ними.

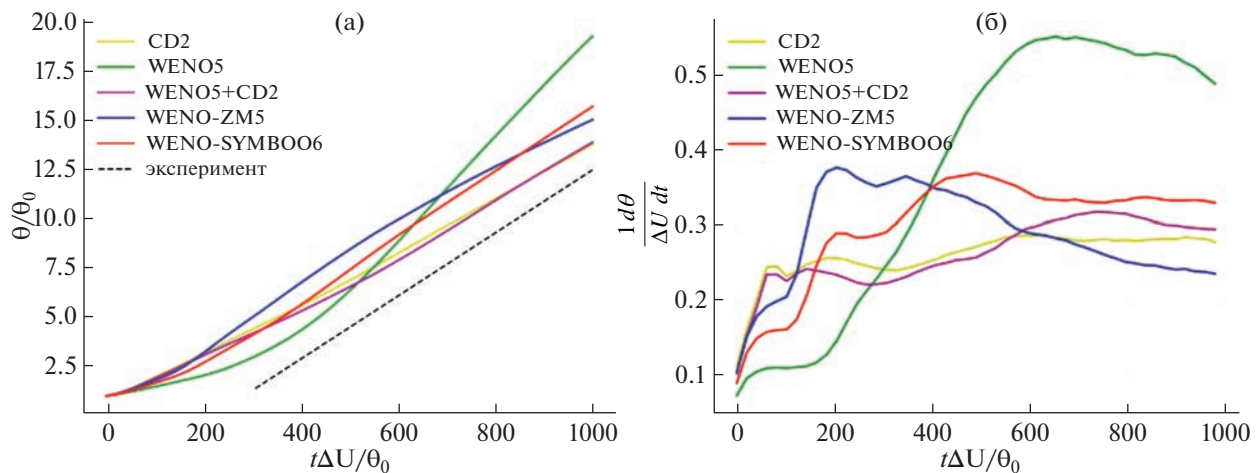
На фиг. 6 изображены поля течения в конечный момент времени, полученные с помощью гибридной схемы и базовой схемы WENO5. Базовая схема сглаживает мелкие структуры за счет численной диссипации заметно сильнее, чем гибридная схема. На фиг. 7а представлена зависимость интегральной толщины слоя смешения

$$\theta = \int_{-L_z/4}^{L_z/4} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{\langle \bar{u} \rangle}{\Delta U} \right)^2 \right] dz$$

от времени в безразмерных переменных. Здесь угловыми скобками обозначено пространственное осреднение по плоскости $z = \text{const}$, в результате которого получается одномерный профиль осредняемого параметра как функция от z . Для сравнения на фиг. 7а также изображен ожидаемый наклон линии, соответствующий эксперименту Bell & Mehta (1990) [28]. Поведение решения, полученного с помощью гибридной схемы, очень близко к поведению решения, которое дает CD2. Все схемы, кроме WENO5, позволяют решению выйти на асимптотическое поведение с наклоном, близким к экспериментальному. Следует отметить, что схема WENO-ZM5 на участке $t\Delta U/\theta_0 \in [800, 1000]$ предсказывает замедление роста ширины слоя смешения. Более явно это можно наблюдать на графике производной θ по времени (фиг. 7б). Видно, что для схем WENO5 и WENO-ZM5 она продолжает меняться до конца расчета, а остальные три схемы выходят на автомодельный режим с постоянным значением производной. Классическая схема WENO5 не выходит на правильное асимптотическое решение, по-видимому, из-за того, что схемная вязкость подавляет мелкомасштабную турбулентность, и развитый энергетический спектр турбулентности не устанавливается. Это согласуется с фиг. 6.

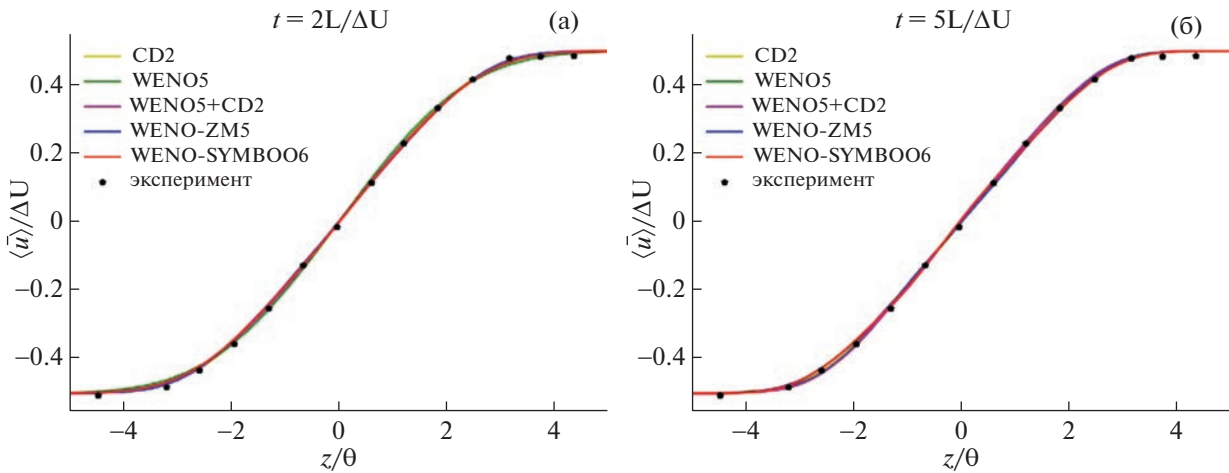


Фиг. 6. Поле продольной компоненты скорости в конечный момент времени при использовании гибридной схемы (а) и схемы WENO5 (б).

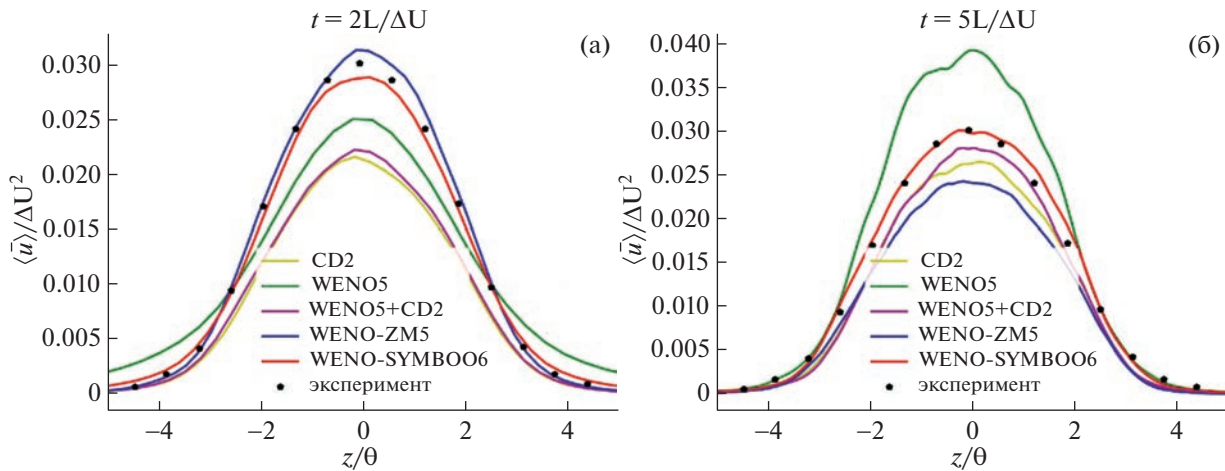


Фиг. 7. Эволюция толщины слоя смешения θ со временем (а) и скорости ее изменения (б).

На фиг. 8 изображены профили средней продольной компоненты скорости поперек слоя смешения в моменты времени $t = 2L/\Delta U$ (соответствует $2/5$ общего времени моделирования) и $t = 5L/\Delta U$ (финальный момент). На эти графики, как и на все дальнейшие, наложены экспериментальные данные из [28]. Можно сказать, что все схемы позволяют получить удовлетворительный результат, хорошо воспроизводя среднее поле скорости. Иначе ведут себя схемы с точки зрения определения тензора напряжений Рейнольдса. На фиг. 9 построены профили среднего квадрата пульсаций продольной компоненты скорости $\overline{u'u'}$. Видно, что в момент времени $2L/\Delta U$ уровень пульсаций по гибридной схеме, CD2 и WENO5 занижен. Однако дальше он начинает расти, а в случае WENO-ZM5 – уменьшаться. Рост пульсаций со схемой WENO5 оказывается чрезмерным. В финальный момент времени $5L/\Delta U$ для WENO-ZM5, CD2 и гибридной



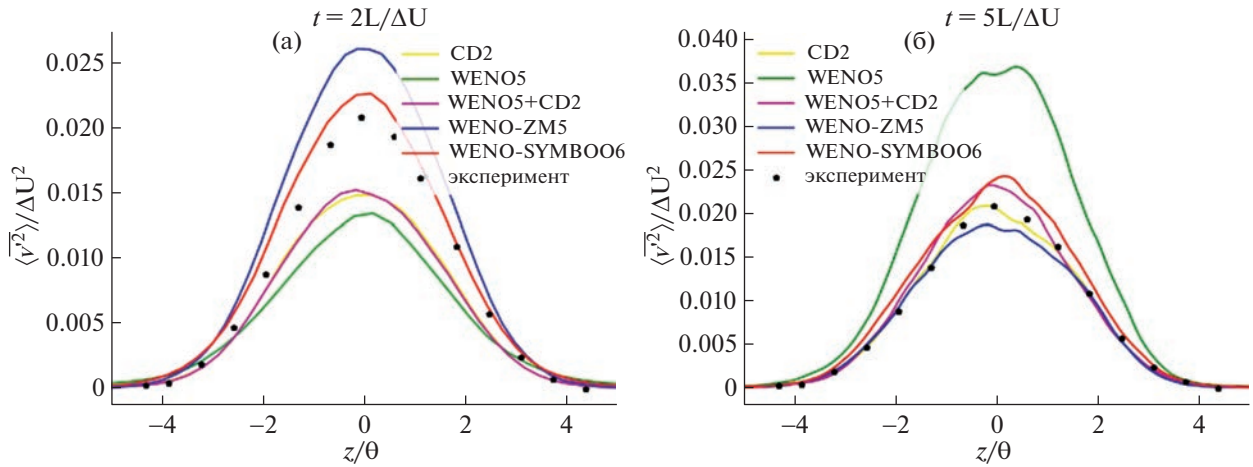
Фиг. 8. Профили $\langle \bar{u} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



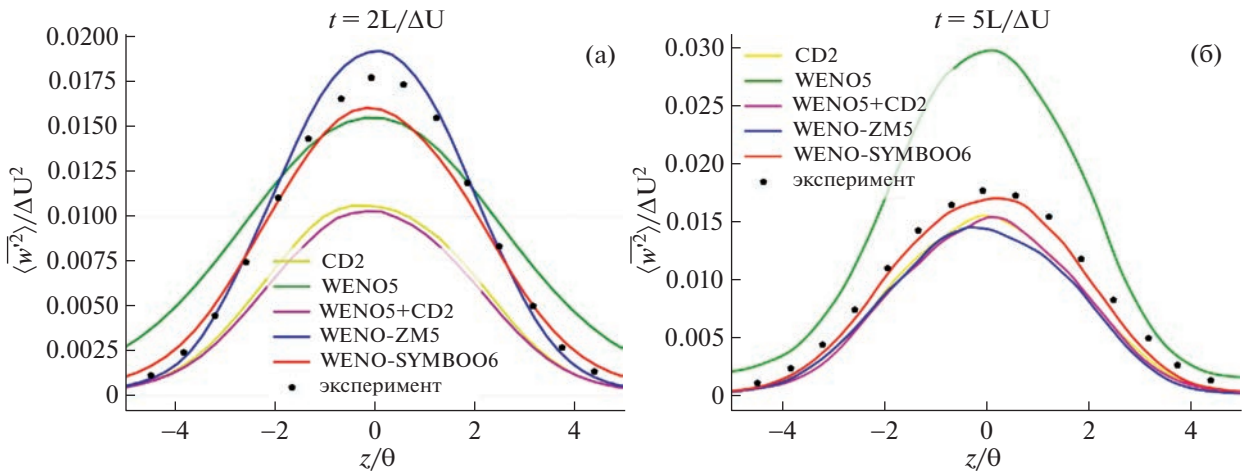
Фиг. 9. Профили $\langle \overline{u'u'} \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.

схемы уровень пульсаций $\langle \overline{u'u'} \rangle$ оказывается меньше экспериментального, причем самые низкие значения демонстрирует WENO-ZM5. Классическая схема WENO5 существенно завышает уровень пульсаций. Возможно, это связано с сильным недоразрешением мгновенной структуры слоя смешения, из-за чего крупные вихри не передают энергию по каскаду с достаточной скоростью. Наиболее близкой к эксперименту оказывается схема WENO-SYMB006.

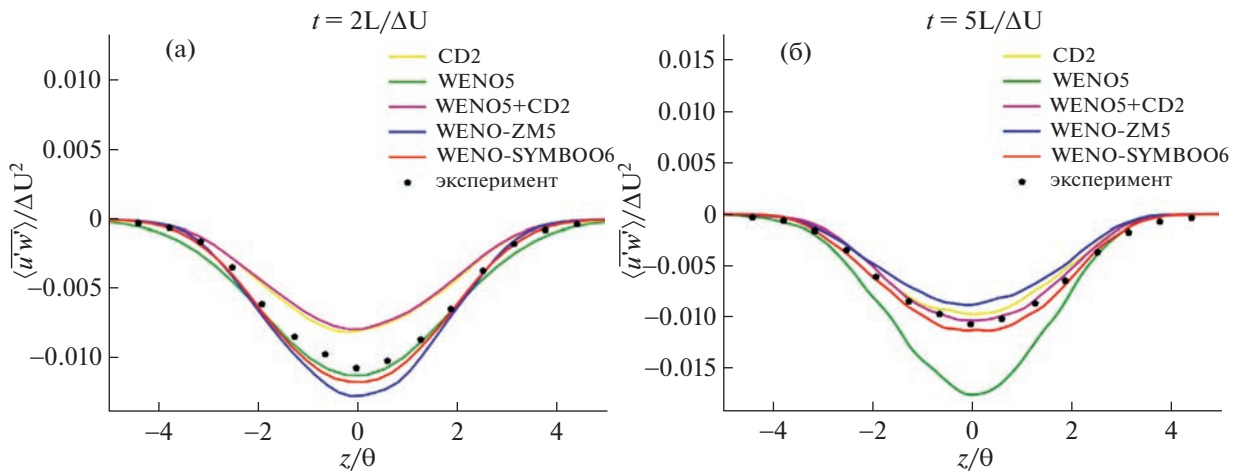
Аналогичные тенденции можно наблюдать в профилях среднего квадрата боковых пульсаций $\langle \overline{v'v'} \rangle$ (фиг. 10). Единственное отличие состоит в том, что в финальный момент времени $5L/\Delta U$ наиболее близкий к экспериментальному результат демонстрирует центрально-разностная схема. Из всех схем выделяется WENO5, которая завышает уровень боковых пульсаций более чем в полтора раза. Похожие закономерности видны на фиг. 11 в профилях среднего квадрата поперечных пульсаций скорости $\langle \overline{w'w'} \rangle$. Наилучший результат здесь в конечный момент времени счета демонстрирует WENO-SYMB006. Решения, полученные с помощью остальных трех схем, качественно не отличаются. Отличия в случае среднего значения произведения $\langle \overline{u'w'} \rangle$ от остальных корреляций состоят в том, что ближайший к эксперименту профиль демонстрируют гибридная схема и WENO-SYMB006 (фиг. 12).



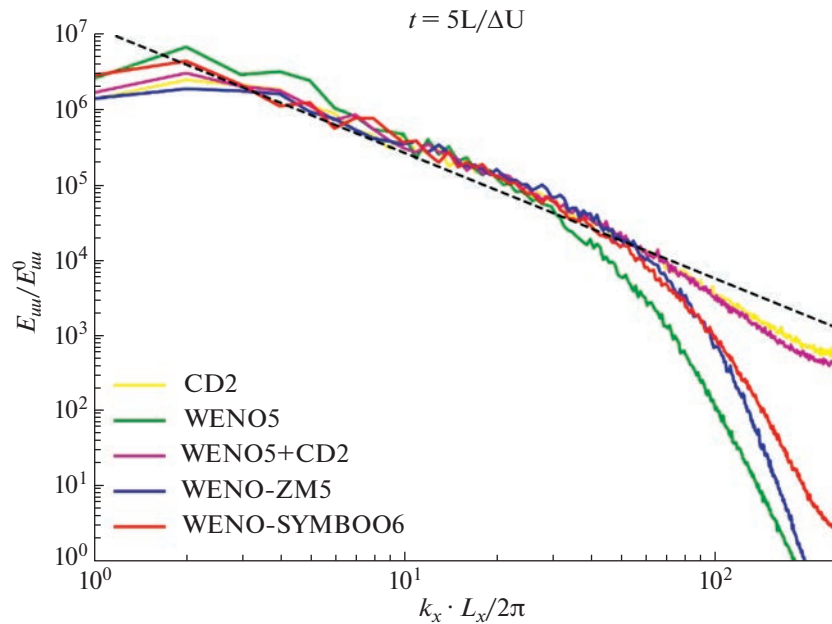
Фиг. 10. Профили $\langle v'^2 \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 11. Профили $\langle w'^2 \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 12. Профили $\langle u'w' \rangle$ в слое смешения в моменты времени $2L/\Delta U$ и $5L/\Delta U$.



Фиг. 13. Одномерные спектры $E_{uuu}(k_x)$ в момент времени $5L/\Delta U$. штриховая линия – профиль “ $-5/3$ ”.

Еще одной величиной, представляющей интерес, является одномерный энергетический спектр, вычисленный в центральной плоскости слоя смешения:

$$E_{uuu}(k_x) = \frac{1}{L_y} \int_{-L_y/2}^{L_y/2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} \bar{u}(x, y, 0) e^{-ik_x x} dx \right|^2 dy.$$

Он должен содержать протяженный инерционный интервал: $E_{uuu}(k_x) \sim k_x^{-5/3}$. На фиг. 13 представлены спектры в финальный момент времени $5L/\Delta U$. В решениях, полученных по схемам WENO5, WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6, протяженный инерционный интервал отсутствует. Несмотря на то, что отклонение от ожидаемого наклона спектра для гибридной схемы, CD2, WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 происходит примерно при одном и том же волновом числе, степень отклонения двух новых схем существенно выше. Напомним, что явная подсеточная модель в новых схемах фактически отключена. В противоположность этому, в расчетах по гибридной схеме и CD2 подсеточная модель играет существенную роль. Это следует рассматривать как преимущество, поскольку, варьируя структуру подсеточной модели, можно контролировать описание подсеточной турбулентности и ее взаимодействие с разрешенным полем течения.

ВЫВОДЫ

В статье рассмотрены современные численные схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 с точки зрения их конкурентоспособности с гибридной схемой [4], популярной в LES- и DES-расчетах турбулентных течений. Проведено сравнение схем в одномерных расчетах модельных задач и в LES-расчетах двух турбулентных течений: распада изотропной турбулентности и развития временного слоя смешения.

В одномерных задачах схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 показали приблизительно одинаковую точность и продемонстрировали преимущества перед схемой WENO5 и центрально-разностной схемой второго порядка точности: меньший уровень ошибки и лучшее поведение в окрестности разрывов. В противоположность этому, трехмерные LES-расчеты выявили избыточно высокий уровень диссипации схем WENO-ZM5 и WENO-SYMBOO6 в рамках метода конечных объемов 2-го порядка с 1 гауссовой точкой на грани ячейки. Даже при полном отключении явной подсеточной модели (режим ILES) энергетический спектр не содержит развитого инерционного интервала. Интересно, что в расчетах временного слоя смешения данный недостаток не мешает схеме WENO-SYMBOO6 демонстрировать корректные статистические харак-

теристики течения: скорость роста ширины турбулентной зоны, профили средней скорости и напряжений Рейнольдса. Тем не менее отсутствие возможности влиять на подсеточные напряжения делает схемы, работающие в режиме ILES, менее предпочтительными, чем гибридная схема, основная часть диссипации в которой создается именно явной моделью подсеточных напряжений. Таким образом, на данный момент при реализации на базе метода конечных объемов с 1 гауссовой точкой на грани ячейки (единственного практически значимого варианта метода конечных объемов) предпочтительной остается гибридная схема. Схемы WENO-ZM5 и WENO-SYMB006, по крайней мере, в рассмотренных дозвуковых задачах, конкурировать с ней не могут. В будущем целесообразно сравнить эти схемы в расчетах задач с сильными разрывами параметров — например, в сверхзвуковых течениях со скачками уплотнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes // *J. Comp. Physics*. 1988. V. 77. № 2. P. 439–471.
2. *Shu C.W., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes. II // *J. Comp. Physics*. 1989. V. 83. № 1. P. 32–78.
3. *Zhang R., Zhang M., Shu C.W.* On the order of accuracy and numerical performance of two classes of finite volume WENO schemes // *Comm. Comp. Physics*. 2011. V. 9. № 3. P. 807–827.
4. *Guseva E.K., Garbaruk A.V., Strelets M.K.* An automatic hybrid numerical scheme for global RANS-LES approaches // *J. Physics: Conference Series*. 2017. V. 929. № 1.
5. *Mullenix N.J., Gaitonde D.V.* A bandwidth and order optimized weno interpolation scheme for compressible turbulent flows // *AIAA paper* 2011-366. 18 p.
6. *Martin M.P., Taylor E.M., Wu M., Weirs V.G.* A bandwidth-optimized WENO scheme for the effective direct numerical simulation of compressible turbulence // *J. Comp. Physics*. 2006. V. 220. P. 270–289.
7. *Zhao S., Lardjane N., Fedioun I.* Comparison of improved finite-difference weno schemes for the implicit large eddy simulation of turbulent non-reacting and reacting high-speed shear flows // *Comp. Fluids*. 2014. V. 95. P. 74–87.
8. *Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S.* An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Physics*. 2008. V. 227. P. 3191–3211.
9. *Li H., Luo Y., Zhang S.* Assessment of upwind/symmetric WENO schemes for direct numerical simulation of screech tone in supersonic jet // *J. Sci. Comput.* 2021. V. 87. № 3.
10. *Fu L.* Review of the high-order TENO schemes for compressible gas dynamics and turbulence // *Arch. Comput. Methods Eng.*, 2023.
11. *Henrick A.K., Aslam T.D., Powers J.M.* Mapped weighted essentially non-oscillatory schemes: achieving optimal order near critical points // *J. Comp. Physics*. 2005. V. 207. P. 542–567.
12. *Borges R., Carmona M., Costa B., Don W.S.* An improved weighted essentially non-oscillatory scheme for hyperbolic conservation laws // *J. Comp. Physics*. 2008. V. 227. P. 3191–3211.
13. *Suresh A., Huynh H.* Accurate monotonicity-preserving schemes with Runge–Kutta time stepping // *J. Comp. Physics*. 1997. V. 136. № 1. P. 83–99.
14. *Yamaleev N.K., Carpenter M.H.* A systematic methodology for constructing high-order energy-stable weno schemes // *J. Comp. Physics*. 2009. V. 228. P. 4248–4272.
15. *Butcher J.C.* Numerical methods for ordinary differential equations. 3rd ed. New York: John Wiley & Sons, 2016. 513 p.
16. *Михайлов С.В., Власенко В.В.* Программа ZEUS для расчета нестационарных течений в рамках подходов RANS и LES // *Материалы XX школы-семинара “Аэродинамика летательных аппаратов”*. п. Володарского. 2009. С. 40–41.
17. *Босняков С.М.* Концепция программного продукта EWT-ЦАГИ и основные этапы ее развития // *Труды ЦАГИ*. 2007. № 2671, С. 3–19.
18. *Gritskevich M.S., Garbaruk A.V., Schütze J., Menter F.R.* Development of DDES and IDDES formulations for the $k-\omega$ shear stress transport model // *Flow Turbulence Combust.* 2012. V. 88. P. 431–449.
19. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* An enhanced version of DES with rapid transition from RANS to LES in separated flows // *Flow Turbulence Combust.* 2015. V. 95. P. 709–737.
20. *Bakhne S., Sabelnikov V.* A method for choosing the spatial and temporal approximations for the LES approach // *Fluids* 2022. V. 7. № 12.

21. *Chumakov S.G., Rutland C.J.* Dynamic structure subgrid-scale models fo large eddy simulation // *Int. J. Numer. Methods Fluids*. 2005. V. 47. P. 911–923.
22. *Zhou Z., He G., Wang S., Jin G.* Subgrid-scale model for large-eddy simulation of isotropic turbulent flows using an artificial neural network // *Comp. Fluids*. 2019. V. 195. 104319.
23. *Batchelor G.K.* The theory of homogeneous turbulence. Cambridge University Press, 1953. 197 p.
24. *Shur M.L., Spalart P.R., Strelets M.K., Travin A.K.* Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust.* 2014. V. 93. P. 63–92.
25. *Etkin B.* Dynamics of atmospheric flight. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1972.
26. *Sharan N., Matheou G., Dimotakis P.E.* Turbulent shear-layer mixing: initial conditions, and direct-numerical and large-eddy simulations // *J. Fluid Mech.* 2019. V. 877. P. 35–81.
27. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике: Учебное пособие. М.: БИНОМ, 2006.
28. *Bell J.H., Mehta R.D.* Development of a two-stream mixing layer from tripped and untripped boundary layers // *AIAA J.* 1990. V. 28. № 12. P. 2034–2042.

МЕТОД ОПТИЧЕСКИХ ПУТЕЙ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОНИКИ¹⁾

© 2023 г. А. А. Белов^{1,2,*}, Ж. О. Домбровская^{1,**}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: aa.belov@physics.msu.ru

**e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 08.11.2022 г.

Переработанный вариант 08.11.2022 г.

Принята к публикации 02.03.2023 г.

Ряд актуальных задач интегральной фотоники сводится к наклонному падению излучения на плоско-параллельный рассеиватель. Для таких задач предложен метод интегрирования уравнений Максвелла вдоль направления распространения луча. В результате исходная двумерная задача сводится к одномерной, и для ее решения применяются недавно предложенные одномерные бикомпактные схемы. Это позволяет существенно снизить вычислительные затраты по сравнению с традиционными двумерными методами типа конечных разностей и конечных элементов. Для верификации предложенного метода проведены расчеты тестовых задач с известными точными решениями. Библ. 33. Фиг. 12.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, бикомпактные схемы, слоистые среды, условия сопряжения, дисперсия вещества.

DOI: 10.31857/S0044466923060042, **EDN:** TRKHMB

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральной фотоникой называется направление оптики, посвященное разработке наноразмерных устройств, позволяющих управлять излучением в ближнем ИК- и видимом диапазоне. Оптические наноструктуры могут применяться в качестве детекторов, логических элементов, переключателей, модуляторов, волноводов и т.д. Ряд важных приложений сводятся к задаче о наклонном падении плоской электромагнитной волны (как монохроматической, так и импульса) на набор плоско-параллельных пластин. Последние могут быть как диэлектрическими, так и проводящими, причем их материальные параметры могут зависеть от координат. Такие задачи возникают при исследовании свойств связанных состояний различного типа (поверхностных [1] либо таммовских [2, 3] плазмон-поляритонов, мод микрополостей [4], экситонов [5] и др.).

Описанные задачи являются двумерными, т.е. электромагнитные поля зависят от двух пространственных координат, а зависимостью от третьей координаты можно пренебречь. Для таких задач традиционно применяют двумерные коды на основе метода конечных разностей или конечных элементов. Однако эти методы сталкиваются с рядом трудностей. Во-первых, вблизи границ раздела сред погрешность оказывается большой. Во-вторых, реальные оптические среды обладают частотной дисперсией. Существующие способы ее учета могут вносить заметную погрешность в решение. Критический анализ существующих сеточных методов приведен в [6].

Если поля являются монохроматическими, а среды – диэлектрическими и кусочно-однородными, то применяют методы типа матриц рассеяния [7]. Эти методы дают не приближенное, а точное решение задачи. В рамках своей области применимости эти методы являются наиболее работоспособными. Свешников и Тихонравов обобщили метод матриц рассеяния на задачи в слоистых средах с пространственно-неоднородными слоями [8], однако это обобщение применимо только при нормальном падении излучения.

В ряде случаев с помощью физических приближений постановку удается упростить и свести задачу к одномерной. Это значительно упрощает расчет. Примером является интегрирование ги-

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (код проекта № 22-71-00070).

перболических задач вдоль направления распространения колебаний. Однако такие подходы разработаны для случаев, когда в среде отсутствуют границы раздела, т.е. свойства вещества плавно изменяются в пространстве. В то же время характерной особенностью задач интегральной фотоники является наличие нескольких границ раздела, на которых возникают множественные переотражения.

В настоящей статье предложено проводить интегрирование уравнений Максвелла вдоль направления распространения колебаний. Это позволяет свести задачу к одномерной. В задачах электродинамики такой подход ранее не применялся. Для указанной одномерной задачи применяются предложенные недавно бикомпактная схема и метод спектрального разложения. Это позволяет 1) снизить трудоемкость решения перечисленных выше задач, 2) существенно повысить количественную точность. Проведены расчеты тестовых задач с известным точным решением, которые убедительно верифицируют предлагаемый подход.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

2.1. Плоско-параллельная структура

1. Рассмотрим слоистую структуру, состоящую из Q изотропных плоско-параллельных пластин общей толщиной a . Ориентируем координатную ось z перпендикулярно пластинам; оси x и y расположены в плоскости пластин. Обозначим координаты границ слоев через $0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_Q = a$. При $z < 0$ и $z > a$ расположены полубесконечные диэлектрические среды. Обозначим их диэлектрические проницаемости и магнитные восприимчивости через ϵ_0 , μ_0 (для $z < 0$) и ϵ_a , μ_a (для $z > a$). Будем считать эти среды однородными и изотропными.

2. Пусть часть пластин является диэлектрическими, часть – проводниками или полупроводниками. Обозначим через ϵ_q диэлектрическую проницаемость, μ_q – магнитную восприимчивость, σ_q – проводимость q -й пластины (для диэлектрических пластин $\sigma_q = 0$).

3. Из-за нагрева токами и падающим излучением пластины могут становиться оптически неоднородными, т.е. их показатель преломления может зависеть от координаты. Будем считать, что показатель преломления и проводимость зависят от координаты z , но практически не меняются со временем.

4. Величины ϵ_q , μ_q , σ_q могут зависеть от частоты ω электромагнитной волны. Такую дисперсию называют частотной. При этом будем считать, что пространственная дисперсия (т.е. зависимость материальных параметров от волнового вектора) пренебрежимо мала.

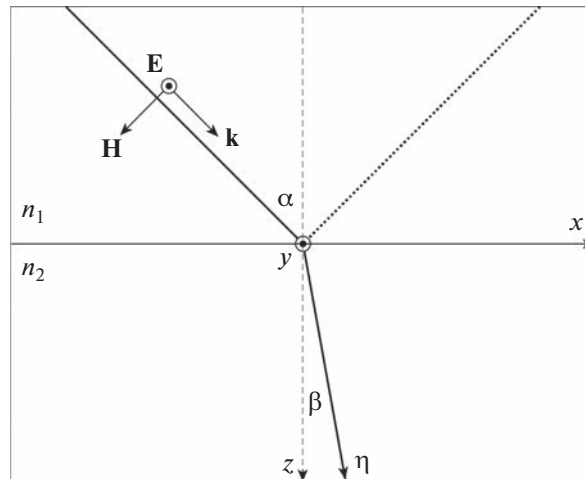
Отметим, что при наличии пространственной дисперсии волновой фронт перестает быть однородным (т.е. деформируется). Возникает деформация поляризации, которая может приводить к реализации многомодовых колебаний, волноводных режимов и др. [9]. Этот круг задач выходит за рамки данной работы.

Пространственная дисперсия несущественна, если поле мало меняется на расстоянии, на котором формируется отклик среды на это поле [9]. Изменение поля происходит за счет смещения зарядов в веществе. Тем самым мы предполагаем, что смещение зарядов за период колебаний полей мало по сравнению с длиной волны. В задачах физики плазмы это означает приближение холодной плазмы. В задачах диэлектрической фотоники и плазмоники это приближение применимо, поскольку частота колебаний поля высока. Так, типичный период колебаний в оптическом и ближнем ИК-диапазоне составляет $\sim 10^{-14}$ с. За это время свободные электроны в металле смещаются на доли ангстрема, в то время как характерная длина волны составляет сотни нанометров.

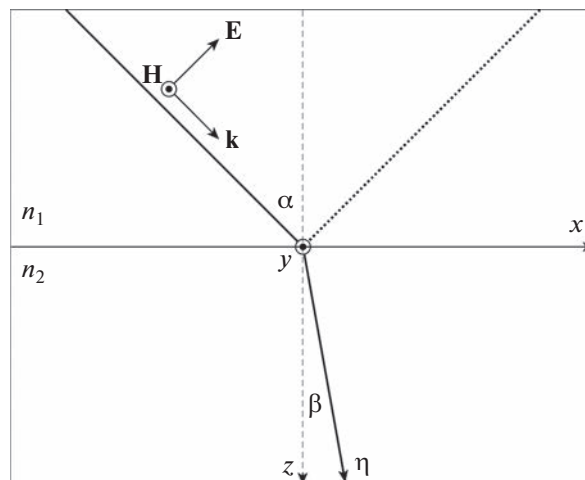
2.2. Стационарный случай

1. Пусть на описанную структуру наклонно падает плоская линейно поляризованная электромагнитная волна. Пусть она является монохроматической и имеет частоту ω . В литературе такую зависимость от времени нередко называют гармонической. Пусть волновой вектор лежит в плоскости Oxz . Угол падения (т.е. угол между волновым вектором падающей волны и нормалью к пластинам) обозначим через α .

Как известно, при наклонном падении возможны две поляризации волны. Волна называется s -поляризованной, если вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости, образованной волновыми век-



Фиг. 1. S -поляризованная волна. Жирная линия – направление распространения прямой волны (лучевая траектория). Пунктир – направление распространения отраженной волны. Тонкая линия – граница раздела сред. Штриховая линия – нормаль к границе раздела.



Фиг. 2. P -поляризованная волна. Обозначения соответствуют фиг. 1.

торами падающей и отраженной волн. Тогда вектор \mathbf{E} имеет только y -компоненту $\mathbf{E} = \{0, E_y, 0\}$, а вектор \mathbf{H} имеет x - и z -компоненты $\mathbf{H} = \{H_x, 0, H_z\}$. Такая поляризация проиллюстрирована на фиг. 1, где для простоты приведена одна граница раздела. Если вектор \mathbf{E} лежит в плоскости, образованной волновыми векторами падающей и отраженной волн, то волна называется p -поляризованной (см. фиг. 2). Тогда вектор \mathbf{E} имеет x - и z -компоненты $\mathbf{E} = \{E_x, 0, E_z\}$, а вектор \mathbf{H} – только y -компоненту $\mathbf{H} = \{0, H_y, 0\}$.

При этом если падающая волна имеет s -поляризацию, то отраженная и прошедшая волны также будут s -поляризованными; аналогично в случае p -поляризации. Мы будем считать, что падающая волна является s - либо p -поляризованной. Именно этот случай представляет интерес для приложений.

2. Пусть внешние объемные токи отсутствуют $\mathbf{J}^{\text{ext}} = 0$. Падающее излучение индуцирует объемные токи $\mathbf{J}_q^{\text{ind}} = \sigma_q \mathbf{E}_q$. Они направлены так же, как вектор \mathbf{E} . Эти токи излучают волны, которые интерферируют с падающей, отраженной и прошедшей волнами. При этом могут формироваться различные связанные состояния электромагнитного поля.

3. Основными уравнениями электродинамики являются уравнения Максвелла. Традиционно в литературе рассматривают их дифференциальную форму. Мы используем интегральную форму этих уравнений. Приведем ее для случая монохроматических полей

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H}_q d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \sigma_q \mathbf{E}_q ds - \frac{i\omega}{c} \int_S \mathbf{D}_q ds, \quad \mathbf{D}_q = \epsilon_q \mathbf{E}_q, \quad 1 \leq q \leq Q; \quad (1)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = \frac{i\omega}{c} \int_S \mathbf{B}_q ds, \quad \mathbf{B}_q = \mu_q \mathbf{H}_q, \quad 1 \leq q \leq Q. \quad (2)$$

Здесь S – произвольная поверхность, ограниченная контуром Γ . Используется система единиц СГС.

Сформулируем условия излучения для данной задачи. Выделим участок рассеивателя, ограниченный плоскостями $x = 0$ и $x = d > 0$. Для компактности записи введем следующие обозначения:

$$A_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm i(\tilde{k}_q)_x, \quad B_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} \pm i(\tilde{k}_q)_z. \quad (3)$$

Здесь $(\tilde{k}_q)_x = \tilde{k}_q \sin \alpha_q$ и $(\tilde{k}_q)_z = \tilde{k}_q \cos \alpha_q$ – проекции волнового вектора в q -й пластине на оси x и z соответственно. Значения $1 \leq q \leq Q - 1$ соответствуют пластинам рассеивателя, $q = 0$ – среде при $z < 0$, $q = Q$ – среде при $z > a$. Напомним, что волновое число в q -й пластинке равно $\tilde{k}_q = \omega \sqrt{\epsilon_q \mu_q} / c$.

Оператор $A_q^+ B_q^+$ позволяет выделить падающую волну $\sim \exp\{i(\tilde{k}_q)_x x + i(\tilde{k}_q)_z z\}$ в q -й среде и задать ее амплитуду, не затрагивая амплитуду отраженной волны $\sim \exp\{i(\tilde{k}_q)_x x - i(\tilde{k}_q)_z z\}$.

Таким образом, условия излучения принимают следующий вид:

$$A_q^+ B_q^+ \mathbf{E} = -4(\tilde{k}_q)_x (\tilde{k}_q)_z \mathbf{E}_q^0 e^{i(\tilde{k}_q)_z z}, \quad x = 0, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (4)$$

$$A_0^+ B_0^+ \mathbf{E} = -4(\tilde{k}_0)_x (\tilde{k}_0)_z \mathbf{E}_0^0 e^{i(\tilde{k}_0)_z z}, \quad z = 0, \quad 0 < x < d, \quad (5)$$

$$A_q^- B_q^+ \mathbf{E} = 0, \quad x = d, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (6)$$

$$A_Q^+ B_Q^- \mathbf{E} = 0, \quad z = a, \quad 0 < x < d. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{E}_q^0 – амплитуда волны, падающей на границу раздела $z = \xi_q$ из среды q в среду $q + 1$. Амплитуда \mathbf{E}_{q+1}^0 связана с \mathbf{E}_q^0 коэффициентами Френеля. Амплитуда \mathbf{E}_0^0 соответствует излучению, падающему на границу рассеивателя $z = 0$. Условия (6) показывают, что падающая и отраженная волны свободно проходят через границу $x = d$, а условие (7) – что прошедшая волна свободно проходит через границу $z = a$.

На границах раздела поставим условия сопряжения

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_z \times (\mathbf{E}_q - \mathbf{E}_{q-1}) = 0, \quad \mathbf{E}_z (\mathbf{D}_q - \mathbf{D}_{q-1}) = 0, \\ \mathbf{E}_z \times (\mathbf{H}_q - \mathbf{H}_{q-1}) = 0, \quad \mathbf{E}_z (\mathbf{B}_q - \mathbf{B}_{q-1}) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Интегральные уравнения (1), (2) суть физические законы сохранения (теорема о циркуляции и закон Фарадея соответственно). Разностная аппроксимация этих законов вместе с условиями сопряжения на границах раздела сред позволяет строить полностью консервативные схемы для данной задачи [10].

2.3. Нестационарный случай

1. Пусть на рассеиватель падают не монохроматическая волна, а волновой пакет

$$\mathbf{f}^0(\zeta) = \mathbf{E}^0(\zeta) \exp(-i\omega^0 \zeta), \quad \zeta = t - \frac{(\tilde{\mathbf{k}}^0 \mathbf{r})}{\tilde{k}^0 c} \quad (9)$$

с несущей частотой ω^0 и заданной огибающей \mathbf{E}^0 . Здесь $\tilde{\mathbf{k}}^0/\tilde{k}^0$ – единичный вектор в направлении распространения волны, $k^0 = \omega^0/c$. Пусть импульс (9) является плоским и линейно поляризованным, а огибающая – финитной.

Падающее излучение индуцирует объемные токи $\mathbf{J}_q^{\text{ind}} = \sigma_q \mathbf{E}_q$, которые переизлучают линейно поляризованные импульсы.

2. Приведем математическую постановку задачи. Она включает нестационарные уравнения Максвелла

$$\int_{\Gamma} \mathbf{H}_q d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \sigma_q \mathbf{E}_q ds + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D}_q ds, \quad (10)$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{E}_q d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B}_q ds, \quad (11)$$

условия сопряжения (8), начальные условия $\mathbf{E}_q = 0$, $\mathbf{H}_q = 0$ при $t = 0$ и нестационарный аналог условий излучения.

Сформулируем нестационарные условия излучения. Для этого в (4)–(7) нужно заменить $i\omega \rightarrow \partial/\partial t$ и подставить в правую часть импульс (9). Пусть

$$C_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \mp \frac{\sin \alpha_q}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad D_q^{\pm} = \frac{\partial}{\partial z} \mp \frac{\cos \alpha_q}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (12)$$

Тогда нестационарные условия излучения, описывающие падение волны на рассеиватель, принимают вид

$$C_q^+ D_q^+ \mathbf{E} = -4 \frac{(\omega^0)^2}{c^2} \sin \alpha_q \cos \alpha_z \frac{d^2 \mathbf{f}^q}{d\zeta^2}, \quad \zeta = t - \frac{(\tilde{\mathbf{k}}^0 \mathbf{r})}{\tilde{k}^0 c} \quad (13)$$

при $x = 0$, $\xi_{q-1} < z < \xi_q$ и при $z = 0$, $0 < x < d$. Здесь \mathbf{f}^q – профиль падающего импульса в q -й пластине. Условия излучения, описывающие уход на бесконечность прошедшей волны, записываются следующим образом:

$$C_q^- D_q^+ \mathbf{E} = 0, \quad x = d, \quad \xi_{q-1} < z < \xi_q, \quad (14)$$

$$C_0^+ D_0^- \mathbf{E} = 0, \quad z = a, \quad 0 < x < d. \quad (15)$$

3. ОПТИЧЕСКИЕ ПУТИ

3.1. Снижение размерности многомерных задач

Задачи для уравнений математической физики со многими переменными представляют большую вычислительную сложность. Существует, однако, ряд приемов, которые позволяют снизить размерность задачи. Это аналитико-численные алгоритмы, как правило, основанные на физических упрощениях задачи. Одним из них является автомодельная замена переменных, что превращает уравнение в частных производных в ОДУ. Построение таких замен можно считать скорее искусством; общие алгоритмы отсутствуют.

Другим хорошо известным способом является метод характеристик для гиперболических задач. Интегрирование исходного уравнения вдоль характеристики можно трактовать как задачу сниженной размерности.

Близко к этому примыкают подходы, в которых гиперболическая система интегрируется вдоль направления распространения колебаний. Например, такой подход развивали Доброхотов, Назайкинский, Шафаревич, Секерж-Зенькович, Аникин, Толченников и другие (см., например, [11, 12] и цитированную литературу). В указанных работах задача решалась в два этапа: сначала на основе вариационного принципа вычислялись лучевые траектории, затем вдоль них проводились одномерные расчеты фронта волны.

Эти авторы применяли данный подход к расчетам коротковолновых радиотрасс в ионосфере, моделированию распространения океанских волн и формирования цунами и некоторым другим задачам. Во всех этих задачах свойства среды, в которой распространяется волна, плавно зависят от координаты, т.е. границы раздела отсутствуют.

Аналогичный подход развивали Форбс и Алонсо применительно к задачам волновой оптики (дифракции, распространения электромагнитных полей по волноводам и др.) [13–20]. Эти авторы рассматривали отражение и преломление на одной границе раздела. Они вводили лучи для отраженной и преломленной волн. Однако при наличии нескольких границ раздела возникают множественные переотражения, причем в прозрачной среде таких переотражений бесконечно много. Обобщение метода Форбса-Алонсо на этот случай сталкивается с серьезными трудностями. Суммарное поле содержит бесконечное число слагаемых. Обрезание такого ряда вносит погрешность, величина которой требует дополнительных исследований.

Тем не менее, описанные полуаналитические методы намного экономичнее прямого численного моделирования многомерной задачи, поэтому они представляются перспективными.

Поставленные выше задачи являются двумерными. В данной работе предлагается подход, позволяющий свести их к одномерной постановке. Он применим как в среде с плавно меняющимся показателем преломления, так и в слоистой (имеющей несколько границ раздела). Этим предлагаемый подход отличается от методов группы Доброхотова и метода Форбса-Алонсо. Он был назван **методом оптических путей**. Метод сводится к интегрированию уравнений Максвелла вдоль направления распространения (лучевой траектории) падающей и преломленной волн.

3.2. Лучевые траектории

1. Рассмотрим стационарную задачу п. 2.2. Пусть сначала токи отсутствуют, т.е. все пластины являются диэлектрическими $\sigma_q = 0$, $1 \leq q \leq Q$. Обобщение на случай проводящих пластин будет построено далее (см. п. 3.8). Материал пластин может быть как однородным, так и неоднородным.

2. На каждой q -й границе раздела падающая волна частично отражается и, преломляясь, частично проходит далее. У падающей и прошедшей волны z -компонента волнового вектора положительна $k_z > 0$. Такие волны будем называть *прямыми*. У отраженной волны z -компонента волнового вектора отрицательна $k_z < 0$. Такие волны будем называть *обратными*. Прямая прошедшая волна падает на следующую $(q + 1)$ -ю границу раздела, причем угол падения равен углу преломления для q -й границы раздела. На $(q + 1)$ -й границе раздела волна претерпевает отражение и преломление. Отраженная обратная волна возвращается к q -й границе и также испытывает на ней отражение и преломление. Волна, отраженная от q -й границы, становится прямой и вместе с другими прямыми волнами падает на $(q + 1)$ -ю границу.

Число таких переотражений очень велико (в случае пренебрежимо малого поглощения переотражений бесконечно много). При этом в каждой пластине все прямые волны имеют одни и те же углы падения и преломления, все обратные волны имеют одни и те же углы отражения. Поэтому можно ввести единую лучевую траекторию для всех прямых волн.

2. Лучевую траекторию построим в рамках геометрической оптики. Для этого необходимо использовать принцип Ферма (аналогично [12]). Он применим, поскольку предполагается, что пространственная дисперсия отсутствует. Принцип Ферма приводит к задаче на экстремум функционала времени распространения света в среде

$$\int_0^a \frac{n(z)}{c} \sqrt{1 + (x'(z))^2} dz \rightarrow \min. \quad (16)$$

Здесь $c/n(z)$ – скорость распространения света в среде. Это уравнение определяет лучевую траекторию $x(z)$ падающей волны. В неоднородной среде данная лучевая траектория является криволинейной. Лучевая траектория отраженной волны зеркально симметрична траектории падающей волны относительно плоскости Ouz . Чтобы построить ее, нужно сделать замену $x \rightarrow -x$ при сохранении знака z .

Методы решения таких задач обсуждаются в [21–23]. Возможно также применение прямого сеточного метода [24].

3. В простейшем случае, если рассеиватель составлен из однородных изотропных диэлектрических пластин, эта задача допускает несложное аналитическое решение. Прямые и обратные волны распространяются по прямым линиям, направление которых в q -й пластине определяет-

ся законом Снеллиуса (который, как известно, есть следствие принципа Ферма). Угол преломления β_q в q -й границе раздела определяется равенством

$$\beta_q = \arcsin \frac{n_{q+1}}{n_q} \sin \alpha_q, \quad (17)$$

где α_q – угол падения на q -ю границу раздела.

Пример лучевой траектории для одной границы раздела между однородными средами приведен на фиг. 1, 2. Эта лучевая траектория является негладкой: она испытывает излом на каждой границе раздела. Обозначим координату вдоль лучевой траектории через η . Для случая фиг. 1, 2 преобразование координат $z \rightarrow \eta$ выполняется по следующему правилу:

$$\eta = \frac{z}{\cos \alpha}, \quad z < 0; \quad \eta = \frac{z}{\cos \beta}, \quad z > 0. \quad (18)$$

Если границ раздела несколько, то преобразование (18) обобщается очевидным образом.

4. В качестве пространственной координаты выберем **лучевую траекторию** прямой волны.

3.3. Неизвестные функции

1. Рассмотрим падающую волну. Как в однородной, так и в неоднородной среде на лучевой траектории поля \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны \mathbf{k} и имеют только одну компоненту, равную комплексной амплитуде соответствующего вектора. Эта амплитуда зависит от одной пространственной переменной – координаты вдоль лучевой траектории. Поэтому задача, в которой присутствует только падающая волна, является одномерной. То же справедливо для отраженной волны.

2. Во всех пластинах рассеивателя, включая среду в области $z < 0$, поле является суперпозицией падающей и отраженной волн. В этом случае суммарные векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} не ортогональны \mathbf{k} . Однако, согласно закону отражения, углы между полевыми векторами падающей и отраженной волн и осями координат одинаковы. Так, для s -поляризации угол между полем \mathbf{H}_{inc} падающей волны и осью z равен углу между полем \mathbf{H}_{refl} отраженной волны и осью z (аналогично для оси x). То же справедливо для полей \mathbf{E}_{inc} , \mathbf{E}_{refl} в случае p -поляризации. Поэтому проекции суммарного поля на оси координат вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} H_z &= (H_{\text{inc}})_z + (H_{\text{refl}})_z = (H_{\text{inc}} + H_{\text{refl}}) \sin \alpha \quad \text{для } s\text{-поляризации,} \\ E_z &= (E_{\text{inc}})_z + (E_{\text{refl}})_z = (E_{\text{inc}} + E_{\text{refl}}) \sin \alpha \quad \text{для } p\text{-поляризации.} \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения для E_x , H_x получаются из (19) заменой $\sin \rightarrow \cos$.

3. Таким образом, как и в случае нормального падения, решение полностью определяется **суммой комплексных амплитуд** падающей и отраженной волн. Поэтому для расчета можно использовать одномерную схему, в которой неизвестной функцией является указанная сумма.

3.4. Условия сопряжения

Интегральные уравнения Максвелла в изотропной среде инвариантны относительно поворота системы координат. Поэтому, чтобы перейти к координате вдоль лучевой траектории, достаточно модифицировать условия сопряжения на границе раздела сред.

Рассмотрим падение волны на одну границу раздела (см. фиг. 1, 2). Условия сопряжения для тангенциальных компонент полей на этой границе имеют вид

$$(E_\tau)_1 = (E_\tau)_2, \quad (H_\tau)_1 = (H_\tau)_2. \quad (20)$$

Здесь среда 1 расположена до границы раздела, а среда 2 – после. Для s -поляризации условия сопряжения имеют вид

$$E_1 = E_2, \quad H_1 \cos \alpha = H_2 \cos \beta, \quad (21)$$

где α – заданный угол падения, β – угол преломления. Для p -поляризации условия сопряжения записываются следующим образом:

$$H_1 = H_2, \quad E_1 \cos \alpha = E_2 \cos \beta. \quad (22)$$

Условия сопряжения непосредственно входят в разностную схему. По сравнению со случаем нормального падения добавляются только множители $\cos \alpha$ и $\cos \beta$. Если границ раздела несколько, то условия (21), (22) записываются на каждой из них.

Чтобы учесть полное внутреннее отражение, введем чисто мнимое волновое число $k \rightarrow ik$, если $(\operatorname{Re} n_1 / \operatorname{Re} n_2) \sin \alpha > 1$. Такая замена справедлива, если среды являются прозрачными либо поглощающими (т.е. $\operatorname{Im} n \geq 0$).

3.5. Эффективная толщина

После перехода к координате вдоль лучевой траектории эффективная толщина пластин отличается от физической толщины. Потребуем, чтобы пластина эффективной толщины обеспечивала правильный набег фазы.

Рассмотрим наклонное падение плоской волны на плоско-параллельную пластину (интерферометр Фабри-Перо). Разность фаз у волны, однократно прошедшей туда и обратно через пластинку, и волны, отразившейся от наружной поверхности пластины, равна [25]

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} 2hn \cos \beta. \quad (23)$$

Чтобы обеспечить такую же разность фаз при движении вдоль лучевой траектории, заменим физическую толщину на эффективную

$$h \rightarrow h \cos \beta. \quad (24)$$

Если в среде имеется поглощение, т.е. $\operatorname{Im} n \neq 0$, то угол β формально оказывается комплексным. При этом набег фазы δ также является комплексным, т.е. учитывает затухание волны. В этом случае в (24) нужно взять $|\cos \beta|$.

Такая пластинка эффективной толщины будет давать такой же спектр отражения, что исходная пластинка при наклонном падении. При наличии нескольких пластин толщину каждой следует заменить на эффективную.

Замечание 1. Для прозрачной среды без поглощения замена пластинки на эффективную является точной. Если поглощением пренебречь нельзя, то метод оптических путей вносит некоторую физическую погрешность. Величина этой погрешности будет проиллюстрирована далее (см. п. 4.3).

Замечание 2. Строго говоря, в диспергирующей среде эффективные толщины для различных частот оказываются разными. Если среда является еще и неоднородной, то для волн с различными частотами будут несколько отличаться лучевые траектории.

Однако для реальных диэлектрических материалов в оптическом диапазоне это различие невелико. Поэтому мы им пренебрегаем и вычисляем лучевые траектории и эффективные толщины слоев по частоте, соответствующей середине рассматриваемого диапазона.

3.6. Разностная схема

Согласно условиям сопряжения, тангенциальные компоненты векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , а также нормальные компоненты векторов \mathbf{D} и \mathbf{B} непрерывны на границах раздела сред. Однако комплексные амплитуды полей \mathbf{E} и \mathbf{H} испытывают сильный разрыв. Чтобы проводить расчеты таких решений, нужно использовать бикомпактные схемы [26], [27]. Это двухточечные полностью консервативные схемы, основанные на сеточной аппроксимации интегральных законов сохранения (1), (2) и условий сопряжения (8). При этом сетка по координате выбирается так, чтобы узлы попадали в границы раздела сред. Остальные узлы могут быть расставлены произвольно. Такие сетки называются специальными [28].

Рассмотрим оптически эквивалентный рассеиватель. Эффективные толщины пластин равны $(\xi_{q+1} - \xi_q) \cos \beta_q$, $1 \leq q \leq Q - 1$, где $\xi_0 = 0$. Введем специальную сетку. Бикомпактная разностная схема для случая s -поляризации будет иметь следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} = \frac{i\omega}{2c} \varepsilon_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (E_{2n-1} + E_{2n-2}), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (25)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} = \frac{i\omega}{2c} \mu_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (H_{2n-1} + H_{2n-2}), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (26)$$

$$E_{2n} = E_{2n-1}, \quad H_{2n} \cos \beta_n = H_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0} E_0 + \sqrt{\mu_0} H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0} E^0, \quad z = 0, \\ \sqrt{\epsilon_N} E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N} H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N} E^a, \quad z = a. \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь α_0 и β_0 – угол падения и угол преломления на границе расчетной области, α_1 и β_1 – угол падения и угол преломления, соответствующие первому узлу сетки и т.д. При этом β_0 вычисляем по заданному α_0 по формуле (17), затем полагаем $\alpha_1 = \beta_0$, β_1 определяем по α_1 согласно (17) и т.д. Если в n -м узле граница раздела отсутствует, то преломления не происходит, и $\beta_n = \alpha_n$ по построению.

В случае p -поляризации нужно заменить равенства (27) на

$$E_{2n} \cos \beta_n = E_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad H_{2n} = H_{2n-1}, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (29)$$

Решение разностной схемы (25)–(29) соответствует фиксированной координате x . Чтобы получить решение исходной двумерной задачи, необходимо сделать обратную замену переменных $\eta \rightarrow z$ по формуле (18) и умножить решение на

$$\exp\left(ix_m \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_n \mu_n} \sin \alpha_n\right). \quad (30)$$

Здесь $\{x_m\}$ – сетка по координате x . Значения материальных параметров ϵ_n, μ_n целесообразно вычислять в узлах сетки. Множитель (30) описывает распространение волны вдоль границ раздела.

Обоснование сходимости схемы (25)–(29) практически дословно повторяет таковое для одномерной бикомпактной схемы [6].

3.7. Клиновидная пластина

Предложенный метод можно обобщить на случай клиновидных пластин, когда границы раздела являются плоскими, но не параллельными. Построим такое обобщение, следуя [25].

Набег фазы волны, прошедшей туда и обратно через пластинку, приближенно описывается формулой (23), где h – толщина пластины в том месте, где происходит отражение света. Так, если угол при вершине клина равен γ , то на расстоянии x от вершины толщина пластинки равна $h(x) = x \operatorname{tg} \gamma$. Поэтому для клиновидной пластины эффективная толщина вводится по формуле (24), в которой нужно подставить “местную” физическую толщину $h(x)$.

В условиях сопряжения необходимо учитывать, что углы α и β отсчитываются от нормали к границам раздела.

Сеточная задача (25)–(29) решается при каждом фиксированном x_j . Решение умножается на множитель (30), где вместо x_m нужно подставить $x_m - x_j$ (т.е. на то расстояние, которое “проходит” волна от источника x_j до точки наблюдения x_m). Затем полученные решения необходимо просуммировать с весом, обратным числу шагов сетки по x .

3.8. Индуцированные токи

3.8.1. S-поляризация. В этом случае векторы электрического поля $\mathbf{E}_{\text{inc}} = \{0, E_{\text{inc}}, 0\}$ в падающей и $\mathbf{E}_{\text{refl}} = \{0, E_{\text{refl}}, 0\}$ направлены вдоль оси y . Поэтому вектор $\mathbf{J}^{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}$ также направлен вдоль той же оси. Эти токи излучают электромагнитные волны, в которых вектор $\mathbf{E}_{\text{emit}} = \{0, E_{\text{emit}}, 0\}$ направлен так же, как векторы \mathbf{E}_{inc} и \mathbf{E}_{refl} . Следовательно, амплитуда суммарного поля есть сумма амплитуд полей падающей, отраженной и переизлученной волн. Поэтому разностная схема для случая s -поляризованных волн в проводящей среде будет иметь следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} - (i\omega c^{-1} \epsilon_{n-1/2} - 4\pi c^{-1} \sigma_{n-1/2}) \Delta z_{n-1/2} (E_{2n-1} + E_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (31)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} - \frac{i\omega}{2c} \mu_{n-1/2} \Delta z_{n-1/2} (H_{2n-1} + H_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (32)$$

$$E_{2n} = E_{2n-1}, \quad H_{2n} \cos \beta_n = H_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0}E_0 + \sqrt{\mu_0}H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0}E^0, \quad z = 0 \\ \sqrt{\epsilon_N}E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N}H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N}E^a, \quad z = a. \end{aligned} \quad (34)$$

3.8.2. P-поляризация. При p -поляризации векторы \mathbf{E}_{inc} падающей и \mathbf{E}_{refl} отраженной волн не лежат в плоскости границ раздела: они имеют x - и z -компоненты. Объемные токи \mathbf{J}^{ind} направлены так же, как вектор $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{refl}}$. Поэтому в излучаемой ими волне вектор \mathbf{E}_{emit} параллелен сумме электрических полей падающей и отраженной волн $\mathbf{E}_{\text{inc}} + \mathbf{E}_{\text{refl}}$.

Таким образом, разностная схема для случая p -поляризованной волны в проводящей среде имеет следующий вид:

$$H_{2n-1} - H_{2n-2} - (i\omega c^{-1}\epsilon_{n-1/2} - 4\pi c^{-1}\sigma_{n-1/2})\Delta z_{n-1/2}(E_{2n-1} + E_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (35)$$

$$E_{2n-1} - E_{2n-2} - \frac{i\omega}{2c}\mu_{n-1/2}\Delta z_{n-1/2}(H_{2n-1} + H_{2n-2}) = 0, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (36)$$

$$E_{2n} \cos \beta_n = E_{2n-1} \cos \alpha_n, \quad H_{2n} = H_{2n-1}, \quad 1 \leq n \leq N - 1, \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon_0}E_0 + \sqrt{\mu_0}H_0 &= 2\sqrt{\epsilon_0}E^0, \quad z = 0, \\ \sqrt{\epsilon_N}E_{2N-1} - \sqrt{\mu_N}H_{2N-1} &= 2\sqrt{\epsilon_N}E^a, \quad z = a. \end{aligned} \quad (38)$$

3.9. Нестационарные задачи

Для нестационарных задач в [26], [27] был предложен метод спектрального разложения. Кратко напомним его суть.

При распространении волнового пакета в линейной диспергирующей среде для разных спектральных компонент решения реализуются разные значения ϵ , μ , σ . Разложим пакет на монохроматические компоненты, решим стационарную задачу для каждой из них и просуммируем полученные решения. Спектральное разложение исходного пакета есть прямое преобразование Фурье, суммирование полученных решений – обратное преобразование Фурье. Оба преобразования выполняются с помощью численных квадратур. Описанный алгоритм назовем *нестационарной бикомпактной схемой*.

Таким образом, нестационарная задача п. 2.3 сводится к набору стационарных задач п. 2.2. Данный подход имеет простой физический смысл. Он позволяет учитывать произвольный закон частотной дисперсии, включая таблично заданный.

3.10. Сравнение с аналогичными подходами

Сравним область применимости метода оптических путей и известных подходов.

Как отмечалось выше, методы группы Доброхотова применимы к задачам, в которых свойства среды плавно зависят от координаты, т.е. границы раздела отсутствуют. Метод Форбса-Алонсо разработан для сред с плавно меняющимся показателем преломления. Обобщение этих подходов на задачи в слоистых средах с несколькими границами раздела сталкивается со значительными трудностями из-за множественных переотражений. Предлагаемый метод оптических путей единообразно применим как к средам без границ раздела, так и к слоистым.

В оптических задачах широко применяются методы матриц рассеяния. Однако он применим для кусочно-однородных сред: внутри слоев показатели преломления не должны зависеть от координаты. Метод оптических путей применим к задачам, в которых пластины могут быть пространственно неоднородными.

Методы матриц рассеяния и метод Форбса-Алонсо применимы только для стационарных задач. Метод оптических путей построен как для стационарных, так и для нестационарных задач.

Таким образом, в рамках рассмотренных постановок метод оптических путей применим к более широкому кругу задач, чем другие известные методы.

4. ВЕРИФИКАЦИЯ

Проведем верификацию предложенного метода на тестовых задачах с известными точными решениями. В задачах этого раздела все размерные величины нормированы (т.е. являются относительными).

4.1. Граница раздела

1. Рассмотрим задачу о наклонном падении плоской s -поляризованной монохроматической волны на плоскую границу раздела. Пусть последняя соответствует $z = b > 0$. Пусть при $0 < z < b$ материальные параметры среды есть ε_1, μ_1 ; при $b < z < a - \varepsilon_2, \mu_2$. Пусть амплитуда электрического поля падающей волны равна E^0 . В случае s -поляризации вектор \mathbf{E} перпендикулярен плоскости падения (см. фиг. 1).

2. Построим точное решение этой задачи. Очевидно, оно равно сумме падающей и отраженной волн при $z < b$ и прошедшей волне при $z > b$. Амплитудные коэффициенты отраженной и прошедшей волн выражаются общеизвестными формулами Френеля. Таким образом, при $0 < z < b$ решение имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_y \exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha) \left[E^0 \exp(iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) + C_2 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) \right], \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{E}_x \cos \alpha + \mathbf{E}_z \sin \alpha) \exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha) \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \left[E^0 \exp(iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) - C_2 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha) \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$C_2 = E^0 \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \alpha - \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \beta}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \beta} e^{i\tilde{k}_1 b}, \quad \tilde{k}_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}. \quad (40)$$

При $b < z \leq a$ оно равно

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_y C_3 \exp(ix\tilde{k}_2 \sin \alpha + iz\tilde{k}_2 \cos \alpha), \\ \mathbf{H} &= (\mathbf{E}_x \cos \beta + \mathbf{E}_z \sin \beta) C_3 \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \exp(ix\tilde{k}_2 \sin \alpha + iz\tilde{k}_2 \cos \alpha), \end{aligned} \quad (41)$$

$$C_3 = E^0 \frac{2\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \alpha}{\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} \cos \alpha + \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2} \cos \beta} e^{i(\tilde{k}_1 - \tilde{k}_2)b}, \quad \tilde{k}_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}. \quad (42)$$

3. Построим теперь решение задачи в переменной η , т.е. вдоль лучевой траектории. Запишем одномерную систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{i\mu_1 \omega}{c} H; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{i\varepsilon_1 \omega}{c} E, \quad 0 \leq \eta \leq b \cos \alpha; \quad (43)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{i\mu_2 \omega}{c} H; \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{i\varepsilon_2 \omega}{c} E, \quad b \cos \alpha \leq \eta \leq a \cos \beta; \quad (44)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} + \frac{i\omega}{c} E = 2i\tilde{k} E^0, \quad \eta = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial \eta} - \frac{i\omega}{c} E = 0, \quad \eta = a \cos \beta; \quad (45)$$

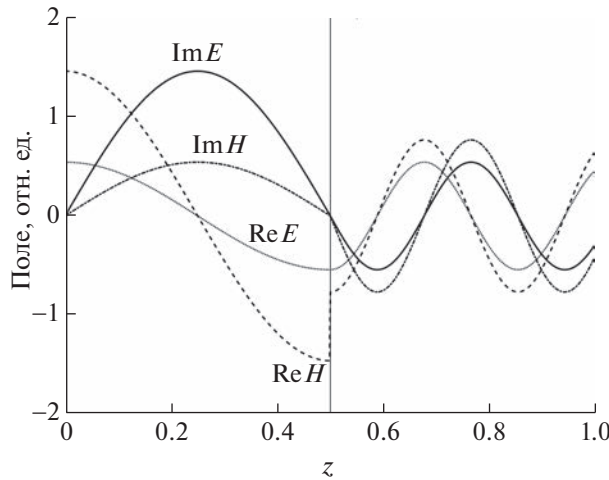
$$E|_{\eta=b \cos \alpha - 0} = E|_{\eta=b \cos \alpha + 0}, \quad H \cos \alpha|_{\eta=b \cos \alpha - 0} = H \cos \beta|_{\eta=b \cos \alpha + 0}. \quad (46)$$

Исключим H . Это даст стационарное волновое уравнение для E . Коэффициенты в общем решении по обе стороны от границы раздела определяются подстановкой в условия излучения (45) и условия сопряжения (46). Решение имеет вид

$$E = E^0 e^{i\tilde{k}_1 \eta} + C_2 e^{-i\tilde{k}_1 \eta}, \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (E^0 e^{i\tilde{k}_1 \eta} - C_2 e^{-i\tilde{k}_1 \eta}), \quad 0 \leq \eta \leq b \cos \alpha; \quad (47)$$

$$E = C_3 e^{i\tilde{k}_2 \eta}, \quad H = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} C_3 e^{i\tilde{k}_2 \eta}, \quad b \cos \alpha \leq \eta \leq a \cos \beta. \quad (48)$$

Здесь коэффициенты C_2, C_3 определяются выражениями (40), (42).



Фиг. 3. Амплитуды полей в задаче о падении s -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая – граница раздела.

Легко видеть, что решение (39)–(42) получается из (47), (48) домножением на $\exp(ix\tilde{k}_1 \sin \alpha)$ либо $\exp(ix\tilde{k}_2 \sin \beta)$, что соответствует распространению волны вдоль оси x , и на $\cos \alpha$ либо $\sin \alpha$ в случае проекций на оси x и z соответственно (ср. с формулой (19)). Таким образом, два точных решения, полученных разными способами, согласуются между собой. Это подтверждает правильность метода оптических путей.

4. Положим $a = 1, b = 0.5, \omega = 2\pi, \alpha = \pi/3, \epsilon_1 = \mu_1 = 1, \epsilon_2 = 4, \mu_2 = 2, c = 1, E^0 = 1, E^a = 0$. На трех следующих фигурах показано решение, полученное методом оптических путей. На фиг. 3 показаны амплитуды полей, т.е. непосредственно те функции, которые вычисляются в ходе точного расчета. Компонента $\text{Re } E$ является непрерывной и гладкой. Компоненты $\text{Im } E, \text{Im } H$ являются непрерывными, но негладкими: на границе раздела они имеют слабый разрыв. Компонента $\text{Re } H$ на границе раздела испытывает сильный разрыв.

На фиг. 5 представлены тангенциальные компоненты векторов E_y, H_x . Видно, что все они непрерывны. При этом E_y совпадает с фиг. 3. Компоненты $\text{Re } E_y$ и $\text{Re } H_x$ являются гладкими, а $\text{Im } E_y$ и $\text{Im } H_x$ испытывают излом на границе раздела сред.

На фиг. 6 приведена нормальная компонента H_z . Видно, что компонента $\text{Im } H_z$ непрерывна, но испытывает излом на границе раздела. Компонента $\text{Re } H_z$ претерпевает там разрыв.

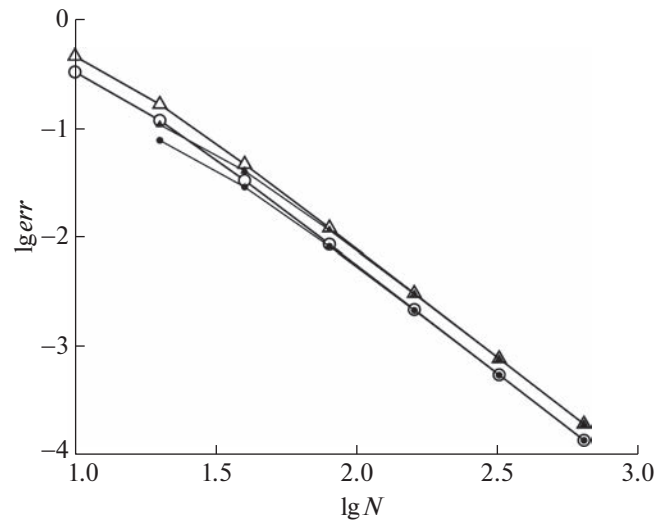
Расчет проводился на наборе сгущающихся сеток. Погрешность определялась двумя способами: (а) при помощи непосредственного сравнения численного решения с точным (47), (48) и (б) апостериорно по методу Ричардсона-Калиткина.

Напомним суть метода Ричардсона-Калиткина [29]. Пусть выполнен расчет на наборе сгущающихся сеток и получена последовательность сеточных решений $(E_y)_N, (E_y)_{2N}, (E_y)_{4N}, \dots$ Тогда оценка погрешности решения $(E_y)_{2N}$ имеет вид

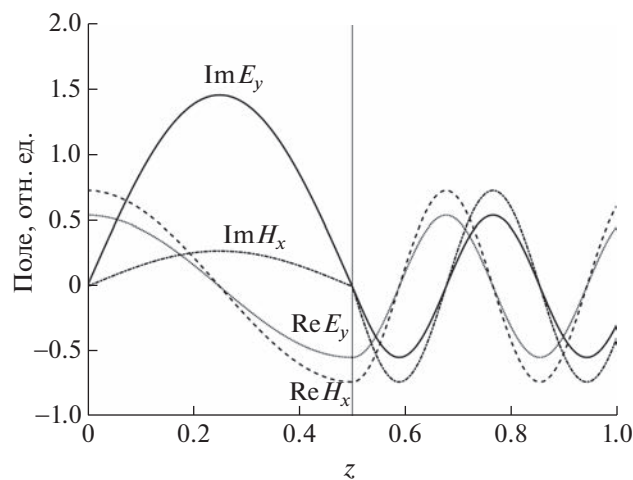
$$\delta(E_y)_{2N} = \frac{(E_y)_{2N} - (E_y)_N}{2^p - 1}, \tag{49}$$

где p – порядок точности разностной схемы. Эта оценка асимптотически точна. Она вычисляется по расчетам на каждой паре сеток $N, 2N, 2N, 4N$ и т.д.

На фиг. 4 представлены погрешности, полученные в данной задаче. График дан в двойном логарифмическом масштабе, поэтому прямая линия соответствует степенной сходимости, причем наклон прямой равен порядку точности схемы. Видно, что линии погрешности стремятся к прямой с наклоном -2 . Видно также, что на прямолинейном участке кривых погрешности, вычисленные по методу сгущения сеток, практически совпадают с погрешностями относительно точного решения. Это убедительно подтверждает работоспособность предложенного метода.



Фиг. 4. Погрешность решения в задаче о падении s -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела: \circ для E_x , Δ для H_y , светлые маркеры – разность численного и точного решений, темные маркеры – оценки по методу Ричардсона-Калиткина.

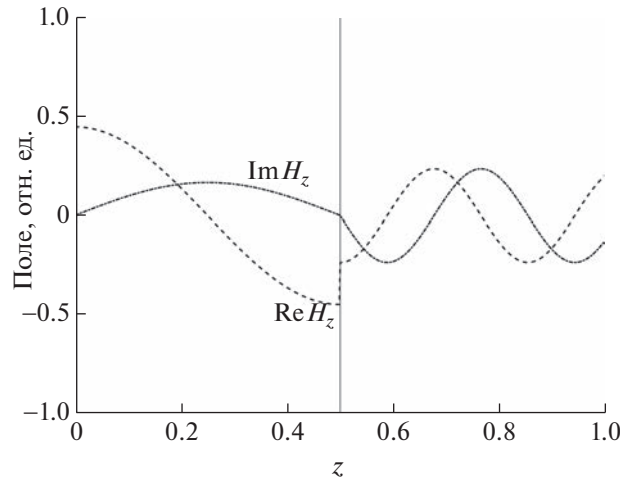


Фиг. 5. Тангенциальные компоненты полей в задаче о падении s -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая – граница раздела.

Из приведенных расчетов видно, что данная задача очень сложна для сеточных методов. Тем не менее бикомпактная схема на специальных сетках успешно с ней справляется.

5. Полностью аналогично рассматривается задача о падении p -поляризованной волны. Достаточно в (39), (41) поменять местами поля \mathbf{E} и \mathbf{H} (при этом отраженная волна для поля \mathbf{E} должна быть со знаком “плюс”, для поля \mathbf{H} – со знаком “минус”) и заменить C_2, C_3 на коэффициенты Френеля для p -поляризации.

Нетрудно показать, что для p -поляризованной волны решение в лучевой переменной также эквивалентно решению исходной двумерной задачи. Проводились расчеты по бикомпактной схеме, аналогичные описанным выше. Они показали, что бикомпактная разностная схема сходится со 2-м порядком точности. При этом на участке теоретической сходимости апостериорные оценки точности по методу Ричардсона-Калиткина практически неотличимы от фактических погрешностей, вычисленных при помощи прямого сравнения численного решения с точным. Таким образом, этот случай также можно считать надежно верифицированным.



Фиг. 6. Нормальная компонента поля H в задаче о падении s -поляризованной волны на диэлектрическую границу раздела. Вертикальная прямая – граница раздела.

4.2. Полное внутреннее отражение

1. Рассмотрим распространение s -поляризованного света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную. Будем считать, что обе среды не являются генерирующими. Как известно, если параметры среды таковы, что $n_1/n_2 \sin \alpha > 1$, то происходит полное внутреннее отражение. Волна полностью отражается обратно в плотную среду; по границе раздела распространяется поверхностная волна, амплитуда которой экспоненциально убывает по мере удаления от границы раздела.

2. Точное решение этой задачи дается формулами (39)–(42). При этом в формулах (41), (42) нужно заменить $k \rightarrow ik$.

Аналогично строится точное решение методом оптических путей: в соотношениях (48) нужно сделать замену $k \rightarrow ik$.

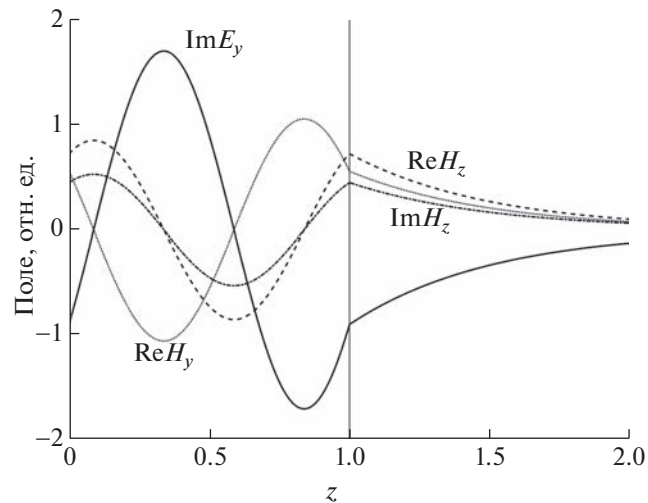
3. Положим $a = 2, b = 1, \omega = 2\pi, \alpha = \pi/3, \epsilon_1 = \mu_1 = 1, \epsilon_2 = 0.1, \mu_2 = 1, c = 1, E^0 = 1, E^a = 0$.

На фиг. 7 представлены тангенциальные компоненты E_y и H_x . Видно, что они непрерывны, но имеют излом на границе раздела. Слева от границы раздела решение является осциллирующим, справа – имеет вид затухающей экспоненты. Такой вид решения является качественно разумным (напомним, что поля предполагаются неструктурированными).

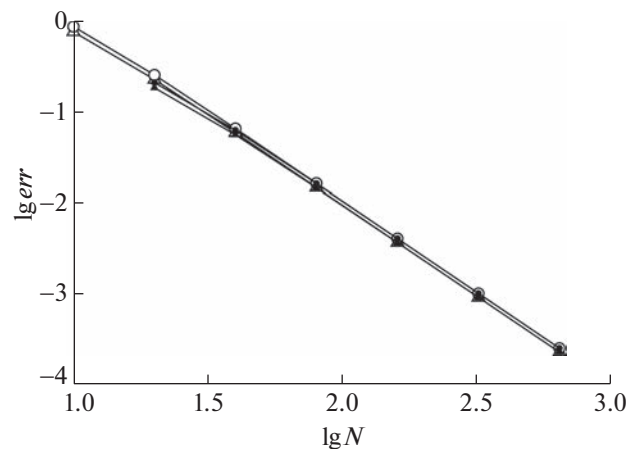
На фиг. 8 показаны погрешности, полученные в этом расчете, в зависимости от числа шагов сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Видно, что погрешности убывают в соответствии со 2-м порядком точности. На участке теоретической сходимости апостериорные оценки по методу Ричардсона-Калиткина практически неотличимы от истинных погрешностей, найденных как разность численного и точного решений.

Замечание. Точное решение (39)–(42) и аналогичное решение для p -поляризованной волны соответствуют стационарной постановке. На их основе методом спектрального разложения легко построить решения соответствующих нестационарных задач, в которых падающая волна является не бесконечным цугом, а импульсом. Для этого в качестве E^0 нужно взять спектральную амплитуду падающего импульса и выполнить обратное преобразование Фурье.

Тогда точное решение нестационарной задачи будет иметь вид (39)–(42), где вместо $E^0 \exp(iz\tilde{k}_{1,2} \cos \alpha), E^0 \exp(-iz\tilde{k}_1 \cos \alpha)$ нужно подставить соответственно $\mathcal{E}(\sqrt{\epsilon_{1,2}\mu_{1,2}z/c - t}), \mathcal{E}((2b - z)/c\sqrt{\epsilon_1\mu_1 - t})$. Здесь $\mathcal{E}(t)$ – временная развертка падающего импульса. Найти эти решения в литературе не удалось. По-видимому, они являются новыми. Расчеты этих задач не проводились, нестационарная формулировка метода оптических путей является простым обобщением стационарного варианта этого метода, а также метода спектрального разложения.



Фиг. 7. Тангенциальные компоненты полей в задаче о полном внутреннем отражении s -поляризованной волны. Вертикальная прямая – граница раздела.



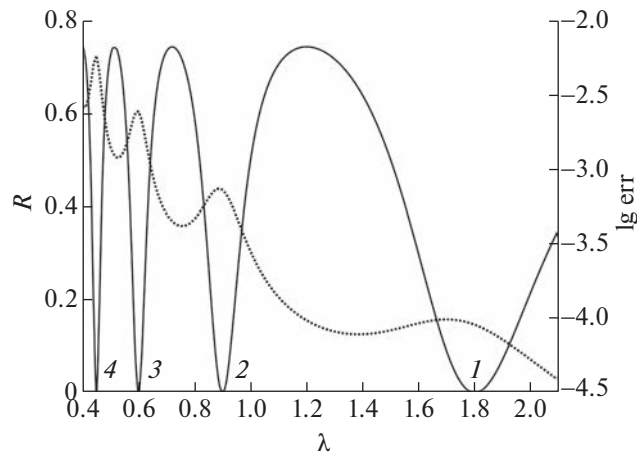
Фиг. 8. Погрешность решения в задаче о полном внутреннем отражении s -поляризованной волны. Обозначения соответствуют фиг. 4.

4.3. Интерферометр Фабри-Перо

1. Рассмотрим наклонное падение плоской волны на плоско-параллельную пластину (интерферометр Фабри-Перо). Пусть толщина пластины равна d , и границы раздела соответствуют плоскостям $z = b$ и $z = b + d$. Пластина расположена в воздухе. Материальные параметры пластины равны ϵ, μ .

2. Поскольку число переотражений внутри пластины формально бесконечно, то построение точного решения является затруднительным. Однако в этой задаче хорошо известен характер спектра отражения. Положим $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.5, c = 1$. Показатель преломления является вещественным, т.е. пластинка оптически прозрачна. Угол α подберем так, чтобы $\cos \beta$ было рациональным числом. Это позволит исключить влияние ошибок округления при вычислении тригонометрических функций и более аккуратно проверить сходимость. Положим $\cos \beta = 9/10$. Тогда $\alpha = \arcsin(\sqrt{\epsilon} \cos \beta) \approx 1.059 = 60.67^\circ$. Положим $\epsilon = 4, \mu = 1, d = 0.5, c = 1$. Нули в спектре отражения соответствуют набегу фазы $\delta = 2\pi m, m = 1, 2, \dots$, см. формулу (23). Соответствующие длины волн равны

$$\lambda = 2 \cos \beta / m = 9 / (5m), \quad m = 1, 2, \dots \quad (50)$$



Фиг. 9. Задача о прозрачной пластинке при наклонном падении. Сплошная линия – спектр отражения, пунктир – погрешность полей по методу Ричардсона-Калиткина на сетке с $N = 1280$. Цифры – номер минимума, равный значению m в (50).

3. На фиг. 9 приведен расчетный спектр отражения. Его качественный вид соответствует теоретическому. Контроль точности расчета проводился двумя способами.

Во-первых, вычислялась погрешность сеточного решения по методу Ричардсона-Калиткина. Погрешность на последней сетке, содержащей $N = 1280$ шагов, в зависимости от длины волны приведена на фиг. 9. Видно, что с уменьшением длины волны (т.е. с увеличением частоты) погрешность возрастает, поскольку увеличиваются производные решения. Тем не менее даже для наименьшей из рассмотренных длин волн погрешность не превышает 1%.

Во-вторых, вычислялась погрешность положений минимумов в спектре отражения. Она равна разности расчетных локальных минимумов и теоретических значений (50). Зависимость этой погрешности от числа шагов сетки для минимумов с $m = 1-4$ приведена на фиг. 10. Масштаб графика двойной логарифмический. Видно, с ростом m погрешности положения минимумов увеличиваются. При сгущении сеток все кривые выходят на прямые линии, т.е. погрешности убывают по степенному закону. Скорость убывания соответствует 2-му порядку точности. Это означает, что, по крайней мере, в пределах фиг. 10 погрешность положения минимума определяется только сеточной погрешностью разностной схемы. В противном случае погрешность вышла бы на некоторые предельные значения и дальше перестала бы убывать.

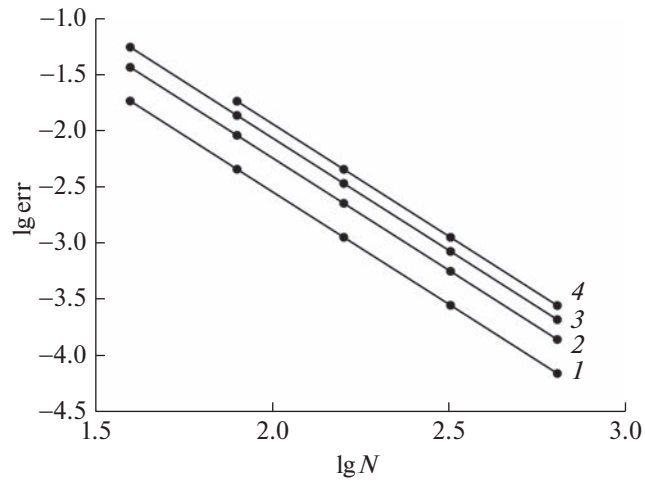
Таким образом, если поглощение равно нулю (т.е. пластинка прозрачна), то погрешность расчетного положения минимума определяется только погрешностью разностной схемы. При этом сам метод оптических путей не вносит физической погрешности.

5. Как отмечалось ранее, для материалов с поглощением метод оптических путей вносит некоторую физическую погрешность. Она возрастает с увеличением $\text{Im}\epsilon$. Чтобы оценить эту погрешность, проводились расчеты задачи о наклонном падении на пластинку с комплекснозначным ϵ .

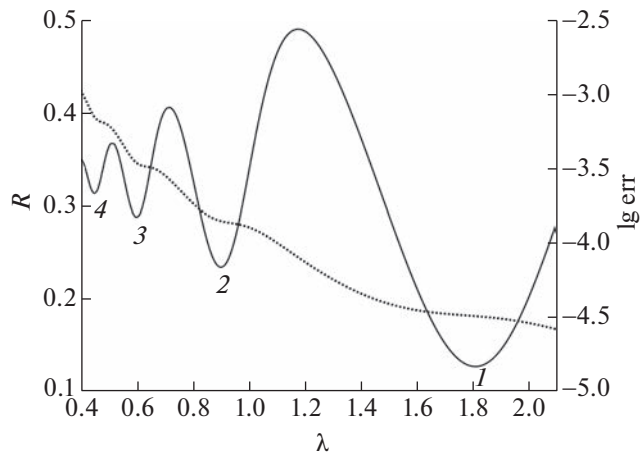
В предыдущей задаче положим $\epsilon = 4 + i$. Такое поглощение очень велико: типичные $\text{Im}\epsilon$ для актуальных материалов составляют $\sim 10^{-2}-10^{-3}$, реже 10^{-1} . Поэтому данный тест является представительным.

Расчетный спектр отражения приведен на фиг. 11. Видно, что с увеличением m минимумы отражения становятся более мелкими. На этой фигуре показана также апостериорная оценка точности полей E и H на сетке с $N = 1280$ шагов. Поскольку решение является более плавным, чем в предыдущей задаче, то фактическая погрешность оказалась заметно меньше и не превосходит 0.3%.

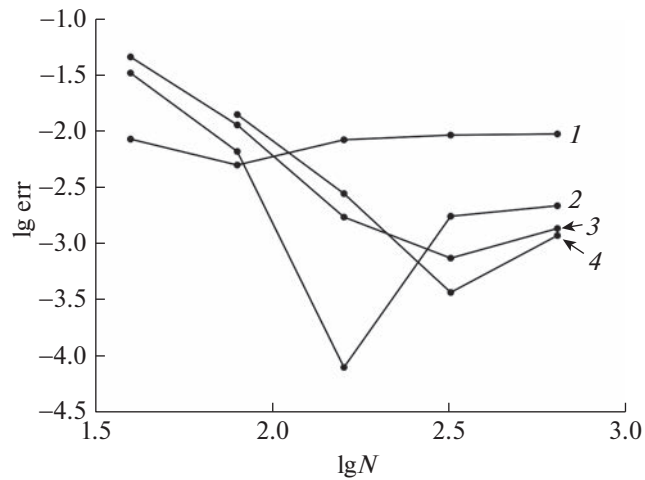
На фиг. 12 показана зависимость погрешности положения минимумов от числа шагов сетки. Масштаб графика двойной логарифмический. Вид кривых принципиально отличается от случая прозрачной среды. Начало кривых соответствует грубым сеткам. Здесь физическая погрешность метода оптических путей мала по сравнению с математической сеточной погрешностью. Поэто-



Фиг. 10. Задача о прозрачной пластинке при нормальном падении. Погрешность положения m -го минимума в спектре отражения. Цифры около линий – значения m .



Фиг. 11. Задача о поглощающей пластинке при наклонном падении. Обозначения соответствуют фиг. 9.



Фиг. 12. Задача о поглощающей пластинке при наклонном падении. Погрешность положения m -го минимума в спектре отражения. Цифры около линий – значения m .

му в начале кривых на фиг. 12 погрешность убывает при увеличении числа шагов. Однако на достаточно подробных сетках сеточная погрешность становится сопоставима с физической погрешностью. Поэтому при дальнейшем сгущении сетки погрешность на фиг. 12 перестает убывать и выходит на константу. Эта константа различна для разных m . Она оказалась наибольшей для первого минимума $m = 1$. Однако даже для него физическая погрешность не превышает 1%. Такую точность можно считать отличной.

6. Таким образом, расчеты данного пункта верифицируют корректность приближения эффективных толщин и показывают, что метод оптических путей применим к широкому кругу важных прикладных задач.

Авторы искренне благодарны Н.Н. Калиткину и Л.А. Севастьянову за ценные замечания и обсуждения и А.Н. Боголюбову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Robertson W.M., May M.S. Surface electromagnetic wave excitation on onedimensional photonic band-gap arrays // Appl. Phys. Lett. 1999. V. 74. P. 1800.
2. Augui'e B., Fuertes M.C., Angelom'e P.C., et al. Tamm plasmon resonance in mesoporous multilayers: Toward a sensing application // ACS Photonics. 2014. V. 1. № 9. P. 775–780.
3. Afinogenov B.I., Popkova A.A., Bessonov V.O., Fedyanin A.A. Measurements of the femtosecond relaxation dynamics of tamm plasmon-polaritons // Appl. Phys. Lett. 2016. V. 141. P. 171107.
4. Brückner R., Sudzius M., Hintschich S.I. et al. Hybrid optical tamm states in a planar dielectric microcavity // Phys. Rev. B. 2011. V. 83. P. 033405.
5. Gessler J., Baumann V., Emmerling M. et al. Electro optical tuning of tammplasmon exciton-polaritons // Appl. Phys. Lett. 2014. V. 105. P. 181107.
6. Белов А.А., Добровская Ж.О. Тестирование бикомпактных схем для одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 9. С. 1532–1550.
7. Berreman D.W. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 -matrix formulation // J. Opt. Soc. Am. 1972. V. 62. № 9. P. 502–510.
8. Свешников А.Г., Тихонравов А.В. Математические методы в задачах анализа и синтеза слоистых сред // Матем. моделирование. 1989. Т. 1. № 7. С. 13–38.
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
10. Белов А.А., Добровская Ж.О. Прецизионные методы решения одномерных уравнений Максвелла в слоистых средах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 1. С. 90–104.
11. Доброхотов С.Ю., Клименко М.В., Носиков И.А., Толченников А.А. Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 8. С. 1439–1448.
12. Носиков И.А. Прямой вариационный метод для расчета траекторных характеристик КВ радиотрасс в ионосфере. Диссертация ... кандидата физико-математических наук // Балтийский федеральный университет им. И. Канта // 2020.
13. Forbes G.W., Alonso M.A. What on earth is a ray and how can we use them best? // International Optical Design Conference 1998, L.R. Gardner and K.P Thompson, eds., Proc. SPIE. 1998. V. 3482. P. 22–31.
14. Forbes G.W., Alonso M.A. Using rays better. i. theory for smoothly varying media // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1132–1145.
15. Alonso M.A., Forbes G.W. Using rays better. ii. ray families to match prescribed wave fields // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1146–1159.
16. Alonso M.A., Forbes G.W. Using rays better. iii. error estimates and illustrative applications in smooth media // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 1359–1370.
17. Forbes G.W. Using rays better. iv. refraction and reflection // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18. P. 2557–2564.
18. Alonso M.A., Forbes G.W. Stable aggregates of flexible elements link rays and waves // Optics Express. 2002. V. 10. P. 728–739.
19. Forbes G.W., Alonso M.A. The holy grail of optical modelling // International Optical Design Conference 2002, Paul Manhart and Jose Sasian, eds., Proc. SPIE. 2002. V. 4832. P. 186–197.
20. Alonso M.A., Forbes G.W. Stable aggregates of flexible elements link rays and waves // Nonimaging Optics: Maximum Efficiency Light Transfer VII, Roland Winston ed., Proc. SPIE. 2002. V. 5185. P. 125–136.
21. Um J., Thurber C. A fast algorithm for two-point seismic ray tracing // Bull. Seismol. Soc. Am. 1987. V. 77. № 3. P. 972–986.
22. Moser T.J., Nolet G., Snieder R. Ray bending revisited // Bull. Seismol. Soc. Am. 1992. V. 88. № 1. P. 259–288.
23. Coleman C.J. Point-to-point ionospheric ray tracing by a direct variational method // Radio Sci. 2011. V. 46. № 5. P. 1–7.

24. *Калиткин Н.Н., Корякин П.В.* Численные методы. Т. 2. Методы математической физики. М.: Академия, 2013.
25. *Ахманов С.А., Никитин С.Ю.* Физическая оптика. М.: Изд-во МГУ, 2004.
26. *Белов А.А., Домбровская Ж.О.* Бикompактная разностная схема для уравнений Максвелла в слоистых средах // Докл. АН. 2020. Т. 492. С. 15–19.
27. *Belov A.A., Dombrovskaya Zh.O., Bogolyubov A.N.* A bicomact scheme and spectral decomposition method for difference solution of maxwell's equations in layered media // Comput. and Math. with Appl. 2021. V. 96С. P. 178–187.
28. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. М.: Наука, 1990.
29. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
30. Polyanskiy M.N. Refractive index database. <https://refractiveindex.info>. Accessed on 2022-02-13.
31. *Gao L., Lemarchand F., Lequime M.* Exploitation of multiple incidences spectrometric measurements for thin film reverse engineering // Opt. Express. 2012. V. 20. № 14. P. 15734–15751.
32. *Ruck G.T., Barrick D.E., Stewart W.D., Kirchbaum C.K.* Radar Cross Section Handbook. Volumes 1 and 2. New York, Plenum Press, 1970.
33. *Pascoe K.J.* Reflectivity and Transmissivity through Layered Lossy Media: A User-Friendly Approach. Technical Report AFIT/EN-TR-01-07. Air Force Institute of Technology, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 2001.