

Том 64, Номер 3

ISSN 0044-4669

Март 2024



ФИЦ ИУ РАН

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



НАУКА

— 1727 —

СОДЕРЖАНИЕ

Том 64, номер 3, 2024 год

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

- Точная формула для решения вырожденных систем квадратичных уравнений
Ю. Г. Евтушенко, А. А. Третьяков 387
- Численная схема с экспоненциальной сходимостью для функции тока потенциального обтекания тел с осевой симметрией
А. Г. Петров 392

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

- О построении оптимальной сети точек наблюдений при решении обратных линейных задач гравиметрии и магнитометрии
И. Э. Степанова, Д. В. Лукьяненко, И. И. Колотов, А. В. Щепетиллов, А. Г. Ягола, А. Н. Левашов 403
- Алгоритмы оптимизации систем с многоэкстремальными функционалами
В. К. Толстых 415

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- Задача Штурма-Лиувилля для одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат
А. В. Земсков, Д. В. Тарлаковский 424

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

- О единственности решения интегрального уравнения Лаврентьева в n -мерном пространстве
М. М. Кокурин, В. В. Ключев, А. В. Гаврилова 443

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Кинетическая модель для описания трехкомпонентной плазмы
М. В. Абгарян, А. М. Бишаев 462
- О вероятностно-статистическом подходе к анализу параметров нелокальности плотности плазмы
Н. С. Аркашов, В. А. Селезнев 473
- Алгоритмы решения обратной задачи рассеяния для модели Манакова
О. В. Белай, Л. Л. Фрумин, А. Е. Чернявский 486
- Расчет возмущения слоя плазмы электрическим полем
Н. М. Гордеева 499

Локализация начального условия решения задачи Коши для уравнения теплопроводности <i>А. Н. Конёнков</i>	514
Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой диффузией в случае многих пространственных переменных <i>А. В. Нестеров</i>	526
Краевая задача о расчете лучевых характеристик океанических волн, отраженных от береговой линии <i>И. А. Носиков, А. А. Толченников, М. В. Клименко</i>	534

ИНФОРМАТИКА

Интерполяция программного управления по целевой точке в задаче о сближении <i>А. В. Алексеев, А. А. Ершов</i>	547
--	-----

ТОЧНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ КВАДРАТИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ¹⁾

© 2024 г. Ю. Г. Евтушенко^{1,2,*}, А. А. Третьяков^{1,3,**}

¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

²141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

³08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Poland

*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**e-mail: prof.tretyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.06.2023 г.

Переработанный вариант 15.09.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассматривается система нелинейных уравнений вида $F(x) = 0_n$, где отображение F квадратичное, действующее из $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. При этом производная F' в решении вырождена, что является одним из главных характеристических свойств нелинейности отображения. На основе конструкций теории p -регулярности предложен 2-фактор метод решения этой системы, который сходится с квадратичной скоростью. Более того, получена точная формула для решения данной системы квадратичных уравнений в случае 2-регулярности отображения F . Библ. 7.

Ключевые слова: вырожденность, p -регулярность, p -фактор оператор.

DOI: 10.31857/S0044466924030012, **EDN:** XHLYYB

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается система нелинейных уравнений вида $F(x) = 0_n$, где отображение F определено как

$$F(x) = B[x]^2 + Mx + N, \quad (1)$$

где M – матрица размерности $n \times n$, N – вектор из \mathbb{R}^n и $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квадратичное отображение вида

$$B[x]^2 = B(x, x) = [(B_1x, x), \dots, (B_nx, x)]^T \quad (2)$$

для $x \in \mathbb{R}^n$ и B_i есть $n \times n$ симметричная матрица, $i = 1, \dots, n$.

В статье описывается применение теории p -регулярности [1–3] к решению систем нелинейных уравнений с отображением F , введенным в (1). Цель статьи представить точную формулу для решения уравнения $F(x) = 0_n$, где $F(x)$ – квадратичное отображение вида (1) с вырождением в решении x^* . Отметим, что нелинейные проблемы, среди которых квадратичные и полиномиальные уравнения, интенсивно исследуются в различных областях знаний и прикладных задачах. Оказывается, как это было показано в [4], нелинейность тесно связана с вырожденностью, а именно: так называемые существенно нелинейные задачи и вырожденные локально эквивалентны (см. [4]). Поэтому в данной статье исследуем системы квадратичных уравнений вида

$$B[x]^2 + Mx + N = 0_n \quad (3)$$

с вырождением, как основным характеристическим признаком нелинейности в решении. В данной статье покажем, как на основе теории p -регулярности и специальной конструкции 2-фактор оператора свести исходную задачу к системе линейных уравнений и получить формулу для решения системы (3).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 21-71-30005).

Определение и обозначения. Обозначим через $\text{Ker}S = \{x \in \mathbb{R}^n | Sx = 0_m\}$ ядро линейного оператора $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и через $\text{Im}S = \{y \in \mathbb{R}^m | y = Sx \text{ для некоторого } x \in \mathbb{R}^n\}$ — образ этого оператора.

Пусть $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывное симметричное квадратичное отображение. 2-форма, ассоциированная с B , это отображение $B[\cdot]^2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ определено как $B[x]^2 = B(x, x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Будем использовать следующее обозначение $\text{Im}^2 B = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in \mathbb{R}^n : B[x]^2 = y\}$ и $\text{Ker}^2 B = \{x \in \mathbb{R}^n | B[x]^2 = 0_n\}$. Через $N(x^*)$ обозначим окрестность точки x^* .

1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ 2-РЕГУЛЯРНОСТИ

Напомним некоторые обозначения и определения теории 2-регулярности [1–7] для конечномерного случая и опишем несколько версий 2-фактор метода для решения вырожденных нелинейных уравнений. Проиллюстрируем, как применять модификацию 2-фактор метода для получения формулы решения нелинейной системы уравнений с квадратичным оператором. Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$F(x) = 0_n, \quad (4)$$

где F — достаточно гладкое отображение из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n , $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))^T$. Пусть x^* -решение (4). Отображение F называется регулярным в точке x^* , если

$$\text{Im}F'(x^*) = \mathbb{R}^n \quad (5)$$

или, другими словами,

$$\text{rank}F'(x^*) = n,$$

где $F'(x^*)$ — матрица Якоби отображения F в точке x^* . Отображение называется нерегулярным (вырожденным), если (5) не выполнено. Пусть

$$\mathbb{R}^n = Y_1 + Y_2, \quad Y_1 = \text{Im}F'(x^*), \quad Y_2 = Y_1^\perp. \quad (6)$$

Определим отображения

$$F_i(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i, \quad F_i(x) = P_{Y_i}F(x), \quad i = 1, 2,$$

где $P_{Y_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow Y_i$ — ортопроектор на Y_i , $i = 1, 2$. Тогда F может быть представлено как $F(x) := F_1(x) + F_2(x)$ или $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_2(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y_1 \oplus Y_2)$, где $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, определенный как

$$\Psi_2(h) = F_1'(x^*) + F_2'(x^*)[h],$$

называется 2-фактор оператором. (Или 2-фактор оператором, порожденным вектором h .)

Рассмотрим нелинейный оператор $\Psi_2[\cdot]^2$ такой, что

$$\Psi_2[x]^2 := F_1'(x^*)[x] + F_2'(x^*)[x]^2.$$

Заметим, что $\Psi_2[x]^2 = \Psi_2(x)[x]$.

Определение 2. 2-ядро оператора Ψ_2 обозначим

$$H_2 = \text{Ker}^2\Psi_2,$$

где $\text{Ker}^2\Psi_2 = \{h \in \mathbb{R}^n | F_1'(x^*)[h] + F_2'(x^*)[h]^2 = 0_n\}$. Отметим, что $\text{Ker}^2\Psi_2 = \bigcap_{k=1}^2 \text{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*)$, где $\text{Ker}^k F_k^{(k)}(x^*) = \{\xi \in \mathbb{R}^n | F_k^{(k)}(x^*)[\xi]^k = 0_n\}$, k — ядро оператора $F_k^{(k)}(\cdot)[\cdot]^k$, $k = 1, 2$.

Определение 3. Отображение F называется 2-регулярным в точке x^* на h , если $\text{Im}\Psi_2(h) = \mathbb{R}^n$.

Определение 4. Отображение F называется 2-регулярным в точке x^* , если оно 2-регулярно на каждом $h \in H_2(x^*) \setminus \{0_n\}$ или $H_2(x^*) = \{0_n\}$.

2. 2-ФАКТОР МЕТОД РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения системы (4) воспользуемся 2-фактор методом, предложенным в [1]:

$$x_{k+1} = x_k - \{F'(x_k) + P_{Y_2} F''(x_k)h\}^{-1} (F(x_k) + P_{Y_2} F'(x_k)h), \quad (7)$$

где вектор h , $\|h\| = 1$ выбирается таким образом, чтобы матрица $(F'(x^*) + P_{Y_2} F''(x^*)h)$ была обратима. Фактически схема (7) – это схема метода Ньютона для решения системы

$$\Phi(x) = F(x) + P_{Y_2} F'(x)h = 0_n. \quad (8)$$

Следующий результат устанавливает факт сходимости 2-фактор метода (7).

Теорема 1. Пусть $F \in C^3(\mathbb{R}^n)$ и x^* – решение (4). Предположим, что существует вектор $h \in \mathbb{R}^n$, $\|h\| = 1$ такой, что F 2-регулярно в точке x^* на элементе h , т.е. матрица $F'(x^*) + P_{Y_2} F''(x^*)h$ не вырождена.

Тогда существует окрестность $N(x^*)$ точки x^* такая, что для $x_0 \in N(x^*)$ последовательность $\{x_k\}$, генерируемая 2-фактор методом (7), сходится к x^* , причем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2, \quad (9)$$

где $C > 0$ – независимая константа.

Доказательство. Поскольку схема (7) – это метод Ньютона, примененный к системе (8), и матрица $\Phi'(x^*)$ не вырождена из условия 2-регулярности F в точке x^* на векторе h , причем $\Phi(x^*) = 0_n$, то схему (7) можно переписать в виде

$$x_{k+1} = x_k - \Phi'(x_k)^{-1} \Phi(x_k), \quad (10)$$

для которой будет верна оценка (9). Теорема доказана.

Рассмотрим другую версию 2-фактор метода для решения системы (4). Поскольку

$$P_{Y_2} F'(x^*)h = 0_n \quad (11)$$

для любого $h \in \mathbb{R}^n$, то можем рассматривать уравнение

$$P_{Y_2} F'(x)h = 0_n. \quad (12)$$

Причем, если на элементе h существует $(P_{Y_2} F''(x^*)h)^{-1}$, то точка x^* будет локально единственным решением уравнения (12). Поэтому для решения (4) можно рассмотреть схему

$$x_{k+1} = x_k - (P_{Y_2} F''(x_k)h)^{-1} P_{Y_2} F'(x_k)h, \quad k = 0, 1, \quad (13)$$

для которой будет справедлива следующая теорема сходимости.

Теорема 2. Пусть $F \in C^3$, x^* – решение (4). Предположим, что существует вектор h , $\|h\| = 1$ такой, что матрица $P_{Y_2} F''(x^*)h$ не вырождена.

Тогда для $x_0 \in N(x^*)$ последовательность (13) сходится к x^* , причем

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \|x_k - x^*\|^2,$$

где $C > 0$ – независимая константа.

Доказательство. Следует из доказательства сходимости классического метода Ньютона. Отметим, что в схеме (13) оператор P_{Y_2} определен в точке x^* . Способы его построения по текущей точке x_k из достаточно малой окрестности $N(x^*)$ описаны в [7], и мы не будем здесь останавливаться на этом моменте.

3. НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОТОБРАЖЕНИЯМИ.
ТОЧНАЯ ФОРМУЛА

Пусть теперь отображение F определяется как

$$F(x) = B[x]^2 + Mx + N, \quad (14)$$

где M – матрица размерности $n \times n$, N – вектор из \mathbb{R}^n и $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – отображение, определенное формулой (2). Рассмотрим, как 2-фактор метод (13) может быть применен для поиска решения уравнения (14).

Более того, покажем, что 2-фактор метод (13) сходится за одну итерацию к решению x^* уравнения (14), и дадим точную формулу для решения x^* уравнения (14). Для уравнения (14) предположения теоремы 2 сводятся к существованию вектора $h \neq 0_n$ такого, что

1)

$$P_{Y_2} (2B[x^*] + M)h = 0_n, \quad (15)$$

2)

$$P_{Y_2} 2Bh \text{ не вырождена.} \quad (16)$$

При этом соотношение (15) выполнено для любого $h \in \mathbb{R}^n$, так как $(2B[x^*] + M)h \in \text{Im}F'(x^*)$, а P_{Y_2} – ортопроектор на $(\text{Im}F'(x^*))^\perp$. Проблема состоит в построении оператора P_{Y_2} , который, вообще говоря, определяется неизвестной точкой x^* . Однако при $x_0 \in U_\varepsilon(x^*)$, где $\varepsilon > 0$ достаточно малое, мы можем восстановить оператор P_{Y_2} , используя только информацию о точке x_0 . Полное описание этого факта и саму процедуру построения оператора P_{Y_2} можно найти, например, в [7].

Тогда первая итерация 2-фактор метода дает

$$x_1 = x_0 - (2P_{Y_2} Bh)^{-1} [2P_{Y_2} (Bx_0 + M)h], \quad (17)$$

что эквивалентно $2P_{Y_2} Bh(x_1 - x_0) = -(2P_{Y_2} Bx_0 + M)h$. Учитывая, что $2P_{Y_2} B[h, x_0] = 2P_{Y_2} B[x_0, h]$, получаем

$$x_1 = x^* = -\frac{1}{2} [P_{Y_2} Bh]^{-1} \cdot (Mh), \quad (18)$$

где вектор h удовлетворяет условию (16).

Отметим, что множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$, для которых выполнено условие (16), является массивным множеством (см. [3]), и поэтому мы не будем в данной статье останавливаться на способах построения векторов h , удовлетворяющих (16).

Пример 1. Рассмотрим отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ следующего вида:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 1 \\ x_1 x_2 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Представим отображение F в форме (14) при

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $F(x) = 0$ имеет локально единственное решение $x^* = (1, 0)^T$. В этом примере $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y_2 = \mathbb{R}^2$, $P_{Y_1} = [0]_{2 \times 2}$, $P_{Y_2} = [I]_{2 \times 2}$, $h = (1, 0)^T$. Следовательно, применяя формулу (18), получаем

$$\tilde{x}^* = -\frac{1}{2} [P_{Y_2} Bh]^{-1} (Mh) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

что означает $\tilde{x}^* = x^*$, и мы получаем точную формулу для решения системы квадратичных уравнений (14).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белаш К.Н., Третьяков А.А.* Методы решения вырожденных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т. 28. №. 7. С. 1097–1102.
2. *Белаш К.Н.* Решение систем нелинейных уравнений общего вида // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1990. Т. 30. №. 6. С. 837–843.
3. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
4. *Tret'yakov A., Marsden J.E.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. Vol. 2. No. 4. P. 425–445.
5. *Facchinei F., Fisher A., Kanzow C.* On the Accurate Identification of Active Constraints // SIAM J. Optim. 1998. No. 9. P. 14–32.
6. *Измайлов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Физматлит, 1999.
7. *Брежнева О.А., Третьяков А.А.* Новые методы решения существенно нелинейных задач. М.: ВЦ РАН, 2000.

EXACT FORMULA FOR THE SOLUTION OF DEGENERATE SYSTEM OF QUADRATIC EQUATIONS

Yu. G. Evtushenko^{a,b,*}, A. A. Tret'yakov^{a,c,**}

^a*Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS
Vavilova str., 44, Moscow, 119333 Russia*

^b*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Institutskiy per, 1, Dolgoprudnyi, Moscow Region, 141701 Russia*

^c*Faculty of Exact and Natural Sciences Siedlce University,
Siedlce, 08-110 Poland*

**e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru*

***e-mail: prof.tret'yakov@gmail.com*

Received 05 June, 2023

Revised 15 September, 2023

Accepted 20 October, 2023

Abstract. The paper devoted to the solution of nonlinear system of equations $F(x) = 0$, where the mapping F is quadratic, acting from $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. We consider the case, when the derivative F' is degenerate at the solution point. Based on the constructions of the p-regularity theory was proposed a 2-factor method for solving singular system of equations, which converges at a quadratic rate. Moreover, an exact formula is obtained for solving this quadratic system of equations in the 2-regular case of the mapping $F(x)$.

Keywords: degenerate, p-regularity, p-factor method.

УДК 519.64

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СХОДИМОСТЬЮ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ¹⁾

© 2024 г. А.Г. Петров^{1,*}

¹119526 Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1,
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Россия
*e-mail: petrovipmech@gmail.com

Поступила в редакцию 05.02.2023 г.
Переработанный вариант 10.10.2023 г.
Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассматривается численная схема метода граничных элементов для задачи потенциального обтекания осесимметричных торообразных тел. Выводится интегральное уравнение для распределения скорости на теле. Показывается экспоненциальная сходимость численной схемы решения рассматриваемого уравнения. Библ.17. Фиг.6. Табл.2.

Ключевые слова: метод граничных элементов, осевая симметрия, потенциальное обтекание, экспоненциальная сходимость.

DOI: 10.31857/S0044466924030021, EDN: ХННТJU

ВВЕДЕНИЕ

В осесимметричном случае, так же как и для плоских задач, потенциальные течения идеальной несжимаемой жидкости можно формулировать как с помощью потенциала поля скорости, так и с помощью функции тока.

В работах [1]–[5] были разработаны численные схемы метода граничных элементов для решения задач потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Потенциал поля скорости удовлетворяет уравнению Лапласа, и для него выводится линейное интегральное уравнение на граничной поверхности. Оно связывает между собой значение функции и ее нормальную производную на этой поверхности. Для плоской и осесимметричной задач граничную поверхность определяет одномерный контур. Поэтому интегральное уравнение является одномерным, и с помощью удачно подобранных квадратурных формул интегральное уравнение аппроксимируется линейной системой уравнений. Для задачи Дирихле по заданному потенциалу из системы уравнений находится нормальная производная. Для задачи Неймана по заданной нормальной производной потенциала находится потенциал. Потенциал в каждой точке области, ограниченной контуром, линейно выражается через распределение потенциала и его нормальной производной на контуре. В этом и состоит суть метода граничных элементов.

Существует также много более современных работ [6]–[10], в которых предлагаются различные численные схемы также для потенциала.

Функция тока потенциальных течений идеальной несжимаемой жидкости также удовлетворяет уравнению Лапласа, и для нее схема граничных элементов строится аналогично. В [11] было показано, что для плоских задач обтекания схема вычисления функции тока оказывается проще. При этом значительно упрощается задача построения линий тока. Для обтекания контура с циркуляцией функция тока однозначна в области течения жидкости, а потенциал – неоднозначный.

Интегральные операторы интегрального уравнения на граничном контуре действуют на периодические функции. Периодом является длина контура. Если контур аналитичен, то коэффициенты n -й гармоники ряда Фурье периодических функций убывают по экспоненте $\exp(-cn)$. С помощью этого наблюдения в

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 124012500442-3.

[12], [13] разработаны аппроксимации интегральных уравнений линейной системой, погрешность которых убывает с ростом числа элементов сетки по экспоненте.

В настоящем исследовании численные схемы метода граничных элементов для решения плоских задач с помощью функции тока распространяются на решения задачи обтекания осесимметричного тела и тора с циркуляцией. Следует отметить, что функция тока осесимметричного потенциального тела удовлетворяет уравнению эллиптического типа, отличного от уравнения Лапласа. Поэтому для нее следует выводить новые интегральные уравнения на граничном контуре. Функция Грина, которая фигурирует в интегральном уравнении плоской задачи, будет отличаться от функции Грина осесимметричной задачи, и ее следует вывести отдельно.

1. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Компоненты скорости v_r, v_z в цилиндрической системе координат z, r, ϕ выражаются через функцию тока Ψ следующим образом:

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}.$$

Угловая компонента вектора вихря $\text{rot}_\phi v$ имеет вид

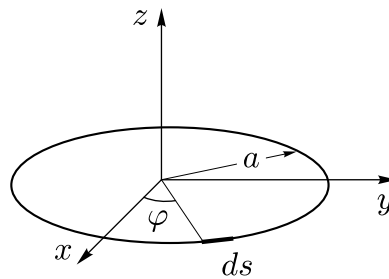
$$\text{rot}_\phi v = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) = D^2 \Psi.$$

Рассмотрим потенциальное осесимметричное течение вне осесимметричного тора, S — область, которая получается в результате сечения тора меридианальной плоскостью. Из приведенных равенств получаем уравнение потенциального (безвихревого) течения

$$D^2 \Psi = 0.$$

Функцией Грина G осесимметричного потенциального течения будет функция тока вихревого осесимметричного кольца C радиуса a . Согласно формуле Био–Савара поле скорости вихревого кольца имеет вид (фиг. 1):

$$v = -\oint \frac{ds' \times (r' - r)}{|r' - r|^3}.$$



Фиг. 1. Вихревое кольцо

В декартовой системе координат x, y, z векторы под интегралом имеют компоненты

$$r'(a \cos \phi, a \sin \phi, 0), \quad r(r, 0, z), \quad ds'(-a \sin \phi, a \cos \phi, 0) d\phi.$$

Отсюда находим радиальную скорость v_r вихревого кольца

$$v_r = \int_0^{2\pi} \frac{az \cos \phi d\phi}{(a^2 - 2ar \cos \phi + r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ее можно выразить через функцию тока G :

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$G(r, z, a) = -\int_0^{2\pi} \frac{ar \cos \phi d\phi}{(a^2 - 2ar \cos \phi + r^2 + z^2)^{1/2}}. \tag{1}$$

Перейдем теперь к выводу функции Грина. Пусть $M(r, z)$ и $M(r', z')$ — две произвольные точки пространства. Функция Грина $G(M, M')$ осесимметричного течения строится следующим образом. Проводим контур через точку $M(r, z)$ и вычисляем значение функции тока вихревого кольца в точке $M'(r', z')$. Найденное значение будет равно значению функции Грина в точках M и M' . По построению значение $G(M, M')$ будет равно функции тока (1), в которой первый аргумент равен r' , второй — $(z' - z)$ и третий $a = r$. Таким образом, функция Грина такова:

$$G(M', M) = - \int_0^{2\pi} \frac{r' r \cos \phi d\phi}{\left[(r')^2 - 2r'r \cos \phi + r^2 + (z - z')^2 \right]^{1/2}}.$$

Функция Грина симметрична относительно перестановки точек M и M' . Поэтому для определения $G(M, M')$ контур можно также провести через точку M' и вычислить функцию тока в точке M . Полученный интеграл $G(M, M')$ можно выразить через эллиптические интегралы (см. [14, т. 1, с. 202])

$$G(M, M') = -2(r_2 + r_1)[K(k) - E(k)], \quad (2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$r_1 = \sqrt{(z' - z)^2 + (r' - r)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(z' - z)^2 + (r' + r)^2}, \quad k = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1},$$

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 x^2)^{-1/2} dx, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 x^2)^{1/2} dx.$$

Для функции $K(k) - E(k)$ полезна аппроксимация

$$K(k) - E(k) = P(m_1) + \ln(1/m_1)Q(m_1),$$

$$P(m_1) \approx 0.3862943611 - 0.3468568385m_1 -$$

$$- 0.0305489156m_1^2 - 0.0088886006m_1^3,$$

$$Q(m_1) \approx 0.5 - 0.1249477647m_1 -$$

$$- 0.02138998364m_1^2 - 0.00288878875m_1^3,$$

$$m_1 = 1 - k^2 = \frac{4r_1r_2}{(r_1 + r_2)^2}.$$

Максимальное отклонение аппроксимации от точного значения в области определения $0 < k < 1$ не превышает величину 1.33×10^{-7} .

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА

Теория интегральных уравнений для плоских задач уравнения Лапласа переносится на осесимметричный случай следующим образом. Оператору Лапласа ставится в соответствие оператор D^2 , а гармонической функции Φ — функция тока Ψ . Кроме того, в интегралах нужно учесть весовой множитель $1/r'$, где r' — координата точки интегрирования M' .

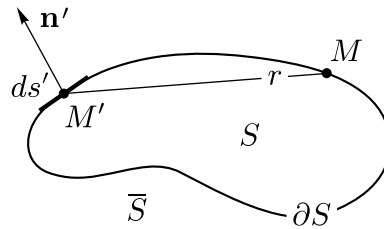
Для функции $\Psi(M)$, удовлетворяющей в области $M \in S$, ограниченной замкнутым гладким контуром ∂S , введем следующий интеграл:

$$I(M) = \tilde{A}V(M) + \tilde{B}\frac{\Psi}{r}(M), \quad V(M) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial n}(M), \quad (3)$$

где \tilde{A} и \tilde{B} — два интегральных оператора:

$$\tilde{A}V(M) = - \int_0^l G(M, M')V(M')ds',$$

$$\tilde{B}\Phi(M) = \int_0^l \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} \frac{\Psi}{r}(M')ds', \quad (4)$$



Фиг. 2. Обозначения к основному тождеству

Интегралы берутся по контуру ∂S . Контур ∂S разбивает плоскость на две области: внутреннюю S , ограниченную контуром ∂S снаружи, и внешнюю \bar{S} , ограниченную контуром изнутри, M – произвольная точка на плоскости, $M' \in \partial S$ – точка интегрирования, ds' – элемент дуги в точке M' , l – длина контура ∂S , n – вектор нормали к контуру ∂S , внешней по отношению к S , $\frac{\partial}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial n'}$ – производные по направлению внешней нормали в точках M и M' соответственно, $G(M, M')$ – функция Грина, $r(M, M')$ – расстояние между точками M и M' . (Обозначения показаны на фиг. 2).

Выражения $\tilde{A}V(M)$ и $\tilde{B}\Phi(M)$ – называются потенциалами простого и двойного слоев соответственно. Известно [15, с. 241–242], что потенциал простого слоя непрерывен на границе ∂S , а потенциал двойного слоя имеет скачок. Значение потенциала двойного слоя в граничной точке $M_0 \in \partial S$ равно среднеарифметическому двух предельных значений потенциала при $M \rightarrow M_0$, точек M , находящихся внутри области S ($M \in S$) и снаружи – ($M \in \bar{S}$).

Пользуясь свойствами потенциала двойного слоя, можно вывести следующие тождества для интеграла (3):

$$I(M) = \begin{cases} 4\pi\Psi(M), & M \in S, \\ 2\pi\Psi(M), & M \in \partial S, \\ 0, & M \in \bar{S}. \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда для значений функции тока на границе получим

$$2\pi\Psi(M) = \tilde{A}V(M) + \tilde{B}\frac{\Psi}{r}(M). \quad (6)$$

Оно представляет линейную связь между значениями функции Ψ и ее нормальной производной в граничных точках $M \in \partial S$. Так же как и в плоской задаче, тождество (7) можно рассматривать как интегральное уравнение относительно $\Psi(M)$ при заданной нормальной производной или относительно $\partial\Psi(M) / \partial n$ при заданном значении $\Psi(M)$ на границе. После того как $\partial\Psi(M) / \partial n$ и $\Psi(M)$ будут найдены, можно вычислить функцию $\Psi(M)$ во внутренних точках $M \in S$:

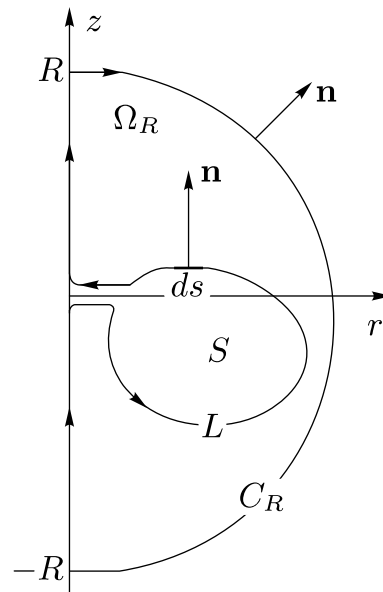
$$4\pi\Psi(M) = \oint_{\partial S} \frac{1}{r'} \left[-G(M, M') \frac{\partial\Psi}{\partial n}(M') + \Psi(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n} \right] ds'. \quad (7)$$

Особую точку интегрального уравнения (7) можно устранить так же, как в плоской задаче

$$\begin{aligned} AV(s) + B\frac{\Psi}{r}(s) &= 0, \\ B\Phi(M) &= \int_0^l \frac{\partial G(M, M')}{\partial n'} \left(\frac{\Psi}{r}(M') - \frac{\Psi}{r}(M) \right) ds'. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь оператор \tilde{B} заменился на B , а оператор A такой же, как \tilde{A} в формуле (4).

Полученные уравнения позволяют решать внутренние задачи Дирихле, Неймана или смешанную задачу. Перейдем к выводу интегральных уравнений для решения внешней задачи обтекания тора потенциальным потоком несжимаемой жидкости.



Фиг. 3. Обозначения к внешней задаче

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИИ ТОКА ПРИ ОБТЕКАНИИ ТОРА

Пусть $\Psi(r, z)$ – функция тока потенциального течения идеальной жидкости, обтекающего тор S со скоростью U на бесконечности с циркуляцией Γ . На бесконечности функция тока имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\Psi = \frac{1}{2}r^2U + C + \mathcal{O}\left(1 / \sqrt{r^2 + z^2}\right). \quad (9)$$

Тогда рассмотрим область Ω_R , ограниченную изнутри контуром ∂S , а снаружи – границей полуокружности C_R , состоящей из полуокружности и диаметра $(-R, R)$ на оси симметрии (фиг. 3). Функция тока в полуокружности C_R удовлетворяет уравнению $D^2\Psi = 0$ и можно применить тождество (7). Граница области $\partial\Omega = \partial S \cup C_R$ состоит из двух контуров, поэтому в интегральное тождество (7) добавится второй интеграл по границе полуокружности C_R . В интеграле по контуру ∂S следует учесть изменение знака, так как нормаль, внешняя к Ω_R , будет внутренней к S . В результате для точек на контуре $M \in \partial S$ получим уравнение

$$-2\pi\Psi(M) = \tilde{A}V(M) + \tilde{B}\frac{\Psi}{r}(M) + I, \quad (10)$$

$$I = \int_{C_R} \frac{1}{r'} \left[G(M, M') \frac{\partial\Psi}{\partial n}(M') - \Psi(M') \frac{\partial G(M, M')}{\partial n} \right] ds.$$

Если же точка лежит вне контура ∂S , то согласно (5) будем иметь равенство

$$-4\pi\Psi(M) = \tilde{A}V(M) + \tilde{B}\frac{\Psi}{r}(M) + I. \quad (11)$$

Перейдем к вычислению интеграла I по бесконечно удаленному контуру C_R . Интеграл I состоит из интеграла I_1 по полуокружности и интеграла по отрезку прямой I_2 . Интеграл I_1 вычисляется с помощью асимптотик функции Грина. Пусть $M'(R\sin\theta, R\cos\theta)$ – точка полуокружности и $M(r, 0)$ – точка наблюдения. Проведем вихревой контур через точку $M(r, 0)$. Тогда для функции тока (9) имеем асимптотики

$$\begin{aligned} \Psi(M') &= \frac{1}{2}UR^2\sin^2\theta + C + \mathcal{O}(1/R), \\ \frac{\partial\Psi(M')}{\partial n} &= UR\sin^2\theta + \mathcal{O}(1/R^2) \end{aligned} \quad (12)$$

для интеграла I_1 по дуге круга радиуса R в пределе при $R \rightarrow \infty$ получим

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^\pi \frac{Rd\theta}{R\sin\theta} \left[-\pi \frac{r^2}{R} \sin^2\theta \cdot UR\sin^2\theta - \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2}UR^2 \sin^2\theta \cdot \pi \frac{r^2}{R^2} \sin^2\theta \right] = \\
 &= -\frac{3}{2}\pi Ur^2 \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = -2\pi Ur^2, \\
 r' &= R\sin\theta, \quad z' = R\cos\theta, \quad ds = Rd\theta.
 \end{aligned}$$

В интеграле I_2 при $r' \rightarrow 0$ получаем

$$\begin{aligned}
 G(M, M') &\simeq -\frac{\pi r^2 (r')^2}{(r^2 + (z')^2)^{3/2}}, \\
 \frac{1}{r'} \frac{\partial G}{\partial r'} &\simeq -\frac{2\pi r^2}{(r^2 + (z')^2)^{3/2}}, \\
 \Psi(M') &= C + \mathcal{O}(r')^2.
 \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в интеграл I_2 в пределе $R \rightarrow \infty$, имеем

$$I_2 = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{C 2\pi r^2 dz'}{(r^2 + (z')^2)^{3/2}} = -4\pi C.$$

Подставляя в (10) вычисленное значение $I = I_1 + I_2$ и учитывая, что $\Psi = 0$ на границе ∂S , получим следующее уравнение:

$$AV(s) = 4\pi \left\{ \frac{1}{2}Ur^2 + C \right\}. \tag{13}$$

К нему нужно присоединить условие на циркуляцию

$$\int_0^l V(s) ds = -\Gamma. \tag{14}$$

Из системы уравнений (13) и (14) находим постоянную C и распределение скорости на профиле $V(s)$. Функцию тока $\Psi(M)$ вне контура ∂S найдем, пользуясь (11):

$$\Psi(M) = \frac{1}{2}Ur^2 + C - \frac{1}{4\pi} \tilde{A}V(M). \tag{15}$$

4. ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть ∂S граница сечения тора меридиональной плоскостью. Так же как и для плоской задачи, для проведения численных расчетов вводится дискретизация контура ∂S конечным числом точек $M_1, M_2, \dots, M_N = M_0$. Координаты точек M задаются параметром $\zeta \in (0, 1)$, так чтобы точке M_i соответствовало значение $\zeta = \zeta_i = i / N$, $i = 1, 2, \dots, N$. Параметр ζ и длина дуги на контуре s связаны дифференциальным соотношением $ds = f(\zeta)d\zeta$.

Таким образом, функция Грина от двух точек M и M' на контуре ∂S превратится в функцию двух аргументов $G(\zeta, \zeta')$. Она имеет логарифмическую особенность при $\zeta' \rightarrow \zeta$

$$G(\zeta, \zeta') = 2r \ln \left[\frac{lf}{8\pi r} \sin \pi |\zeta - \zeta'| \right] + 4r + g(\zeta, \zeta'), \tag{16}$$

где $g(\zeta, \zeta')$ – аналитическая функция аргумента ζ' периода 1.

Для периодических функций с такой периодической особенностью в работе [11] выведены специальные квадратурные формулы (формулы (17) и (18)). Для них в [12] доказана экспоненциальная сходимость. С их помощью получаем следующую аппроксимацию для матрицы A :

$$AV(\zeta_i) = \sum_{j=1}^N A_{ij} V_j, \quad (17)$$

$$A_{ij} = -\frac{lf_j}{N} (2r_i \beta(|i-j|) + G_{ij}), \quad G_{ij} = \begin{cases} G(\zeta_i, \zeta_j), & i \neq j, \\ 2r_i \ln \frac{lf_i}{8\pi r_i} + 4r_i, & i = j, \end{cases}$$

и систему линейных уравнений, аппроксимирующих интегральные уравнения (13) и (14):

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} V_j - 4\pi C = 2\pi r_i^2 U, \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{lf_j}{N} V_j = -\Gamma.$$

5. РАСЧЕТЫ ОБТЕКАНИЯ ТОРООБРАЗНЫХ ТЕЛ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ

Общее распределение скорости V на границе осесимметричного тела представляется в виде линейной комбинации $V = UV_0 + \Gamma V_\Gamma$ двух фундаментальных распределений V_0 и V_Γ .

Распределение скорости V_Γ на границе профиля и константа C_Γ для единичной циркуляции и нулевой скорости потока на бесконечности находятся из системы уравнений, которая получается подстановкой в (18) $\Gamma = 1, U = 0$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} V_j - 4\pi C = 0, \quad \sum_{j=1}^N \frac{lf_j}{N} V_j = -1. \quad (19)$$

Аналогично находится распределение скорости V_0 на границе профиля и константа C_0 при $\Gamma = 0$ и $U = 1$

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} V_j - 4\pi C = 2\pi r_i^2, \quad \sum_{j=1}^N \frac{lf_j}{N} V_j = 0. \quad (20)$$

В табл. 1 демонстрируется, как увеличивается точность расчетов с увеличением числа точек N на контуре тора. Точки границы тора ∂S задаются уравнением $r = 2 + \sin t$, $z = 0.5 \cos t$. В первой колонке приведены значения параметра t , в следующих трех колонках приведены расчеты значений скоростей $V_\Gamma(t)$ для $N = 16, 32$ и 64 при обтекании контура с циркуляцией $\Gamma = 1$ и скоростью потока $U = 0$. В последних трех колонках приведены расчеты значений скоростей $V_0(t)$ для $N = 16, 32$ и 64 с циркуляцией $\Gamma = 0$ и $U = 1$. При $N = 16, 32$ и 64 достигается точность 3, 4 и 6 знаков соответственно.

Зная два фундаментальных распределения скоростей, можно построить общее распределение скорости на границе обтекаемого контура с произвольно заданными значениями U и Γ : $V = UV_0 + \Gamma V_\Gamma$ и определить константу $C = UC_0 + \Gamma C_\Gamma$.

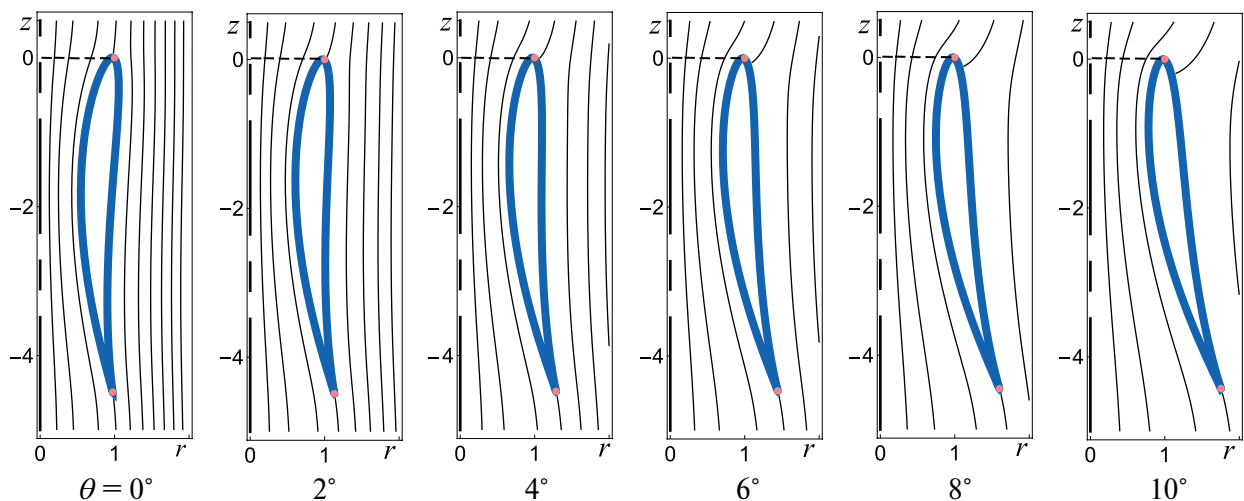
Функция тока вне контура ∂S находится квадратурой (15). С помощью квадратурной формулы для периодических функций (17) получаем формулу, аналогичную для плоской задачи [11]:

$$\Psi(r, z) = \frac{1}{2} U r^2 + C + \frac{l}{4\pi N} \sum_{j=1}^N G(r, z, r_j, z_j) V_j f_j. \quad (21)$$

Таблица 1

$\frac{t}{2\pi}$	$\Gamma = 1, U = 0$			$\Gamma = 0, U = 1$		
	$V_\Gamma (N = 16)$	$V_\Gamma (N = 32)$	$V_\Gamma (N = 64)$	$V_0 (N = 16)$	$V_0 (N = 32)$	$V_0 (N = 64)$
0.125	-0.057078	-0.057069	-0.057068	1.36138	1.36147	1.36148
0.25	-0.065127	-0.065111	-0.065109	2.79678	2.79736	2.79743
0.375	-0.057078	-0.057069	-0.057068	1.36138	1.36147	1.36148
0.5	-0.100577	-0.100602	-0.100606	0.22108	0.22067	0.22062
0.625	-0.32877	-0.328961	-0.328984	-1.28767	1.28858	-1.28869
0.75	-0.859781	-0.859018	-0.858927	-3.91833	-3.91419	-3.91369
0.875	-0.32877	-0.328961	-0.328984	-1.28767	-1.28858	-1.28869
0.0	-0.100577	-0.100602	-0.100606	0.22108	0.22067	0.220625

Для контуров типа крыла циркуляция находится с помощью постулата Чаплыгина-Жуковского – линия тока сходится с острой кромки. Острую кромку удобно сгладить, так чтобы кривизна на ней была достаточно большой, но конечной. Тогда для выполнения постулата Чаплыгина-Жуковского достаточно потребовать, чтобы скорость в точке максимальной кривизны профиля была нулевой.



Фиг. 4. Линии тока при обтекании торов, образованных профилями Жуковского, направленных под различными углами атаки.

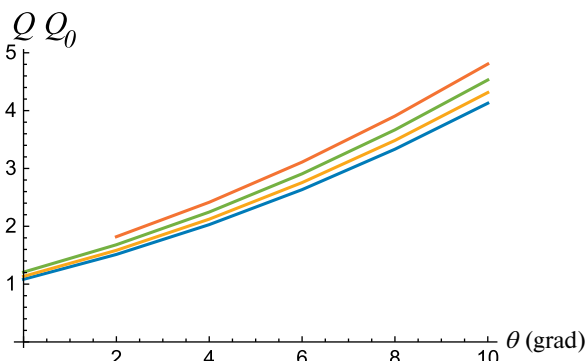
На фиг. 4 изображены линии тока обтекания торов, образованных вращениями профилей Жуковского. Профили направлены под различными углами атаки к оси z – штрихпунктирная линия. Ось профиля – прямая, соединяющая вершину и острую кромку, направлена под разными углами к оси вращения (углы атаки). Углы атаки имеют значения 0, 2, 4, 6, 8 и 10 градусов. Вершины всех профилей находятся на одинаковом единичном расстоянии от оси вращения (штриховой отрезок).

Профили Жуковского определяются с помощью конформного отображения [16, с. 190].

$$\frac{z - z_0}{z + z_0} = \left(\frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \right)^{z_0/Z_0}$$

Оно отображает плоскость комплексного переменного Z на физическую область комплексного переменного z . Окружность $Z = Z_0 - ae^{-i\beta} + a^{-i(t-\beta)}, t \in (0, 2\pi)$, на плоскости Z отображается на профиль Жуковского на плоскости z . Острая кромка профиля соответствует значениям $t = 0$ и $t = 2\pi$. Угол при острой кромке равен $\tau = \pi(2 - z_0 / Z_0)$. Параметр β является мерой изогнутости профиля. При

$\beta = 0$ получается симметричный профиль. На фиг. 4 изображены профили Жуковского с параметрами $a = 1.05, Z_0 = 1.108, \tau = 0.1$ и $\beta = -0.1$. Параметр z_0 вычисляется по формуле $z_0 = 2Z_0 + \tau / \pi$.



Фиг. 5. Зависимости расхода через сопло от угла атаки, при значениях параметра $\beta = -0.1; -0.15; -0.2; -0.25$.

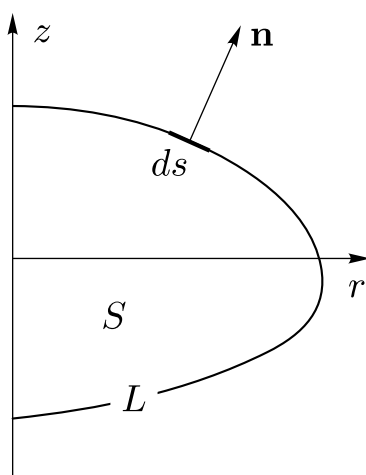
Циркуляцию можно найти с помощью постулата Чаплыгина-Жуковского описанным выше способом. Расход однородного потока через сечение радиуса R равен $Q_0 = U \pi R^2$. Внутреннюю границу тора можно рассматривать как сопло, через которое течет жидкость. По мере увеличения угла атаки увеличивается циркуляция. С увеличением угла атаки при постоянной скорости потока $U = 1$ циркуляция растет и, как следствие, растет расход жидкости через тор (сопло) Q .

Функция тока на границе профиля равна нулю, а на оси вращения значение функции тока равно $-C$. Соответственно, расход жидкости через сопло - тор равен $Q = -2\pi C$ и для относительного расхода получаем $Q / Q_0 = -2C$.

На фиг. 5 представлены зависимости относительного расхода Q / Q_0 через сопло от угла атаки, при значениях параметра $\beta = -0.1; -0.15; -0.2; -0.25$. Для каждого значения β вычисляются расходы для углов атаки $\theta = 0^\circ; 2^\circ 4^\circ 6^\circ 8^\circ$ и 10° градусов. Через них проводится кривая на фиг. 5.

Программа реализована в пакете Wolfram Mathematica [17]. Точность 5 знаков достигается при $N = 64$. Для расчета обтекания всех шести профилей и построения графика зависимости $Q(\theta) / Q_0$ требуется менее секунды расчетного времени.

Построенные зависимости показывают монотонное увеличение расхода при росте угла атаки. Как видно из графиков, при увеличении параметра β расход тоже увеличивается от значения, равного 1 при нулевом угле атаки, до значения, большего 4-х при угле атаки 10° .



Фиг. 6. Обозначения

6. ОБТЕКАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА

Пусть ∂S сечение односвязной осесимметричной поверхности меридиональной плоскостью. Специфика этой задачи состоит в том, что контур L , по которому будет вестись интегрирование, не будет

замкнутым (фиг. 6). Для этого случая циркуляция Γ и постоянная C будут равны нулю. Распределение скорости на контуре L находится из уравнения (13), а функция тока вне контура – из (21). Поскольку контур L незамкнут, то подинтегральная функция неперриодическая. Используются по-прежнему линейные уравнения (18). Однако остаточный член квадратурной формулы (17) для матрицы A имеет не экспоненциальную, а степенную оценку $R_N \sim \frac{1}{12N^2}$, где N – число точек на контуре.

Таблица 2

$t / (2\pi)$	V_{exact}	$V (N = 16)$	$V (N = 32)$	$V (N = 64)$	$V (N = 128)$
0.125	0.953 762	0.953 939	0.953 616	0.953 733	0.953 753
0.250	1.033 554	1.04132	1.033 337	1.033 595	1.033 559
0.375	1.055 505	1.053 652	1.055 391	1.055 553	1.055 511
0.500	1.059 121	1.062 335	1.059 515	1.05917	1.059 127

Проверка на известных точных решениях показывает также достаточно быструю сходимость метода и в этом случае. В табл. 2 приводятся сравнения точного решения при отношении осей $\chi = 1 / 5$ с расчетами при различном числе точек на границе эллипсоида. Точки эллипсоида с отношением осей χ определяются из уравнений $r = \chi \sin t, z = \cos t$. Точное решение имеет вид

$$V = \frac{2}{2 - A(\chi)} \frac{r}{\sqrt{r^2 + \chi^4 z^2}},$$

$$A(\chi) = 2 \frac{\chi^2}{1 - \chi^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\chi^2 - 1}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \chi^2}}{1 - \sqrt{1 - \chi^2}} - 1 \right\}, \quad \chi < 1,$$

$$A(\chi) = 2 \frac{\chi^2}{1 - \chi^2} \left\{ \frac{\sqrt{\chi^2 - 1}}{\sqrt{\chi^2 - 1}} - 1 \right\}, \quad \chi > 1.$$

При $N = 16, 32, 64$ и 128 достигается точность 3, 4, 5 и 6 знаков соответственно.

ВЫВОДЫ

Построенная численная схема для решения задачи обтекания осесимметричных торов аналогична схеме плоской задачи обтекания профилей [11]. Она сводится к решению системы линейных уравнений для значений скорости в точках сетки на границе обтекаемого тела. Матрица линейной системы находится по квадратурной формуле с погрешностью, которая убывает в зависимости от числа элементов сетки N по экспоненте e^{-CN} . Доказательство экспоненциального убывания погрешности квадратурной формулы с периодической особенностью доказывается в [12]. Функция тока в численной схеме метода граничных элементов ранее не использовалась, хотя она обладает многими преимуществами перед численной схемой для потенциала. Во-первых, схема значительно проще существующих, во-вторых, точность ее значительно выше и, в-третьих, схема удобна для построения линий тока.

Для расчета осесимметричного сопла получен любопытный результат: при достаточно небольшом изменении формы сопла с постоянной площадью входного сечения можно в несколько раз повысить расход жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воинов В.В., Воинов О.В., Петров А.Г.* Метод расчета потенциального обтекания тела вращения потоком несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1974. Т. 14. № 3. С. 797–802.
2. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
3. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О движении и заполнении полостей в безграничной жидкости и около плоскости // Ж. прикл. механ. и техн. физ. 1975. № 1. С. 89–95.

4. *Воинов О.В., Воинов В.В.* Численный метод расчета нестационарных движений идеальной несжимаемой жидкости со свободными поверхностями // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 3. С. 559–562.
5. *Воинов О.В., Воинов В.В.* О схеме захлопывания кавитационного пузырька около стенки и образования кумулятивной струйки // Докл. АН СССР. 1976. Т. 227. № 1. С. 63–66.
6. *Smyrilis Y.-S., Karageorghis A.* A matrix decomposition MFS algorithm for axisymmetric potential problems // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2004. No 28. P. 463–474.
7. *Rui Z., Jin H., Tao L.* Mechanical quadrature methods and their splitting extrapolations for solving boundary integral equations of axisymmetric Laplace mixed boundary value problems // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2006. No 30. P. 391–398.
8. *Reutskiy S.* The method of approximate fundamental solutions for axisymmetric problems with Laplace *oABilde*-operator // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2007. No 31. P. 410–415.
9. *Singh J., Glire A., Achard J.* A multipole expansion-based boundary element method for axisymmetric potential problem // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2009. No 33. P. 654–660.
10. *Пономарева М.А., Собко Е.А., Якутенок В.А.* Решение осесимметричных задач теории потенциала непрямым методом граничных элементов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и механ. 2015. № 5. С. 84–96.
11. *Петров А.Г.* Схема без насыщения для обтекания решетки профилей и вычисление точек отрыва в вязкой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 7. С. 1326–1338.
12. *Петров А.Г.* Алгоритм построения квадратурных формул с экспоненциальной сходимостью для линейных операторов, действующих на периодические функции // Изв. Вузов. Математика. 2021. № 2. С. 86–92.
13. *Петров А.Г.* Высокоточные численные схемы решения плоских краевых задач для полигармонического уравнения и их применение к задачам гидродинамики // Прикл. матем. и механ. 2023. Т. 87. № 3. С. 343–368.
14. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидродинамика. Т. 1. 2. М.: Физматгиз, 1963.
15. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
16. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
17. *Wolfram S.* The Mathematica Book. New York: Wolfram Media, 2003.

EXPONENTIALLY CONVERGENT NUMERICAL SCHEME FOR THE STREAM FUNCTION OF POTENTIAL FLOW OVER AXISYMMETRIC BODIES

A. G. Petrov^{a,*}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,
101, bld. 1, Vernadskogo Ave., Moscow, 119526 Russia*

**e-mail: petrovipmech@gmail.com*

Received 05 February, 2023

Revised 10 October, 2023

Accepted 20 October, 2023

Abstract. A boundary element scheme for the problem of potential flow over an axisymmetric toroidal body is considered. An integral equation for the velocity distribution on the body is derived. It is shown that the numerical scheme for solving the considered equation converges exponentially.

Keywords: boundary element method, axial symmetry, potential flow, exponential convergence.

УДК 519.71

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕТИ ТОЧЕК НАБЛЮДЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ГРАВИМЕТРИИ И МАГНИТОМЕТРИИ¹⁾

© 2024 г. И. Э. Степанова^{1,*}, Д. В. Лукьяненко², И. И. Колотов²,
А. В. Щепетилов², А. Г. Ягола², А. Н. Левашов²

¹119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия

²123995 Москва, ул. Большая Грузинская, 10, стр. 1, Ин-т физики Земли им. О.Ю. Шмидта, Россия

*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 28.06.2023 г.

Переработанный вариант 20.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

В статье рассматривается вопрос об однозначной разрешимости систем линейных алгебраических уравнений, к решению которых сводятся многие обратные задачи геофизики в результате дискретизации после применения метода интегральных уравнений или интегральных представлений. Приводятся примеры вырожденных и невырожденных систем разных размерностей, возникающих при обработке магнитометрических и гравиметрических данных экспериментальных наблюдений. Делаются выводы о способах построения оптимальной сетки точек экспериментальных наблюдений. Библ. 14. Фиг. 2.

Ключевые слова: вырожденные системы линейных алгебраических уравнений, интегральные представления, однозначная разрешимость, определитель Коши.

DOI: 10.31857/S0044466924030032, EDN: ХННВТН

ВВЕДЕНИЕ

При интерпретации геофизических данных часто применяются методы, базирующиеся на различных интегральных представлениях магнитного и гравитационного полей [1-6]. Представления полезных сигналов в виде свертки известной функции с подлежащей определению поверхностной, объемной и даже линейной плотностью распределения масс, магнитных диполей и т.п. позволяют редуцировать обратные задачи геофизики по поиску параметров геологической среды к решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с приближенно заданной матрицей и правыми частями [1]. В наших предыдущих работах [7,8] были рассмотрены проблемы единственности решения СЛАУ с симметрическими положительно полуопределенными матрицами в локальном и региональном вариантах, а также сформулированы критерии вырожденности СЛАУ, возникающих при использовании метода интегральных уравнений [4, 5].

1. ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ В МЕТОДЕ S-АППРОКСИМАЦИЙ. ЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ

Если известны компоненты магнитного или гравитационного поля (например, первая производная потенциала по z на некотором рельефе и вторые производные гравитационного потенциала), то можно представить потенциал поля в виде суммы простого и двойного слоев, распределенных на скольких горизонтальных плоскостях, расположенных ниже заданного рельефа. Если систему координат выбрать так, чтобы дневная поверхность (поверхность Земли в локальном варианте метода S-аппроксимаций, см. [4–5, 9–13]) описывалась уравнением $z=0$, то потенциал записывается в виде [8]:

$$V(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{l,l}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2}} + \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках госзадания ИФЗ РАН.

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi_1, \xi_2)(z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^3},$$

$$M = (x, y, z), \hat{x} = (x, y), \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2).$$

Тогда производная по z потенциала V , взятая с обратным знаком, будет иметь вид:

$$-\frac{\partial V}{\partial z}(M) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi)(z - H_l) z d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^3} +$$

$$+ \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi) \left(2(z - H_l)^2 - (x - \xi_1)^2 - (y - \xi_2)^2 \right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^5}, \quad M = (x, y, z). \tag{2}$$

Вторая производная потенциала (например, производные по z и по x) может быть выражена следующим интегралом:

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}(M) = 3 \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{1,l}(\xi)(x - \xi_1)(z - H_l) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^5} +$$

$$+ 3 \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_{2,l}(\xi)(x - \xi_1) \left((x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 - 4(z - H_l)^2 \right) d\xi_1 d\xi_2}{\left[\sqrt{(x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 + (z - H_l)^2} \right]^7}, \quad M = (x, y, z). \tag{3}$$

Функции $\rho_{1,l}, \rho_{2,l}$ неизвестны. Предположим, что компоненты поля заданы в конечном множестве точек $M_i, M_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, \dots, N$. Обозначим подынтегральную функцию в первом слагаемом для l -го слоя в (2) в точке M_i через $Q_{1,l}^{(i)}$, а во втором слагаемом – через $Q_{2,l}^{(i)}$. Тогда получим:

$$-\frac{\partial V(M_i)}{\partial z} \equiv f_i = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \tag{4}$$

На практике компоненты поля всегда определяются с некоторой погрешностью δ , поэтому в качестве входной информации выступают значения $f_{i,\delta}$. С помощью постановки вариационной задачи

$$\Omega(\rho) = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}^2(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}^2(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = \min_{\rho} \tag{5}$$

$$f_{i,\delta} - \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\rho_{1,l}(\hat{\xi}) Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) + \rho_{2,l}(\hat{\xi}) Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{6}$$

находим, что искомые функции должны иметь вид [4, 5, 9]:

$$\rho_{1,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda), \quad \rho_{2,l}^{(a)}(\hat{\xi}) = \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda),$$

$$\tilde{\rho}_{1,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad \tilde{\rho}_{2,l}(\hat{\xi}, \lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i Q_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}), \quad l = 1, 2, \dots, L. \tag{7}$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных уравнений:

$$A\lambda = f_{\delta}, \tag{8}$$

элементы матрицы которой в нашем случае имеют вид

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^L \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{Q}_{1,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \mathcal{Q}_{1,l}^{(j)}(\hat{\xi}) + \mathcal{Q}_{2,l}^{(i)}(\hat{\xi}) \mathcal{Q}_{2,l}^{(j)}(\hat{\xi}) \right) d\hat{\xi}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (9)$$

Элементы a_{ij} матрицы A при использовании интегральных представлений (2) и (3) могут быть вычислены явно с помощью интеграла Пуассона. Например, в случае представления вертикальной компоненты гравитационного поля получим выражения:

$$a_{ij} = 2\pi \sum_{l=1}^L \left\{ \frac{z_i + z_j - 2H_l}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^3} - \frac{(z_i + z_j - 2H_l) \left[9 \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right] - 6(z_i + z_j - 2H_l)^2 \right]}{\left(\sqrt{(z_i + z_j - 2H_l)^2 + (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right)^7} \right\}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (10)$$

По найденным из решения системы (8)–(10) множителям $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, N$, можно далее определить высшие производные потенциала, выполнить аналитическое продолжение гравитационного поля и т.д. Для приложений очень важно иметь возможность пересчета значений поля на некоторую регулярную сеть наблюдений. В настоящей работе акцент делается на построении такой сети наблюдений, чтобы матрица системы (8) была невырожденной.

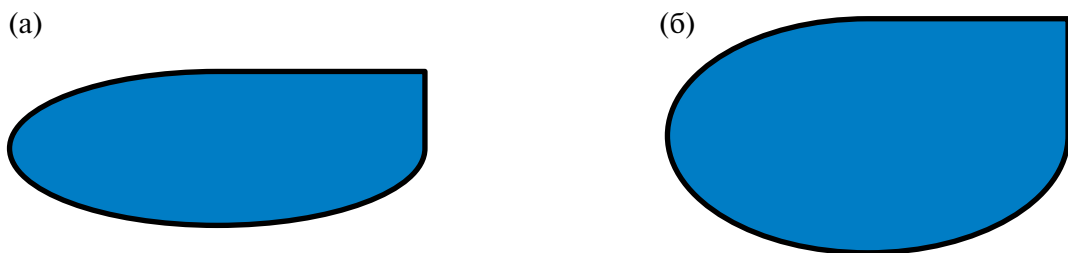
Если какая-либо высшая производная гравитационного потенциала аппроксимируется потенциалом простого слоя, распределенного на одной или нескольких горизонтальных плоскостях, то матрица системы (8)–(10) принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4(z_1 + H)^2} & \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2 \right)^{3/2}} \dots & \frac{z_1 + z_N + 2H}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{3/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{z_1 + z_N + 2H}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{3/2}} & \frac{z_2 + z_N + 2H}{\left((z_2 + z_N + 2H)^2 + r_{2N}^2 \right)^{3/2}} \dots & \frac{1}{4(z_N + H)^2} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Матрица системы (11) симметрическая, все ее элементы, как легко видеть, неотрицательные.

В [8] доказана теорема о том, что матрица системы (8)–(10) при представлении поля с помощью потенциала простого слоя имеет ранг не меньше двух; таким образом, для двух различных точек наблюдения система является невырожденной, а также аналогичная теорема при применении потенциалов двойного слоя для представления элементов гравитационного и магнитного полей.

В [8] приведены два примера однозначной разрешимости системы (8)–(10) при $N = 3$ и $N = 4$. Попытаемся обобщить результаты, полученные ранее, на случай, когда точки наблюдения расположены



Фиг. 1. Проекция областей расположения двух групп точек наблюдения на горизонтальную плоскость.

группами, расстояния между проекциями точек в каждой группе намного меньше, чем расстояния между представителями различных групп (см. фиг. 1).

Пример 1. Число точек наблюдений $N = 3M$. Если число точек наблюдения равно трем, то матрица системы (8)–(10) для потенциала простого слоя приобретает вид

$$A_{33} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2} = \frac{1}{4(z_2 + H)^2} = \frac{1}{4(z_3 + H)^2};$$

$$b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}} = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}. \quad (12)$$

Такие соотношения между элементами матрицы возможны, если координаты z всех трех точек наблюдения одинаковы, а сами точки расположены в вершинах равностороннего треугольника на соответствующей плоскости. При выполнении указанных условий все три точки лежат на поверхности в трехмерном пространстве, описываемой уравнением

$$\frac{z}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = C = \text{const} > 0. \quad (13)$$

В [8] доказано, что в данном частном случае трехмерной системы уравнений решение определяется однозначно. Если разделить точки наблюдения на группы по три точки в каждой и принять, что z -координаты в каждой такой подсистеме у всех элементов одинаковы, то матрица (12) приобретает вид

$$A_{3N3N} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{N1} & \dots & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2} = \frac{1}{4(z_2 + H)^2} = \frac{1}{4(z_3 + H)^2};$$

$$b = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}} = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}} = C =$$

$$= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; c_{i1} = \frac{z_i + z_4 + 2H}{\left((z_i + z_4 + 2H)^2 + r_{i4}^2\right)^{3/2}},$$

$$c_{i2} = \frac{z_i + z_5 + 2H}{\left((z_i + z_5 + 2H)^2 + r_{i5}^2\right)^{3/2}}, c_{i3} = \frac{z_i + z_6 + 2H}{\left((z_i + z_6 + 2H)^2 + r_{i6}^2\right)^{3/2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

В (14) блоки B_{ij} и A_{ii} , $i, j = 1, \dots, N$, имеют вид, аналогичный A_{11} , B_{12} . Элементы блоков B_{ij} по модулю существенно меньше, чем элементы диагональных блоков, поэтому можно выбрать такое расположение точек наблюдения, что определитель всей матрицы будет отличен от нуля, если отличны от нуля определители диагональных подматриц, поскольку [14] определитель блочно-диагональной матрицы с нулевыми внедиагональными блоками равен произведению определителей диагональных блоков. В нашем случае внедиагональные блоки будут вносить пренебрежимо малый вклад в определитель матрицы всей системы (размерность которой – $3N$), а сам по себе определитель является непрерывной функцией элементов матрицы. Можно также вспомнить известное утверждение о блочных матрицах [14]:

$$\det \begin{bmatrix} A & B_1 \\ B_2 & C \end{bmatrix} = \det A \cdot \det [C - B_1 A^{-1} B_2]. \quad (15)$$

В (15) латинскими буквами обозначены блочные матрицы. Если элементы внедиагональных блоков матрицы (15) много меньше, чем элементы диагональных (по модулю), то определитель второго множителя в (15) мало отличается от определителя блока C (поскольку в произведении трех матриц будут фигурировать элементы, по меньшей мере, второго порядка малости по сравнению с элементами матрицы C). Для более строгого обоснования справедливости нашего утверждения напомним, что определитель суммы двух матриц A и B равен сумме определителей матриц, состоящих из всех возможных комбинаций столбцов матрицы A и матрицы B . Если столбцы матрицы B представляют собой столбцы матрицы A , умноженные на малое число ε , то можно написать

$$\det(A + B) = \det A \cdot \sum_{k=0}^N C_N^k \varepsilon^k = \det A \cdot (1 + \varepsilon)^N, \quad C_N^k = \frac{N!}{k!(N-k)!}.$$

Таким образом, определитель матрицы $A+B$ будет не слишком сильно отличаться от определителя A , если ε достаточно мало.

Пример 2. Число точек наблюдений $N = 4M$. Рассмотрим сначала, как и в работе [8], систему (8)–(10) для четырех точек наблюдения при аппроксимации элементов поля с помощью потенциала простого слоя. Матрица системы имеет в этом случае вид

$$A_{44} = \begin{bmatrix} a & c & d_1 & d_2 \\ c & b & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_3 & a_1 & c_1 \\ d_2 & d_4 & c_1 & b_1 \end{bmatrix},$$

$$a = \frac{1}{4(z_1 + H)^2}; c = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}};$$

$$b = \frac{1}{4(z_2 + H)^2}; a_1 = \frac{1}{4(z_3 + H)^2}; \quad (16)$$

$$b_1 = \frac{1}{4(z_4 + H)^2}; c_1 = \frac{z_3 + z_4 + 2H}{\left((z_3 + z_4 + 2H)^2 + r_{34}^2\right)^{3/2}};$$

$$d_1 = \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}}; d_2 = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{\left((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2\right)^{3/2}};$$

$$d_3 = \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; d_4 = \frac{z_2 + z_4 + 2H}{\left((z_2 + z_4 + 2H)^2 + r_{24}^2\right)^{3/2}}.$$

Выберем координаты точек наблюдения так, чтобы элементы матрицы A_{44} , обозначенные через $d_i, i = 1, \dots, 4$, были одинаковыми. Ранее мы показали, как этого можно добиться, принимая во внимание свойства функции, связывающей z -координаты точек наблюдений с расстоянием между проекциями этих точек на горизонтальную плоскость (см. [8]). Решение системы (8)–(10) в случае 4 точек наблюдения, расположенных на одной горизонтальной плоскости в вершинах ромба, определяется однозначно. Так же, как и в примере 1, перейдем к блочно-диагональной матрице для системы $4M$ точек наблюдения. Покажем, как можно осуществить подобный переход путем последовательного увеличения числа пунктов измерений.

Предположим, что нам даны 8 точек наблюдений, и матрица системы имеет вид

$$\begin{aligned}
 A_{88} &= \begin{bmatrix} A_{44} & B_{44} \\ B_{44} & C_{44} \end{bmatrix}, A_{44} = \begin{bmatrix} a & c & d_1 & d_2 \\ c & b & d_3 & d_4 \\ d_1 & d_3 & a_1 & c_1 \\ d_2 & d_4 & c_1 & b_1 \end{bmatrix}, \\
 a &= \frac{1}{4(z_1 + H)^2}; c = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left((z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2\right)^{3/2}}; \\
 b &= \frac{1}{4(z_2 + H)^2}; a_1 = \frac{1}{4(z_3 + H)^2}; \\
 b_1 &= \frac{1}{4(z_4 + H)^2}; c_1 = \frac{z_3 + z_4 + 2H}{\left((z_3 + z_4 + 2H)^2 + r_{34}^2\right)^{3/2}}; \\
 d_1 &= \frac{z_1 + z_3 + 2H}{\left((z_1 + z_3 + 2H)^2 + r_{13}^2\right)^{3/2}}; d_2 = \frac{z_1 + z_4 + 2H}{\left((z_1 + z_4 + 2H)^2 + r_{14}^2\right)^{3/2}}; \\
 d_3 &= \frac{z_2 + z_3 + 2H}{\left((z_2 + z_3 + 2H)^2 + r_{23}^2\right)^{3/2}}; d_4 = \frac{z_2 + z_4 + 2H}{\left((z_4 + z_4 + 2H)^2 + r_{24}^2\right)^{3/2}}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Матрицы B_{44} и C_{44} – такие 4×4 – матрицы, что определитель всей матрицы A_{88} отличен от нуля. Этого можно добиться следующим образом.

Сначала выбираем такие четыре точки, чтобы определитель четырехмерной матрицы A_{44} не был равен нулю, а затем учитываем справедливость выражения [14]:

$$\det \begin{bmatrix} A_{44} & B_{44} \\ B_{44} & C_{44} \end{bmatrix} = \det A_{44} \cdot \det [C_{44} - B_{44} A_{44}^{-1} B_{44}].$$

Координаты четырех точек «второй очереди» можно задать так, чтобы расстояния между ними и точками «первой очереди» были существенно больше, чем расстояния между точками, принадлежащими каждой группе в отдельности. Тогда определитель второго множителя будет также отличен от нуля. Далее действуем так же, как и в примере 1.

Таким образом, нами доказана

Теорема 1. В случае $N = 3M$ и $N = 4M$ (N – число точек наблюдений, M – натуральное число) существуют такие конфигурации сети наблюдений, что матрица системы (8)–(10) является невырожденной.

Пример 3. Случай произвольного N . Допустим теперь, что точки наблюдения расположены таким образом, что выполняется достаточное условие невырожденности матрицы [14]:

$$|d_{ii}| > \sum_{j \neq i}^N |d_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, N \Rightarrow \det D \neq 0. \tag{18}$$

Слева в (18) стоят модули диагональных элементов некоторой матрицы, а справа – сумма модулей элементов каждой строки в отдельности.

Рассмотрим диагональные и внедиагональные элементы матрицы (8):

$$a = \frac{1}{4(z_i + H)^2}; \quad c = \frac{z_i + z_j + 2H}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2\right)^{3/2}}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Если вертикальные координаты всех точек одинаковы, то достаточное условие невырожденности матрицы (18) будет выполнено в том случае, когда

$$r_{ij}^2 \geq \left((N-1)^{2/3} - 1 \right) \cdot (z+H)^2, z_i \equiv z; i, j = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Итак, верна

Теорема 2. При выполнении условия (19) решение системы (8)–(10) определяется однозначно.

Замечание. Как показывает практика интерпретации реальных геофизических данных, условие (19) является чрезмерно строгим. Расстояние между двумя соседними точками наблюдения на плоскости может быть даже меньше, чем расстояние от этой плоскости до ближайшего источника. Матрица системы получается невырожденной. При выполнении регуляризованного разложения Холецкого этой матрицы параметр регуляризации оказывается очень малым по сравнению с максимальным диагональным элементом (напомним, что элементы матрицы (8) – неотрицательные). Таким образом, достаточное условие невырожденности системы (19) имеет не слишком большую значимость для решения обратных задач гравимагниторазведки.

Пример 4. Поверхность уровня гармонической функции. Рассмотрим систему (8)–(10) для произвольного числа точек наблюдений M и предположим, что точки наблюдения находятся на поверхности уровня гармонической функции, равной в каждой точке вертикальной компоненте гравитационного потенциала:

$$C = \frac{z_i + z_j + 2H}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2 \right)^{3/2}}, i, j = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Исследуем вопрос однозначной разрешимости системы (8)–(10) в этом случае.

Если z -координаты точек наблюдения известны, то из (20) следует, что расстояния между проекциями точек на плоскости можно найти по следующей формуле:

$$r_{ij}^2 = \left(\frac{z_i + z_j + 2H}{C} \right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad (21)$$

$$i, j = 1, \dots, N.$$

В (21) предполагается, что поле создается только одним простым слоем, расположенным на глубине H . Пусть матрица СЛАУ имеет следующий вид:

$$A_{NN} = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \\ 1 & a_{22} & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & a_{N-1N-1} & 1 & \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & a_{NN} & \end{bmatrix}. \quad (22)$$

На диагонали матрицы стоят не равные единице (a в остальном – произвольные) вещественные числа. Внедиагональные элементы имеют одно и то же значение, равное 1 (единицу можно заменить любой константой, не совпадающей ни с одним из значений диагональных элементов).

Теорема 3. Определитель матрицы равен

$$\det A_{NN} = \left(a_{11} + \sum_{j=2}^N \frac{a_{11} - 1}{a_{jj} - 1} \right) \times (a_{22} - 1) \cdot (a_{33} - 1) \cdot (a_{NN} - 1). \quad (23)$$

Доказательство. Вычтем первый столбец из всех последующих, а затем вычтем линейную комбинацию столбцов, начиная со второго, из первого столбца. Тогда определитель примет следующий вид:

$$\det A_{NN} = \begin{vmatrix} a_{11} - \sum_{j=2}^N \frac{1 - a_{11}}{a_{jj} - 1} & 1 - a_{11} & \dots & 1 - a_{11} \\ 0 & a_{22} - 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{N-1N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

Перемножение диагональных элементов приводит нас к утверждению теоремы.

Доказанная нами теорема 3 может быть полезна при построении сети точек наблюдений, которая гарантировала бы невырожденность соответствующей СЛАУ при интерпретации гравитационных и магнитных данных. А именно, следует смоделировать такую сеть, чтобы точки наблюдения находились на поверхности уровня некоторой гармонической функции, значениями которой в этих точках являются элементы матрицы СЛАУ. Однако не все так просто, как кажется на первый взгляд. Проблема построения сети заключается в том, что элементы матрицы – это не совсем абстрактные вещественные числа. Элементы СЛАУ содержат в себе информацию о расстояниях между точками сети наблюдений как в трехмерном пространстве, так и на плоскости (тогда рассматриваются проекции соответствующих точек). Поэтому «в лоб» применять формулу (21) для нахождения расстояний между проекциями точек на плоскости, если известны z -координаты этих точек, нельзя: необходимо сформулировать некоторую вариационную задачу, решение которой позволило бы достичь минимального отклонения координат реальных точек от расчетных. Кроме того, диагональные элементы матрицы должны быть все либо больше внедиагональных, либо меньше. Если сумма в первом сомножителе (23) знакопеременная, то определитель может при некоторых значениях диагональных элементов обращаться в нуль. Для того чтобы избежать такой ситуации, следует строить оптимальную сеть наблюдений таким образом, чтобы определитель в (23) был гарантированно отличен от нуля.

Пример 5. Случай кососимметрических матриц. В тех случаях, когда необходимо построить математические модели высших производных гравитационного или магнитного потенциала (см. формулу (3)), матрица системы линейных алгебраических уравнений оказывается кососимметрической. На диагонали стоят нули, а внедиагональные элементы «при отражении от главной диагонали» меняют знак. Если элементы матрицы (8) продифференцировать по x_i , например, то мы как раз и получим описанную выше систему линейных алгебраических уравнений с кососимметрической матрицей.

Необходимо отметить, что метод линейных интегральных представлений позволяет находить пространственное распределение производных потенциала любых порядков по определенным из решения всего одной СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений), записанной для известных из наблюдений значений какой-либо компоненты гравитационного или магнитного поля. Но если попытаться верифицировать, если можно так выразиться, найденное распределение некоторой производной потенциала, то мы придем к необходимости отыскания решения СЛАУ с кососимметрической матрицей.

Докажем следующую теорему.

Теорема 4. Определитель матрицы

$$A_{NN} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 & -1 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

равен 1 в случае четного N и нулю в противном случае.

Доказательство. Вычтем первый столбец из последующих, а затем – последнюю строку из всех остальных. Получим матрицу

$$A_{NN} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -2 & -2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Разложим определитель матрицы (25) по первому столбцу.

Алгебраическое дополнение последнего элемента этого столбца равно:

$$\Delta_{N1} = (-1)^{N-1}.$$

Поэтому определитель всей матрицы равен $\det A_{NN} = (-1)^{N-1+N+1} = 1$.

Если число точек наблюдений четное, то определитель равен 1, в противном случае он равен нулю.

Таким образом, мы имеем невырожденную четномерную кососимметрическую систему в том случае, когда точки наблюдения находятся на поверхности уровня функции, задающей значения второй производной потенциала, например:

$$C = \frac{(x_i - x_j)(z_i + z_j + 2H)}{\left[\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i + z_j + 2H)^2} \right]^5}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

Как и ранее, H – это глубина залегания эквивалентных источников, распределенных на плоскости (простого слоя, см. (2) и (3)).

Перейдем теперь к случаю представления элементов гравитационного и магнитного полей в виде потенциала двойного слоя.

Матрица системы (8) приобретает следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{6}{16(z_1 + H)^4} & \dots & \frac{(z_1 + z_N + 2H) \cdot (6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{7/2}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{(z_1 + z_N + 2H) \cdot (6(z_1 + z_N + 2H)^2 - 9r_{1N}^2)}{\left((z_1 + z_N + 2H)^2 + r_{1N}^2 \right)^{7/2}} & \dots & \frac{6}{16(z_N + H)^4} \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Если применить теоремы 2 и 3, то мы получим невырожденную матрицу СЛАУ. Теорема 2 утверждает, что матрица (26) будет иметь отличный от нуля определитель, если выполняется следующее условие:

$$r_{ij}^2 \geq \left((N-1)^{2/7} - 1 \right) \cdot (z + H)^2, \quad z_i \equiv z; i, j = 1, \dots, N. \quad (27)$$

Для того чтобы оказаться в условиях теоремы 3, нам нужно задать значения элементов полей в точках, расположенных на поверхности уровня гармонической функции, описываемой выражением

$$\frac{(z_i + z_j + 2H) \cdot \left(6(z_i + z_j + 2H)^2 - 9r_{ij}^2 \right)}{\left((z_i + z_j + 2H)^2 + r_{ij}^2 \right)^{7/2}} = C = \text{const}. \quad (28)$$

В (28) H – глубина залегания двойного слоя.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СЕТИ ТОЧЕК

Применим теперь результаты исследований однозначной разрешимости различных СЛАУ, к которым редуцируются линейные обратные задачи гравимагниторазведки, для разработки стратегии выбора такой сети наблюдений, которая обеспечивала бы высокую точность решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии за счет невырожденности матрицы.

При «конструировании» сети наблюдений можно пойти двумя путями.

Первый из них заключается в том, чтобы по заданному набору проекций точек на горизонтальной плоскости подобрать такие координаты вдоль вертикальной оси, чтобы точки наблюдения оказались на поверхности уровня некоторой гармонической функции или, в худшем случае, в приемлемой близости от нее. Рассмотрим функционал, определенный на всевозможных наборах z -координат точек:

$$\Phi[Z] \equiv \sum_{i,j}^N (r_{ij}^2 - f_{ij}(Z))^2, \tag{29}$$

$$f_{ij} = \left(\frac{(z_i + z_j + 2H)}{C} \right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad i, j = 1 \dots N.$$

Поставим вариационную задачу: найти Z^*

$$Z^* : \min_Z \Phi[Z] + \alpha \Omega[Z], Z = (z_1, z_2, \dots, z_N)^T, \Phi[Z] = \sum_{i,j}^N (r_{ij}^2 - f_{ij}(Z))^2, \tag{30}$$

$$f_{ij} = \left(\frac{(z_i + z_j + 2H)}{C} \right)^{2/3} - (z_i + z_j + 2H)^2, \quad i, j = 1 \dots N, \Omega[Z] = \sum_{i=1}^N z_i^2.$$

Минимум в задаче (30) можно искать одним из градиентных методов [2,3].

Второй путь при проектировании оптимальных сетей можно описать следующим образом. Зададим три точки на горизонтальной плоскости так, чтобы они находились в вершинах равностороннего треугольника:

$$z_1 = z_2 = z_3, C = \frac{z_1 + z_2 + 2H}{\left(\sqrt{(z_1 + z_2 + 2H)^2 + r_{12}^2} \right)^3}. \tag{31}$$

Далее будем добавлять к выбранным нами трем точкам последовательно по одному пункту наблюдений, учитывая, что каждый новый пункт должен находиться либо на поверхности уровня (31), либо вблизи нее. Четвертая точка не может лежать в той же горизонтальной плоскости, как это уже отмечалось ранее. Поэтому выберем z_4 так, чтобы выполнялись соотношения (см. теорему 3) и рассмотрим треугольник $A_2A_3A_4$:

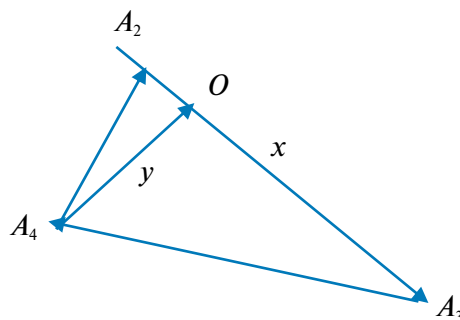
$$z_4 < z_1 \Rightarrow \frac{1}{z_4^2} > \frac{1}{z_1^2} > C.$$

Из рисунка легко установить, что выполняются следующие соотношения для расстояний между точками треугольника $A_2A_3A_4$:

$$y^2 = r_{34}^2 - x^2 = r_{24}^2 - (r_{23} - x)^2 \Rightarrow x = \frac{r_{24}^2 - r_{34}^2 - r_{23}^2}{2r_{23}},$$

$$y^2 = r_{34}^2 - \left(\frac{r_{24}^2 - r_{34}^2 - r_{23}^2}{2r_{23}} \right)^2, \overrightarrow{A_3O} = \frac{(x_2 - x_3, y_2 - y_3)}{r_{23}} \cdot x, \tag{32}$$

$$\overrightarrow{r_4} = \overrightarrow{r_3} + \overrightarrow{A_3O} + y \cdot \frac{(y_3 - y_2, x_3 - x_2)}{r_{23}}.$$



Фиг. 2. Схематическое изображение процесса добавления точки в оптимальную сеть.

В (32) через $r_i, i = 2, 3, 4$, обозначены радиус-векторы соответствующих точек в некоторой системе координат. Если мы задаем расстояния от четвертой точки до второй и третьей, то из (32) становится ясно, что четвертая точка может находиться только в двух положениях на плоскости, определяемых соотношениями (32) (по обе стороны от отрезка A_2A_3). Таким образом, расположение точки A_4 относительно A_1 не может быть произвольным и не обязательно должно быть справедливо равенство

$$r_{14}^2 = \left(\frac{z_1 + z_4 + 2H}{C} \right)^{2/3} - (z_1 + z_4 + 2H)^2. \quad (33)$$

Мы приходим к необходимости такого подбора параметров C и z_4 , чтобы расстояние между первой и четвертой точками, определяемое по (33), меньше всего отличалось от расстояния между этими точками, которое вычисляется с учетом фактического расположения четвертой точки из соотношений (32). Все остальные точки сети можно добавлять аналогичным образом, задавая их расстояния на плоскости (фактически, расстояния между их проекциями на исходную плоскость, которой принадлежат первые три точки) до двух предыдущих с номерами $i-1, i: r_{i-1, i+1}, r_{i, i+1}$. У нас на каждом таком шаге будет получаться треугольник $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ и нам нужно будет выбирать C, z_4, \dots, z_{i+1} так, чтобы соотношения (32) и (33) для всех пар точек не противоречили друг другу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод S -аппроксимаций позволяет построить за сравнительно короткое время аналитические аппроксимации элементов аномальных потенциальных полей в «первом приближении» по точности. Такая аппроксимация позволяет составить общее представление о природе источников, характере аномалии и уточнить геологическое строение Земли и планет Солнечной системы. Приведенные в настоящей статье теоремы позволяют проектировать оптимальные сети наблюдений, гарантирующие однозначную разрешимость СЛАУ, к которым редуцируются линейные обратные задачи геофизики, а также разрабатывать эффективные алгоритмы отбора спутниковых данных, которые с большой степенью надежности могут применяться при интерпретации разноточной и разнородной информации об источниках физических полей. Если выборки спутниковых данных не удовлетворяют критериям оптимальности сети наблюдений, то мы получаем плохо обусловленные СЛАУ большой и сверхбольшой размерности, и приближенные решения таких систем не могут использоваться для локализации источников аномалий и нахождения пространственного распределения различных элементов полей.

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные рекомендации и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Salnikov A.M., Stepanova I.E., Gudkova T.V., Batov A.V.* Analytical modeling of the magnetic field of Mars from satellite data using modified S -approximations // *Doklady Earth Sciences*. 2021. Vol. 499. P. 575–579.
2. *Lukyanenko D.V., Yagola A.G.* Some methods for solving of 3D inverse problem of magnetometry // *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*. 2016. Vol. 4. No 3. P. 4–14.
3. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G., Wang Y.* Recovering the magnetic image of Mars from satellite observations // *J.of Imaging*. 2021. Vol. 7. No 11. P. 234.
4. *Страхов В.Н.* Геофизика и математика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 64 с.
5. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S -аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // *Физ. Земли*. 2002. № 2. С. 3–19.
6. Страхов В.Н., Степанова И.Э. Метод S -аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // *Физ. Земли*. 2002. № 7. С. 3–12.
7. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G.* On the uniqueness of solutions to systems of linear algebraic equations resulting from the reduction of linear inverse problems of gravimetry and magnetometry: a local case // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, издательство Pleiades Publishing, Ltd (Road Town, United Kingdom). 2023. V. 63. No 9. P. 1588–1599.
8. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Yagola A.G.* On the uniqueness of solution to systems of linear algebraic equations to which the inverse problems of gravimetry and magnetometry are reduced: a regional variant // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, издательство Pleiades Publishing, Ltd (Road Town, United Kingdom). 2023. V. 63. No 8. P. 1452–1465.

9. Ягола А.Г., Степанова И.Э., Ван Янфей, Титаренко В.Н. Обратные задачи и методы их решения. Приложения к геофизике. М.: Бинном, 2014. 214 с.
10. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field // *Inverse Problems in Science and Engng.* 2008. Vol. 16. No 5. P. 535–544.
11. Stepanova I.E. On the S-approximation of the Earth's gravity field. Regional version // *Inverse Problems in Science and Engng.* 2009. Vol. 16. No 5. P. 1095–1111.
12. Gudkova T.V., Stepanova I.E., Batov A.V. Density anomalies in subsurface layers of mars: model estimates for the site of the InSight mission seismometer // *Solar System Research volume.* 2020. Vol. 54. P. 15–19.
13. Степанова И.Э., Щепетилев А.В., Погорелов В.В., Михайлов П.С. Структурно-параметрический подход при построении цифровых моделей рельефа и гравитационного поля Земли с использованием аналитических S-аппроксимаций // *Геофизические процессы и биосфера.* 2020. Т.19. № 2. С. 107–116.
14. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры. М.: Физматлит. 1996, 302 с.

ON THE CONSTRUCTION OF AN OPTIMAL NETWORK OF OBSERVATION POINTS WHEN SOLVING INVERSE LIN-EAR PROBLEMS OF GRAVIMETRY AND MAGNETOMETRY

I. E. Stepanova^{a,*}, D. V. Lukyanenko^b, I. I. Kolotov^b, A. V. Shchepetilov^b,
A. G. Yagola^b, A. N. Levashov^b

^a*Moscow State University, Leninskiye Gory, Moscow, 119991 Russia*

^b*Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, ul. Bolshaya Gruzinskaya, 10, build. 1, Moscow, 123995 Russia*

*e-mail: tet@ifz.ru

Received 28 June, 2023

Revised 20 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. Unique solvability of systems of linear algebraic equations is studied to which many in-verse problems of geophysics are reduced as a result of discretization after applying the method of integral equations or integral representations. Examples of singular and nonsingular systems of vari-ous dimensions that arise when processing magnetometric and gravimetric data from experimental observations are discussed. Conclusions are drawn about methods for constructing an optimal net-work of experimental observation points.

Keywords: degenerate systems of linear algebraic equations, integral representations, single-valued solvability, Cauchy determinant.

УДК 517.977:519.853

АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ С МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

© 2024 г. В. К. Толстых^{1,*}

¹283001 Донецк, ул. Университетская, 24, ДНР,
Донецкий государственный университет, Россия

*e-mail: mail@tolstyk.com

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

Переработанный вариант 19.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

Рассматривается проблема минимизации (максимизации) многоэкстремальных функционалов (бесконечномерная оптимизация). Традиционными градиентными методами такая задача не решается. Предлагаются новые градиентные методы с адаптивной релаксацией шагов в окрестности локальных экстремумов. Работоспособность и эффективность предложенных методов демонстрируется на примере оптимизации формы сопла гидропушки по целевому функционалу в виде средней силы действия импульса струи на преграду. Было найдено два локальных максимума, второй из которых — глобальный, в нем значение средней силы импульса струи в 3 раза выше первого. Соответствующая форма сопла является оптимальной. Традиционные градиентные методы не позволили выявить ни одного максимума, т.е. не смогли решить поставленную задачу. Библ. 10. Фиг. 4.

Ключевые слова: бесконечномерная оптимизация, экстремальные методы, градиент, импульсные струи.

DOI: 10.31857/S0044466924030041, EDN: XHGLMA

1. ВВЕДЕНИЕ

Для численного решения задач оптимизации сложных систем в частных производных представляется целесообразным использовать прямой экстремальный подход [1–3]. Суть подхода заключается в прямой минимизации (максимизации) экстремальными алгоритмами целевого функционала

$$J(u) = \int_{\omega} I(v, u) d\omega \rightarrow \min, \quad \omega \subset \bar{\Omega}, \quad (1.1)$$

при условии $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0, \quad \tau \in \bar{\Omega},$

где функция управления $u(\tau) \in U(S)$, $S \subset \bar{\Omega}$, τ — пространственно-временная переменная, U — допустимое множество управлений, $\bar{\Omega}$ — замкнутая область функционирования системы с состоянием $v(\tau) \in V(\bar{\Omega})$, V — пространство (допустимое множество) состояний системы. Здесь оператор \mathbb{D} , действующий на v , включает в себя не только конкретный вид дифференциальных уравнений на Ω , но и краевые условия где-либо на границе $\partial\Omega$. Функция цели $I(v(\tau), u(\tau))$ определена на множестве ω , а ее значение зависит от параметра v и возможно u .

В прямом подходе не используются какие-либо промежуточные, например, необходимые условия оптимальности, а непосредственно решается задача:

$$u_* = \operatorname{argmin} J(u), \quad (1.2)$$

где $u_*(\tau)$ — оптимальное управление, оптимум, оптималь, оптимальный параметр, доставляющий глобальный минимум функционалу $J(u)$. Задача (1.2) является бесконечномерной задачей оптимизации, поскольку управление u — функция. Для ее решения, обычно, используют методы градиентного спуска или методы сопряженных градиентов, обобщенные на бесконечномерные пространства. Сходимость этих методов за конечное число итераций обоснована только для конечномерных пространств управлений, когда u — вектор, а $J(u)$ при этом — функция. Доказательства сходимости в таких задачах основываются, если не на квадратичности функции $J(u)$, то на ее выпуклости. Для минимизации

невыпуклых, многоэкстремальных функций существует большое количество алгоритмов (с той или иной степенью обоснования сходимости), но они не обобщаются на бесконечномерные задачи.

Традиционные градиентные методы, применяемые в бесконечномерных пространствах, имеют вид:

$$u^{k+1}(\tau) = u^k(\tau) - b^k \nabla J^k(u; \tau), \quad \tau \in S, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.3)$$

где k – номер итерации, b^k – шаговый множитель, регулирующий глубину спуска к минимуму вдоль антиградиента $-\nabla J^k$. Градиент вычисляется с использованием уравнений $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0$. Все разнообразие методов (1.3) заключается в выборе шагового множителя b^k [4–6] для ускорения сходимости к минимуму $J(u)$.

Общепринятая стратегия выбора b^k – это выбор заранее, возможно постоянного, шагового множителя на всех итерациях:

$$b^k = b > 0 \quad \text{или} \quad b^k = \beta_1(k)b, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (1.4)$$

где $\beta_1(k)$ – некоторая положительная, заранее известная функция. Данная стратегия нередко используется при минимизации выпуклых $J(u)$ [5]. Для таких задач оптимизации стратегия является релаксационной, т.е. она ослабляет, уменьшает шаги так, что $\|b^k \nabla J^k\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ по мере приближения к u_* . Если бы была известна аналитическая зависимость $J(u)$, то можно было бы найти оптимальное b [6]. При этом используются знания о выпуклости $J(u)$, такие как константа липшицевости градиентов, собственные числа матрицы Гессе. Понятно, что при бесконечномерной оптимизации получить что-либо подобное о поведении $J(u)$ вряд ли возможно.

К достоинствам указанной стратегии следует отнести минимальность усилий в ее реализации и отсутствие дополнительных вычислений J или ∇J на каждой итерации k . Поэтому стратегия может оказаться эффективной в некоторых частных случаях при некоторых исходных данных.

Остается открытым вопрос, как исследовать, решать экстремальные задачи с невыпуклыми, многоэкстремальными целевыми функционалами? В настоящей работе предлагаются градиентные алгоритмы, основанные на специфическом выборе шагового множителя b^k , для исследования и off-line решения задач оптимизации (не непрерывного on-line управления) сложных систем в частных производных.

2. АЛГОРИТМЫ

Рассмотрим следующую (вторую) стратегию выбора b^k , которая использует адаптивную релаксацию шага:

$$b^k = \beta_2(k)b^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $\beta_2(k)$ – положительная, заранее неизвестная функция, значение которой на каждой итерации определяется (адаптируется) на основании полученной ранее информации о поведении $J(u)$. Например, для минимизации выпуклых $J(u)$, это может быть градиентный метод вида [1]:

$$\begin{aligned} &\text{Если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда: } b^k = b_1 b^{k-1}, u^{k+1} = u^k - b^k \nabla J^k. \\ &\text{Иначе повторять до } J^k < J^{k-1}: \\ &\quad b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, u^{k+1} = u^{k-1} - b^{k-1} \nabla J^{k-1}, \\ &\quad \text{если } b^{k-1} \approx 0, \text{ тогда стоп итерации } k. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $k = 1, 2, \dots$, $b_1 \geq 1$, $b_2 < 1$. Начальное значение b^0 задается из условия $J^1 < J^0$.

Алгоритм (2.1) посредством параметра b_1 может увеличивать шаги и тем самым усиливать сходимость к минимуму, а параметром b_2 – контролировать и не допускать расхожимости метода из-за чрезмерно больших шагов. Условие завершения «стоп» в цикле повторений предыдущего шага контролирует заикливание и излишнее количество чрезмерно малых шагов при уменьшении b^{k-1} . Если $b^{k-1} \approx 0$, то следует считать, что процесс минимизации $J(u)$ достиг своего предела. Итерации k прекращаются. Очевидно, алгоритм (2.1), в общем случае, для минимизации функционалов, эффективнее алгоритмов описанной ранее в первой стратегии, хотя он требует дополнительного хранения в памяти массивов $u^{k-1}, \nabla J^{k-1}$.

Если $J(u)$ не выпуклый, но имеет единственный экстремум – минимум, то в алгоритме минимизации (2.1) следует предусмотреть и возможность ослабления сходимости, если обнаруживается рост нормы градиента (здесь и далее норма вычисляется в L_2). Это можно сделать следующим градиентным методом:

$$\begin{aligned}
 &\text{Если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда:} \\
 &\cdot \text{если } \|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\|, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, \\
 &\text{иначе } b^k = \frac{\|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|} b^{k-1}, \\
 &\cdot u^{k+1} = u^k - b^k \nabla J^k. \\
 &\text{Иначе повторять до } J^k < J^{k-1} : \\
 &b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, u^{k+1} = u^{k-1} - b^{k-1} \nabla J^{k-1}, \\
 &\text{если } b^{k-1} \approx 0, \text{ тогда стоп итерации } k.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $b_3 \geq 1$. Если $J(u)$ убывает, а норма градиента не убывает (возрастает), то это означает, что текущий шаг либо пришелся на вогнутую часть $J(u)$, либо перескочил через локальный минимум и попал в область повышенной выпуклости $J(u)$. В любом случае следующий шаг $b^k \nabla J^k$ не должен быть больше предыдущего. Величина такого шага регулируется параметром b_3 . Надо быть внимательным при выборе $b_3 > 1$, поскольку можно существенно замедлить сходимость алгоритма.

Если $J(u)$ не выпуклый и при этом имеет несколько локальных экстремумов, то алгоритм (2.2) следует модифицировать, посредством адаптации параметра b_1 . Для того, чтобы сходимость не завершилась в каком-либо физически неудовлетворительном локальном экстремуме (или хочется проверить существуют ли другие экстремумы), следует приближаться к нему с большим значением b_1 – для перешагивания через экстремум. И наоборот, чтобы не перешагнуть через желаемый экстремум, следует приближаться к нему осторожно, с уменьшенным b_1 .

Алгоритм адаптации b_1 существенным образом зависит от конкретной задачи оптимизации. Данная процедура требует кропотливого участия исследователя и вряд ли может быть формализована. Тем не менее, она позволяет исследовать многоэкстремальные задачи бесконечномерной оптимизации.

Обсуждаемый алгоритм выбора шагового множителя имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &\text{Если } J^k < J^{k-1}, \text{ тогда:} \\
 &\cdot \text{если } \|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\|, \text{ тогда} \\
 &\quad \left(\text{если } u^k \text{ рядом с экстремумом – изменить } b_1 \right) b^k = b_1 b^{k-1}, \\
 &\text{иначе } b^k = \frac{\|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|} b^{k-1}, \\
 &\cdot u^{k+1} = u^k - b^k \nabla J^k. \\
 &\text{Иначе повторять до } J^k < J^{k-1} : \\
 &b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, u^{k+1} = u^{k-1} - b^{k-1} \nabla J^{k-1}, \\
 &\text{если } b^{k-1} \approx 0, \text{ тогда стоп итерации } k.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Существуют и другие стратегии поиска b^k для минимизации функционалов. Например, стратегии линейного поиска на каждой итерации, которая осуществляется в два этапа. Сначала ищется (задается) отрезок, в направлении $-\nabla J^k$, потом на этом отрезке ищется удовлетворительное b^k . Здесь самым известным представителем является градиентный метод наискорейшего спуска – это стратегия полной релаксации, когда на каждом шаге вдоль направления $-\nabla J^k$, на отрезке заданной длины, выбирается оптимальное значение множителя:

$$b^k = \operatorname{arg\,min}_{b>0} J(u^k - b \nabla J^k).$$

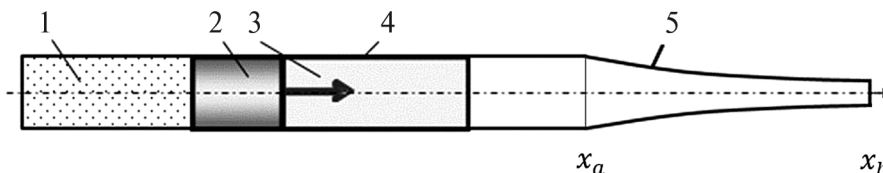
Это замечательная стратегия. Однако, если управление ограничено допустимым множеством или другими специфическими особенностями задачи, то выбор отрезка, содержащего минимум функции $J^k(b)$, может стать невозможным. Любой «конец» отрезка, начавшегося в точке u^k , может выйти за ограничения и сделать абсурдным решение уравнений $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0$.

Для пояснения и иллюстрации актуальности и работоспособности предложенных алгоритмов второй стратегии рассмотрим следующий пример.

3. ПРИМЕР

3.1. Постановка задачи

Сформулируем задачу оптимального дизайна сопла гидропушки, схема которой представлена на фиг. 1.



Фиг. 1. Схема поршневой гидропушки

Поршень 2 под действием газа в ресивере 1 разгоняется, толкая перед собой воду 3 из цилиндрического ствола в сужающееся сопло 5.

Движение воды в цилиндрическом сопле можно описать следующей квазиодномерной, квазилинейной гиперболической системой уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + w \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\rho w}{\sigma} \frac{d\sigma}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{B n \rho^{n-2}}{\rho_0^n} \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Состояние системы характеризуется вектор-функцией $v = \{\rho, w\}$, где ρ – плотность потока, w – скорость. Состояние определено на пространственновременной области Ω втекания воды в сопло и истечения из него. B и n – постоянные в уравнении состояния Тэта. Управление

$$u(x) = \frac{1}{\sigma(x)} \frac{d\sigma(x)}{dx}, \quad x \in (x_a, x_b), \tag{3.2}$$

где σ – площадь поперечного сечения сопла, $\sigma(x) = \sigma_a \exp\left(\int_{x_a}^x u(\zeta) d\zeta\right)$, $x \in [x_a, x_b]$, σ_a – площадь ствола гидропушки.

Система (3.1) – это значение оператора $\mathbb{D}v$, которое дополняется краевыми условиями. Слева – это уравнение движения поршня массой m_p : $\frac{dw}{dt} + \frac{\sigma_a B}{m_p} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n - 1 \right] = 0$. На правой границе, взаимодействующей с атмосферой, плотность воды $\rho = \rho_0 = 10^3$ кг/м³. Начальные условия – это $w_0 = 76$ м/с, $\rho = \rho_0$. Радиус ствола $R_a = 33 \cdot 10^{-3}$ м, длина сопла 0.253 м, начальная длина столба вода 0.28 м.

Определим целевой функционал. Будем максимизировать среднюю силу действия импульса струи на преграду:

$$J = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \rho \sigma w^2 dt \Big|_{x_b},$$

где t_1 – начало истечения струи из сопла, t_2 – конечное время формирования струи. В частности, $t_1 \approx 2.7 \cdot 10^{-3}$ с, а время истечения $t_2 - t_1 = 3 \cdot 10^{-4}$ с.

Подобная задача рассматривалась и ранее [8, 9] в рамках подхода классического вариационного исчисления. Были предложены различные необходимые условия оптимальности, но оптимальная форма

сопла так и не была получена. Только применение экстремального подхода с анализом управляемости и развитие адаптивных градиентных алгоритмов позволило решить эту сложную задачу оптимизации.

Далее будем обращаться к функционалу J в форме:

$$J(u) = \int_{\omega} I(w,u)dt \rightarrow \max, \quad \omega = x_b \times (t_1, t_2), \tag{3.3}$$

где подынтегральная функция цели

$$I(w,u)|_{\omega} = \frac{\rho_0 \sigma_b w_b^2}{t_2 - t_1} = \frac{\rho_0 \sigma_a \exp\left(\int_{x_a}^{x_b} u(x)dx\right) w_b^2}{t_2 - t_1}.$$

Уточним область определения управления $u(x)$ – это множество $S = (x_a, x_b)$, при этом форма сопла $\sigma(x)$ определена на $[x_a, x_b]$. Областью значений управления будем считать полупространство допустимых значений:

$$U(S) = \{u : u(x) \leq 0 \quad \forall x \in (x_a, x_b)\}. \tag{3.4}$$

Такому U соответствует $\sigma(x) \leq \sigma_a$, что является физически разумным. Необходимо иметь в виду и еще одно ограничение. При сверхзвуковом истечении, когда $w \geq c_0 = 1475$ м/с, струя разрушается. Это ограничение не входит в постановку задачи оптимизации, а является индикатором возможной неудачной оптимизации.

Для прямой максимизации целевого функционала (10) необходимо найти его градиент ∇J . Техника аналитического определения градиента неявно заданного функционала – это самостоятельная сложная задача. Здесь можно использовать подход [1], что было нами сделано в работе [10]. Мы получим следующее выражение градиента:

$$\nabla J(u;x) = \int_{t_1}^{t_2} \rho w f_1 dt + \kappa J, \quad x \in (x_a, x_b),$$

где f_1 – это компонента сопряженного, по отношению к v , состояния системы, $\kappa = 0.17$ – весовой коэффициент выравнивания вычислительных помех решения на $\bar{\Omega}$ исходной нелинейной задачи $\mathbb{D}(\tau, v, u)v = 0$ и линейной сопряженной задачи на $[x_a, x_b] \times [t_1, t_2] \subset \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_1}{\partial t} - w \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{Bn\rho^{n-2}}{\rho_0^n} \frac{\partial f_2}{\partial x} + w u f_1 &= 0, \\ -\frac{\partial f_2}{\partial t} - \rho \frac{\partial f_1}{\partial x} - w \frac{\partial f_2}{\partial x} + \rho u f_1 &= 0. \end{aligned}$$

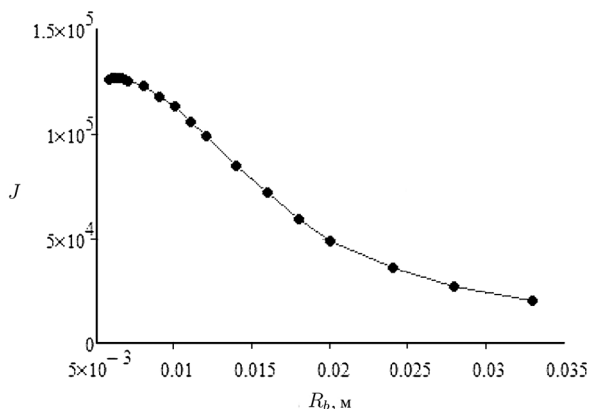
На левой границе $f_1 = 0$. На правой, при истечении с t_1 и до t_2 имеем $f_1 + \frac{w}{\rho_0} f_2 + \frac{2\sigma_b w_b}{t_2 - t_1} = 0$. Начальное (терминальное) условие при t_2 – это $f_1 = 0, f_2 = 0$. Задача решается в обратном по времени направлении, начиная с нулевого терминального состояния.

3.2. Оценка выпуклости целевого функционала

Для получения представления о выпуклости функционала (3.3), рассмотрим управление в классе функций-конусов. При этом $J(u) = J(R_b)$, т.е. J будет функцией радиуса среза сопла R_b , а

$$\sigma(x) = \pi \left(\frac{R_b - R_a}{x_b - x_a} x + R_a \right)^2, \quad R_a = \sqrt{\sigma_a / \pi}. \text{ Полученная функция } J \text{ представлена на фиг. 2.}$$

Правая точка на графике соответствует соплу в виде трубы, $R_b = R_a$. Левая точка соответствует минимально возможному радиусу среза сопла, при котором еще не наступает сверхзвуковое истечение. Рядом с этой точкой имеется $\max J$, с большой вогнутостью и очень малой окрестностью дозвукового течения. Функционал, в процессе изменения радиуса сопла от трубы до минимально допустимого сужения, меняет совою начальную выпуклость на вогнутость. Причем, вогнутость на много сильнее начальной выпуклости.



Фиг. 2. Зависимость функционала-функции $J(R_b)$

Если максимизировать функцию $J(R_b)$, начиная с $R_b = R_a$, классическим конечномерным градиентным методом с первой стратегией выбора $b = b^0$, то небольшие начальные шаги $b \nabla J^k$ при движении влево сменятся на большие шаги (из-за возрастания градиента). Поскольку вогнутость имеет место в относительно малой окрестности максимума, то большие шаги могут приводить к перепрыгиванию через экстремум вплоть до появления сверхзвукового истечения. Это недопустимо. Попасть в $\max J$, возможно, удастся только с очень малым b и, естественно, при чрезмерно большом количестве итераций. Применение градиентного метода наискорейшего спуска, метода сопряженных градиентов и других методов, использующих линейный поиск наилучшего b^k , здесь невозможно, поскольку такой поиск, в общем случае, будет начинаться со сверхзвукового истечения.

В этой ситуации, для достижения $\max J$, целесообразно использовать метод (6) с адаптивной стратегией выбора b^k . Давайте с него и начнем реальную оптимизацию произвольной формы сопла. Решение задачи программировалось автором в среде Delphi 7, вычисления проводились на компьютере с индексом производительности 3.5 Windows на пространственновременной сетке 40×500 в течение времени менее минуты.

3.3. Первый локальный максимум

Пусть начальное приближение

$$u^0(x) = 0,$$

что соответствует трубе $\sigma^0(x) = \pi R_a^2$. Начальное значение шагового множителя

$$b^0 = \frac{0.5}{\|\nabla J^0\|},$$

что соответствует первому шагу $\|u^1 - u^0\| = 0.5$. Сначала рассмотрим задачу оптимизации без условия (3.4) контроля расширения сопла.

Применим градиентный метод (2.2) для максимизации $J(u)$:

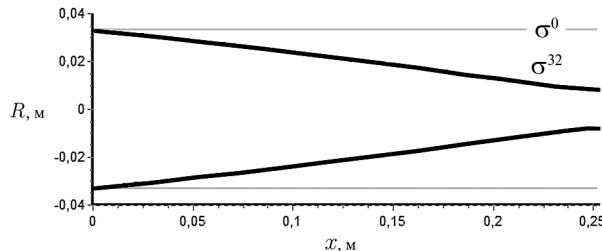
$$\begin{aligned} &\text{Если } J^k > J^{k-1}, \text{ тогда:} \\ &\cdot \text{если } \|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\|, \text{ тогда } b^k = b_1 b^{k-1}, \\ &\text{иначе } b^k = \frac{\|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|} b^{k-1}; \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$u^{k+1} = u^k + b^k \nabla J^k.$$

Иначе повторять до $J^k > J^{k-1}$:

$$b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, u^{k+1} = u^{k-1} + b^{k-1} \nabla J^{k-1},$$

если $b^{k-1} \approx 0$, тогда стоп итерации k .



Фиг. 3. Оптимальное сопло в первом экстремуме

Были подобраны значения параметров метода: $b_1 = 1.05$, $b_2 = 0.3$, $b_3 = 1.05$. Подбор осуществлялся из соображений: b_1 должен быть небольшим для «осторожного» подхода к ближайшему сильно вогнутому экстремуму; b_2 во всех расчетах удовлетворительно выполняло свою задачу при 0.3; b_3 – чуть больше единице, иначе, при больших значениях сходимость сильно замедлялась, а при $b_3 = 1$ происходил слишком большой переход (из-за резкой смены выпуклости) через первый экстремум. Остановка итераций осуществлялась при $\|u^k - u^{k-1}\| / \|u^{k-1}\| \leq 10^{-6}$.

Результаты оптимизации представлены на фиг. 3 в виде радиуса сопла для разных площадей σ . Оптимальной формой сопла оказался практически конус со значением целевого функционала $J = 1.26 \cdot 10^5$.

Традиционным бесконечномерным градиентным методом (1.3), с постоянным шаговым множителем, не удалось попасть в рассматриваемый локальный $\max J$. При $b \gtrsim 10b^0$ перешагивание экстремума сопровождалось сверхзвуковым истечением. При уменьшении b до $10^{-2}b^0$ сходимость не заканчивалась даже после нескольких тысяч итераций, наблюдалось неконтролируемое расширение сопла после перехода локального $\max J$.

3.4. Второй локальный максимум

Выясним, является ли первый максимум целевого функционала глобальным. Для этого необходимо посредством метода (3.5) грубо перейти и через максимум, и через близлежащий за ним минимум, чтобы опять выполнилось условие роста функционала $J^k > J^{k-1}$. Увеличим в окрестности максимума шаги посредством параметра b_1 от 1.05 до $b_1 = 1.16$. При этом был реализован переход через локальные максимум и минимум в область роста J , но, если не применять ограничение (3.4), то далее происходило неестественное расширение сопла за пределы ствола гидропушки, что приводит к аварийным завершениям расчета состояния потока. Ниже на фиг. 4 точечными линиями показано промежуточное расширение сопла для итерации $k = 41$.

Ограничение (3.4) легко реализуется проецированием управления на допустимое множество U . После шага любым алгоритмом адаптивной релаксации полученное управление u^{k+1} дополнительно корректируется:

$$\text{если } u^{k+1}(x) > 0, \text{ тогда } u^{k+1}(x) = 0, \quad x \in (x_a, x_b).$$

Дальнейшие расчеты оптимизации ограниченного сопла методом (3.5) и традиционным методом (1.3), при любых b^0 , приводили к сверхзвуковому истечению. Для (3.5) этот «неудачный результат» означает, что параметр увеличения шагов b_1 был недопустимо большим, и возможный второй локальный $\max J$ был грубо пройден. Здесь вместо метода (3.5) необходимо применять метод типа (2.3) и в окрестности ожидаемого $\max J$ уменьшать b_1 .

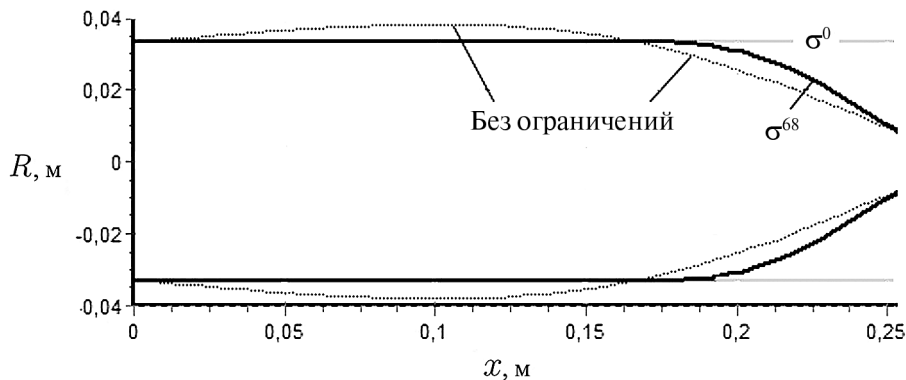
Окрестность предполагаемого максимума можно определить по скорости истечения $w_b = w(x_b, t)$, $t \in (t_1, t_2)$. Она должна быть близкой к скорости звука c_0 . В частности, такой скоростью была принята $w_b > 800$ м/с. При ее превышении усиление шагов было отменено, т.е. $b_1 = 1$.

Метод (2.3), для максимизации целевого функционала J , имеет вид:

$$\begin{aligned}
 &\text{Если } J^k > J^{k-1}, \text{ тогда:} \\
 &\cdot \text{если } \|\nabla J^k\| < \|\nabla J^{k-1}\|, \text{ тогда} \\
 &\quad (\text{если } w_b > 800, \text{ тогда } b_1 = 1.0) \quad b^k = b_1 b^{k-1}, \\
 &\quad \text{иначе } b^k = \frac{b^{k-1} \|\nabla J^{k-1}\|}{b_3 \|\nabla J^k\|}; \\
 &\cdot u^{k+1} = u^k + b^k \nabla J^k. \\
 &\text{Иначе повторять до } J^k > J^{k-1}: \\
 &\quad b^{k-1} \leftarrow b_2 b^{k-1}, \quad u^{k+1} = u^{k-1} + b^{k-1} \nabla J^{k-1}, \\
 &\quad \text{если } b^{k-1} \approx 0, \text{ тогда стоп итерации } k.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Параметры метода были теми же: начальное $b_1 = 1.16$, $b_2 = 0.3$, $b_3 = 1.05$.

На фиг. 4 сплошными линиями показан радиус сопла полученной оптимальной площади σ^{68} на последней итерации $k=68$. Блок «Иначе повторять» в (3.6) срабатывал только в конце итераций при $k \geq 66$, что потребовало дополнительно 12 вычислений J . Значение целевого функционала составило $J = 3.75 \cdot 10^5$, т.е. в 3 раза больше (лучше), чем в первом локальном максимуме.



Фиг. 4. Оптимальное сопло во втором экстремуме

Таким образом, второй максимум следует считать глобальным, а соответствующую форму сопла — оптимальной.

4. ВЫВОДЫ

Предложенные градиентные методы минимизации (максимизации) целевых функционалов, с шаговыми множителями адаптивной релаксации шагов при приближении к экстремуму, позволили решить сложную многоэкстремальную задачу оптимизации формы сопла гидропушки. Были выявлены два локальных максимума у целевого функционала, характеризующего среднюю силу действия импульса струи на преграду. Второй максимум имел значение целевого функционала в 3 раза больше (лучше), чем первый. Полученное сопло, соответствующее глобальному максимуму, следует считать оптимальным. Применение традиционного градиентного метода не позволило найти ни одного локального экстремума целевого функционала. То есть, решить поставленную задачу градиентным методом с постоянным шаговым множителем не удалось, и по всей вероятности — невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Толстых В.К.* Прямой экстремальный подход для оптимизации систем с распределенными параметрами. Донецк: Юго-Восток, 1997.
2. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. Т. 2. М.: МЦНМО, 2011.
3. *Сев Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.
4. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска : учебное пособие. М.: МФТИ, 2018.
5. *Нестеров Ю.Е.* Методы выпуклой оптимизации. М.: МЦНМО, 2010.
6. *Поляк Б.П.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983.
7. *Семко А.Н.* Импульсные струи жидкости высокой скорости и их применение. Донецк: ДонНУ, 2014.
8. *Зубов В.И., Зуйкова З.Г.* Об одном классе решений задачи оптимизации сопла гидропушки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1994. Т. 34. № 10. С. 1541–1550.
9. *Зуйкова З.Г.* Вариационная задача о втекании сжимаемой жидкости в сужающийся канал. Дис. ... канд. физ.-матем. наук. Донецк: ДонГУ, 1984.
10. *Дмитрук Ю.В., Толстых В.К.* Условия оптимальности формы сопла гидропушки // Вестник ДонНУ. Серия Г: Технические науки. 2022. № 3. С. 54–63.

ALGORITHMS FOR OPTIMIZING SYSTEMS WITH MULTIPLE EXTREMUM FUNCTIONALS

V. K. Tolstykh^{a,*}

^a*Donetsk State University,
ul. Universitetskaya, 24, Donetsk, 283001 Russia*

**e-mail: mail@tolstykh.com*

Received 05 September, 2023

Revised 19 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. The problem of minimizing (maximizing) multiple extremum functionals (infinite-dimensional optimization) is considered. This problem cannot be solved by conventional gradient methods. New gradient methods with adaptive relaxation of steps in the vicinity of local extrema are proposed. The efficiency of the proposed methods is demonstrated by the example of optimizing the shape of a hydraulic gun nozzle with respect to the objective functional, which is the average force of the hydraulic pulse jet momentum acting on an obstacle. Two local maxima are found, the second of which is global; in the second maximum, the average force of the jet momentum is three times higher than in the first maximum. The corresponding nozzle shape is optimal. Conventional gradient methods have not found any maximum; i.e., they were unable to solve the problem.

Keywords: infinite-dimensional optimization, extreme methods, gradient, pulse jets.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 539.3

ЗАДАЧА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО
ТЕРМОУПРУГОГО ОПЕРАТОРА В ДЕКАРТОВОЙ,
ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ
СИСТЕМАХ КООРДИНАТ¹⁾

© 2024 г. А. В. Земсков^{1,2,*}, Д. В. Тарлаковский^{2,1,**}

¹125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ, Россия

²119192 Москва, Мичуринский пр-т, 1, НИИ механики МГУ, Россия

*e-mail: azemskov1975@mail.ru

**e-mail: tdvhome@mail.ru

Поступила в редакцию 23.10.2023 г.

Переработанный вариант 14.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Рассматривается вопрос о построении собственных функций одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Для постановки соответствующей задачи Штурма–Лиувилля используется метод разделения переменных Фурье, примененный к связанной системе уравнений термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепловых потоков. Показано, что собственные функции одномерного термоупругого оператора выражаются через известные тригонометрические, цилиндрические и сферические функции. Но при этом задачи связанной термоупругости решаются аналитически только при определенных граничных условиях, вид которых определяется свойствами собственных функций. Библиография: 40. Табл. 1.

Ключевые слова: термоупругость, задача Штурма–Лиувилля, собственные функции, метод Фурье, цилиндрические функции, сферические функции.

DOI: 10.31857/S0044466924030051, **EDN:** XHGHSG

1. ВВЕДЕНИЕ

За последнее время опубликовано очень большое количество работ, так или иначе связанных с исследованием эффектов взаимодействия полей различной физической природы: механических, температурных, диффузионных и пр. В частности, можно утверждать, что сформирована достаточно строгая математическая теория термоупругости, основанная на феноменологических подходах и моделях термодинамики и механики сплошной среды (см. [1–4]).

Несмотря на то, что первые модели термоупругости появились еще в середине XIX в., тема не перестает быть актуальной и в настоящее время. Это связано как с развитием научно-экспериментальной базы, так и с тем, что математический аппарат, описывающий связанные термоупругие процессы в сплошных средах постоянно совершенствуется.

При этом большое развитие получили теории, учитывающие конечную скорость распространения тепловых потоков, среди которых можно отметить модели Каттанео, Лорда–Шульмана, Грина–Линсди, Грина–Нагди и т.д. (см. [5–12]). Это обусловлено тем, что классический закон теплопроводности Фурье дает очень большую погрешность при описании высокоскоростных, и в частности, импульсных процессов. Кроме того, можно отметить статьи, где для описания релаксационных эффектов используется аппарат дробного дифференцирования (см. [13–16]) и модели нелокального континуума Эрингена (см. [17–19]), которые позволяют, в известной мере, преодолеть локальность классических линейных моделей.

Однако на сегодняшний день остается немало нерешенных вопросов, связанных с аналитическим решением задач нестационарной связанной термоупругости. Анализ существующих публикаций

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 23-21-00189), <https://rscf.ru/project/23-21-00189/>.

показывает, что в плане решения соответствующих начально-краевых задач наиболее полно изучены модели в прямоугольной декартовой системе координат. Достаточно подробный обзор работ (правда, применительно к задачам термоупругой диффузии) дан в монографии [20]. Работ, посвященных решению задач термоупругости (в том числе, задач термоупругости с учетом других физических полей) в цилиндрической и сферической системах координат сравнительно немного и среди них можно выделить [21–31].

В этой связи отметим, что при решении задач в криволинейных системах координат очень важной проблемой является нахождение системы собственных функций, являющихся решением соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Этот вопрос достаточно хорошо изучен для начально-краевых задач теории упругости, теплопроводности и несвязанной термоупругости (см. [32–34]). Применительно к связанным задачам термоупругости данный вопрос в известных научных работах не обсуждался.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

Для постановки задачи Штурма–Лиувилля рассмотрим однородную систему уравнений, с однородными граничными условиями, описывающую одномерные термоупругие процессы в сплошных средах (см. [2], [3], [32], [35]):

$$\ddot{u} = \Delta_\alpha u - \frac{\alpha}{\xi^2} u - \Lambda \vartheta'; \tag{1.1}$$

$$\sum_{k=0}^M \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \tau^k} \left[\dot{\vartheta} - b \left(\dot{u}' + \frac{\alpha \dot{u}}{\xi} \right) \right] = \kappa \Delta_\alpha \vartheta; \tag{1.2}$$

$$u|_{\Pi_u} = 0, \vartheta|_{\Pi_T} = 0, \sigma|_{\Pi_\sigma} = 0, \vartheta'|_{\Pi_q} = 0; \tag{1.3}$$

$$u|_{\tau=0} = 0, \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \left. \frac{\partial^k \vartheta}{\partial \tau^k} \right|_{\tau=0} = 0 \quad (k = \overline{0, M-1}). \tag{1.4}$$

Здесь граница $\Pi = \partial G$ – граница области, занятой телом $G \subset \mathbb{R}^3$. Она разбита на участки $\Pi = \Pi_u \cup \Pi_\sigma = \Pi_T \cup \Pi_q$, $\Pi_u \cap \Pi_\sigma = \emptyset$, $\Pi_T \cap \Pi_q = \emptyset$ в соответствии с видом приложенной нагрузки. Точки означают производную по времени τ , штрих – производную по криволинейной координате ξ .

Все величины в (1.1)–(1.4) являются безразмерными. Их связь с размерными аналогами дается следующими равенствами:

$$u = \frac{u_1}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{1111}}{\rho}, \quad \tau_0 = \frac{C\tau_T}{L}, \quad c_{12} = \frac{C_{1122}}{C_{1111}}, \quad c_{11} = \frac{C_{1111}}{C_{1111}} = 1, \\ \xi = \frac{\xi_1}{L}, \quad \Lambda = \frac{b_{11}T_0}{C_{1111}}, \quad b = \frac{b_{11}}{\rho c_0}, \quad \kappa = \frac{\kappa_{11}}{\rho c_0 CL}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{11}}{C_{1111}}, \quad \vartheta = \frac{T - T_0}{T_0},$$

где t – время; ξ_1 – криволинейная координата ($\xi_1 = x_1$ в декартовой системе координат и $\xi_1 = r$ – радиальная координата в цилиндрической и сферической системах координат); L – линейный масштаб задачи; u_1 – компонента вектора перемещений $\mathbf{u} = \{u_1(\xi_1, t), 0, 0\}$; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; b_{ij} – температурные коэффициенты, характеризующие деформации за счет нагрева; κ_{ij} – компоненты тензора теплопроводности; c_0 – удельная теплоемкость; T_0 – начальная температура сплошной среды; T – актуальная температура сплошной среды; величина ϑ характеризует относительное приращение температуры; Λ – безразмерный коэффициент, характеризующий деформации за счет изменения температуры; τ_T – время релаксации тепловых потоков; параметр $\alpha = 0$ соответствует декартовой системе координат, $\alpha = 1$ – цилиндрической системе координат и $\alpha = 2$ – сферической системе координат; Δ_α – одномерный оператор Лапласа, имеющий вид

$$\Delta_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Компонента тензора напряжений σ_{11} (и ее безразмерный аналог σ) соответствует напряжениям, нормальным к поверхности тела, и определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= C_{1111} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} + \alpha C_{1122} \frac{u_1}{\xi_1} - b_{11}(T - T_0), \\ \sigma &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \alpha c_{12} \frac{u}{\xi} - \Lambda \vartheta.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Уравнение теплопроводности (1.2) учитывает релаксацию тепловых потоков, предполагающую конечную скорость распространения тепловых возмущений. Полагая верхний предел суммирования $M = 0$, приходим к классической модели с бесконечной скоростью распространения тепла; $M = 1$ соответствует модифицированному закону Фурье в форме Максвелла–Каттанео.

С целью уменьшения объема выкладок постановку и решение задачи Штурма–Лиувилля изложим для случая $M = 0$ с последующим обобщением для произвольного M . Будем искать решение задачи (1.1)–(1.4) в виде

$$u(\xi, \tau) = V(\xi)W(\tau), \quad \vartheta(\xi, \tau) = \Phi(\xi)\Psi(\tau).\tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.1) и (1.2), получаем

$$\begin{aligned}V(\xi)\ddot{W}(\tau) &= W(\tau)\left[\Delta_\alpha V(\xi) - \frac{\alpha}{\xi^2}V(\xi)\right] - \Lambda\Psi(\tau)\Phi'(\xi), \\ \dot{\Psi}(\tau)\Phi(\xi) &= \kappa\Psi(\tau)\Delta_\alpha\Phi(\xi) - b\dot{W}(\tau)\left[V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi}\right].\end{aligned}\tag{1.7}$$

Теперь уравнение движения в (1.7) поделим на $V(\xi)W(\tau)$, а уравнение теплопереноса – на $\Psi(\tau)\Phi(\xi)$. Получаем (суммирование по повторяющимся греческим индексам не проводится)

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{W}(\tau)}{W(\tau)} &= \frac{\Delta_\alpha V(\xi)}{V(\xi)} - \frac{\alpha}{\xi^2} - \Lambda \frac{\Psi(\tau)}{W(\tau)} \frac{\Phi'(\xi)}{V(\xi)}, \\ \frac{\dot{\Psi}(\tau)}{\Psi(\tau)} &= \kappa \frac{\Delta_\alpha \Phi(\xi)}{\Phi(\xi)} - b \frac{\dot{W}(\tau)}{\Psi(\tau)} \left[\frac{V'(\xi)}{\Phi(\xi)} + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi \Phi(\xi)} \right].\end{aligned}$$

В полученных равенствах левые части зависят от переменной τ , а правые – от переменных τ и ξ . Для обеспечения равенства потребуем, чтобы обе части этих уравнений не зависели от τ и ξ . В этом случае

$$\frac{\ddot{W}(t)}{W(t)} = -\gamma^2 = \text{const}, \quad \frac{\dot{\Psi}(t)}{\Psi(t)} = -\gamma^2 \omega = \text{const},\tag{1.8}$$

$$\frac{\Psi(t)}{W(t)} = q = \text{const}, \quad \frac{\dot{W}(t)}{\Psi(t)} = \frac{p}{q} = \text{const}.\tag{1.9}$$

В результате приходим к следующей системе уравнений относительно функций $V(\tau)$ и $\Phi(\xi)$:

$$\begin{aligned}-\gamma^2 &= \frac{1}{V(\xi)} \left[\Delta_\alpha V(\xi) - \frac{\alpha V(\xi)}{\xi^2} \right] - q\Lambda \frac{\Phi'(\xi)}{V(\xi)}, \\ -\gamma^2 \omega &= \frac{\kappa \Delta_\alpha \Phi(\xi)}{\Phi(\xi)} - \frac{pb}{q\Phi(\xi)} \left[V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi} \right].\end{aligned}\tag{1.10}$$

Для формулировки задачи Штурма–Лиувилля эти уравнения дополняются однородными краевыми условиями, которые будут получены далее.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В декартовой системе координат уравнения (1.10) запишутся так ($\xi = x$)

$$-\gamma^2 = \frac{V''(x)}{V(x)} - q \frac{\Lambda \Phi'(x)}{V(x)},$$

$$-\gamma^2 \omega = \frac{\kappa \Phi''(x)}{\Phi(x)} - \frac{p}{q} \frac{bV'(x)}{\Phi(x)}.$$

Отсюда приходим к следующей системе уравнений относительно функций $V(x)$ и $\Phi(x)$:

$$-\gamma^2 V(x) = V''(x) - q \Lambda \Phi'(x),$$

$$-\gamma^2 \omega \Phi(x) = \kappa \Phi''(x) - \frac{p}{q} bV'(x). \tag{2.1}$$

Будем искать решение системы (2.1) в форме

$$V = V^* e^{\lambda x}, \quad \Phi = \Phi^* e^{\lambda x}. \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в (2.1), получаем

$$(\lambda^2 + \gamma^2) V^* - q \Lambda \Phi^* = 0,$$

$$-\frac{p}{q} b \lambda V^* + (\kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega) \Phi^* = 0. \tag{2.3}$$

Для существования нетривиального решения необходимо потребовать, чтобы определитель этой системы равнялся нулю. Имеем

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \gamma^2 & -q \Lambda \\ -\frac{p}{q} b \lambda & \kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda^2 + \gamma^2)(\kappa \lambda^2 + \gamma^2 \omega) - p b \Lambda \lambda^2 =$$

$$= \kappa \lambda^4 + (\gamma^2 \kappa + \gamma^2 \omega - p b \Lambda) \lambda^2 + \gamma^4 \omega = 0. \tag{2.4}$$

Как видно, введенный ранее параметр q не входит в уравнение (2.4) и, следовательно, его корни также не будут зависеть от q . Поэтому, без ограничения общности, полагаем $q = 1$. Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\lambda_l = \gamma A_l, \quad A_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\left(\kappa + \omega - p b \Lambda / \gamma^2\right) \pm \sqrt{\left(\kappa + \omega - p b \Lambda / \gamma^2\right)^2 - 4 \omega \kappa}}{2 \kappa}}. \tag{2.5}$$

Далее, из равенств (1.8) имеем

$$\ddot{W}(\tau) + \gamma^2 W(\tau) = 0, \quad \dot{\Psi}(\tau) + \gamma^2 \omega \Psi(\tau) = 0. \tag{2.6}$$

Общее решение этих уравнений

$$W(\tau) = C_1 e^{i\gamma\tau} + C_2 e^{-i\gamma\tau}, \quad \Psi(\tau) = C e^{-\omega\gamma^2\tau}.$$

Подставляя $W(\tau)$ в первое равенство (1.9), при $q = 1$ получаем

$$C_1 e^{i\gamma\tau} + C_2 e^{-i\gamma\tau} = C e^{-\omega\gamma^2\tau}.$$

Это равенство возможно, если $\omega = \pm i / \gamma$. При этом одна из констант C_1 или C_2 должна быть равна нулю, т.е.

$$\omega = \frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_1 = 0, \quad C = C_2 \tag{2.7}$$

или

$$\omega = -\frac{i}{\gamma} \Rightarrow C_2 = 0, \quad C = C_1. \quad (2.8)$$

Воспользуемся для определенности равенствами (2.7). Тогда из второго равенства (1.9) при $q = 1$ получаем

$$-i\gamma C e^{-i\gamma\tau} = p C e^{-i\gamma\tau} \Rightarrow p = -i\gamma. \quad (2.9)$$

Подставляя полученные для p и ω равенства (2.8) и (2.9) в (2.5), получаем

$$\lambda_l = \gamma A_l, \quad A_{1,2} = \sqrt{\frac{-(\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda) \pm \sqrt{(\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda)^2 - 4i\gamma\kappa}}{2\kappa\gamma}} \quad (l = 1, 2), \quad (2.10)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2.$$

В результате решение задачи (2.1) с учетом (2.2) записывается в форме

$$V(x) = V_1 \cos(\lambda_1 x) + V_2 \sin(\lambda_1 x) + V_3 \cos(\lambda_2 x) + V_4 \sin(\lambda_2 x), \quad (2.11)$$

а выражение для $\Phi(x)$ получается из первого уравнения в (2.1):

$$\begin{aligned} \Phi'(x) = & -V_1 \frac{\lambda_1^2 - \gamma^2}{\Lambda} \cos(\lambda_1 x) - \\ & -V_2 \frac{\lambda_1^2 - \gamma^2}{\Lambda} \sin(\lambda_1 x) - V_3 \frac{\lambda_2^2 - \gamma^2}{\Lambda} \cos(\lambda_2 x) + \\ & + V_4 \frac{\lambda_2^2 - \gamma^2}{\Lambda} \sin(\lambda_2 x). \end{aligned}$$

Интегрируя, находим

$$\begin{aligned} \Phi(x) = & V_1 \omega_1 \sin(\lambda_1 x) - V_2 \omega_1 \cos(\lambda_1 x) + \\ & + V_3 \omega_2 \sin(\lambda_2 x) - V_4 \omega_2 \cos(\lambda_2 x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$\omega_1 = \frac{\gamma^2 - \lambda_1^2}{\Lambda \lambda_1}, \quad \omega_2 = \frac{\gamma^2 - \lambda_2^2}{\Lambda \lambda_2}. \quad (2.13)$$

Постоянные V_l находятся из граничных условий. Вначале рассмотрим граничные условия (фиксируются граничное поле перемещений и температурный поток):

$$V|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=1} = 0, \quad \Phi'|_{x=0} = 0, \quad \Phi'|_{x=1} = 0. \quad (2.14)$$

Подстановкой (2.11) и (2.12) в (2.14) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} V_1 + V_3 &= 0, \quad V_1 \omega_1 \lambda_1 + V_3 \omega_2 \lambda_2 = 0, \\ V_1 \cos \lambda_1 + V_2 \sin \lambda_1 + V_3 \cos \lambda_2 + V_4 \sin \lambda_2 &= 0, \\ V_1 \lambda_1 \omega_1 \cos \lambda_1 + V_2 \lambda_1 \omega_1 \sin \lambda_1 + V_3 \lambda_2 \omega_2 \cos \lambda_2 + V_4 \lambda_2 \omega_2 \sin \lambda_2 &= 0. \end{aligned}$$

Решая ее, получаем либо

$$V_1 = V_3 = V_4 = 0, \quad \lambda_{1n} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

либо

$$V_1 = V_3 = V_2 = 0, \quad \lambda_{2n} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И в том, и в другом случаях приходим к одному и тому же набору собственных функций $\{\sin \lambda_n x, \cos \lambda_n x\}$, $\lambda_n = \pi n$, с помощью которых решение задачи (2.1) с краевыми условиями (2.14) запишется так:

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \lambda_n x, \tag{2.15}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \cos \lambda_n x \quad (\lambda_n = \pi n).$$

Аналогичным образом доказывается, что в случае граничных условий, где фиксируется нормальное напряжение и температурное поле,

$$(V' - \Lambda\Phi)|_{x=0} = 0, \quad (V' - \Lambda\Phi)|_{x=1} = 0, \quad \Phi|_{x=0} = 0, \quad \Phi|_{x=1} = 0, \tag{2.16}$$

решение имеет вид

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \cos \lambda_n x, \tag{2.17}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x \quad (\lambda_n = \pi n).$$

Еще одни краевые условия, для которых аналогичным образом можно найти систему собственных функций, имеют вид

$$V|_{x=0} = 0, \quad (V' - \Lambda\Phi)|_{x=1} = 0, \tag{2.18}$$

$$\Phi'|_{x=0} = 0, \quad \Phi|_{x=1} = 0.$$

В этом случае

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \lambda_n x, \tag{2.19}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \cos \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2} \right).$$

Если в (2.18) поменять границы местами, то получим соответственно

$$(V' - \Lambda\Phi)|_{x=0} = 0, \quad V|_{x=1} = 0, \quad \Phi|_{x=0} = 0, \quad \Phi'|_{x=1} = 0; \tag{2.20}$$

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos \lambda_n x, \tag{2.21}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \pi \frac{2n-1}{2} \right).$$

Вид рассмотренных здесь граничных условий целиком и полностью определяется свойствами производных тригонометрических функций, согласно которым параметр λ_n может удовлетворять одной из пар уравнений

$$(\sin \lambda_n)' = 0, \quad \cos \lambda_n = 0,$$

либо

$$(\cos \lambda_n)' = 0, \quad \sin \lambda_n = 0.$$

С учетом физического смысла это позволяет составить четыре вида граничных условий (2.14), (2.16), (2.18) и (2.20), которые и рассмотрены здесь.

В остальных случаях нахождение собственных функций не представляется возможным (см. [20]). Причем, под «остальными» краевыми условиями подразумеваются не просто другие условия, а условия, не являющиеся подобными по отношению к рассмотренным. Например, краевые условия, содержащие линейные комбинации величин

$$V^{(2k-2)}(x), \quad \Phi^{(2l-1)}(x) \quad (k, l \in \mathbb{N}),$$

являются подобными условиям (2.13) в том смысле, что решение соответствующей краевой задачи тоже будет иметь вид (2.14). Следовательно, краевые условия, представляющие собой линейные комбинации величин

$$V^{(2k-1)}(x), \quad \Phi^{(2l-2)}(x) \quad (k, l \in \mathbb{N}),$$

подобны (2.16) и т.д.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Уравнения (1.10) для одномерного термоупругого дифференциального оператора в цилиндрической и сферической системах координат записывается так:

$$\begin{aligned} -\gamma^2 V(r) &= V''(r) + \frac{\alpha V'(r)}{r} - \frac{\alpha V(r)}{r^2} - \Lambda \Phi'(r), \\ -i\gamma \Phi(r) &= \kappa \left[\Phi''(r) + \frac{\alpha \Phi'(r)}{r} \right] + i\gamma b \left[V'(r) + \frac{\alpha V(r)}{r} \right]. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь сразу положено $p = -i\gamma$, $\omega = i\gamma^{-1}$ и $q = 1$.

Учитывая вид дифференциальных операторов второго порядка в уравнениях (3.1), решение в кольце $R_1 \leq r \leq R_2$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} V(r) &= V^* J_1^{(\alpha)}(\lambda r) + V^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda r), \\ \Phi(r) &= \Phi^* J_0^{(\alpha)}(\lambda r) + \Phi^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda r), \\ J_\mu^{(\alpha)}(z) &= \begin{cases} J_\mu(z), & \alpha = 1, \\ j_\mu(z), & \alpha = 2, \end{cases} \quad Y_\mu^{(\alpha)}(z) = \begin{cases} Y_\mu(z), & \alpha = 1, \\ y_\mu(z), & \alpha = 2, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $J_\mu(z)$ – цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода порядка μ ; $Y_\mu(z)$ – цилиндрическая функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка μ . Соответственно $j_\mu(z)$ – сферическая функция Бесселя 1-го рода порядка μ ; $y_\mu(z)$ – сферическая функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана) порядка μ .

Подставляя (3.2) в (3.1), с учетом свойств производных бесселевых функций (см. [33], [36]), получаем

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - \gamma^2)V^* + \lambda\Lambda\Phi^* &= 0, \quad -i\gamma\lambda bV^* + (\kappa\lambda^2 - i\gamma)\Phi^* = 0, \\ (\lambda^2 - \gamma^2)V^{**} + \lambda\Lambda\Phi^{**} &= 0, \quad -i\gamma\lambda bV^{**} + (\kappa\lambda^2 - i\gamma)\Phi^{**} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Как видно, уравнения (3.3) аналогичны уравнениям (2.3). Соответственно их решения будут иметь вид, сходный с (2.10):

$$\begin{aligned} \lambda_l &= \gamma A_l, \quad A_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda \pm \sqrt{(\gamma\kappa + i + i\gamma b\Lambda)^2 - 4i\gamma\kappa}}{2\kappa\gamma}} \quad (l = 1, 2), \\ \lambda_3 &= -\lambda_1, \quad \lambda_4 = -\lambda_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом,

$$V(r) = \sum_{l=1}^4 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right],$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^4 \left[\Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) + \Phi_l^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right].$$

Так как $J_1^{(\alpha)}(z)$ и $Y_1^{(\alpha)}(z)$ – нечетные функции, а $J_0^{(\alpha)}(z)$ и $Y_0^{(\alpha)}(z)$ – четные функции, то

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = -J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad J_1^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = -J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$J_0^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = J_0^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad J_0^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = J_0^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$Y_1^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = -Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad Y_1^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = -Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 r),$$

$$Y_0^{(\alpha)}(\lambda_3 r) = Y_0^{(\alpha)}(\lambda_1 r), \quad Y_0^{(\alpha)}(\lambda_4 r) = Y_0^{(\alpha)}(\lambda_2 r).$$

Поэтому общее решение задачи Штурма–Лиувилля (3.1) запишется так:

$$V(r) = \sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right],$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^2 \left[\Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) + \Phi_l^{**} Y_0^{(\alpha)}(\lambda_l r) \right].$$
(3.5)

Оставшиеся постоянные V_l^* , V_l^{**} , Φ_l^* и Φ_l^{**} определяются из граничных условий, при этом с учетом равенств (3.3)

$$\Phi_l^* = V_l^* \omega_l, \quad \Phi_l^{**} = V_l^{**} \omega_l,$$

где ω_l находятся по формулам (2.13).

Рассмотрим вначале случай, когда областью решения является круг радиуса R , $0 \leq r \leq R$. Функции Неймана не ограничены в нуле, поэтому константы V_l^{**} и Φ_l^{**} следует положить равными нулю. Тогда

$$V(r) = \sum_{l=1}^2 V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l r),$$

$$\Phi(r) = \sum_{l=1}^2 \Phi_l^* J_0^{(\alpha)}(\lambda_l r).$$
(3.6)

Исходя из свойств производных цилиндрических и сферических функций Бесселя (см. [33], [36]),

$$J_0^{(\alpha)'}(z) = J_1^{(\alpha)}(z),$$

$$J_0^{(\alpha)}(z) = z J_1^{(\alpha)'}(z) + \alpha J_1^{(\alpha)}(z),$$
(3.7)

параметр z может одновременно удовлетворять либо паре уравнений

$$J_1^{(\alpha)}(z) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(z) = 0,$$

либо

$$J_0^{(\alpha)}(z) = 0, \quad z J_1^{(\alpha)'}(z) + \alpha J_1^{(\alpha)}(z) = 0.$$

Поэтому будем рассматривать граничные условия двух типов:

$$V(R) = 0, \quad \Phi'(R) = 0$$
(3.8)

или

$$\Phi(R) = 0, \quad V'(R) + \frac{\alpha V(R)}{R} - \Lambda \Phi(R) = 0. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.6) в (3.8), получаем

$$\sum_{l=1}^2 V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^2 \Phi_l^* \frac{dJ_0^{(\alpha)}(\lambda_l r)}{dr} \Big|_{r=R} = - \sum_{l=1}^2 \Phi_l^* \lambda_l J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = \sum_{l=1}^2 \frac{\gamma^2 - \lambda_l^2}{\lambda_l \Lambda} V_l^* \lambda_l J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R) = 0.$$

Определитель этой системы равен

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) \\ (\gamma^2 - \lambda_1^2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) & (\gamma^2 - \lambda_2^2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) \end{vmatrix} = \\ & = (\gamma^2 - \lambda_2^2 - \gamma^2 + \lambda_1^2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) = \\ & = (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Приравнивая определитель нулю, получаем

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R) = 0 \Rightarrow V_2^* = 0,$$

или

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R) = 0 \Rightarrow V_1^* = 0.$$

Эти равенства эквивалентны. Поэтому, ограничиваясь одним из двух вышеперечисленных вариантов, получаем

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad (3.11)$$

где λ_n ($n \in \mathbb{N}$) – параметр, удовлетворяющий одновременно двум уравнениям:

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n R) = 0. \quad (3.12)$$

Аналогичным образом для граничных условий (3.9) получаем решение в виде (3.11), где λ_n является корнем уравнений

$$J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad \lambda_n R J_1^{(\alpha)'}(\lambda_n R) + \alpha J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0. \quad (3.13)$$

Перейдем теперь к построению собственных функций для кольца $R_1 \leq r \leq R_2$. Здесь возможны следующие варианты граничных условий:

$$V(R_2) = 0, \quad \Phi'(R_2) = 0, \quad V(R_1) = 0, \quad \Phi'(R_1) = 0; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Phi(R_2) = 0, \quad V'(R_2) + \frac{\alpha V(R_2)}{R_2} - \Lambda \Phi(R_2) &= 0, \\ \Phi(R_1) = 0, \quad V'(R_1) + \frac{\alpha V(R_1)}{R_1} - \Lambda \Phi(R_1) &= 0; \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \Phi(R_2) = 0, \quad V'(R_2) + \frac{\alpha V(R_2)}{R_2} - \Lambda \Phi(R_2) &= 0, \\ V(R_1) = 0, \quad \Phi'(R_1) &= 0; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \Phi(R_1) = 0, \quad V'(R_1) + \frac{\alpha V(R_1)}{R_1} - \Lambda \Phi(R_1) &= 0, \\ V(R_2) = 0, \quad \Phi'(R_2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Подставляя (3.5) в (3.14), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \delta_l \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_2) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) \right] &= 0, \\ \sum_{l=1}^2 \delta_l \left[V_l^* J_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) + V_l^{**} Y_1^{(\alpha)}(\lambda_l R_1) \right] &= 0, \\ \delta_l &= \gamma^2 - \lambda_l^2. \end{aligned}$$

Запишем матрицу этой системы:

$$\begin{pmatrix} J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) \\ \delta_1 J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & \delta_2 J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) & \delta_1 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_2) & \delta_2 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) \\ J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) \\ \delta_1 J_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & \delta_2 J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) & \delta_1 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_1 R_1) & \delta_2 Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований она приводится к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1)} - \frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что необходимым условием существования ненулевого решения является выполнение следующего равенства:

$$J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) - Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_1) = 0.$$

При этом $V_1^* = 0$ и $V_1^{**} = 0$. Для остальных постоянных получаем

$$V_2^* = -\frac{Y_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)}{J_1^{(\alpha)}(\lambda_2 R_2)} V_2^{**}, \quad V_2^{**} \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, приходим к следующему решению:

$$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где λ_n удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) - \\ &- Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

В остальных случаях по аналогии получаем:

– Для граничных условий (3.15)

$$\begin{aligned} V(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Phi(r) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - \\ &- J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \\ \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n r) &= Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - \\ &- J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Здесь λ_n – корень уравнений

$$\begin{aligned} \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) - \\ &- Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

– Для граничных условий (3.16) решение имеет вид (3.18), а λ_n является корнем уравнения

$$\begin{aligned} \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) - \\ &- J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

– Для граничных условий (3.17) решение имеет вид (3.21), а λ_n удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) &= J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) - \\ &- Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Как и для задач в прямоугольной декартовой системе координат, получить решение задачи Штурма–Лиувилля при условиях, отличных (3.8) (3.9), (3.14)–(3.17), не представляется возможным.

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ВИДЕ РЯДОВ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

В соответствии с результатами, полученными в предыдущем разделе, рассмотрим ряды ($\alpha = 1, 2$)

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r),$$

$$f_n = \frac{1}{\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2} \int_{R_1}^{R_1} r^\alpha f(r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) dr, \tag{4.1}$$

где величины $\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2$ определяются так:

$$\|\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)\|^2 = \int_{R_1}^1 r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r) dr.$$

Используя известное равенство (см. [33], [36])

$$\int z^\alpha Z_\nu(\lambda z) S_\nu(\mu z) dz = \frac{\mu z^\alpha Z_\nu(\lambda z) S_{\nu-1}(\mu z) - \lambda z^\alpha Z_{\nu-1}(\lambda z) S_\nu(\mu z)}{\lambda^2 - \mu^2},$$

где в качестве Z_ν и S_ν выступает любая из функций $J_\nu^{(\alpha)}$ или $Y_\nu^{(\alpha)}$, а λ и μ – произвольные числа, нетрудно получить аналогичное соотношение для введенных в предыдущем разделе функций $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$:

$$\int r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\mu r) dr = \frac{\mu r^\alpha \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{k,l-1}^{(\alpha)}(\mu r) - \lambda r^\alpha \Psi_{k,l-1}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{kl}^{(\alpha)}(\mu r)}{\lambda^2 - \mu^2}. \tag{4.2}$$

Пусть число λ удовлетворяет уравнению (3.20), т.е. $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_1) = 0$ (граничные условия (3.14)). В этом случае из (3.20) следует, что $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_2) = 0$. Тогда, используя равенство (4.2) и следуя [33], имеем

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = R_2^\alpha \frac{\mu \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2)}{\lambda^2 - \mu^2} - R_1^\alpha \frac{\mu \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\mu R_1) - \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\lambda^2 - \mu^2} = \frac{\lambda R_2^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Для вычисления предела при $\mu \rightarrow \lambda$ воспользуемся правилом Лопиталья. Получаем

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu^2 - \lambda^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \lim_{\mu \rightarrow \lambda} \frac{\lambda R_2^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\mu R_2) - \lambda R_1^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\mu R_1)}{\mu} = \\
&= \frac{1}{2} \left[R_2^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda R_2) - R_1^{\alpha+1} \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda R_1) \right].
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся следующими формулами, которые вытекают из свойств для производных функций Бесселя:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r)}{dr} &= \lambda \Psi_{11}'^{(\alpha)}(\lambda r) = \\
&= -\frac{\alpha}{r} \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) + \lambda \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda r), \\
\frac{d\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda r)}{dr} &= \lambda \Psi_{10}'^{(\alpha)}(\lambda r) = -\lambda \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = \\
&= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda R_1) \right]^2.
\end{aligned}$$

Если же $\mu \neq \lambda$ и выполняется условие $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu R_1) = 0$, то

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda r) \Psi_{11}^{(\alpha)}(\mu r) dr = 0.$$

Точно так же

$$\begin{aligned}
&\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \\
&= \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2, & k = n, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\| \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \\
&- \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2.
\end{aligned}$$

В результате получаем ($j = 0, 1$)

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\
&= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \quad (4.4)
\end{aligned}$$

В остальных случаях:

– Для граничных условий (3.15) λ_n удовлетворяют уравнению (3.23):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \tag{4.6}$$

– Для граничных условий (3.16) λ_n удовлетворяют уравнению (3.24):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{1j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \tag{4.8}$$

– Для граничных условий (3.17) λ_n удовлетворяют уравнению (3.25):

$$\int_{R_1}^{R_2} r^\alpha \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_k r) dr = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ \tilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n), & k = n; \end{cases} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n) &= \left\| \Psi_{0j}^{(\alpha)}(\lambda_n r) \right\|^2 = \\ &= \frac{R_2^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) \right]^2 - \frac{R_1^{\alpha+1}}{2} \left[\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) \right]^2. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Таким образом, функции $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$, взятые соответствующими парами, являются ортогональными на промежутке $R_1 \leq r \leq R_2$ в смысле скалярного произведения, определенного равенством ($\alpha = 1, 2$)

$$(f, g) = \int_{R_1}^{R_2} r^\alpha f(r) g(r) dr.$$

Покажем, что система функций $\Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)$ является полной, т.е. $(f(r), \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(r) \equiv 0$. Ограничимся случаем, когда $f(r)$ непрерывна в промежутке $[R_1, R_2]$. В силу (4.1) $(f(r), \Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)) = 0$ тогда и только тогда, когда $f_n = 0$. Тогда для функций $\Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n r)$ из первого равенства в (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^r \xi f(\xi) d\xi &= \int_{R_1}^r \sum_{n=1}^{\infty} f_n \xi \Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{R_1}^r \xi \Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \left[r \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n r) - R_1 \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n R_1) \right] = 0. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функции $f(r)$ на промежутке $[R_1, R_2]$ получаем, что $f(r) \equiv 0$. Аналогично для функций $\Psi_{kl}^{(1)}(\lambda_n r)$ из первого равенства (4.1) находим

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^r f(\xi) d\xi &= \int_{R_1}^r \sum_{n=1}^{\infty} f_n \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_{R_1}^r \Psi_{k1}^{(1)}(\lambda_n \xi) d\xi = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n} \left[\Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n R_1) - \Psi_{k0}^{(1)}(\lambda_n r) \right] = 0. \end{aligned}$$

И в этом случае $f(r) \equiv 0$ в силу ее непрерывности. Доказательство полноты системы функций $\Psi_{kl}^{(2)}(\lambda_n r)$ выполняется аналогичным образом. Приведенное рассуждение обобщается на случай пространства кусочно-непрерывных на отрезке $[R_1, R_2]$ функций. Доказательство полноты при более общих предположениях выходит за рамки настоящей работы. Отметим только, что доказательство полноты функций Бесселя в пространстве $L_2[0, R]$ приводится в монографии [37].

5. ОБОБЩЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доопределим функции $\Psi_{ij}^{(\alpha)}(\lambda_n r)$ следующим образом:

$$\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \sin \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \tag{5.1}$$

$$\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \cos \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \cos \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r; \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi) = \begin{cases} \sin \lambda_n x, & \alpha = 0, \quad \xi = x, \\ Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r) - J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R_2) Y_0^{(\alpha)}(\lambda_n r), & \alpha = 1, 2, \quad \xi = r. \end{cases} \tag{5.4}$$

Ортогональность этих функций, очевидно, имеет место и для задач в прямоугольной декартовой системе координат ($\alpha = 0$) на отрезке $[0, 1]$, при этом

$$\Psi_1^{(\alpha)}(\lambda_n) = \Psi_0^{(\alpha)}(\lambda_n) = \widetilde{\Psi}_1^{(\alpha)}(\lambda_n) = \widetilde{\Psi}_0^{(\alpha)}(\lambda_n) = 2.$$

Доказательство полноты тригонометрической системы приводится в работе [38].

Теперь все полученные ранее результаты объединим в табл. 1.

Выполненные построения остаются справедливыми и для моделей с учетом эффектов релаксации ($\tau_0 \neq 0$). В этом случае изменяется только второе равенство в (2.6), которое записывается так:

$$\sum_{k=0}^K \frac{(\tau_0)^k}{k!} \frac{\partial^{k+1} \Psi(\tau)}{\partial \tau^{k+1}} + \gamma^2 \omega \Psi(\tau) = 0.$$

При этом системы (2.1) и (3.1) не изменятся, и представление их решения в форме (2.2) и (3.2) сохраняется. Поэтому далее аналогичным образом получается результат в виде (2.10) и (3.4), с той лишь разницей, что коэффициенты γA_j будут отличаться от тех, что получены при $\tau_0 = 0$. Таким образом, решение задачи Штурма–Лиувилля и в этом случае имеет вид, полученный в разд. 2 и 3.

Таблица 1. Собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

Граничные условия	Решения задачи Штурма–Лиувилля
Задачи для круга $0 \leq r \leq R$ (цилиндр, сфера)	
$V(R) = 0, \quad \Phi'(R) = 0.$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)}(\lambda_n r),$ $J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n R) = 0.$
$\Phi(R) = 0,$ $V'(R) + \frac{\alpha V(R)}{R} - \Lambda \Phi(R) = 0.$	$V(r) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n J_1^{(\alpha)}(\lambda_n r), \quad \Phi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n J_0^{(\alpha)'}(\lambda_n r),$ $J_0^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0, \quad \lambda_n R J_1^{(\alpha)'}(\lambda_n R) + J_1^{(\alpha)}(\lambda_n R) = 0.$
Задачи для отрезка $a \leq \xi \leq b$	
$V(a) = 0, \quad \Phi'(a) = 0,$ $V(b) = 0, \quad \Phi'(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ <p>при $\alpha = 0, k = 0, [a, b] = [0, 1], \lambda_n = \pi n$; при $\alpha = 1, 2, k = 1, [a, b] = [R_1, R_2], \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$</p>
$\Phi(a) = 0, \quad \Phi(b) = 0,$ $V'(a) + \frac{\alpha V(a)}{a} - \Lambda \Phi(a) = 0,$ $V'(b) + \frac{\alpha V(b)}{b} - \Lambda \Phi(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=k}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ <p>при $\alpha = 0, k = 0, [a, b] = [0, 1], \lambda_n = \pi n$; при $\alpha = 1, 2, k = 1, [a, b] = [R_1, R_2], \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$</p>
$\Phi(b) = 0,$ $V'(b) + \frac{\alpha V(b)}{b} - \Lambda \Phi(b) = 0,$ $V(a) = 0, \quad \Phi'(a) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{11}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ <p>при $\alpha = 0, [a, b] = [0, 1], \lambda_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right)$; при $\alpha = 1, 2, [a, b] = [R_1, R_2], \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$</p>
$\Phi(a) = 0,$ $V'(a) + \frac{\alpha V(a)}{a} - \Lambda \Phi(a) = 0,$ $V(b) = 0, \quad \Phi'(b) = 0.$	$V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \Psi_{01}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi), \quad \Phi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \Psi_{00}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi),$ <p>при $\alpha = 0, [a, b] = [0, 1], \lambda_n = \pi \left(n - \frac{1}{2} \right)$; при $\alpha = 1, 2, [a, b] = [R_1, R_2], \lambda_n$ удовлетворяют уравнению $\Psi_{10}^{(\alpha)}(\lambda_n R_1) = 0.$</p>

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основываясь на методе разделения переменных, дана постановка задачи Штурма–Лиувилля и найдены собственные функции для одномерного термоупругого оператора в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

Показано, что:

1. Собственные функции одномерного термоупругого оператора выражаются через известные тригонометрические, цилиндрические и сферические функции. В частности, следует отметить, что функции $\Psi_{kl}^{(\alpha)}(\lambda_n \xi)$ при $\alpha = 1, 2$ подробно описаны в справочнике [36], и с помощью них достаточно успешно решаются нестационарные задачи теплопроводности, упругости и несвязанной термоупругости (см. [34]).
2. В отличие от задач теплопроводности (несвязанной термоупругости) задачи связанной термоупругости решаются аналитически только при определенных граничных условиях, вид которых определяется свойствами собственных функций, как например (3.7).

Последний пункт указывает на принципиальное различие в плане сложности решения начально-краевых задач для скалярных уравнений и начально-краевых задач для систем уравнений. Так, если задача Штурма–Лиувилля для волнового уравнения или уравнения теплопроводности (даже с учетом релаксации) свободно решается при краевых условиях 1-го, 2-го и 3-го рода (а также при их комбинациях) (см. [33], [34]), то уже одномерная задача термоупругости решается только для четырех определенных типов граничных условий (причем 3-е и 4-е граничное условие является комбинацией 1-го и 2-го), что существенно ограничивает класс задач, решаемых аналитически.

Отметим, что этот вопрос, на примере задач о дифракции цилиндрических и сферических волн, достаточно подробно обсуждался в работах [39], [40], где была доказана невозможность осуществления процедуры разделения пространственных переменных в многомерных задачах в цилиндрической системе координат в случае, когда на границе задаются нормальные напряжения. В настоящей статье показано, что в связанных задачах термоупругости этот эффект проявляется уже в одномерных задачах.

С другой стороны, выражение

$$\left(V'(\xi) + \frac{\alpha V(\xi)}{\xi} - \Lambda \Phi(\xi) \right) \Big|_{\xi \in \Pi} = 0$$

в граничных условиях (3.9), (3.15)–(3.17) можно интерпретировать, как нормальную нагрузку на поверхности несжимаемого тела ($c_{12} = 0$ в формуле (1.5)). Учитывая, что, ввиду малости упругих деформаций, относительное изменение объема упруго-деформируемого тела тоже невелико, можно использовать решения краевых задач с граничными условиями вида (3.9), (3.15)–(3.17) в качестве приближенных к решениям задач с заданной на поверхности нормальной нагрузкой вида (1.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еремеев В.С. Диффузия и напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.
2. Князева А.Г. Введение в термодинамику необратимых процессов. Томск: Иван Федоров, 2014. 172 с.
3. Nowacki W. Dynamical Problems of Thermodiffusion in Solids // Proc. Vib. Prob. 1974. V. 15. P. 105–128.
4. Келлер И.Э., Дудин Д.С. Механика сплошной среды. Законы сохранения: учеб. Пособие. Пермь: Изд-во Пермского нац. исслед. политех. ун-та, 2022. 142 с.
5. Формалев В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
6. Шамровский А.Д., Меркотан Г.В. Динамическая задача обобщенной термоупругости для изотропного полупространства // Восточно-Европейский ж. передовых технологий. 2011. Т. 3. № 7(51). С. 56–59.
7. Карташов Э.М. Термодинамические аспекты термоупругости с учетом конечной скорости распространения тепла // Изв. РАН. Энергетика. 2004. № 4. С. 146.
8. Ненахов Е.В., Карташов Э.М. Оценки температурных напряжений в моделях динамической термоупругости // Вестн. Московского гос. технического ун-та им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2022. № 1(100). С. 88–106.
9. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elast. 1993. V. 31. P. 189–208.
10. Quintanilla R. Moore–Gibson–Thompson thermoelasticity with two temperatures // Appl. Engng. Sci. 2020. V. 1. 100006. <https://doi.org/10.1016/j.apples.2020.100006>

11. *Abbas A.I.* The effect of thermal source with mass diffusion in a transversely isotropic thermoelastic infinite medium // *J. of Measurements in Engng.* 2014. V. 2. No 4. P. 175–184.
12. *Abouelregal A.E., Marin M., Askar S.S.* Generalized MGT Heat Transfer Model for an Electro-Thermal Microbeam Lying on a Viscous-Pasternak Foundation with a Laser Excitation Heat Source // *Symmetry* 2023. V. 15. No 4. P. 814.
13. *Abouelregal A., Alesemi M., Alfadil H.* Thermoelastic reactions in a long and thin flexible viscoelastic cylinder due to non-uniform heat flow under the non-Fourier model with fractional derivative of two different orders // *AIMS Mathematics.* 2022. V. 7. № 5. P. 8510–8533.
14. *Bachher M., Sarkar N.* Nonlocal theory of thermoelastic materials with voids and fractional derivative heat transfer // *Waves in Random and Complex Media.* 2019. V. 29. № 4. P. 595–613.
15. *Patnaik S., Sidhardh S., Semperlotti F.* Nonlinear thermoelastic fractional-order model of nonlocal plates: Application to postbuckling and bending response // *Thin-Walled Structures.* 2021. V. 164. 107809. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107809>
16. *Peng W., Ma Y., He T.* Transient thermoelastic response of a size-dependent nanobeam under the fractional order thermoelasticity // *ZAMM Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik.* 2021. V. 101. No 10. e202000379. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000379>
17. *Eringen A.C.* *Nonlocal Continuum Field Theories.* New York: Springer, 2002.
18. *Das N., De S., Sarkar N.* Reflection of plane waves in generalized thermoelasticity of type III with nonlocal effect // *Math. Meth. Appl. Sci.* 2020. V. 43. No 3. P. 1313–1336.
19. *Sarkar N., Mondal S., Othman M. I. A.* Effect of the laser pulse on transient waves in a non-local thermoelastic medium under Green-Naghdi theory // *Structur. Engineer. Mech.* 2020. V. 74. No 4. P. 471–479.
20. *Земсков А.В., Тарлаковский Д.В.* Моделирование механо-диффузионных процессов в многокомпонентных телах с плоскими границами. М.: Физматлит, 2021. 288 с.
21. *Aouadi M.* A generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long solid cylinder // *Inter. J. Math. and Math. Sci.* 2006. V. 2006. P. 1–15. <https://doi.org/10.1155/IJMMS/2006/25976>
22. *Aouadi M.* A problem for an infinite elastic body with a spherical cavity in the theory of generalized thermoelastic diffusion // *Inter. J. Solid. Structur.* 2007. V. 44. P. 5711–5722.
23. *Atwa S.Y., Egypt Z.* Generalized Thermoelastic Diffusion With Effect of Fractional Parameter on Plane Waves Temperature-Dependent Elastic Medium // *J. Material. Chemic. Engineer.* 2013. V. 1. Iss. 2. P. 55–74.
24. *Bhattacharya D., Kanoria M.* The influence of two temperature generalized thermoelastic diffusion inside a spherical shell // *Inter. J. Engineer. Tech. Res. (IJETR).* 2014. V. 2. Iss. 5. P. 151–159.
25. *Bhattacharya D., Pal P., Kanoria M.* Finite Element Method to Study Elasto-Thermodiffusive Response inside a Hollow Cylinder with Three-Phase-Lag Effect // *Inter. J. Comput. Sci. Engineer.* 2019. V. 7. Iss. 1. P. 148–156.
26. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinitely long hollow cylinder for short times // *Acta Mech.* 2011. V. 218. P. 205–215.
27. *Elhagary M.A.* Generalized thermoelastic diffusion problem for an infinite medium with a Spherical Cavity // *Int. J. Thermophys.* 2012. V. 33. P. 172–183.
28. *Kumar R., Devi S.* Deformation of modified couple stress thermoelastic diffusion in a thick circular plate due to heat sources // *CMST.* 2019. V. 25. No 4. P. 167–176.
29. *Olesiak Z.S., Pyryev Yu.A.* A coupled quasi-stationary problem of thermodiffusion for an elastic cylinder // *Inter. J. Engineer. Sci.* 1995. V. 33. No 6. P. 773–780.
30. *Shvets R.M.* On the deformability of anisotropic viscoelastic bodies in the presence of thermodiffusion // *J. Math. Sci.* 1999. V. 97. No 1. P. 3830–3839.
31. *Xia R.H., Tian X.G., Shen Y.P.* The influence of diffusion on generalized thermoelastic problems of infinite body with a cylindrical cavity // *Inter. J. Engineer. Sci.* 2009. V. 47. P. 669–679.
32. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Волны в сплошных средах: Учеб. пособ.: Для вузов. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
33. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Гос. изд-во физ.-мат. Литературы, 1962. 768 с.
34. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. Изд. 4, перераб. и суш. доп. URSS, 2018. 1080 с.
35. *Вестяк В.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Математические основы термоупругости: Учебное пособие. М.: Изд-во МАИ, 2021. 92 с.

36. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции: Формулы, графики, таблицы М.: Наука, 1964. 344 с.
37. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 4-е. М.: Физматлит, 1981. 512 с.
38. Бари Н.К. Тригонометрические ряды // При ред. участии П. Л. Ульянова. М.: Физматгиз, 1961. 936 с.
39. Исраилов М.Ш. Сведение краевых задач динамической теории упругости к скалярным задачам для волновых потенциалов в криволинейных координатах // Изв. РАН МТТ. 2011. № 1. С. 131–136.
40. Исраилов М.Ш. Разделение граничных условий для потенциалов на криволинейной границе в динамических задачах теории упругости // Докл. АН. 2010. Т. 435. № 6. С. 752–754.

STURM–LIOUVILLE PROBLEM FOR A ONE-DIMENSIONAL THERMOELASTIC OPERATOR IN CARTESIAN, CYLINDRICAL, AND SPHERICAL COORDINATE SYSTEMS

A. V. Zemskov^{a,b,*}, D. V. Tarlakovskii^{b,a,**}

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University),
Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125993 Russia*

^b*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University
Michurinsky prospect, 1, Moscow, 119192 Russia*

**e-mail: azemskov1975@mail.ru*

***e-mail: tdvhome@mail.ru*

Received 23 October, 2023

Revised 14 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. The problem of constructing eigenfunctions of a one-dimensional thermoelastic operator in Cartesian, cylindrical, and spherical coordinate systems is considered. The corresponding Sturm–Liouville problem is formulated using Fourier’s separation of variables applied to a coupled system of thermoelasticity equations, assuming that the heat transfer rate is finite. It is shown that the eigenfunctions of the one-dimensional thermoelastic operator are expressed in terms of well-known trigonometric, cylinder, and spherical functions. However, coupled thermoelasticity problems are solved analytically only under certain boundary conditions, whose form is determined by the properties of the eigenfunctions.

Keywords: thermoelasticity, Sturm–Liouville problem, eigenfunctions, Fourier method, cylindrical functions, spherical functions.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА В n -МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ¹⁾

© 2024 г. М. М. Кокурин^{1,*}, В. В. Ключев¹, А. В. Гаврилова¹

¹424001 Республика Марий Эл, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1,

Марийский государственный университет, Россия

*e-mail: kokurin@nextmail.ru

Поступила в редакцию 02.10.2023 г.

Переработанный вариант 02.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Изучается многомерный аналог интегрального уравнения М.М. Лаврентьева, к которому приводится обратная задача акустического зондирования. Устанавливаются условия единственности решения изучаемого уравнения. Также приводятся результаты численных экспериментов по решению обратной задачи акустики с различными расположениями отрезка источников и прямоугольника детекторов акустических волн. Библ. 27. Фиг. 4. Табл. 2.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, обратная задача акустики, линейное интегральное уравнение, уравнение Лаврентьева, единственность решения, гармонические функции, полная система функций, множество единственности.

DOI: 10.31857/S0044466924030062, EDN: XHGGDX

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие нелинейные коэффициентные обратные задачи для уравнений с частными производными могут быть сведены к линейным интегральным уравнениям. Общий подход к такой редукции с использованием преобразования Лапласа предложил М.М. Лаврентьев в работах [1], [2]. Ниже рассмотрим обратную задачу волнового зондирования в следующей постановке. Акустическая неоднородность, локализованная в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, зондируется волновыми полями, порожденными точечными источниками, расположенными в точках множества $Y \subset \mathbb{R}^3$, где $Y \cap D = \emptyset$ (см. [3]). Акустическое поле $u(x,t) = u^{(y)}(x,t)$, возбуждаемое в момент $t = 0$ источником, находящимся в точке $y \in Y$, определяется решением задачи Коши

$$\frac{1}{c^2(x)} u_n^{(y)}(x,t) = \Delta u^{(y)}(x,t) - \delta(x-y)g(t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0; \quad (1.1)$$

$$u^{(y)}(x,0) = 0, \quad u_t^{(y)}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Величина $c(x) > 0$ есть скорость распространения сигнала в точке $x \in \mathbb{R}^3$. Предполагается, что функция $c(x)$ кусочно-непрерывна, и что вне области D она тождественно равна известной константе c_0 . Предположим, кроме того, что функция g имеет ненулевое среднее значение на $[0, \infty)$ и $|g(t)| \leq C_0 e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, при некотором $\beta > 0$.

Для получения информации о функции $c(x)$, $x \in D$, рассеянное поле $u = u^{(y)}(x,t)$, $y \in Y$, измеряется при $t > 0$ в точках $x = z \in Z$, где $Z \subset \mathbb{R}^3$ – множество координат детекторов, причем $Z \cap D = \emptyset$.

Определим для суммируемой функции $f = f(t)$, $t \geq 0$, преобразование Лапласа $\tilde{f}(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$. Будем считать, что все функции $u^{(y)}(x,t)$, $y \in Y$, и их производные по t до второго порядка включительно

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 22-71-10070).

экспоненциально убывают при $t \rightarrow \infty$, когда $x \in Z$, и, кроме того, $u^{(y)}(x,t) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $y \in Y$ и $t > 0$. В [4], [5] обсуждаются условия на функцию $c(x)$, обеспечивающие эти требования. Обозначим

$$\xi(x) = \frac{1}{c^2(x)} - \frac{1}{c_0^2}, \quad x \in D,$$

и перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\Delta u^{(y)} - \frac{1}{c_0^2} u_{tt}^{(y)}(x,t) = \xi(x) u_{tt}^{(y)}(x,t) - \delta(x-y)g(t).$$

Очевидно, что для нахождения $c(x)$ достаточно ограничиться отысканием $\xi(x)$ при $x \in D$, по которой $c(x)$ определяется однозначно.

Известно, что поставленная задача приводится к следующему интегральному уравнению относительно искомой функции ξ с известной правой частью $f(y,z)$, называемому уравнением М.М. Лаврентьева (см. [6]–[8]):

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x-y||x-z|} = f(y,z), \quad (y,z) \in Y \times Z. \quad (1.2)$$

Итак, данные наблюдения $\{u^{(y)}(z,t) \mid t > 0, y \in Y, z \in Z\}$ позволяют однозначно найти $\xi(x), x \in D$, если оператор интегрального уравнения (1.2) инъективен.

Кроме рассматриваемой задачи (1.1) к уравнению (1.2) сводятся также обратные задачи акустического зондирования гармоническими по времени источниками с частотой $\omega \in (0, \omega_0]$ (см. подробнее в [9, § 3.1], [10, с. 223], [11]). К аналогичному уравнению приводится также коэффициентная обратная задача для уравнения акустики в ограниченной области с условием Дирихле на границе (см. [12]).

Условиям единственности решения уравнения (1.2) посвящено значительное число работ, начиная с [2] и далее [3], [7], [10], [11], [13]–[16]. Например, если Y и Z есть открытые области на плоскости, не пересекающей D , либо на аналитической поверхности, содержащей множество D внутри, то оператор уравнения (1.2) инъективен, и тем самым рассматриваемая обратная задача имеет единственное решение. При этом совокупная размерность 4 пространственного носителя данных $Y \times Z$ в (1.2) больше количества 3 независимых переменных искомой функции ξ . Позднее в работах [14], [16], [17] показано, что инъективность оператора в (1.2) имеет место и в случае, когда одно из многообразий Y, Z есть плоскость, а второе – прямая. В этом случае уже совокупная размерность носителя данных $Y \times Z$ и размерность носителя D искомой функции совпадают и обе равны трем. Вопросы численного решения уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) изучены значительно меньше, трудности при этом являются общими для всех многомерных обратных задач рассеяния. Суть их в том, что для реконструкции локальных неоднородностей малых размеров требуется использовать достаточно густые дискретные сетки, что, в свою очередь, приводит к результирующим линейным системам сверхвысокой размерности. Хранение и обработка этих систем требует применения распределенных вычислений и часто распределенного хранения данных (см. [17]). Альтернативным подходам к численному решению рассматриваемой задачи посвящены, в частности, работы [7], [18], [19].

В настоящей статье рассматривается вопрос единственности решения многомерного уравнения М.М. Лаврентьева

$$\int_D \frac{\xi(x) dx}{|x-y|^{n-2} |x-z|^{n-2}} = f(y,z), \quad (y,z) \in Y \times Z, \quad (1.3)$$

где $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытый интервал или отрезок на произвольной прямой $L \subset \mathbb{R}^n$, $Y \cap \bar{D} = \emptyset$, а Z – область в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, не пересекающей \bar{D} . Ядро интегрального оператора в левой части (1.3) с точностью до константы является произведением фундаментальных решений уравнения Лапласа в пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 3$. Тем самым, (1.3) служит обобщением уравнения (1.2) и совпадает с ним в случае $n=3$.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 2 доказывается единственность решения уравнения (1.3). При $n=3$ аналогичное утверждение доказано в [15]–[17], причем в [15], [16] используется дополнительное условие, что прямая L , содержащая промежуток Y , не пересекает \bar{D} . В настоящей работе это условие не накладывалось, а, кроме того, данный результат обобщается на произвольные размерности $n \geq 3$. Доказанная теорема позволяет утверждать единственность решения описанной выше трехмерной обратной задачи акустики в случае, когда продолжение отрезка Y пересекает \bar{D} . В разд. 3 приводятся результаты

численных экспериментов, в которых решается эта задача с различными расположениями множеств X и Y .

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ М.М. ЛАВРЕНТЬЕВА

Предлагаемое доказательство единственности решения уравнения (1.3) основано на следующей теореме.

Теорема 2.1. *Линейные комбинации функций семейства*

$$\left\{ \frac{u(x)}{|x-y|^{n-2}} \mid y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \right\}$$

плотны в пространстве $L_2(D)$.

Здесь

$$\mathcal{H}(D) = \{u \in L_2(D) \mid \Delta u(x) = 0, x \in D\}$$

есть множество всех гармонических функций в D , принадлежащих $L_2(D)$. Для доказательства теоремы 2.1 достаточно убедиться, что соотношение

$$\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{|x-y|^{n-2}} = 0 \quad \forall y \in Y, u \in \mathcal{H}(D) \tag{2.1}$$

с $h \in L_2(D)$ влечет $h(x)=0$ п.в. в D . Приступая к доказательству, заметим, что функция $f(y)$, определенная выражением в левой части равенства (2.1), гармонична по $y \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$ и тем самым вещественно аналитична вне \bar{D} . Отсюда следует, что сужение f на $L \setminus \bar{D}$ также вещественно аналитично. Нетрудно видеть, что множество $L \setminus \bar{D}$ либо совпадает с L , либо содержит две неограниченные компоненты. В обоих случаях равенство $f(y) = 0, y \in Y$ продолжается по аналитичности на всю неограниченную компоненту множества $L \setminus \bar{D}$, содержащую Y . Выберем на прямой L произвольно точку и рассмотрим шар с центром в этой точке, содержащий \bar{D} внутри. Без ограничения общности можем считать, что выбранная точка совпадает с началом координат, а шар, содержащий \bar{D} , имеет радиус $1 - \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Таким образом, $|x| \leq 1 - \varepsilon$ для всех $x \in \bar{D}$. Пусть для определенности $L = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n \in \mathbb{R}\}$ и $f(y) = 0$ для точек y , принадлежащих неограниченной компоненте $\{x \in L \mid x_n \geq 0\} \setminus \bar{D}$. Указанная компонента содержит луч $L^+ = \{(0, \dots, 0, x_n) \mid x_n \geq 1 - \varepsilon\}$. Поэтому на основании (2.1) имеем

$$\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{|x-y|^{n-2}} = 0 \quad \forall y \in L^+, u \in \mathcal{H}(D). \tag{2.2}$$

Переходим к доказательству сформулированной теоремы с учетом сделанного уточнения. Обозначим $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $S_r = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| = r\}$.

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 2.1. *Для $a > 0$ и b таких, что $a^2 + b^2 \leq 1 - \varepsilon$, имеет место равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(a^2 + (b - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} = C(n) e^{-i\mu b} e^{-\mu\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{2.3}$$

где $V(s)$ – функция, аналитическая при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющая условию $|r^{(n-3)/2} V(re^{i\psi})| = O(1), r \rightarrow 0^+, \psi \in [0, 2\pi)$. Интеграл сходится равномерно относительно параметров a, b , удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 \leq 1 - \varepsilon, a > 0$.

Доказательство. Обозначим интеграл в левой части (2.3) через $\mathcal{I}(\mu; a, b)$. Для обоснования равномерной сходимости этого интеграла запишем вещественную и мнимую части подынтегрального выражения как сумму произведений $f(x,t)g(x,t)$, где $f(x,t) = \cos \mu t$ или $\sin \mu t$, $g(x,t)$ есть вещественная или мнимая часть функции $(a^2 + (b - a\sqrt{2}i - t)^2)^{-(n-2)/2}$, $x = (\mu, a, b)$. Непосредственно устанавливаем, что функция $g(x,t)$ монотонно стремится к нулю по $|t| \geq t_0$ равномерно относительно параметров a, b , удовлетворяющих условию леммы 2.1. Поэтому равномерная сходимость \mathcal{I} следует из теоремы 3 в [20, с. 674].

Замена переменных $\tau = t - b$ приводит интересующий нас интеграл к виду

$$\mathcal{I}(\mu; a, b) = e^{-i\mu b} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2\right)^{(n-2)/2}}. \tag{2.4}$$

Рассмотрим на плоскости переменной $\zeta = v + iw$ положительно ориентированный контур

$$\Gamma_R = \Gamma_{R1} \cup \Gamma_{R2} \cup \Gamma_{R3} \cup \Gamma_{R4} \cup \Gamma_{R5} \cup \Gamma_{R6}, \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_{R1} &= \{v + 0i \mid v \in [0, R]\}, \quad \Gamma_{R2} = \{R + iw \mid w \in [0, \sqrt{2}]\}, \\ \Gamma_{R3} &= \{v + i\sqrt{2} \mid v \in [R, -R]\}, \quad \Gamma_{R4} = \{-R + iw \mid w \in [\sqrt{2}, 0]\}, \\ \Gamma_{R5} &= \{v + 0i \mid v \in [-R, 0]\}, \\ \Gamma_{R6} &= \left\{ v + iw = \frac{a\sqrt{2} \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} + i \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t} \mid t \in [-\pi/2, \pi/2] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь в обозначениях участков контура порядок перечисления концов для отрезка значений параметра на кривой соответствует нужному направлению обхода участка. Участок Γ_{R6} представляет собой половину лемнискаты Бернулли. Контур (2.5) обходит разрез плоскости \mathbb{C} , выполненный вдоль отрезка $[-ia, ia]$. Вне этого разреза функция $(a^2 + \zeta^2)^{(n-2)/2}$ допускает выделение однозначной аналитической ветви. Указанная ветвь определяется равенством

$$\begin{aligned} (a^2 + \zeta^2)^{(n-2)/2} &= (\sqrt{\zeta + ia})^{n-2} (\sqrt{\zeta - ia})^{n-2}, \\ \zeta &= ia + re^{i\phi}, \quad \phi \in (-\pi/2, 3\pi/2), \end{aligned}$$

с выбором для корней главных значений, определяемых условием $\sqrt{1} = 1$. Тем самым

$$F(\zeta) = \frac{e^{-i\mu\zeta}}{(\sqrt{\zeta - ia})^{n-2} (\sqrt{\zeta + ia})^{n-2}} \tag{2.6}$$

также является однозначной аналитической функцией вне $[-ia, ia]$ и, в частности, в области, ограниченной контуром Γ_R . Следовательно,

$$\int_{\Gamma_R} F(\zeta) d\zeta = 0. \tag{2.7}$$

Нетрудно видеть, что интегралы от функции (2.6) по участкам Γ_{R2} и Γ_{R4} имеют порядки $O(R^{2-n})$, $R \rightarrow \infty$. Поэтому из (2.7) следует, что при $R \rightarrow \infty$ имеет место

$$\int_{\Gamma_{R1}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} + \int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} + \int_{\Gamma_{R6}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} + \int_R^{-R} \frac{e^{-i\mu(i\sqrt{2}+\tau)} d\tau}{(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2})^{n-2}} = O(R^{2-n}). \tag{2.8}$$

Непосредственный анализ показывает, что при вещественных $\zeta = v$ и $\zeta = -v$, $v \geq 0$, функция $\sqrt{a^2 + \zeta^2} = \sqrt{\zeta - ia} \sqrt{\zeta + ia}$ принимает значения противоположных знаков. Поэтому замена переменной $v = -\tilde{v}$ дает

$$\int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} = \int_{-R}^0 \frac{e^{-i\mu v} dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} = \int_R^0 \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{(\sqrt{a^2 + (-\tilde{v})^2})^{n-2}} = \int_0^R \frac{e^{i\mu\tilde{v}} (-d\tilde{v})}{(-\sqrt{a^2 + \tilde{v}^2})^{n-2}} = (-1)^{n-2} \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma_{R1}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} + \int_{\Gamma_{R5}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} = \int_0^R \frac{e^{-i\mu v} dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} + (-1)^{n-2} \int_0^R \frac{e^{i\mu v} dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} = \int_0^R \frac{(e^{-i\mu v} + (-1)^n e^{i\mu v}) dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} = ((-1)^n + 1) \int_0^R \frac{\cos \mu v dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} + i((-1)^n - 1) \int_0^R \frac{\sin \mu v dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}}. \tag{2.9}$$

Обратимся к интегралу по участку лемнискаты Γ_{R6} . Обозначим $r_1 = |\zeta - ia|$, $r_2 = |\zeta + ia|$ и $\phi_1 = \arg(\zeta - ia)$, $\phi_2 = \arg(\zeta + ia)$. Поскольку при $\zeta \in \Gamma_{R6}$ будет

$$\zeta = a\sqrt{2} \left(\frac{\sin t \cos t}{1 + \sin^2 t} + i \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} \right),$$

величины ϕ_1 , ϕ_2 , а вместе с ними и $e^{i(n-2)(\phi_1 + \phi_2)/2}$, не зависят ни от a , ни от μ . При этом $|e^{i(n-2)(\phi_1 + \phi_2)/2}| = 1$.

Кроме того, по известному свойству лемнискаты справедливо $\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{a^2} = a$ при $a > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{R6}} \frac{e^{-i\mu\zeta} d\zeta}{(\sqrt{a^2 + \zeta^2})^{n-2}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\mu a\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} a\sqrt{2} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{a^{n-2} e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}} = \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-i\mu a\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{(\mu a)^{(n-3)/2} e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}} = \\ &= -\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(\mu a), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\mathcal{I}_{\Gamma 6}(s) = \frac{1}{s^{(n-3)/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{-is\sqrt{2}\left(\frac{\sin t \cos t}{1+\sin^2 t} + i\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\right)} \frac{1-3\sin^2 t + i(\sin^3 t - 3\sin t)}{(1+\sin^2 t)^2} dt}{e^{i(n-2)(\phi_1+\phi_2)/2}}, \quad s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Заметим, что интеграл в правой части последнего равенства есть функция, аналитическая при всех $s \in \mathbb{C}$, включая точку $s = 0$. Поэтому $|r^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(re^{i\psi})| = O(1)$, $r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$.

Перейдем в (2.8) к пределу при $R \rightarrow \infty$. С учетом (2.9) мы получим

$$\begin{aligned} &((-1)^n + 1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \mu v dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} + i((-1)^n - 1) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \mu v dv}{(\sqrt{a^2 + v^2})^{n-2}} - \\ &-\sqrt{2} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} \mathcal{I}_{\Gamma 6}(\mu a) - e^{\mu\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2}\right)^{n-2}} = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Первый из интегралов в (2.10) равен

$$\sqrt{\pi} \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{(n-3)/2} \left[\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\right]^{-1} K_{(n-3)/2}(\mu a),$$

второй равен

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{\mu}{2a}\right)^{(n-3)/2} \Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right) (I_{(n-3)/2}(\mu a) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(\mu a))$$

(см. [21, с. 167, 262]). Здесь $I_\nu(s)$, $K_\nu(s)$ – модифицированные функции Бесселя, $\mathbf{L}_\nu(s)$ – модифицированная функция Струве. Заметим, что функции $K_{(n-3)/2}(s)$ и $I_{(n-3)/2}(s) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(s)$ обе аналитические при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяют условиям

$$|r^{(n-3)/2} K_{(n-3)/2}(re^{i\psi})| = O(1),$$

$$\left| r^{(n-3)/2} (I_{(n-3)/2}(re^{i\psi}) - \mathbf{L}_{(3-n)/2}(re^{i\psi})) \right| = O(1)$$

при $r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(\sqrt{a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2}\right)^{n-2}} = C(n)e^{-\mu\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a),$$

где $V(s)$ – функция аналитическая при $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и удовлетворяющая условию $|r^{(n-3)/2}V(re^{i\psi})| = O(1), r \rightarrow 0+, \psi \in [0, 2\pi)$. Окончательно с учетом (2.4) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\mu; a, b) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{(a^2 + (b - i\sqrt{2} - t)^2)^{(n-2)/2}} = \\ &= C(n)e^{-\mu\sqrt{2}} e^{-i\mu b} \left(\frac{\mu}{a}\right)^{(n-3)/2} V(\mu a), \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Лемма 2.1 доказана.

Заметим, что функция V многозначна, но имеет однозначную ветвь на комплексной плоскости с разрезом вдоль луча $i +$.

Доказательство теоремы 2.1. Обозначим

$$g(v) = f(0, \dots, 0, v) = \int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (v - x_n)^2\right)^{(n-2)/2}}, |v| > 1 - \varepsilon. \tag{2.11}$$

Ввиду вещественной аналитичности функции g при $v > 1 - \varepsilon$, указанная функция допускает однозначное аналитическое продолжение в окрестность луча $\{\zeta = v + iw \in \mathbb{C} \mid v > 1 - \varepsilon, w = 0\}$. Это продолжение соответствует выбору ветви квадратного корня, для которой $\sqrt{1} = 1$. Функцию g далее можем с сохранением однозначности аналитически продолжить вдоль дуг $\{ve^{it} \mid t \in (0, \pi)\}, v > 1 - \varepsilon$, в область

$$Q = \{\zeta = v + iw \in \mathbb{C} \mid w > 0\} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq 1 - \varepsilon\}.$$

Однозначность такого продолжения определяется тем, что для точек ζ этих дуг при всех $x = (x', x_n) \in \bar{D}$ выполняется $|x'|^2 + (\zeta - x_n)^2 \neq 0, 0 < \arg(|x'|^2 + (\zeta - x_n)^2) < 2\pi$.

В силу (2.2), $g(v) = 0$ при $v > 1 - \varepsilon$. Пользуясь теоремой единственности для аналитических функций (см. [22, с. 73]), заключаем, что $g(\zeta) = 0$ для всех $\zeta \in Q$. Для дальнейших построений существенно, что прямая $\{\zeta \in \mathbb{C} \mid \zeta = t + i\sqrt{2}, t \in \mathbb{R}\}$ принадлежит Q , поэтому согласно (2.11) имеем

$$\begin{aligned} g(t + i\sqrt{2}) &= \int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} = 0 \\ &\forall t \in \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{H}(D). \end{aligned} \tag{2.12}$$

При фиксированных $u \in \mathcal{H}(D), A > 0$ на основании (2.12) и теоремы Фубини запишем

$$\begin{aligned} &\int_{-A}^A e^{-i\mu t} \left(\int_D \frac{h(x)u(x)dx}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dt = \\ &= \int_D h(x)u(x) \left(\int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dx = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Поскольку множество $\{x \in D \mid x' = 0\}$ имеет в \mathbb{R}^n меру нуль, можем считать, что в правом интеграле по $[-A, A]$ выполняется $|x'| > 0$. Заметим, что величины $a = |x'|, b = x_n$ удовлетворяют условию леммы 2.1. Согласно этой лемме, функция

$$\eta_A(x, \mu) = \int_{-A}^A \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}}$$

при $A \rightarrow +\infty$ сходится к $\mathcal{I}(\mu; |x'|, x_n)$ равномерно по $x \in D$. В частности, для всех $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ выполняется $\sup_{x \in D} |\eta_A(x, \mu)| < \infty$. Предельный переход в (2.13) при $A \rightarrow +\infty$ с использованием теоремы

Лебега о мажорируемой сходимости дает

$$\int_D h(x) u(x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\mu t} dt}{\left(|x'|^2 + (x_n - i\sqrt{2} - t)^2\right)^{(n-2)/2}} \right) dx = 0.$$

Поэтому из (2.3) следует равенство

$$\int_D h(x) u(x) e^{-i\mu x_n} \frac{V(\mu|x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.14}$$

Непосредственно проверяется, что для любого $\lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция $u_{\lambda'}(x) = e^{-i(\lambda', x') + |\lambda'|x_n}$ принадлежит $\mathcal{H}(D)$. Полагая $u = u_{\lambda'}$ в (2.14), получаем

$$\int_D h(x) e^{-i(\lambda', x') + (|\lambda'| - i\mu)x_n} \frac{V(\mu|x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.15}$$

При каждом $\lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}$ функция в левой части (2.15) аналитична по $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Поэтому равенство (2.15) по аналитичности продолжается на комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $i\mathbb{R}_+$. Полагая $\mu = p - |\lambda'|i$, $p \neq 0$ в (2.14), получаем

$$\int_D h(x', x_n) e^{-ipx_n} e^{-i(\lambda', x')} \frac{V((p - |\lambda'|i)|x'|)}{|x'|^{(n-3)/2}} dx' dx_n = 0 \quad \forall \lambda' \in \mathbb{R}^{n-1}, p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.16}$$

Зафиксируем финитную на \mathbb{R}_+ функцию $\eta = \eta(r)$, $r \geq 0$, и функцию $Y_{k,l}$ тригонометрического базиса для некоторых $k \geq 0$ и $1 \leq l \leq d_k$. Умножим обе части равенства (2.16) на $\eta(|\lambda'|)Y_{k,l}(\theta)$, где $\theta = \lambda' / |\lambda'|$, и проинтегрируем результат по $\mathbb{R}^{n-1} = \{\lambda'\}$, считая функцию h продолженной нулем вне D . Мы будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{h(x', x_n)}{|x'|^{(n-3)/2}} e^{-ipx_n} \times \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\lambda', x')} V((p - |\lambda'|i)|x') \times \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' \right) dx' dx_n = 0. \tag{2.17}$$

Согласно формуле (2.6.5) из [23] (см. также теорему 3.10 из [24]), имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(\lambda', x')} V((p - |\lambda'|i)|x') \eta(|\lambda'|) Y_{k,l}(\theta) d\lambda' = \\ & = (-i)^k (2\pi)^{(n-1)/2} \rho^{(3-n)/2} Y_{k,l}(\varphi) \times \\ & \times \int_0^{\infty} J_{(n-1)/2+k-1}(r\rho) V((p - ir)\rho) \eta(r) r^{(n-1)/2} dr, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\varphi = x' / |x'|$, $\rho = |x'|$, $J_{(n-1)/2+k-1}(\zeta)$ – функция Бесселя.

Выбирая в (2.17) в качестве η элемент последовательности финитных на \mathbb{R}_+ функций $\{\eta_m(r)\}$, сходящихся в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ к $\delta(r-t)$, $t > 0$, и переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, из (2.17), (2.18) получаем

$$\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \left[\int_{S^{n-2}} \rho^{n-2} \frac{h(x'(\rho, \varphi), x_n)}{\rho^{(n-3)/2}} \rho^{(3-n)/2} Y_{k,l}(\varphi) d\varphi \right] e^{-ipx_n} dx_n \right] \times \times J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{2.19}$$

Здесь $x'(\rho, \varphi) = \rho\varphi$, $\rho = |x'|$. При выводе (2.19) использовалась формула

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x') dx' = \int_0^\infty \left[\int_{S^{n-2}} f(x') d\varphi \right] d\rho = \int_0^\infty \rho^{n-2} \left[\int_{S^{n-2}} f(x'(\rho, \varphi)) d\varphi \right] d\rho,$$

в которой $S^{n-2} = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |x'| = \rho\}$ и f – произвольная интегрируемая на \mathbb{R}^{n-1} функция.

Завершение доказательства проводится по схеме из [17]. Обозначим

$$G_{k,l}(\rho, x_n) = \int_{S^{n-2}} \rho h(x'(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi, \tag{2.20}$$

$$f_{p,k,l}(\rho) = \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) e^{-ipx_n} dx_n.$$

Из (2.19) следует равенство

$$\int_0^\infty J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) f_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \tag{2.21}$$

$$\forall t \geq 0, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Имеет место представление

$$f_{p,k,l}(\rho) = \sum_{j=0}^\infty \frac{(-ip)^j}{j!} \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n.$$

Поскольку $|x| \leq 1 - \varepsilon$ для $x \in D$, функция $G_{k,l} \equiv 0$ вне прямоугольника $[0, 1 - \varepsilon] \times [-(1 - \varepsilon), 1 - \varepsilon]$, и соответственно $f_{p,k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[0, 1 - \varepsilon]$.

Зафиксируем номера $k = k_0, l = l_0$. Возможны два случая:

1) для всех $j = 0, 1, \dots$ справедливо $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geq 0$; таким образом, в этом случае $f_{p,k,l} = 0$ п.в. для всех $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

2) найдется номер $m \geq 0$ такой, что $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^j dx_n = 0$ для п.в. $\rho \geq 0$ и всех $0 \leq j < m$, но функция $\int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n$ отлична от нуля на множестве положительной меры в $[0, 1 - \varepsilon]$.

В случае 1) по теореме Мюнца (см. [25, с. 54]) для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}$ имеем $G_{k,l}(\rho, x_n) = 0$. Поэтому ввиду (2.20)

$$\int_{S^{n-2}} h(x(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0 \tag{2.22}$$

для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим подробнее случай 2). В этом случае при $p \rightarrow 0+$ справедливо равенство

$$f_{p,k,l}(\rho) = \frac{(-ip)^m}{m!} \int_{-\infty}^\infty G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n + O(p^{m+1}). \tag{2.23}$$

Поэтому при малых $p > 0$ имеет место

$$\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = \frac{p^m}{m!} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p^{m+1}). \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что для достаточно малого $\delta > 0$ при $0 < p \leq \delta$ выполняется $\|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)} > 0$. Введем обозначение

$$\tilde{f}_{p,k,l}(\rho) = f_{p,k,l}(\rho) / \|f_{p,k,l}\|_{L_2(0,\infty)}, \quad \rho \geq 0, \quad 0 < p \leq \delta.$$

Используя (2.23) и (2.24), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) &= \left(\left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)} + O(p) \right)^{-1} \times \\ &\times \left((-i)^m \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n + O(p) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\tilde{f}_{p,k,l} - \tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 0, \quad (2.25)$$

где

$$\tilde{g}_{k,l}(\rho) = (-i)^m \left\| \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\cdot, x_n) x_n^m dx_n \right\|_{L_2(0,\infty)}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} G_{k,l}(\rho, x_n) x_n^m dx_n. \quad (2.26)$$

Согласно (2.26), имеем

$$\|\tilde{g}_{k,l}\|_{L_2(0,\infty)} = 1 \quad (2.27)$$

и $\tilde{g}_{k,l} \equiv 0$ вне отрезка $[0, 1 - \varepsilon]$. Из (2.21) следует, что для выбранных номеров $k = k_0$, $l = l_0$ выполняется равенство

$$\int_0^{\infty} J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.28)$$

Заметим, что в (2.28) интегрирование фактически ведется по отрезку $[0, 1 - \varepsilon]$. Поэтому, в частности,

$$\int_0^1 J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V((p-it)\rho) \tilde{f}_{p,k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.29)$$

Переходя в (2.29) к пределу при $p \rightarrow 0+$, с учетом (2.25) получаем

$$\int_0^1 J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V(-it\rho) \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall t > 0. \quad (2.30)$$

Отсюда обычным образом следует, что $\tilde{g}_{k,l}(\rho) = 0$ п.в. на $(0, 1)$ (а при $\rho \geq 1$ равенство $\tilde{g}_{k,l}(\rho) = 0$ уже установлено). Действительно, умножая обе части (2.30) на t^{-s} , $s \in (0, 1)$, и интегрируя на отрезке $t \in [0, 1]$, находим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \tilde{g}_{k,l}(\rho) \left(\int_0^1 t^{-s} J_{(n-1)/2+k-1}(t\rho) V(-it\rho) dt \right) d\rho = \\ &= \int_0^1 \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho \int_0^1 \tau^{-s} J_{(n-1)/2+k-1}(\tau) V(-i\tau) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Функция Бесселя $J_{(n-1)/2+k-1}(\tau)$ в точке $\tau = 0$ имеет нуль порядка $(n-1)/2+k-1 \geq (n-3)/2$. Поскольку в силу леммы 2.1 справедливо $|\tau^{(n-3)/2}V(-i\tau)| = O(1), \tau \rightarrow 0+$ при $n > 3$ (или эта функция имеет логарифмическую особенность при $n = 3$), последний написанный интеграл сходится и представляет собой аналитическую функцию $\Psi(s)$.

Если бы при всех $s \in (0,1)$ было $\Psi(s) = 0$, то по теореме Мюнца мы имели бы $J_{(n-1)/2+k-1}(\tau)V(-i\tau) \equiv 0$. В силу аналитичности V , это значит, что $V(s) = 0$ при всех $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а ввиду (2.3) и (2.4) отсюда следует, что

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\mu\tau} d\tau}{\left(a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2\right)^{(n-2)/2}} = 0. \tag{2.31}$$

Покажем, что утверждение (2.31) на самом деле несправедливо. Обозначим $f(\tau) = (a^2 + (i\sqrt{2} + \tau)^2)^{-(n-2)/2}$. При $n \geq 4$ имеем $f \in L_1(\mathbb{R})$ и соотношение (2.31) означает, что преобразование Фурье функции f почти всюду равно нулю на \mathbb{R} . Но тогда и функция f почти всюду равна нулю на \mathbb{R} (см. следствие 9.1.11 в [26]), а это не так. При $n = 3$ имеем $f \in L_2(\mathbb{R})$, и тогда в силу замечания к теореме 9.2.3 в [26] преобразование Фурье $\hat{f}(\mu)$ функции f почти всюду на \mathbb{R} равно

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\mu\tau} d\tau.$$

Комбинируя это утверждение с (2.31), приходим к выводу, что $\hat{f} = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$. Но тогда и $f = 0$ в $L_2(\mathbb{R})$, а это не так.

Поэтому найдется такой отрезок $[\alpha, \beta]$, что $\Psi(s) \neq 0$ при $s \in [\alpha, \beta]$ и, значит,

$$\int_0^1 \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = \int_0^\infty \rho^{s-1} \tilde{g}_{k,l}(\rho) d\rho = 0 \quad \forall s \in [\alpha, \beta]. \tag{2.32}$$

Из (2.32) и теоремы об обращении преобразования Меллина (см. [21, с. 73]) следует $\tilde{g}_{k,l} = 0$ п.в. на \mathbb{R}_+ . Полученное равенство противоречит (2.27). Тем самым показано, что случай 2) невозможен ни при каких k, l .

Таким образом, реализуется случай 1), поэтому в силу (2.22) имеем

$$\int_{S^{n-2}} h(x'(\rho, \varphi), x_n) Y_{k,l}(\varphi) d\varphi = 0$$

для всех $k = 0, 1, \dots; l = 1, \dots, d_k$ и для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}$. Поскольку система сферических функций $\{Y_{k,l}(\varphi)\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(S^{n-2})$, отсюда следует, что

$$h(x'(\rho, \varphi), x_n) = 0$$

для п.в. $\rho \geq 0, x_n \in \mathbb{R}, \varphi \in S^{n-2}$. Поэтому $h(x) = 0$ для п.в. $x \in D$. Теорема доказана.

Покажем, как из доказанной теоремы следует единственность решения многомерного уравнения М.М. Лаврентьева (1.3) в пространстве произвольной размерности $n \geq 3$. Справедливо следующее утверждение (см. теорему 4 в [27]).

Лемма 2.2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $n \geq 3$. Тогда справедливо ортогональное разложение

$$L_2(D) = \mathcal{H}(D) \oplus \mathcal{O}(D),$$

где $\mathcal{H}(D)$ – множество гармонических функций, принадлежащих $L_2(D)$,

$$\mathcal{O}(D) = \left\{ w \in L_2(D) \mid \forall r \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}, \int_D \frac{w(x)dx}{|r-x|^{n-2}} = 0 \right\}.$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 2.2 в [13], приходим к следствию леммы 2.2.

Лемма 2.3. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$, $n \geq 3$, есть множество единственности. Тогда множество линейных комбинаций функций $|r-x|^{-(n-2)}$, $r \in S$, плотно в $\mathcal{H}(D)$ в смысле метрики пространства $L_2(D)$.

Здесь под множеством единственности понимается такое множество $S \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$, что любая гармоническая в $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$ функция u , равная нулю во всех точках множества S и стремящаяся к нулю на бесконечности, тождественно равна нулю на всем множестве $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}$. Очевидным примером множества единственности служит любая гиперплоскость Π размерности $n-1$, не пересекающая \bar{D} , что следует из принципа максимума для гармонических функций.

Рассмотрим теперь уравнение (1.3) с нулевой правой частью:

$$\int_D \frac{\xi(x)dx}{|x-y|^{n-2}|x-z|^{n-2}} = 0, \quad (y, z) \in Y \times Z. \tag{2.33}$$

Интеграл в левой части (2.33) представляет собой аналитическую функцию $y \in Y$ и $z \in Z$, и аналитическое продолжение позволяет установить это равенство для всех $(y, z) \in Y \times \Pi$. Семейство $\{|x-z|^{-(n-2)}, z \in \Pi\}$ обладает свойством полноты в множестве $\mathcal{H}(D)$, поэтому в силу (2.33) справедливо соотношение

$$\int_D u(x) \frac{1}{|x-y|^{n-2}} \xi(x) dx = 0 \quad \forall y \in Y, u \in \mathcal{H}(D).$$

Из теоремы 2.1 тогда получаем, что $\xi(x) = 0$ почти всюду в D и тем самым оператор интегрального уравнения (1.2) инъективен. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 2.2. Пусть $n \geq 3$, $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей, $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытый интервал или отрезок на произвольной прямой $L \subset \mathbb{R}^n$, $Y \cap \bar{D} = \emptyset$, а Z – область в $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$, не пересекающей \bar{D} . Тогда многомерное уравнение М.М. Лаврентьева (1.3) имеет не более одного решения при любой правой части f .

В качестве непосредственного применения доказанной теоремы укажем вывод о единственности решения обратной коэффициентной задачи для волнового уравнения (1.1) в трехмерном пространстве в случае, когда множество источников Y и множество детекторов Z имеют вид, указанный в теореме 2.2. При этом мы допускаем, что прямая, на которой лежит промежуток Y , может пересекать зондируемую область D .

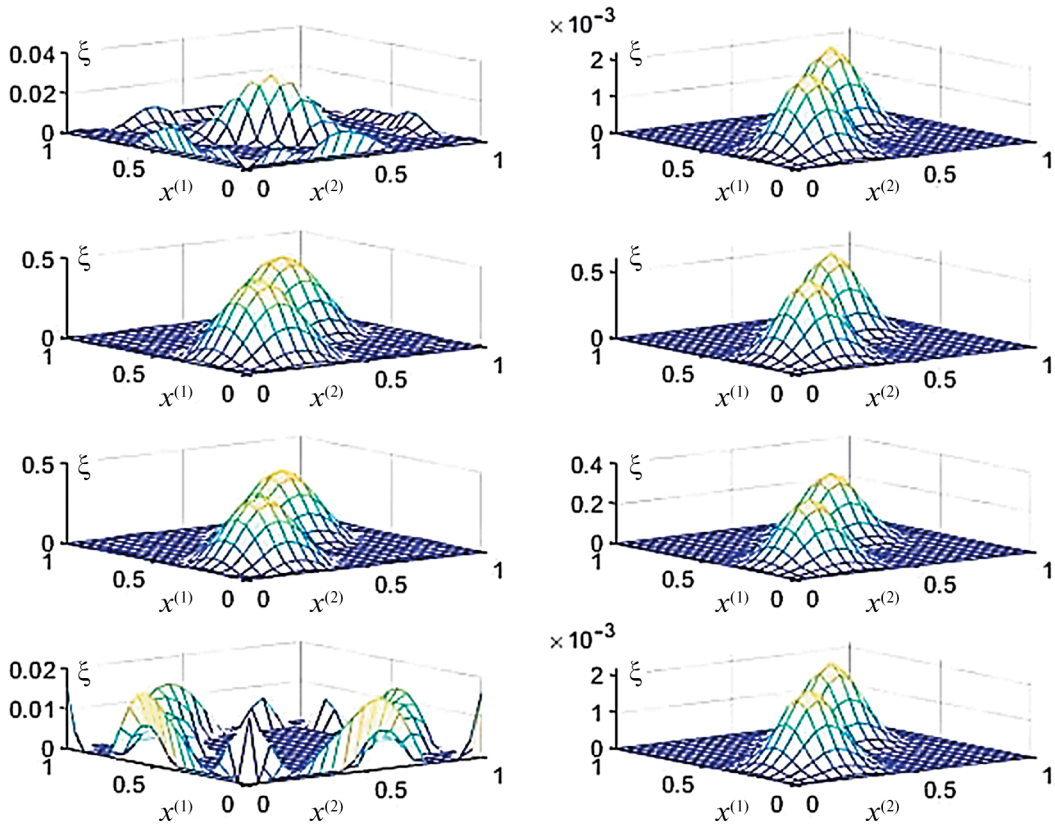
Таблица 1. Продолжение отрезка источников Y пересекает область D и прямоугольник Z . Указаны относительные погрешности аппроксимации функций ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^*

N	Множества Y и Z	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*
1	Y – отрезок с концами (0.5, 0.5, 1.1) и (0.5, 1.5, 2.1), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.6678	0.4598	0.5096
2	Y – отрезок с концами (0.5, 0.5, 1.1) и (0.5, 1.5, 2.1), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.6877	0.4917	0.5472
3	Y – отрезок с концами (0.5, 0.5, 1.1) и (0.5, 0.5, 2.1), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.6826	0.5261	0.5530
4	Y – отрезок с концами (0.1, 0.1, 1.1) и (0.1, 0.1, 2.1), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.7756	0.6652	0.6247
5	Y – отрезок с концами (0.5, 0.5, 1.1) и (0.5, 0.5, 2.1), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)} < 2, 0 < x^{(2)} < 1\}$	0.7840	0.6107	0.6420

Таблица 2. Отрезок Y и прямоугольник Z параллельны. Указаны относительные погрешности аппроксимации функций ξ_1^* , ξ_2^* , ξ_3^*

N	Множества Y и Z	ξ_1^*	ξ_2^*	ξ_3^*
6	Y – отрезок с концами (0, 0, 1.001) и (1, 1, 1.001), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5576	0.3417	0.3745
7	Y – отрезок с концами (-1, -1, 1.001) и (2, 2, 1.001), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -1 < x^{(1)}, x^{(2)} < 2\}$	0.5264	0.3217	0.3300
8	Y – отрезок с концами (0.5, 0, 1.001) и (0.5, 1, 1.001), $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001) -0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.6080	0.3362	0.4082

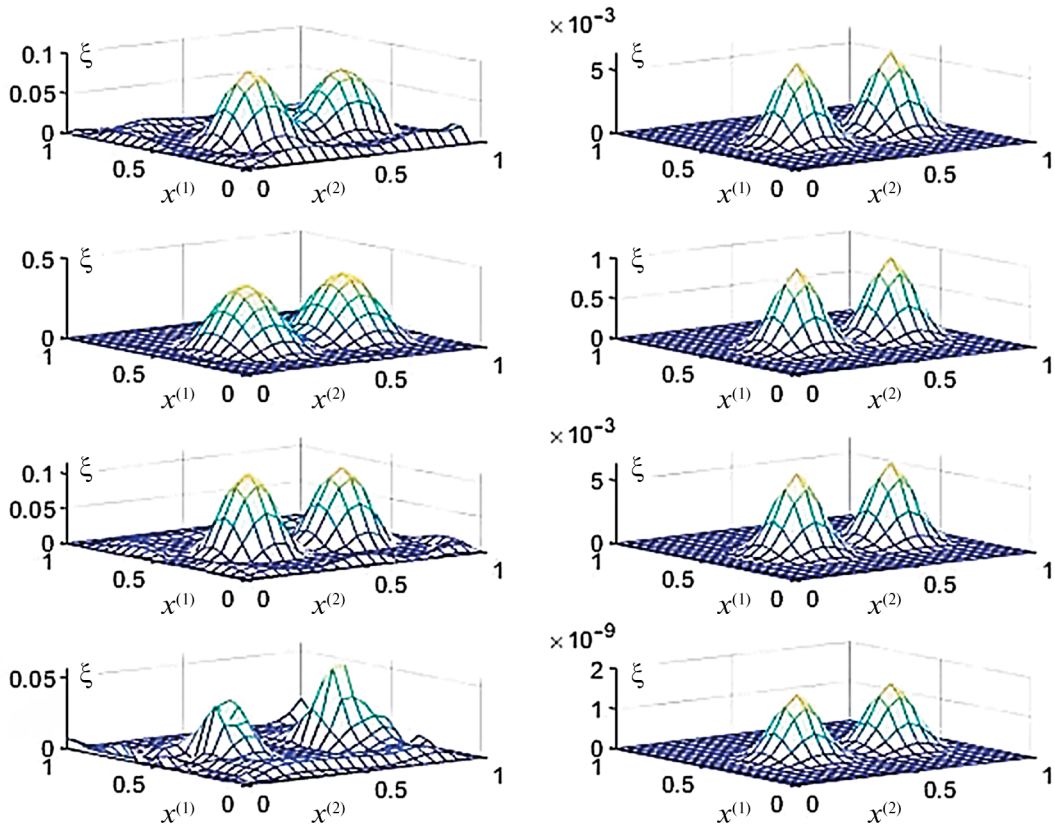
9	Y – отрезок с концами $(0.5, -0.5, 1.001), (0.5, 1.5, 1.001)$ $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001)\}$ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5173	0.2848	0.3399
10	Y – отрезок с концами $(0.5, -0.5, -0.001), (0.5, 1.5, -0.001)$, $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.0001)\}$ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.5707	0.4631	0.4845
11	Y – отрезок с концами $(0.5, -0.5, -0.4), (0.5, 1.5, -0.4)$ $Z = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, -0.5)\}$ $ - 0.5 < x^{(1)}, x^{(2)} < 1.5\}$	0.7966	0.6726	0.7488



Фиг. 1. Пример 7 из табл. 2. Графики функции $\xi_3^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Далее приводятся результаты численных экспериментов по решению уравнения М.М. Лаврентьева (1.2) в пространстве \mathbb{R}^3 с различными расположениями множеств источников Y и детекторов Z относительно друг друга и множества D . Как показано выше, к этому уравнению приводится коэффициентная обратная задача для уравнения акустики (1.1). В отличие от предыдущих исследований, таких как в [6], мы допускаем, что прямая L , содержащая промежуток Y , на котором располагаются источники звуковых волн, может пересекать область неоднородности D ; выше доказана единственность



Фиг. 2. Пример 9 из табл. 2. Графики функции $\xi_1^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

решения уравнения (1.2) в этом случае. В качестве области неоднородности D выбирается единичный куб $(0,1)^3$, в качестве множества детекторов Z – прямоугольник, параллельный одной из граней куба. Мы строим модельные примеры с заранее известным решением $\xi^*(x)$, вычисляя по нему функцию $f(y,z)$ в правой части (1.2), а затем решаем эти примеры с помощью описанного в [6] алгоритма. А именно, вводя на множествах D, Y, Z равномерные сетки $\{\bar{x}_{ijk}\}, \{\bar{y}_r\}, \{\bar{z}_{pq}\}, 0 \leq i, j, k; p, q, r \leq N$ соответственно и дискретизируя интегральное уравнение (1.2), мы получаем систему линейных уравнений

$$\sum_{i,j,k=0}^{N-1} a_{ijk,pqr} \xi_{ijk} = f(\bar{y}_r, \bar{z}_{pq}); \quad 0 \leq p, q, r \leq N - 1. \tag{3.1}$$

Здесь $\xi_{ijk}, 0 \leq i, j, k \leq N - 1$ – аппроксимации для значений $\xi^*(\bar{x}_{ijk})$ искомой функции ξ^* в узлах сетки,

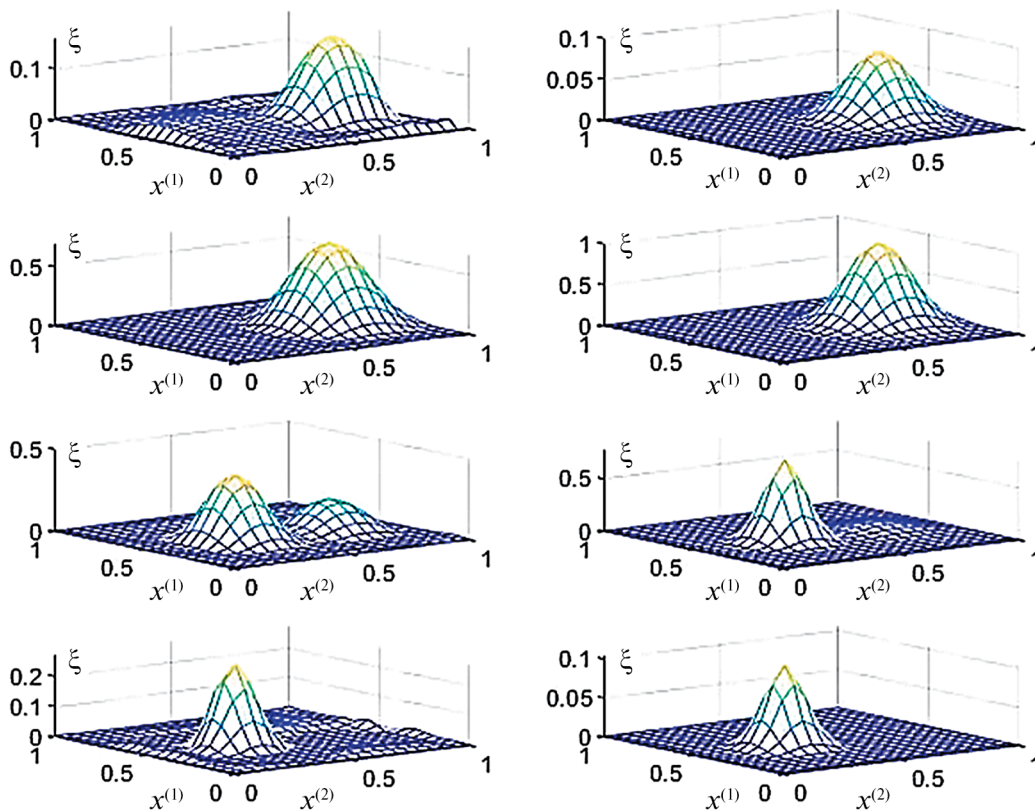
$$a_{ijk,pqr} = \frac{h^3}{|\bar{x}_{ijk} - \bar{y}_r| |\bar{x}_{ijk} - \bar{z}_{pq}|}, \quad h = \frac{1}{N}.$$

Регуляризация системы (3.1) по схеме Тихонова приводит к уравнению

$$(A^*A + \alpha E)\xi_\alpha = A^*f,$$

где $A = a_{ijk,pqr} \in \mathbb{R}^{N^3 \times N^3}$, $f = (f_{pqr}) \in \mathbb{R}^{N^3}$, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации. В расчетах полагаем $N = 20$, $\alpha = 10^{-11}$. Близость ξ_α к точному решению определяется нормой разности $\|\xi_\alpha - \xi^*\|_{L_2}$ и относительной погрешностью

$$\Delta = \frac{\|\xi_\alpha - \xi^*\|_{L_2}}{\|\xi^*\|_{L_2}}.$$



Фиг. 3. Пример 9 из табл. 2. Графики функции $\xi_2^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

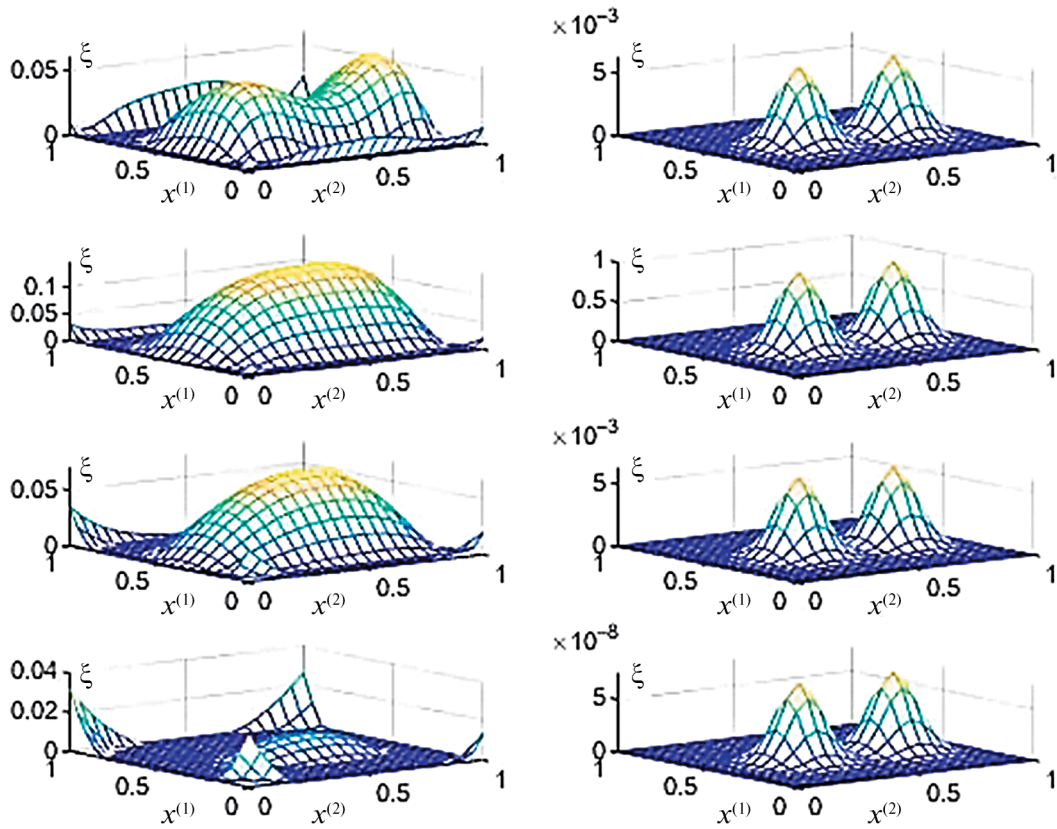
Рассматриваются неоднородности трех различных типов, описываемые функциями

$$\begin{aligned} \xi_1^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-81\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-81\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \xi_2^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-100\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.4)^2 + (x^{(3)} - 0.8)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-40\left((x^{(1)} - 0.5)^2 + (x^{(2)} - 0.8)^2 + (x^{(3)} - 0.5)^2\right)\right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \xi_3^*(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = & \exp\left[-50\left((x^{(1)} - 0.3)^2 + (x^{(2)} - 0.3)^2 + (x^{(3)} - 0.6)^2\right)\right] + \\ & + \exp\left[-50\left((x^{(1)} - 0.7)^2 + (x^{(2)} - 0.7)^2 + (x^{(3)} - 0.6)^2\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Первая и третья функции описывают две неоднородности одного размера, расположенные на одинаковой высоте ($x^{(3)} = 0.5$ и $x^{(3)} = 0.6$ соответственно), с центрами в точках $(0.5, 0.4, 0.5)$, $(0.5, 0.8, 0.5)$ и $(0.3, 0.3, 0.6)$, $(0.7, 0.7, 0.6)$. Вторая функция описывает две неоднородности различной геометрии, расположенные на высотах $x^{(3)} = 0.5$ и $x^{(3)} = 0.8$, с центрами в точках $(0.5, 0.8, 0.5)$ и $(0.5, 0.4, 0.8)$ соответственно. Значения относительной погрешности Δ для функций (3.2)–(3.4) при разных Y и Z



Фиг. 4. Пример 11 из табл. 2. Графики функции $\xi_1^*(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ (справа) и соответствующего приближенного решения (слева) при $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$.

представлены в табл. 1 и 2. Первый столбец содержит порядковый номер эксперимента, во втором выписаны расположения областей Y и Z . Отдельные численные эксперименты проиллюстрированы на фиг. 1–4. На этих рисунках сверху вниз представлены графики точных и приближенных функций $\xi(\cdot, \cdot, x^{(3)})$ в порядке возрастания значения $x^{(3)} = 0.2, 0.45, 0.7, 0.95$. В правой колонке графиков расположены изображения точного решения ξ^* , в левой – соответствующие изображения приближенных решений ξ_α .

Результаты проведенных экспериментов показывают, что точность аппроксимации неоднородности обычно повышается при увеличении размеров отрезка Y и прямоугольника Z (ср. эксперименты 1 и 2, 6 и 7, 8 и 9), а также при их приближении к исследуемой неоднородности (ср. эксперименты 3–5, 9–11). Можно рекомендовать располагать отрезок Y и прямоугольник Z по разные стороны от куба D , параллельно его граням и как можно ближе к ним. В экспериментах 6–9, где множества Y и Z расположены именно так, погрешности аппроксимации минимальны (см. фиг. 1–3). В то же время фиг. 4 демонстрирует, что при удалении множеств Y и Z от зондируемой области D погрешность аппроксимации увеличивается. Проведенные эксперименты показывают, что обычно место локализации неоднородностей восстанавливается точнее, чем их амплитуды. Для дальнейшего увеличения точности вычислений необходимо увеличивать количество шагов сетки N , что, в свою очередь, требует применения суперкомпьютерных технологий (см. [17]). Альтернативой им могут выступать специальные быстрые алгоритмы, например, предлагаемые в [18], [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев М.М. Об одной обратной задаче для волнового уравнения // Докл. АН СССР. 1964. Т. 157. 3. С. 520–521.

2. Лаврентьев М.М. Об одном классе обратных задач для дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 160. 1. С. 32–35.
3. Бакушинский А.Б., Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об одной обратной задаче для трехмерного волнового уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 47. 3. С. 1201–1209.
4. Вайнберг М.М. Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ. 1982.
5. Романов В.Г. О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журн. 2009. Т. 50. 4. С. 883–889.
6. Козлов А.И., Кокурин М.Ю. Об интегральных уравнениях типа М.М.Лаврентьева в коэффициентных обратных задачах для волновых уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. 9. С. 1492–1507.
7. Klibanov M., Li J., Zhang W. Linear Lavrent'ev integral equation for the numerical solution of a nonlinear coefficient inverse problem // SIAM J. Appl. Math. 2021. V. 81. 5. P. 1954–1978.
8. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений гармонических функций и единственность решения уравнения М.М. Лаврентьева в обратных задачах волнового зондирования // Изв. РАН. Сер. матем. 2022. Т. 86. 6. С. 101–122.
9. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
10. Рамм А.Г. Многомерные обратные задачи рассеяния. М.: Мир, 1994.
11. Бухгейм А.Л., Дятлов Г.В., Кардаков В.Б., Танцеров Е.В. Единственность в одной обратной задаче для системы уравнений упругости // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45. 4. С. 747–757.
12. Кокурин М.Ю., Паймеров С.К. Об обратной коэффициентной задаче для волнового уравнения в ограниченной области // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. 1. С. 117–128.
13. Kokurin M. Yu. On a multidimensional integral equation with data supported by low-dimensional analytic manifolds // J. of Inverse and Ill-Posed Probl. 2013. V. 21. 1. P. 125–140.
14. Кокурин М.Ю. О полноте произведений гармонических функций и единственности решения обратной задачи акустического зондирования // Матем. заметки. 2018. Т. 104. 5. С. 708–716.
15. Кокурин М.Ю. О полноте произведений решений уравнения Гельмгольца // Изв. вузов. Математика. 2020. 6. С. 30–35.
16. Кокурин М.Ю. Полнота асимметричных произведений решений эллиптического уравнения второго порядка и единственность решения обратной задачи для волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57. 2. С. 255–264.
17. Кокурин М.Ю., Ключев В.В. Условия единственности и численная аппроксимация решения интегрального уравнения М.М. Лаврентьева // Сиб. журн. вычисл. матем. 2022. Т. 25. 4. С. 441–458.
18. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. К численному решению обратной многочастотной задачи скалярной акустики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. 6. С. 1013–1026.
19. Vakushinsky A. B., Leonov A. S. Multifrequency inverse problem of scalar acoustics: remarks on nonuniqueness and solution algorithm // J. of Math. Sci. 2023. V. 274. 4. P. 460–474.
20. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа (в 3-х томах). Том 2. М.: Дрофа, 2004.
21. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: ГИФМЛ, 1961.
22. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
23. Киприянов И.А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Физматлит, 1997.
24. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
25. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965.
26. Богачёв В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2011.
27. Маргулис А.С. К теории потенциала в классах $L_p(\Omega)$ // Изв. вузов. Математика. 1982. Т. 236. 1. С. 33–41.

UNIQUENESS OF A SOLUTION TO THE LAVRENT'EV INTEGRAL EQUATION IN N-DIMENSIONAL SPACE**M. M. Kokurin^{a,*}, V. V. Klyuchev^a, A. V. Gavrilova^a**^a*Mari State University,**Lenin Sqr., 1, Yoshkar-Ola, Republic of Mari El, 424001 Russia***e-mail: kokurin@nextmail.ru*

Received 02 October, 2023

Revised 02 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. We study the multidimensional analogue of the Lavrent'ev integral equation to which an inverse problem of acoustic sounding is reduced. Conditions under which the studied equation has a unique solution are established. Results of numerical experiments concerning the solution of the inverse acoustic problem with variously located sets of sources and detectors are presented.

Keywords: hyperbolic equation, coefficient inverse problem, acoustics inverse problem, linear integral equation, Lavrentiev equation, singularity of solution, harmonic functions, complete system of functions, set of singularity.

УДК 519.633

КИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2024 г. М. В. Абгарян^{1,*}, А. М. Бишаев^{2,**}

¹125080 Москва, Ленинградское шоссе, 5, а/я 43, МАИ, Россия

²141700 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

*e-mail: abgmvk@gmail.com

**e-mail: bishaev@bk.ru

Поступила в редакцию 07.08.2023 г.

Переработанный вариант 03.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

В данной работе построена система кинетических уравнений для изучения процессов, происходящих в трехкомпонентной плазме. Построенная модель является аналогом модели Крука, которая широко используется в динамике разреженных газов. Предложенную модель предполагается использовать для изучения процессов, происходящих в каналах электроракетных двигателей. Библ. 10.

Ключевые слова: ионы, электроны, нейтралы, ионизация, макропараметры компонент плазмы.

DOI: 10.31857/S0044466924030078, **EDN:** XGVXJN

ВВЕДЕНИЕ

Электрические реактивные двигатели (ЭРД) нашли широкое применение в космической технике в качестве двигателей, с помощью которых осуществляется коррекция орбиты космических аппаратов (КА). Так, совсем недавно, с помощью стационарного плазменного двигателя (СПД) КА был выведен на геостационарную орбиту.

Рабочим телом в практически всех ЭРД являются положительно заряженные ионы. Они рождаются в результате ионизации в ускорительном канале двигателя. Будучи ускоренными электрическим полем, ионы выбрасываются в окружающее пространство, создавая тягу двигателя. Электроны при этом, имея существенно меньший ларморовский радиус, задерживаются приложенным магнитным полем.

Оценки чисел Кнудсена взаимодействий, происходящих между микрочастицами среды в канале ускорителя, больше или порядка единицы. Поэтому для адекватного описания процессов, в ней происходящих, необходимы методы кинетической теории.

По мнению авторов данной статьи, первым, кто понял, что для описания как процессов, происходящих в ускорительных каналах ЭРД, так и движения ионов в окружающем пространстве, был А. И. Морозов. В [1] им с соавторами было построено кинетическое уравнение, с помощью которого изучались указанные выше процессы. Электрическое поле при этом определялось с применением выдвинутой А. И. Морозовым гипотезы «термолизованного потенциала». Предложенное А. И. Морозовым направление – использование кинетической теории для изучения процессов, происходящих в плазменных средах, было продолжено одним из авторов этой статьи. Для описания движения ионной струи, выходящей из СПД, им была построена кинетическая модель, которая учитывала взаимодействие ионов с нейтралами, известное как резонансная перезарядка. Именно это взаимодействие имеет наибольшее сечение и, как следствие, наименьшее число Кнудсена. Нужно отметить, что в ходе работы с первоначальными вариантами упомянутой выше кинетической модели были произведены сравнения результатов расчетов с экспериментальными данными, которые показали вполне удовлетворительные совпадения (см. [2]). Что естественно, поэтому А. В. Лазуренко в [3] использовал эту модель для изучения процессов, происходящих в канале СПД.

Когда в памяти ЭВМ стало возможным запоминать шестимерные массивы, моделирующие функцию распределения, была предложена более естественная модель резонансной перезарядки (см. [4]). На основе этой модели в трехмерной нестационарной постановке была поставлена задача о струе,

выходящей из СПД. Для ее численного решения был создан комплекс программ, с помощью которых были произведены многочисленные расчеты. Результаты этих расчетов можно найти в [5].

Для моделирования процессов в ускорительных каналах ЭРД в настоящее время применяются различные методы статистического моделирования. Так стали называть известные в кинетической теории газов методы прямого численного моделирования или методы Монте-Карло. Увеличение возможности ЭВМ и простота в реализации сделали метод статистического моделирования фактически инженерным методом, ибо в работах, где моделировались процессы в ЭРД, этот метод использовался без его описания. Исключение здесь составляет работа [6]. В данной статье для описания процессов, происходящих в плазме, строится полностью кинетическая модель для всех ее компонент.

1. МОДЕЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Введем в рассмотрение функции распределения ионов $f_i = f_i(t, \mathbf{x}, \xi)$, электронов $f_e = f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$, и нейтралов $f_n = f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})$. Стоящие внизу индексы i, e, n всегда будут использоваться только для обозначения типа плазменной компоненты. В формулах, введенных выше t – время, $\mathbf{x} = \{x^k\}, k = 1, 2, 3$ – точка в физическом пространстве; $\xi = \{\xi^k\} \in \Omega_i$ – точка в скоростном пространстве ионов Ω_i , $\mathbf{v} = \{v^k\} \in \Omega_e$ – точка в скоростном пространстве электронов Ω_e , а $\mathbf{w} = \{w^k\} \in \Omega_n$ – точка в скоростном пространстве нейтралов Ω_n соответственно.

Введенные выше функции распределения используются выше для микроскопического описания состояния плазмы. Переход к макроскопическому описанию осуществляется введением следующих функций:

$$n_i = n_i(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega_i} f_i d\xi, \quad \mathbf{j}_i = \mathbf{j}_i(t, \mathbf{x}) = \int_{\Omega_i} \xi f_i d\xi,$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{j}_i}{n_i}, \quad \frac{3}{2} n_i k T_i = \int_{\Omega_i} m_i \frac{c_i^2}{2} f_i d\xi, \quad \mathbf{c}_i = \xi - \mathbf{u}_i.$$

Появившиеся выше символы m_i, k есть соответственно масса иона и постоянная Больцмана. Величины $\mathbf{u}_i = \{u_i^k(t, \mathbf{x})\}, k = 1, 2, 3; T_i = T_i(t, \mathbf{x})$ – макроскопическая скорость и температура (поступательная) ионов. Аналогичным образом определяются $n_s = n_s(t, \mathbf{x}), \mathbf{j}_s(\mathbf{u}_s) = \mathbf{j}_s(t, \mathbf{x}), T_s = T_s(t, \mathbf{x}), s = e, n$. В кинетической теории все так введенные величины называются основными макропараметрами соответствующей компоненты плазмы.

Получим уравнения для введенных выше функций распределения, основываясь на приведенном в [7] феноменологическом выводе уравнения Больцмана.

Рассмотрим точку фазового пространства ионов (\mathbf{x}, ξ) . Пусть $\Delta\Gamma_i = \Delta\mathbf{x}\Delta\xi$ есть малый элемент объема фазового пространства ионов, окружающий эту точку, т. е. $\Delta\mathbf{x} = [x_1 - \Delta x_1, x_1 + \Delta x_1] \times [x_2 - \Delta x_2, x_2 + \Delta x_2] \times [x_3 - \Delta x_3, x_3 + \Delta x_3], \Delta\xi = [\xi_1 - \Delta\xi_1, \xi_1 + \Delta\xi_1] \times [\xi_2 - \Delta\xi_2, \xi_2 + \Delta\xi_2] \times [\xi_3 - \Delta\xi_3, \xi_3 + \Delta\xi_3]$. Аналогично, точка (\mathbf{x}, \mathbf{v}) есть точка фазового пространства электронов, а $\Delta\Gamma_e = \Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{v}$ есть малый элемент объема фазового пространства электронов, ее окружающий. Изменение числа частиц в $\Delta\Gamma_i$ и $\Delta\Gamma_e$ за

малое время Δt в результате их движения равно соответственно $N_i = \frac{D^i f_i}{dt} \Delta\Gamma_i \Delta t$ для ионов и $N_e = \frac{D^e f_e}{dt} \Delta\Gamma_e \Delta t$ для электронов, где $\frac{D^i}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{m_i} E^k \frac{\partial}{\partial \xi^k}, \frac{D^e}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{e}{m_e} (E^k + \varepsilon_{kml} \frac{v^m}{c} H^l) \frac{\partial}{\partial \xi^k},$

e – заряд электрона, c – скорость света, m_e, m_i суть массы электрона и иона соответственно; $\mathbf{E} = \{E^k(t, \mathbf{x})\}, k = 1, 2, 3$ – напряженность электрического поля, $\mathbf{H} = \{H^l\}, l = 1, 2, 3$ – напряженность магнитного поля, $\varepsilon_{kml}, k, m, l = 1, 2, 3$ – символ Леви–Чевита. В данной работе во всех формулах принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Отсутствие члена с магнитным полем в кинетическом уравнении для ионов связано с тем, что ларморовский радиус у иона обычно много больше, чем у электрона, и тогда влиянием магнитного поля на ион можно пренебречь.

Следуя изложенной в [7] схеме вывода кинетических уравнений, N_i и N_e должны приравняться к изменению числа ионов и электронов в соответствующих элементах фазового объема, происходящих за время Δt в результате взаимодействия (согласно [7] столкновений) между компонентами плазмы. Новым типом взаимодействия здесь будет ионизация. Ее можно изобразить следующей схемой $e + n \Rightarrow e' + i + \tilde{e}$, т. е. электрон, взаимодействуя с нейтралом, может оторвать от него электрон,

превратив его в ион. Таким образом, ионизация, по сути, тройное столкновение приводит к появлению внутренних источников как ионов, так и электронов. Согласно [8], взаимодействие электронов с нейтралами может происходить как упругое, так и неупругое. Упругое взаимодействие электрона с нейтралом можно описать по обычной схеме двойного столкновения. Будем предполагать, что при неупругом взаимодействии электрона и нейтрала в течении времени много меньшим, чем Δt образуют одно целое. При этом электрон взаимодействует с электронной оболочкой нейтрала. Точное описание этого процесса является задачей квантовой механики, и она пока не решена. В [8] отмечается, что ионизация при неупругом взаимодействии происходит, если энергия налетающего на нейтрал электрона превышает пороговое значение $\varepsilon_0 \simeq 13\text{эВ}$. В противном случае взаимодействие происходит по схеме $e + n \Rightarrow e' + n'$. При этом у нейтрала происходит возбуждение электронных уровней энергии в его электронной оболочке.

Из вышеприведенного можно считать, что за время Δt число появившихся в процессе ионизации ионов, которые родились из-за “столкновений” электронов, движущихся в поле нейтралов, чья скорость ξ находится в элементе скоростного пространства нейтралов $d\mathbf{w}$, есть N_{ne} , где $N_{ne} = v(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \xi) d\mathbf{w} dx \Delta t$, $v = v(t, \mathbf{x}, \xi) = \int_{\Omega_e} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \xi| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'$. В последней формуле $\tilde{\sigma}$ есть сечение неупругих столкновений, приводящих к ионизации. Следуя [6], имеем

$$\tilde{\sigma} = \bar{\sigma}_{en} \chi\left(\frac{\mu}{4}(\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 - \varepsilon_0\right), \chi(y) = \begin{cases} 1, y \geq 0, \\ 0, y < 0, \end{cases}$$

где $\mu = \frac{m_e m_n}{m_e + m_n}$ есть приведенная масса электрона и нейтрала, $\bar{\sigma}_{en}$ – сечение неупругого столкновения электронов и нейтралов. Аналогично число родившихся в результате ионизации электронов в элементе фазового пространства $\Delta\Gamma_e$ за время Δt будет

$$N_{en} = v(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{w} dx \Delta t, \\ v = v(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_e} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{v}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}'.$$

Изменение числа электронов, которое происходит в результате неупругих столкновений электронов с нейтралами, не приводящих к ионизации, в указанном выше элементе фазового объема электронов за время Δt будем определять при помощи аналога модели Крука (см.[7]), т. е.

$$N_{en}^1 = v_1 (f_{Me} - f_e) d\mathbf{v} dx \Delta t,$$

где

$$f_{Me} = n_e \left(\frac{m_e}{2\pi k T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left\{-\frac{m_e}{2k T_e} \mathbf{c}_e^2\right\}, \mathbf{c}_e = \mathbf{v} - \mathbf{u}_e.$$

Фигурирующие в последней формуле функции $n_e = n_e(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_e(t, \mathbf{x})$, $T_e = T_e(t, \mathbf{x})$ суть определенные выше основные макропараметры электронов. Величина v_1 имеет смысл частоты неупругих столкновений электронов с нейтралами (см. [7]). Она будет определена ниже как функция, зависящая от основных макропараметров электронов и нейтралов. Соответствующее изменение числа электронов в результате упругих столкновений можно было бы записать в виде интеграла столкновений больцмановского типа. По мнению авторов данной статьи, это было бы похоже на превышение точности. Поэтому $N_{en}^2 = v_2 (f_{Me} - f_e) d\mathbf{v} dx \Delta t$, т. е. будет использоваться модель Крука, где v_2 – частота упругих столкновений электронов с нейтралами.

Известно (см.[8]), что из всех взаимодействий ионов с нейтралами наибольшим сечением взаимодействия обладает взаимодействие, известное как резонансная перезарядка. Это взаимодействие состоит в том, что при сближении нейтрала с ионом последний отнимает у нейтрала электрон, становясь при этом нейтралом, а нейтрал становится ионом. В [4] для описания эволюции ионов и нейтралов в струе СПД была построена кинетическая модель, в которой учитывалась именно резонансная перезарядка. Согласно этой модели, соответствующие изменения числа ионов и нейтралов в их элементах фазового пространства $\Delta\Gamma_i, \Delta\Gamma_n = d\mathbf{x} d\mathbf{w}$ будут:

$$N_{in} = r(v_{ii}f_n(t, \mathbf{x}, \xi)d\mathbf{w} - v_{in}f_i(t, \mathbf{x}, \xi)d\xi)dx\Delta t, \quad N_{ni} = (v_{ni}f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})d\xi - v_{nn}f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})d\mathbf{w})\Delta tdx,$$

где

$$v_{ii} = \sigma_0 \int_{\Omega_i} f_i(t, \mathbf{x}, \xi') |\xi' - \xi| d\xi', \quad v_{in} = \sigma_0 \int_{\Omega_n} f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') |\mathbf{w}' - \xi| d\mathbf{w}', \quad v_{ni} = \sigma_0 \int_{\Omega_n} f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}') |\mathbf{w}' - \mathbf{w}| d\mathbf{w}',$$

$$v_{nn} = \sigma_0 \int_{\Omega_i} f_i(t, \mathbf{x}, \xi') |\xi' - \mathbf{w}| d\xi', \quad r = \frac{m_n}{m_i}.$$

Следует отметить, что в [4] $r = 1$, так как предполагалось, что $m_n \approx m_i$. В формулах, приведенных выше, $\sigma_0 \approx 10^{-14} \text{ см}^2$ есть сечение столкновения резонансной перезарядки, а Ω_i, Ω_n – определенные выше скоростные пространства ионов и нейтралов соответственно.

Феноменологический вывод кинетических уравнений основан (см. [7]) на приравнивании изменения числа частиц в соответствующих элементарных объемах фазового пространства в результате движения к изменению их числа, которое произошло в результате их взаимодействия. Прделав это для ионов и электронов, получим

$$\frac{Df_i}{Dt} = v(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \xi) \frac{d\mathbf{w}}{d\xi} + r(v_{ii}f_n(t, \mathbf{x}, \xi) \frac{d\mathbf{w}}{d\xi} - v_{in}f_i(t, \mathbf{x}, \xi)),$$

$$\frac{Df_e}{Dt} = v(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{v}} + (v_1 + v_2)(f_{Me} - f_e).$$
(1)

Фигурирующие в (1) $\frac{d\mathbf{w}}{d\xi}, \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{v}}$ возникли из-за того, что скоростные пространства компонент плазмы имеют разные масштабы и являются якобианами преобразования при переходе от интегрирования по одному скоростному пространству к другому. Они равны отношению характерных масштабов соответствующих скоростных пространств.

Введем следующие величины:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = e(n_i(t, \mathbf{x}) - n_e(t, \mathbf{x})), \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = e(\mathbf{j}_i(t, \mathbf{x}) - \mathbf{j}_e(t, \mathbf{x})).$$

Ясно, что $\rho(t, \mathbf{x})$ это плотность электрического заряда, а $\mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ есть плотность электрического тока.

Умножим оба уравнения (1) на e и проинтегрируем каждое по своему пространству скоростей. Учитывая полученные ранее выражения для макропараметров плазмы, получим

$$\int_{\Omega_i} \frac{Df_i}{Dt} d\xi = \frac{\partial(en_i)}{\partial t} + \frac{\partial(ej_i^k)}{\partial x^k} = e \int_{\Omega_i} (v(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \xi) \frac{d\mathbf{w}}{d\xi} + r(v_{ii}f_n(t, \mathbf{x}, \xi) \frac{d\mathbf{w}}{d\xi}) d\xi - e \int_{\Omega_i} r v_{in} f_i(t, \mathbf{x}, \xi) d\xi).$$

В первом интеграле в правой части полученного равенства переменную интегрирования ξ заменим на \mathbf{w} . Тогда получим

$$\frac{\partial(en_i)}{\partial t} + \frac{\partial(ej_i^k)}{\partial x^k} =$$

$$= e \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}.$$
(2)

Имеют место очевидные соотношения $\int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{\mathbf{v}} \right) f_{Me} d\mathbf{v} = \int_{\Omega_e} \left(\frac{1}{\mathbf{v}^2} \right) f_e d\mathbf{v}$. При интегрировании второго уравнения (1) по скоростному пространству электронов надо в соответствующем интеграле заменить переменную интегрирования \vec{v} на \vec{w} и учесть приведенное выше соотношение. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial(en_e)}{\partial t} + \frac{\partial(ej_e^k)}{\partial x^k} = e \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}.$$

Вычитая из (2) полученное равенство, получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) выражает закон сохранения заряда, что является необходимым требованием к создаваемой кинетической модели плазмы.

Процесс рекомбинации, т. е. образование нейтралов в результате взаимодействия ионов и электронов, учитываться не будет. Тогда для эволюции функции распределения нейтралов предлагается следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{D^n f_n}{Dt} = \frac{\partial f_n}{\partial t} + w^k \frac{\partial f_n}{\partial x^k} = & - \int_{\Omega_e} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') d\mathbf{v}' f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) + \\ & + v_1 (f'_{Mn} - f_n) + v_2 (f_{Me} - f_n) + v_{ni} f_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) \frac{d\xi}{d\mathbf{w}} - v_{nn} f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}). \end{aligned} \quad (4)$$

Первый член в правой части (4) описывает убыль нейтралов из-за ионизации, второй и третий члены ответственны за изменение нейтралов из-за упругих и неупругих взаимодействий нейтралов с электронами. Последнее слагаемое ответственно за резонансную перезарядку. Фигурирующие в (4)

$$\begin{aligned} f'_{Mn} = n_n(t, \mathbf{x}) \frac{m_n}{2\pi k T'(t, \mathbf{x})} \exp\left\{-\frac{m_n}{2k T'(t, \mathbf{x})} \mathbf{c}_n^2\right\}, \\ f_{Mn} = n_n(t, \mathbf{x}) \frac{m_n}{2\pi k T_n(t, \mathbf{x})} \exp\left\{-\frac{m_n}{2k T_n(t, \mathbf{x})} \mathbf{c}_n^2\right\}, \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{w} - \mathbf{u}_n, \end{aligned}$$

где $n_n(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{u}_n(t, \mathbf{x})$, $T_n(t, \mathbf{x})$ суть макропараметры нейтралов, а $T'(t, \mathbf{x})$ будет определено ниже.

Кроме соотношения (3), которое есть закон сохранения заряда, исследуем допускает ли предложенная система кинетических уравнений другие законы сохранения.

2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

Умножим первое уравнение (1) на m_i , второе на m_e , а уравнение (4) на m_n и проинтегрируем каждое по “своему” пространству скоростей. При этом в правых частях, чтобы соответствующая функция распределения интегрировалась по соответствующему пространству скоростей, будем делать замену переменной интегрирования. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i^k)}{\partial x^k} = m_i \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}, \\ \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_e u_e^k)}{\partial x^k} = m_e \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}, \\ \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_n u_n^k)}{\partial x^k} = -m_n \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}, \end{aligned}$$

где $\rho_l = m_l n_l$, $l = i, e, n$ – массовая плотность соответствующей компоненты. Сложим все три уравнения. Учитывая, что $m_n = m_i + m_e$, получим

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial Q^k}{\partial x^k} = 0, \quad \bar{\rho} = \rho_i + \rho_e + \rho_n, \quad \mathbf{Q} = m_i \mathbf{j}_i + m_e \mathbf{j}_e + m_n \mathbf{j}_n. \quad (5)$$

Соотношение (5) есть уравнение неразрывности (закон сохранения массы) в плазме.

Закон сохранения импульса имеет векторный характер. Поэтому умножим соответствующие уравнения на $m_i \xi^j$, $m_e v^j$, $m_n w^j$, $j = 1, 2, 3$. При интегрировании кинетических уравнений по скоростным пространствам имеются следующие соотношения:

$$\int_{\Omega_i} \mathbf{c}_i f_i d\xi = \int_{\Omega_e} \mathbf{c}_e f_e d\mathbf{v} = \int_{\Omega_n} \mathbf{c}_n f_n d\mathbf{w} = 0.$$

Надо принять во внимание также тот факт, что для любой функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})$ и функции $\varphi(\mathbf{v})$ такой, что она при $|\mathbf{v}| \rightarrow +\infty$ растет не быстрее любой степени $|\mathbf{v}|$ имеет место следующее соотношение:

$$\int_{\Omega} \varphi(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial v^k} d\mathbf{v} = \int_{\Omega} \frac{\partial(\varphi f)}{\partial v^k} d\mathbf{v} - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial v^k} d\mathbf{v} = - \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial v^k} d\mathbf{v}.$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\rho_i u_i^j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_i u_i^j u_i^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial P_i^{kj}}{\partial x^k} - en_i E^j = \\ & = m_i \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} w^j \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w} + \\ & + m_n \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \sigma_0 (w^j - \xi^j) |\xi - \mathbf{w}| f_i(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\xi d\mathbf{w}, \\ & \frac{\partial(\rho_e u_e^j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_e u_e^j u_e^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial P_e^{kj}}{\partial x^k} + en_e E^j - \\ & - \frac{e}{c} \varepsilon_{jls} j_e^l H^s = m_e \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} w^j \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}, \\ & \frac{\partial(\rho_n u_n^j)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_n u_n^j u_n^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial P_n^{kj}}{\partial x^k} = \\ & = -m_n \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} w^j \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w} - \\ & - m_n \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \sigma_0 (w^j - \xi^j) |\xi - \mathbf{w}| f_i(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\xi d\mathbf{w}, \end{aligned}$$

где

$$P_i^{kj} = \int_{\Omega_i} c_i^k c_i^j f_i d\xi, \quad P_e^{kj} = \int_{\Omega_e} c_e^k c_e^j f_e d\mathbf{v}, \quad P_n^{kj} = \int_{\Omega_n} c_n^k c_n^j f_n d\mathbf{w}$$

суть компоненты тензора напряжений ионной, электронной и нейтральной компонент плазмы. Сложение трех полученных выше уравнений приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial Q^j}{\partial t} + \frac{\partial((m_i u_i^k j_i^j + P_i^{kj}) + (m_e u_e^k j_e^j + P_e^{kj}) + (m_n u_n^k j_n^j + P_n^{kj}))}{\partial x^k} - \rho E^j - \frac{e}{c} \varepsilon_{jls} j_e^l H^s = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

которые суть закон сохранения импульса в плазме.

Закон сохранения энергии. Для его получения нужно умножить каждое кинетическое уравнение на $\frac{m_i}{2} \xi^2, \frac{m_e}{2} \mathbf{v}^2, \frac{m_n}{2} \mathbf{w}^2$ и проинтегрировать по соответствующим скоростным пространствам, используя при этом всю описанную методику получения макроскопических уравнений. Удобно ввести следующие обозначения:

$$E_s = \frac{\rho_s}{2} \mathbf{u}_s^2 + \frac{3}{2} n_s k T_s, \quad s = i, e, k; \quad \frac{dE_s}{dt} = \frac{\partial E_s}{\partial t} + \frac{\partial(u_s^k E_s)}{\partial x^k},$$

и учесть, что в левой части возникнет еще один макропараметр

$$\mathbf{q}_i = \int_{\Omega_i} \frac{m_i}{2} \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i f_i d\xi, \quad \mathbf{q}_e = \int_{\Omega_e} \frac{m_e}{2} \mathbf{c}_e \mathbf{c}_e f_e d\mathbf{v}, \quad \mathbf{q}_n = \int_{\Omega_n} \frac{m_n}{2} \mathbf{c}_n \mathbf{c}_n f_n d\mathbf{w},$$

который называется тепловым потоком соответствующей компоненты. Тогда, после выполнения обозначенной выше процедуры будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{dE_i}{dt} + \frac{\partial(u_i^j P_i^{jk} + q_i^k)}{\partial x^k} - e_j^k E^j = \\ & = m_i \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} \frac{\mathbf{w}^2}{2} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w} + \\ & + m_n \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \sigma_0 \left(\frac{\mathbf{w}^2 - \xi^2}{2} \right) |\xi - \mathbf{w}| f_i(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\xi d\mathbf{w}; \\ & \frac{dE_e}{dt} + \frac{\partial(u_e^j P_e^{jk} + q_e^k)}{\partial x^k} + e_j^k E^j = \\ & = m_e \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} \frac{\mathbf{w}^2}{2} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w}; \\ & \frac{dE_n}{dt} + \frac{\partial(u_n^j P_n^{jk} + q_n^k)}{\partial x^k} = \frac{3}{2} n_n v_1 k (T' - T_n) - \\ & - m_n \iint_{\Omega_e \times \Omega_n} \frac{\mathbf{w}^2}{2} \tilde{\sigma} |\mathbf{v}' - \mathbf{w}| f_e(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}') f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\mathbf{v}' d\mathbf{w} - \\ & - m_n \iint_{\Omega_i \times \Omega_n} \sigma_0 \left(\frac{\mathbf{w}^2 - \xi^2}{2} \right) |\xi - \mathbf{w}| f_i(t, \mathbf{x}, \xi) f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) d\xi d\mathbf{w}. \end{aligned}$$

Сложение всех трех уравнений дает

$$\frac{d(E_i + E_e + E_n)}{dt} + \frac{\partial(u_i^j P_i^{kj} + q_i^k + u_e^j P_e^{kj} + q_e^k + u_n^j P_n^{kj} + q_n^k)}{\partial x^k} - j_k E^k = \frac{3}{2} n_n v_1 k (T' - T_n). \tag{6}$$

Ноль в правой части (6) уравнения сохранения энергии получится, если $T' = T_n(t, \mathbf{x})$. Ранее было замечено, что при неупругом взаимодействии электронов с нейтралами, если ионизация не происходит, то у нейтрала происходит возбуждение электронов в электронной оболочке. В течение достаточно быстрого времени после возбуждения нейтрал испускает гамма-квант и нейтрал приходит в невозбужденное состояние. При этом из системы уносится энергия в виде излучения. Введение величины $T' \neq T_n(t, \mathbf{x})$ есть попытка учета уносимой энергии. Если W есть мощность уносимой энергии (ее можно измерить), то $-W = \frac{3}{2} n_n v_1 k (T' - T_n(t, \mathbf{x}))$ есть соотношение для определения T' . В (1) и (3) частоты столкновения для описания резонансной перезарядки и величина v_1 зависят от микроскопической скорости частиц. При решении задачи о струе (см. [4],[5]) были проведены расчеты как с частотами, которые зависели от микроскопических скоростей нейтралов и ионов, так и с модельными частотами, зависящими только от макропараметров упомянутых выше компонент. Сравнение результатов не обнаружило существенных отличий в расчетах, проведенных с разными частотами столкновений. Поэтому в кинетических уравнениях (1) и (3) будем использовать частоты столкновений, которые зависят только от макропараметров ионов, электронов и нейтралов. Введем величину

$$z = \sigma_0 \int_{\Omega_i \times \Omega_n} f_n(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) f_i(t, \mathbf{x}, \xi) |\xi - \mathbf{w}| d\mathbf{w} d\xi.$$

Так, определенная величина есть число взаимодействий ионов и нейтралов в единице объема в единицу времени. Величина z не зависит от микроскопических скоростей ионов и нейтралов. Для определения зависимости этой величины от макропараметров ранее в расчетах использовалось следующее выражение:

$$z = \sigma_0 \int_{\Omega_i \times \Omega_n} f_{Mn}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) f_{Mi}(t, \mathbf{x}, \xi) |\xi - \mathbf{w}| d\mathbf{w} d\xi = n_i(t, \mathbf{x}) n_n(t, \mathbf{x}) \Theta_{in},$$

где

$$\Theta_{in} = \sigma_0 \frac{h_i^{3/2} h_n^{3/2}}{\pi^3} \int_{\Omega_i} \int_{\Omega_n} \exp\{-(h_i \mathbf{c}_i^2 + h_n \mathbf{c}_n^2)\} |\xi - \mathbf{w}| d\mathbf{w} d\xi, \quad h_s = \frac{1}{2kT_i(t, \mathbf{x})}, \quad s = i, n.$$

Напомним, что $\mathbf{c}_i = \xi - \mathbf{u}_i(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{c}_n = \mathbf{w} - \mathbf{u}_n(t, \mathbf{x})$. Поэтому $d\mathbf{w} d\xi = d\mathbf{c}_i d\mathbf{c}_n$. Привычислении приведенного выше интеграла удобно перейти к переменным $\omega = \mu_i \mathbf{c}_i + \mu_n \mathbf{c}_n$, $\mathbf{g} = \mathbf{c}_i - \mathbf{c}_n$, $\mu_s = \frac{h_s}{h_i + h_n}$, $s = i, n$. Так как $\mathbf{c}_i = \omega + \mu_n \mathbf{g}$, $\mathbf{c}_n = \omega - \mu_i \mathbf{g}$, то $\frac{\partial(\mathbf{c}_n, \mathbf{c}_i)}{\partial(\omega, \mathbf{g})} = 1$. В новых переменных

$$\Theta_{in} = \sigma_0 \frac{h_i^{\frac{3}{2}} h_n^{\frac{3}{2}}}{\pi^3} \int_{\Omega_\omega} \exp\{-(h_i + h_n)\omega^2\} \int_{\Omega_g} e^{-\alpha_{in} g^2} |\mathbf{g} + \mathbf{U}_{in}| d\mathbf{g} = \sigma_0 \frac{\alpha_{in}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_{\Omega_g} e^{-\alpha_{in} g^2} |\mathbf{g} + \mathbf{U}_{in}| d\mathbf{g},$$

где $\alpha_{in} = \frac{h_i h_n}{h_i + h_n}$, $\mathbf{U}_{in} = \mathbf{u}_i(t, \mathbf{x}) - \mathbf{u}_n(t, \mathbf{x})$. В последнем интеграле удобно перейти к сферическим пере-

менным, приняв за полярную ось \mathbf{U}_{in} . Тогда получим

$$\begin{aligned} \Theta_{in} &= \sigma_0 \frac{2\alpha_{in}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi e^{-\alpha_{in} g^2} g^2 \sqrt{g^2 + U_{in}^2 + 2gU_{in} \cos\alpha} \sin\alpha d\alpha dg = \\ &= \sigma_0 \frac{2\alpha_{in}^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_{in} g^2} g \left(\frac{(g + U_{in})^3 - |g - U_{in}|^3}{U_{in}} \right) dg. \end{aligned}$$

В последнем интеграле $g = |\mathbf{g}|$, а $U_{in} = |\mathbf{U}_{in}|$. Его нетрудно вычислить. Тогда

$$\Theta_{in} = \sigma_0 \frac{3}{2\sqrt{\alpha_{in}} \pi} (1 + \sqrt{\alpha_{in}} U_{in}) \text{Erf}(\sqrt{\alpha_{in}} U_{in}), \quad \text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Следуя выше приведенному анализу, число взаимодействий электронов с нейтрами в единице объема за единицу времени, которые приводят к ионизации, будем определять следующей формулой:

$$\bar{z} = \bar{\sigma}_{en} \int_{\Omega_e \times \Omega_n} \chi \left(\frac{\mu}{4} (\mathbf{v} - \mathbf{w})^2 - \varepsilon_0 \right) f_{Mn}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) f_{Me}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) |\mathbf{v} - \mathbf{w}| d\mathbf{w} d\mathbf{v} = n_e(t, \mathbf{x}) n_n(t, \mathbf{x}) \Theta_{en}.$$

Если при вычислении приведенного выше интеграла воспользоваться описанным выше методом, заменив везде индекс i на индекс e , то получим

$$\Theta_{en} = \bar{\sigma}_{en} \frac{2\alpha_{en}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \iint_{D(t, g)} e^{-\alpha_{en} g^2} g^2 \sqrt{g^2 + U_{en}^2 + 2gU_{en} t} dt dg.$$

Область интегрирования $D(t, g)$ можно представить в следующем виде:

$$D(t, g) = \begin{cases} 0 \leq g < +\infty \\ t_0 < -1 \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} 0 \leq g < +\infty \\ -1 \leq t_0 < 1 \\ t_0 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

где

$$t_0 = \frac{\bar{\varepsilon}_0 - g^2 - U_{en}^2}{2gU_{en}}, \bar{\varepsilon}_0 = \frac{4\varepsilon_0}{\mu}.$$

Тогда

$$\Theta_{en} = \bar{\sigma}_{en} \frac{2\alpha_{en}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{|g_1|}^{g_2} e^{-\alpha_{en}g^2} g^2 \int_{t_0}^1 \sqrt{g^2 + U_{en}^2 + 2gU_{en}t} dt dg + \int_{g_2}^{+\infty} e^{-\alpha_{en}g^2} g^2 \int_{-1}^1 \sqrt{g^2 + U_{en}^2 + 2gU_{en}t} dt dg + \right. \\ \left. + \chi(g_1) \int_0^{g_1} e^{-\alpha_{en}g^2} g^2 \int_{-1}^1 \sqrt{g^2 + U_{en}^2 + 2gU_{en}t} dt dg \right), g_1 = U_{en} - \sqrt{\bar{\varepsilon}_0}, g_2 = U_{en} + \sqrt{\bar{\varepsilon}_0}.$$

Вычислив внутренние интегралы, имеем

$$\Theta_{en} = \bar{\sigma}_{en} \frac{2\alpha_{en}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{|g_1|}^{g_2} \frac{e^{-\alpha_{en}g^2}}{3U_{en}} g \left((g + U_{en})^3 - \bar{\varepsilon}_0^{\frac{3}{2}} \right) dg + \int_{g_2}^{+\infty} e^{-\alpha_{en}g^2} \times \right. \\ \left. \times 2g \left(g^2 + \frac{U_{en}^2}{3} \right) dg + \chi(g_1) \int_0^{g_1} e^{-\alpha_{en}g^2} 2g^2 \left(\frac{g^2}{3U_{en}} + U_{en} \right) dg \right).$$

После необходимых вычислений можно получить, что

$$\Theta_{en} = \Theta_{el}^1 + \Theta_{el}^2 + \Theta_{el}^3,$$

где

$$\Theta_{el}^1 = \bar{\sigma}_{en} \frac{\alpha_{en}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{|g_1|^3 e^{-\alpha_{en}g_1^2} - g_2^3 e^{-\alpha_{en}g_2^2}}{3U_{en}} + \frac{g_1^2 e^{-\alpha_{en}g_1^2} - g_2^2 e^{-\alpha_{en}g_2^2}}{U_{en}} + \right. \\ \left. + \frac{|g_1| e^{-\alpha_{en}g_1^2} - g_2 e^{-\alpha_{en}g_2^2}}{U_{en}} \left(\frac{1}{\alpha_{en}} + U_{en}^2 \right) + \frac{e^{-\alpha_{en}g_1^2} - e^{-\alpha_{en}g_2^2}}{3U_{en}} \left(U_{en}^3 - \bar{\varepsilon}_0^{\frac{3}{2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\pi} \left(\text{Erf}(\sqrt{\alpha_{en}} g_2) - \text{Erf}(\sqrt{\alpha_{en}} |g_1|) \right)}{2} \frac{\left(\frac{1}{\alpha_{en}} + U_{en}^2 \right)}{\sqrt{\alpha_{en}} U_{en}} \right),$$

$$\Theta_{el}^2 = \bar{\sigma}_{en} \frac{2}{\sqrt{\pi} \alpha_{en}} e^{-\alpha_{en}g_2^2} \left(\alpha_{en} g_2^2 + 1 + \frac{\alpha_{en} U_{en}^2}{3} \right),$$

$$\Theta_{el}^3 = \chi(g_1) \bar{\sigma}_{en} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha_{en} U_{en}} \left(\frac{1}{2} + \alpha_{en} U_{en}^2 \right) \text{Erf} \left(\alpha_{en}^{\frac{1}{2}} |g_1| \right) \right) - \frac{e^{-\alpha_{en}g_1^2}}{\sqrt{\alpha_{en}} U_{en}} \left(\frac{2}{3} \alpha_{en} |g_1|^3 + |g_1| (1 + \alpha_{en} U_{en}^2) \right).$$

Теперь можно привести окончательный вид построенной выше системы кинетических уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{D^i f_i}{Dt} &= n_e \Theta_{en} f_n \frac{d\mathbf{w}}{d\xi} + \frac{m_n}{m_i} \Theta_{en} (n_i f_n \frac{d\mathbf{w}}{d\xi} - n_n f_i), \\
\frac{D^e f_e}{Dt} &= n_e \Theta_{en} f_n \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{v}} + n_n (\bar{\Theta}_{en}^1 + \bar{\Theta}_{en}^2) (f_{Me} - f_e), \\
\frac{D^n f_n}{Dt} &= -n_e \Theta_{en} f_n \frac{d\mathbf{w}}{d\mathbf{v}} + n_e \bar{\Theta}_{en}^1 (f_{Me} - f_e) + n_e \bar{\Theta}_{en}^2 (f'_{Me} - f_e) + \Theta_{en} (n_n f_i \frac{d\xi}{d\mathbf{w}} - n_i f_n), \\
\bar{\Theta}_{en}^1 &= \sigma_1 A_{en}, \bar{\Theta}_{en}^2 = \bar{\sigma}_{en} A_{en}, A_{en} = \frac{3}{2\sqrt{\alpha_{en}\pi}} (1 + \sqrt{\alpha_{en}} U_{in}) \text{Erf}(\sqrt{\alpha_{en}} U_{en}),
\end{aligned} \tag{7}$$

где σ_1 есть сечение упругого столкновения электронов и нейтралов, Θ_{in}, Θ_{en} определены выше.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше построенная кинетическая модель (7) является в некоторой степени аналогом известной в динамике разреженного газа модели Крука. Она обладает, кроме Н-теоремы, всеми свойствами модели Крука. Модель (7) предполагается использовать для моделирования процессов, происходящих в ускорительных каналах ЭРД. При этом предполагается использовать метод решения кинетических уравнений совместно с уравнением Пуассона для определения электрического поля, предложенный в [9]. Подробное описание этого метода будет в номере, который готовится к выходу. В [10] предложена гибридная модель стационарного плазменного двигателя. Именно так ее назвали авторы этой статьи. Суть ее в том, что для описания ионной и нейтральной компонент плазмы используются кинетические уравнения, а описание движения электронной компоненты происходит на макроскопическом уровне. Оценки величин чисел Кнудсена во взаимодействиях ионов, электронов и нейтралов, происходящих в канале ускорителя, дают величины порядка или больше единицы. Этот факт свидетельствует в пользу полностью кинетического описания этих процессов. Естественно, что предложенная в статье модель обладает недостатками модели Крука, но известно, что решения многих задач динамики разреженных газов, полученных на основе этой модели, мало отличаются от аналогичных решений, когда использовались другие модели или уравнение Больцмана. Поэтому авторы считают, что представленную выше модель целесообразно использовать для решения указанных в статье задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков Б.И., Морозов А.И., Свешников А.Г., Якунин С.А. Численное моделирование ионов в системе с замкнутым дрейфом // Физ. плазмы, 1981. Т. 7. Вып. 2. С. 245–253.
2. Бишаев А.М., Калашиников В.К., Ким В., Шавыкина А.В. Численное моделирование плазменной струи стационарного плазменного двигателя, распространяющейся в среде низкого давления // Физ. плазмы. 1998. Т. 24. №11. С. 989–995.
3. Лазуренко А.В. Моделирование процессов ионизации и ускорения рабочего тела в стационарном плазменном двигателе (СПД) с учетом 3-мерных эффектов. Дис. 2002 г.
4. Абгарян М.В., Бишаев А.М. Нестационарная модель струи разреженной плазмы, истекающей из Стационарного плазменного двигателя // Физ. плазмы. 2018. Т. 4. № 2. С. 238–249.
5. Абгарян М.В., Бишаев А.М. Модернизация метода расщепления для решения системы кинетических уравнений, описывающих поведение струи разреженной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 39. №7. С. 1132–1146.
6. Чернышев Т.В. Экспериментальные и численные исследования нарушения стационарности горения интенсивных разрядов с замкнутым дрейфом электронов. Дис // М.: Физматлит. 2016 г.
7. Коган М.Н. Динамика разреженного газа // М.: Физматлит. 1967.
8. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. 1987. 592 с.
9. Abgaryan M.V., Bishaev A.M. Method of the electron distribution function calculation in a problem of the kinetic rarefied plasma plume modeling. Journal of Physics: Conference Series 2021. J. Phys: Conf. Ser. V. 2056 012021.
10. Гавриков Т.Б., Таюрский А.А. Гибридная модель стационарного плазменного двигателя: Препринт № 35. М.: ИПМатем. РАН, 2021.

KINETIC MODEL OF A THREE-COMPONENT PLASMA**M. V. Abgaryan^{a,*}, A. M. Bishaev^{b,**}**^a*Moscow Aviation Institute,**Leningradskoye shosse, 5, PO Box, Moscow, 43125080 Russia*^b*Moscow Institute of Physics and Technology,**Institutskiy per., 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141700 Russia***e-mail: abgmvk@gmail.com****e-mail: bishaev@bk.ru*

Received 07 August, 2023

Revised 03 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. In this work, a system of kinetic equations is constructed to study the processes in a three-component plasma. It is an analogue of the Krook model, which is widely used in the dynamics of rarefied gases. The model is supposed to be used to study the processes in the channels of rocket electric thrusters.

Keywords: ions, electrons, neutrals, ionization, plasma component macroparameters.

УДК 519.65

О ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ ПАРАМЕТРОВ НЕЛОКАЛЬНОСТИ ПЛОТНОСТИ ПЛАЗМЫ¹⁾

© 2024 г. Н. С. Аркашов^{1,*}, В. А. Селезнев^{2,**}

¹630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 4, ИМ СО РАН, Россия

²630076 Новосибирск, пр-т Карла Маркса, 20, НГТУ, Россия

*e-mail: nicky1978@mail.ru

**e-mail: selvad46@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2022 г.

Переработанный вариант 18.10.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

В работе исследуется выборка значений плотности плазмы термоядерной установки. Получена методология обработки экспериментальных данных, позволяющая установить соответствие между упомянутой выборкой и моделью нестационарного шума. Эта модель формируется как свертка стационарной последовательности и функции памяти и позволяет моделировать конкуренцию пространственной и временной нелокальности. Представлена физическая интерпретация параметров нелокальности. Библ. 26. Фиг. 2. Табл. 5.

Ключевые слова: нелокальность по времени и пространству, спектральный анализ, временные ряды физических величин, плотность плазмы.

DOI: 10.31857/S0044466924030086, **EDN:** XGSHNV

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматривается модель нестационарного шума, полученная в [1]. Нестационарный шум в [1] определяется как результат (интегральной) свертки стационарной последовательности и функции памяти. Основной задачей работы является оценка адекватности этой модели по соответствию выборке значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, измеренной в периферийной области удержания плазмы термоядерной установки Токамак Т-10 (выборка предоставлена В. П. Будаевым). В частности, уровень адекватности модели определяется реально достигнутым уровнем значимости представленного в данной работе статистического критерия. Этот критерий базируется на непараметрическом критерии проверки стационарности, полученном в [2].

Представленная модель нестационарного шума не случайно выбрана для анализа временного ряда плотностей плазмы. Последовательность, реализуемая сверткой стационарной последовательности и функции памяти, позволяет моделировать эффекты длинной зависимости и нестационарности (см. [1]). В то же время отметим, что значения выборки плотностей плазмы получены в зоне, где собственно наблюдается явление перемежаемости с признаками дальних корреляций (см. [3]).

Следующим основанием для выбора такой модели является определяемая ею структура нелокальности. Упомянутые стационарная последовательность и функция памяти позволяют моделировать пространственную и временную нелокальность, а также их соотношение, называемое в литературе конкуренцией пространственной и временной нелокальности (см., например, [4]). Здесь следует отметить, что согласно [5] аномальный перенос плотности в плазме имеет конкурентную структуру и определяется диссипативными процессами нагревания плазмы и идеальными процессами фоновой теплопроводности.

В работе [6] исследовались аналогичная модель и выборка. Существенным недостатком методологии проверки адекватности этой модели в [6] является использование параметрического критерия проверки стационарности, основанного на предположении о степенном поведении дисперсии частичных сумм соответствующей стационарной последовательности. Это предположение сужает возможность применения

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

рассматриваемой модели нестационарного шума к анализу реальных данных. Скажем, в [7] рассматривается ситуация, когда дисперсия частичных сумм стационарной последовательности и функция памяти имеют правильное поведение по времени, отличное от степенного. Отметим, что в настоящей работе, в частности, исправляется этот недостаток, при этом вместо параметрического критерия используется упомянутый выше непараметрический критерий стационарности. Кроме того, следует отметить, что представленная методология может быть применена к анализу не только выборки значений плотности плазмы. Например, одним из перспективных направлений здесь является анализ динамических закономерностей движения частиц в биологических клетках, обусловленных сложной комбинацией факторов пространственной неоднородности и пространственно-временной нелокальности (см., например, [8, 9]).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И СХЕМА ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

Пусть $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ — стационарная (в широком смысле) последовательность случайных величин. Такую последовательность $\{x_i\}$ будем называть *стационарным шумом*. Через M обозначим некоторую неубывающую на неотрицательной полуоси функцию, такую что $M(0)=0$ и $M(1)=1$. Такую функцию M будем называть *функцией памяти*. Определим нестационарный шум по $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ через M :

$$\rho_k := \sum_{i=0}^{k-1} x_{k-i} \Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $\Delta M(i) := M(i+1) - M(i)$. Правая часть (1) является сверткой $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ и M .

Пусть $a := \mathbf{E}x_1$. Выполняется очевидное равенство

$$\rho_k = aM(k) + \sum_{i=0}^{k-1} (x_{k-i} - a) \Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Стало быть, последовательность $\{\rho_k\}$ обладает возрастающим трендом.

В дальнейшем в качестве функции памяти мы будем рассматривать степенную функцию: $p_\nu(t) := t^\nu$, $0 \leq \nu \leq 1$ (считаем, что $p_0(0) := 0$). Отметим, что параметр ν отвечает за *уровень нестационарности* шума (в случае $\nu = 0$ последовательность $\{\rho_k\}$ совпадает с $\{x_k\}$) (см., также [7], замечание 6).

Будем рассматривать экспериментально полученную выборку временного ряда значений плотности низкочастотной турбулентной плазмы, единица измерения времени $\tau = 1$ мкс: $\rho = (\rho_k, k = 1, \dots, N)$, где $N = 500001$. На фиг. 1 приведен график упомянутого временного ряда. Заметим, что предварительное (визуальное) наблюдение этого графика позволяет предположить наличие слабо возрастающего тренда (сравните с (2)).

В дальнейшем проверка адекватности модели нестационарного шума (1) на соответствие этим выборочным данным будет реализована по следующей схеме.

Схема оценки адекватности модели. 1. Формируем множество исследуемых значений параметра ν : $\Upsilon = \{k / 10^3 : k = 0, 1, \dots, 500\}$ (мы заранее предполагаем, что $\nu \leq 0.5$).

2. Для каждого $\nu \in \Upsilon$ решаем систему (1), где $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$ — исследуемая выборка плотностей плазмы и в качестве функции M рассматривается степенная функция p_ν . В итоге получаем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, зависящую от ν .

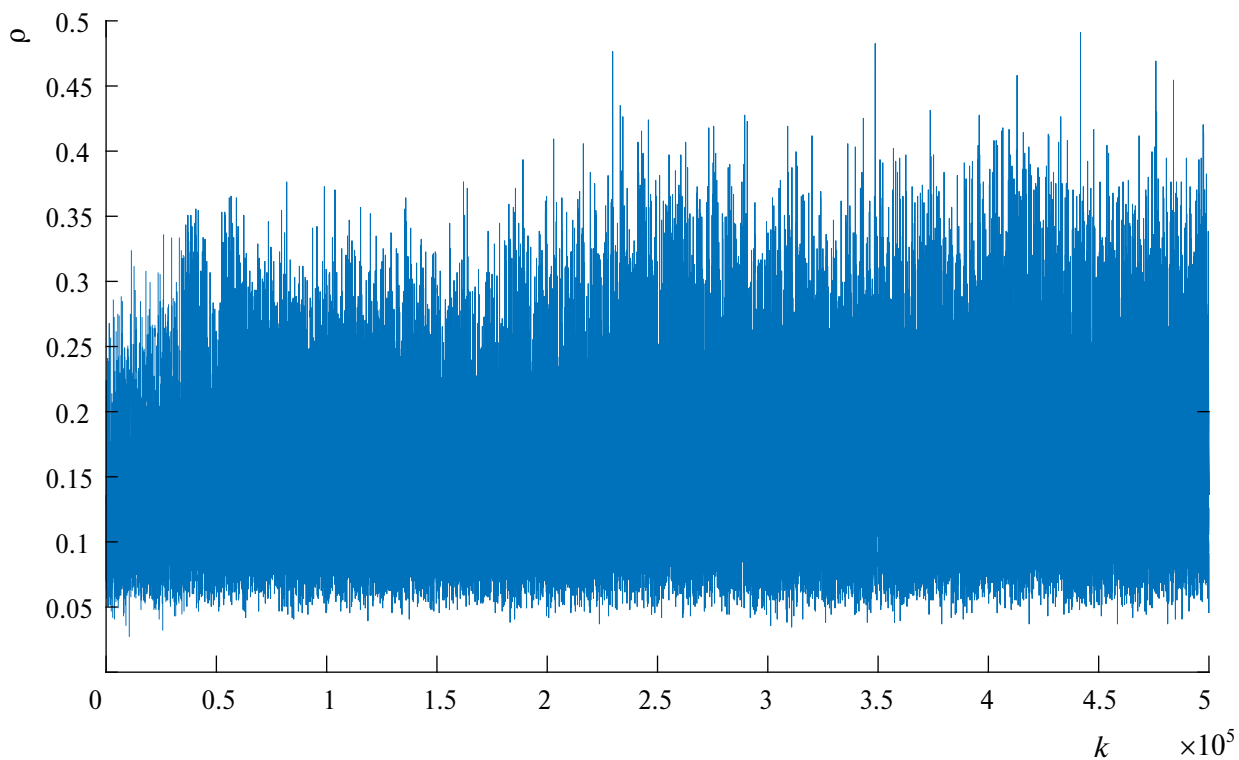
3. На выборке $(x_k, k = 1, \dots, N)$ определяем реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon(\nu)$ статистического критерия по соответствию основной гипотезе о стационарности.

4. Выбираем ν_* , для которого $\varepsilon(\nu)$ принимает максимальное значение. Значение $\varepsilon(\nu_*)$ определяет уровень адекватности модели (1) по ее соответствию экспериментальным данным. Кроме того, на этом шаге мы находим выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, удовлетворяющую основной гипотезе о стационарности на уровне значимости $\varepsilon(\nu_*)$.

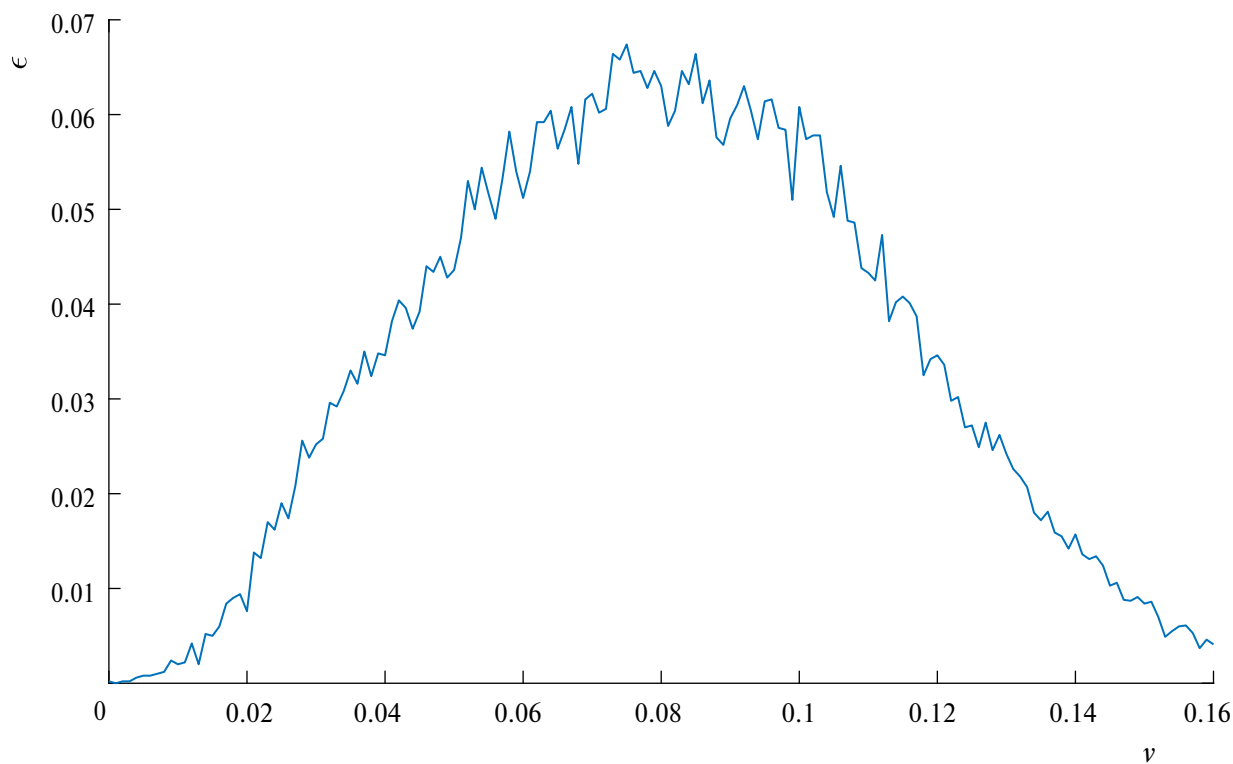
3. СТРУКТУРА РАБОТЫ

Приведем содержание основных этапов работы. В разд. 4 приводятся численные результаты оценки адекватности модели нестационарного шума по соответствию выборке значений плотности плазмы. В частности, в этом разделе находится оценка ν_* параметра ν . Отметим, что в этом разделе используется непараметрический критерий стационарности, который представлен в третьем пункте схемы оценки адекватности. Описание и обоснование этого критерия проводится в приложении А.

В разд. 5 проводится дополнительное исследование, устанавливающее близость конечномерных распределений нормированных частичных сумм выборки $(x_k, k = 1, \dots, N)$ (зависящей от ν_*) к соответствующему конечномерному распределению фрактального броуновского движения. В рамках этого исследования мы получаем оценку H_* параметра Хёрста H фрактального броуновского движения.



Фиг 1. График временного ряда значений плотности плазмы, $\rho = (\rho_k)$, $k = 1, \dots, 5 \cdot 10^5$.



Фиг 2. График реально достигнутых уровней значимости, $\varepsilon = \varepsilon(v)$, $0 \leq v \leq 0.16$.

Далее, устанавливается степенное поведение дисперсии частичных сумм нестационарного шума, соответствующего выборке $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$.

В разд. 6 рассматривается физическая интерпретация представленной модели нестационарного шума. В частности, устанавливается интерпретация параметров ν и H как параметров нелокальности по времени и пространству соответственно.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОЦЕНКИ АДЕКВАТНОСТИ МОДЕЛИ

В настоящем разделе мы реализуем схему проверки адекватности модели на выборке плотностей плазмы (см. разд. 3). При этом мы используем критерий стационарности (см. приложение А) для получения реально достигнутого уровня значимости $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$ на выборке $(x_i, i = 1, \dots, N)$, зависящей от ν (см. фиг. 2).

Мы получаем, что $\nu_* = 0.075$ (точка максимума для $\varepsilon = \varepsilon(\nu)$) при этом $\varepsilon(\nu_*) = 0.067$. Отметим, что реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon(\nu_*)$ достаточно высок, чтобы говорить об адекватности модели нестационарного шума по ее соответствию реальным данным. Таким образом, мы можем говорить о последовательности нестационарного шума $\{\rho_k\}$, которая реализуется выборкой $(\rho_k, k = 1, \dots, N)$.

Заметим, что в рамках этого раздела мы получаем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, удовлетворяющую основной гипотезе о стационарности на уровне значимости $\varepsilon(\nu_*)$.

5. ОЦЕНКА ПОВЕДЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ СУММ НЕСТАЦИОНАРНОГО ШУМА

5.1. Предварительные замечания

Через $B_H(t)$ обозначим фрактальное броуновское движение с параметром Хёрста H (см. [11, 12]), т. е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$R(t, s) := \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}), \tag{3}$$

где $H \in (0, 1)$ (случай $H = 1/2$ соответствует стандартному винеровскому процессу). Определим гауссовский процесс:

$$Z_{\nu, H}(t) := \int_0^t B_H(t - s) dp_\nu(s), \tag{4}$$

где, напомним, $p_\nu(t) = t^\nu, 0 \leq \nu \leq 1$ ($p_0(0) = 0$). Ниже нам понадобится следующий результат из [7, следствие 1] (см. также [10, следствие 1]) для последовательности $\{\rho_k\}$ (см. (1)), где в качестве функции памяти M рассматривается p_ν .

Теорема 1. Пусть стационарная последовательность $\{x_i, i = 1, 2, \dots\}$ обладает спектральной плотностью. Пусть, кроме того, дисперсия суммы $\sum_{i=1}^n x_i$ имеет следующее поведение: $\text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i) \sim \sigma^2 n^{2H}, n \rightarrow +\infty$, где $H \in (0, 1)$ и $\sigma^2 > 0$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\text{Var}(\sum_{i=1}^n \rho_i) \sim s_{\nu, H}^2 \sigma^2 n^{2H+2\nu}, \tag{5}$$

где $s_{\nu, H}^2 := \text{Var}(Z_{\nu, H}(1))$.

Из (3) и (4) сразу следует, что для константы $s_{\nu, H}^2$ имеет место представление

$$s_{\nu, H}^2 = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 ((1-u)^{2H} + (1-v)^{2H} - |u-v|^{2H}) dp_\nu(u) dp_\nu(v).$$

Центрированная гауссовская последовательность называется *фрактальным шумом* с параметром $H \in (0, 1)$ и дисперсией δ^2 (см., например, [13]), если ее ковариационная функция $q = q(j)$ имеет вид:

$$q(j) := \frac{\delta^2}{2} (|j+1|^{2H} + |j-1|^{2H} - 2|j|^{2H}), j \in \mathbb{Z}. \tag{6}$$

В дальнейшем для действительного числа x через $[x]$ будем обозначать наибольшее целое число, не превосходящее x .

5.2. Степенное поведение частичных сумм стационарного шума

Прежде чем перейти к рассмотрению выборки $(x_j, j = 1, \dots, N)$ (зависящей от v_*), реализующей стационарную последовательность $\{x_j\}$ (эта выборка получена в разд. 4), сделаем предварительные замечания. Пусть $\{x_j\}$ — стационарная последовательность случайных величин с конечной дисперсией. Введем обозначение: $S_n := \sum_{j=1}^n (x_j - a)$, где $a = \mathbf{E}(x_1)$. Отметим, что сходимость при $n \rightarrow \infty$ конечномерных распределений процессов $\frac{S_{[nt]}}{\sigma n^H}, t \in [0, 1]$, где $H \in (0, 1)$ и $\sigma > 0$, к конечномерному распределению $B_H(t), t \in [0, 1]$, равносильна следующей: распределения случайных векторов

$$\left(\frac{S_\theta}{\sigma \theta^H}, \frac{S_{2\theta} - S_\theta}{\sigma \theta^H}, \dots, \frac{S_{k\theta} - S_{(k-1)\theta}}{\sigma \theta^H} \right)$$

сходятся к распределению $(B_H(1), B_H(2) - B_H(1), \dots, B_H(k) - B_H(k - 1))$ при $\theta \rightarrow \infty$. При этом очевидно, что последовательность $\{B_H(k) - B_H(k - 1), k = 1, 2, \dots\}$ является стандартным фрактальным шумом (т. е. $\delta = 1$ в (6)). Далее заметим, что при условии существования спектральной плотности $\{x_j\}$ следствием упомянутой сходимости конечномерных распределений является эквивалентность (см. [14])

$$\mathbf{Var}(S_n) \sim \sigma^2 n^{2H}, n \rightarrow \infty. \tag{7}$$

Вернемся к рассмотрению выборки $(x_j, j = 1, \dots, N)$ (зависящей от v_*). Сформируем

$$(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta]),$$

где

$$x_j^{(\theta)} := \sum_{i=(j-1)\theta+1}^{j\theta} (x_i - a_*) \quad (a_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i).$$

Значение θ должно быть достаточно большим, чтобы «накопить нормальность», стало быть, это значение будем выбирать много больше, чем объем выборки $(x_j^{(\theta)})$, т. е. $\theta \gg [N / \theta]$. Заметим, что $x_j^{(\theta)}$ реализует $S_{j\theta} - S_{(j-1)\theta}, j = 1, \dots, k$, где $k = [N / \theta]$ (см. выше).

В дальнейшем будет проверяться гипотеза о том, что $(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta])$ является фрактальным шумом с дисперсией $\sigma^2 \theta^{2H}$. Оценки для параметров σ и H можно получить, применяя известные методы, в частности, метод дисперсий (см. [15]). В приложении Б приводится этот метод.

Пусть Q — ковариационная матрица фрактального шума (см. (6)). Найдется ортогональная матрица C и диагональная D , такие что $C^T Q C = D$. Обозначим $B = \sqrt{D}$. Отметим, что произведение $(B^{-1} C^T)(x_j^{(\theta)})^T$ дает выборку, которая проверяется на стандартную нормальность (см., например, [16]). Естественно при этом использовать параметрический критерий χ^2 . Чтобы обеспечить корректность применения критерия χ^2 , значение $[N / \theta]$ должно быть велико, при этом (как выше отмечалось) значение θ должно быть много больше значения $[N / \theta]$, т. е.

$$\sqrt{N} \ll \theta \ll N. \tag{8}$$

Реально достигнутый уровень значимости этого критерия дает оценку близости распределения выборки $(x_j^{(\theta)})$ к распределению фрактального шума.

Уточним намеченные вычислительные процедуры в следующем методе.

- Метод.** 1. Используя метод дисперсий, по $(x_j, j = 1, \dots, N)$ находим оценки σ_* и H_* параметров σ и H соответственно.
2. Центрируем выборку $(x_j, j = 1, \dots, N)$ с помощью $a_* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$. Получаем $x'_j = x_j - a_*, j = 1, \dots, N$.
3. Формируем: $x_j^{(\theta)} = \sum_{i=(j-1)\theta+1}^{j\theta} x'_i, j = 1, \dots, [N / \theta]$.
4. Определяем ковариационную матрицу Q фрактального шума (см. (6)), где $\delta = \sigma_* \theta^{H_*}$.
5. Используя матрицу Q , находим матрицы B и C . Умножив $B^{-1} C^T$ на вектор $(x_j^{(\theta)}, j = 1, \dots, [N / \theta])^T$, получаем $(\eta_j, j = 1, \dots, [N / \theta])$.

6. На выборке $(\eta_j, j = 1, \dots, [N / \theta])$ находим реально достигнутый уровень критерия χ^2 при основной гипотезе, что эта выборка имеет стандартное нормальное распределение.

6.1. Пусть $m = [N / \theta]$. Разбиваем числовую ось на $l = [\sqrt{m}] + 1$ непересекающихся интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_l$, так что $m\Phi_{0,1}(\Delta_1) = m\Phi_{0,1}(\Delta_2) = \dots = m\Phi_{0,1}(\Delta_l) = m / l$. На выборке $(\eta_j, j = 1, \dots, m)$ находим значение $X^2 = \sum_{i=1}^l \frac{(v_i - m / l)^2}{m / l}$, где v_i — число элементов (η_j) в $\Delta_i, i = 1, \dots, l$.

6.2. Имея в виду три оцениваемых параметра a, σ и H , находим реально достигнутый уровень значимости критерия χ^2 , а именно: $\varepsilon(\theta) = 1 - \chi_{l-4}^2(X^2)$.

В соответствии с (8) выберем в приведенном методе значение θ равным $r[\sqrt{N}]$, где r находится в целочисленном диапазоне $[5, 10]$. Для этих значений составим таблицу реально достигнутых уровней значимостей. Отметим, что $a_* = 0.068, \sigma_* = 0.067, H_* = 0.718$.

Таблица 1.

r	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(r[\sqrt{N}])$	0.082	0.045	0.110	0.048	0.140	0.696

Мы получили достаточно высокие уровни значимостей. Поэтому можно принять гипотезу о том, что выборка $(x_j^{(0)})$ ($\theta = r[\sqrt{N}], r = 5, \dots, 10$) является фрактальным шумом с дисперсией $\sigma_*^2 \theta^{2H_*}$.

5.3. Степенное поведение частичных сумм нестационарного шума

Стало быть, в соответствии с (7) и теоремой 1 мы выводим, что для последовательности нестационарного шума $\{\rho_j\}$, реализуемой выборкой $(\rho_j, j = 1, \dots, N)$, можно говорить о близости $\frac{\text{Var}(\sum_{j=1}^n \rho_j)}{\beta n^\alpha}$ к 1 при достаточно больших n , где $\alpha := 2H + 2\nu$ и $\beta := \sigma^2 \cdot s_{\nu, H}^2$. При этом соответствующие оценки параметров α и β имеют вид: $\alpha_* = 1.586, \beta_* = 0.003$ (заметим, что $s_{\nu_*, H_*}^2 = 0.776$, где, напомним, $\nu_* = 0.075, H_* = 0.718$).

6. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И ОБСУЖДЕНИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ШУМА

Соотношение (1) для плотности ρ_k в момент времени $k\tau$ (τ — единица измерения времени) позволяет определить скорость изменения этой плотности в момент $k\tau$

$$\frac{\Delta\rho_k}{\tau} = \sum_{i=0}^{k-1} f(k-i)\Delta M(i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

где $\Delta\rho_k := \rho_k - \rho_{k-1}$ ($\rho_0 = 0$) и $f(k) := (x_k - x_{k-1}) / \tau$ ($x_0 = 0$). Полученное представление можно рассматривать как уравнение динамики плотности плазмы в периферийной области термоядерного реактора.

В представлении (9) скорость изменения плотности плазмы определяется фактором f в настоящий и предыдущие моменты времени (начиная с начального момента 0), при этом распределение этого фактора по времени задается с помощью функции памяти M . Таким образом, M определяет нелокальность по времени модели нестационарного шума.

Отметим, что в (9) правую часть можно интерпретировать как поток, возникающий при «действии» на физическую систему с памятью фактора f (см. [17–19]).

Поскольку $f(k) = (x_k - x_{k-1}) / \tau, k = 1, 2, \dots$, поэтому нелокальность действия f определяется $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$. Этой последовательности соответствует представление (15) в виде бесконечного двухстороннего скользящего среднего. Структура памяти такой последовательности определяет, вообще говоря, ее дальнюю зависимость (см., например, [20, разд. 2.1]). В этом случае мы будем говорить о том, что $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ формирует нелокальность по пространству модели нестационарного шума (см. также [7, замечание 7]).

Если $M(n)$ и $\text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i)$ имеют степенное по n поведение, то о соответствующих показателях ν и H можно говорить как о параметрах нелокальности по времени и пространству.

Известно, что механизм аномального переноса основан на конкуренции, в которой нагрев плазмы и идеальные процессы фоновой теплопроводности приводят к аномальному переносу тепла и плотности

плазмы (см. [5]). Подчеркнем еще раз, что в представленной модели параметры ν и H являются параметрами нелокальности по времени и пространству, причем параметр ν определяет также и уровень нестационарности модели. В этом смысле мы можем предположить, что параметр ν связан с эффектами нелокальности по времени, возникающими в процессе нагрева плазмы (тепловое последствие) и, соответственно, параметр H связан с фоновой теплопроводностью.

Заметим, что конкуренция параметров нелокальности определяет в настоящем случае супердиффузионное поведение процесса частичных сумм, построенного по последовательности нестационарного шума (напомним оценку $\alpha_* = 1.586$ показателя степенного изменения дисперсии упомянутого процесса частичных сумм, см. (5) и разд. 5.3).

Рассматриваемый в настоящей работе подход к моделированию конкуренции пространственной и временной нелокальности принципиально отличается от более известного подхода, основанного на модели блуждания в непрерывном времени (STRW-модель). В таком подходе применяется техника устойчивых распределений, при этом суб- и супердиффузионный режим процесса определяется отношением параметров устойчивых распределений, соответствующих времени ожидания и величине скачка блуждающей частицы (см., например, [4]). В частности, это приводит к тому, что для моделирования супердиффузионного режима переноса используются устойчивые распределения с бесконечным вторым моментом. Следует отметить критику такого подхода, поскольку в большинстве приложений (как и в настоящем случае) нет оснований отказываться от предположения об ограниченности влияния каждого случайного фактора на регистрируемый процесс (см. [21]).

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлена модель нестационарного шума и проверена ее адекватность на соответствие экспериментальным данным, являющимся временным рядом значений плотности плазмы термоядерной установки. Установлено, что эта модель является состоятельной с реально достигнутым уровнем значимости 0.067. Для дисперсии процесса частичных сумм нестационарного шума, соответствующего временному ряду значений плотности плазмы, установлен степенной закон изменения по времени со следующими оценками показателя степенного изменения и масштабного коэффициента: $\alpha_* = 1.586$, $\beta_* = 0.003$; а также оценками $\nu_* = 0.075$, $H_* = 0.718$ параметров нелокальности по времени и пространству соответственно. Кроме того, для обозначенной модели и ее параметров нелокальности в разд. 6 приведена физическая интерпретация.

Следует отметить, что мы подтверждаем другими методами полученное в [6] соответствие (на определенном уровне значимости) модели нестационарного шума и выборки плотностей плазмы. Однако, хотелось бы подчеркнуть, что представленная модель нестационарного шума, вообще говоря, не предполагает степенное поведение функции памяти и дисперсии частичных сумм стационарной последовательности. Более того, в настоящей работе получена новая методология, позволяющая находить уровень адекватности такой модели по ее соответствию экспериментальным данным. Это связано с тем, что поиск адекватности модели основывается на непараметрическом критерии проверки стационарности.

Используя полученную функцию памяти и стационарную последовательность, можно численно имитировать выборку плотностей плазмы, применяя соотношение (1) и метод обратной функции распределения моделирования стационарных последовательностей. В [6] рассматривается пример такой имитации, а в [22, 23] приводится теоретическое обоснование упомянутого метода обратной функции.

Перспективным направлением для дальнейшего применения полученной методологии является анализ временных рядов плотности плазмы термоядерного реактора при разных режимах работы. В частности, эта методология позволяет оценивать уровень нестационарности плазмы в периферийной зоне реактора при этих режимах.

Отметим также, что в [7] построена модель нестационарного шума, которая реализует более общую, чем в настоящей работе, структуру нелокальности по времени, что позволяет расширить спектр исследуемых статистических данных.

Критерий стационарности

В этом разделе мы будем следовать работе [2]. Сразу отметим, что критерий стационарности из [2] основывается на многошаговой оценке спектральной плотности стационарной последовательности (см. ниже (11)) и разложении стационарной последовательности, имеющей спектральную плотность, по белому шуму (см. (15)).

Рассмотрим выборку $x = (x_n, n = 1, \dots, N)$, полученную из случайной последовательности $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ с конечной дисперсией. Построим статистический критерий для проверки основной гипотезы о том, что последовательность $\{x_n\}$ является стационарной против альтернативы, что эта последовательность не является стационарной.

Разобьем целочисленный интервал $(1, \dots, N)$ на L последовательных, непересекающихся интервалов длины $K = \lfloor N/L \rfloor$. Эти интервалы определяют разбиение выборки x на L частей, а именно: $(x_{K(m-1)+1}, \dots, x_{Km})$, $m = 1, \dots, L$. Найдем дискретную вытянутую сфероидальную последовательность оконных функций $w = (w_r, r = 1, \dots, K)$ (см. [24]).

Заметим, что элементы w решают проблему спектральной концентрации. Эта проблема формулируется как задача поиска последовательности определенной длины, для которой ее дискретное преобразование Фурье максимально сосредоточено на заданном частотном интервале (см. [24]).

Для каждого упомянутого выше интервала (в этом случае $m = 1, \dots, L$) и каждой функции w_r из w определим дискретное преобразование Фурье

$$X_m^{w_r}(k) := \frac{1}{\sqrt{K}} \sum_{n=K(m-1)+1}^{Km} w_r(n - K(m-1)) \times \\ \times (x_n - a_*) e^{-i2\pi(k-1)(n-1)/K}, \quad k = 1, \dots, K, \quad (10)$$

где $a_* := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. Используя (10), для каждого $m = 1, \dots, L$ найдем (при условии, что верна основная гипотеза) периодограмму

$$S_x^m(k) := \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R |X_m^{w_r}(k)|^2, \quad k = 1, \dots, K. \quad (11)$$

Оценку (11) называют *многошаговой оценкой* спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (см., например, [25]).

Заметим, что обычно в качестве R выбирают значения 4, 5, 6 или 7. В дальнейшем мы обсудим проблему выбора параметра R в рамках применения критерия стационарности (см. также [25]).

Будем искать оценку спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (при условии, что верна основная гипотеза) в виде

$$S_x(k) := \frac{1}{L} \sum_{m=1}^L S_x^m(k). \quad (12)$$

Определим статистику критерия

$$V(x) := \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^L \left(S_x^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L S_x^p(k) \right)^2. \quad (13)$$

Заметим, что относительно малое значение $V(x)$ будет говорить в пользу принятия основной гипотезы критерия (далее решается вопрос, с какими значениями сравнивать $V(x)$).

Отметим также, что поскольку заранее нет приоритета в выборе величин значений K и L , поэтому всюду в дальнейшем L мы будем полагать равным $L := \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$.

В дальнейшем нам понадобится следующий результат (см., например, [16]).

Предложение 1. Пусть существует преобразование Фурье некоторой функции h

$$H(t) := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i t m} h(m), \quad t \in [0, 1].$$

Пусть, кроме того, $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — центрированная стационарная последовательность со спектральной плотностью $f_\xi(\cdot)$, такая что $\int_0^1 |H(t)|^2 f_\xi(t) dt < +\infty$. Тогда спектральная плотность последовательности

$$\eta_n := \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)\xi_{n-m}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

имеет следующее представление:

$$f_\eta(t) := |H(t)|^2 f_\xi(t), \quad t \in [0, 1]. \quad (14)$$

Далее отметим, что в широких предположениях стационарную последовательность можно представить в виде скользящего среднего, сформированного по некоторой неслучайной квадратично суммируемой последовательности и белому шуму (см. [26]). А именно, пусть $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ — стационарная последовательность случайных величин, для которой существует спектральная плотность, тогда имеет место представление

$$x_n = a + \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)\xi_{n-m}, \quad (15)$$

где $a = \mathbf{E}(x_1)$ и $\{\xi_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность некоррелированных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями (белый шум), $\{h(m), m \in \mathbb{Z}\}$ — неслучайная, квадратично суммируемая последовательность действительных чисел.

Из (14) и (15) следует, что оценку для спектральной плотности последовательности $\{x_n\}$ (при условии, что верна основная гипотеза) можно искать в виде

$$Z_x^m(k) := S_x(k)S_\xi^m(k), \quad m = 1, \dots, L, \quad (16)$$

где $S_\xi^m(k)$ — периодограмма белого шума ($S_\xi^m(k) \approx 1$), построенная по выборке $(\xi_{(m-1)K+1}, \dots, \xi_{mK})$, $m = 1, \dots, L$ (периодограмма строится как в (11)), и $S_x(\cdot)$ определена в (12). Таким образом, мы по реализациям выборки (ξ_1, \dots, ξ_N) , используя (16), будем получать реализации оценки спектральной плотности $\{x_n\}$.

По (16) (действуя как в (13)) определим статистику

$$V(x, \xi) := \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^L \left(Z_x^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L Z_x^p(k) \right)^2. \quad (17)$$

Подставляя (16) в (17), выводим

$$V(x, \xi) = \frac{1}{LK} \sum_{k=1}^K S_x^2(k) \sum_{m=1}^L \left(S_\xi^m(k) - \frac{1}{L} \sum_{p=1}^L S_\xi^p(k) \right)^2. \quad (18)$$

При условии выполнения основной гипотезы мы получаем, что $V(x, \xi)$ формируется по стационарной последовательности, спектральная плотность которой совпадает со спектральной плотностью $\{x_n\}$. Стало быть, значения, реализующие $V(x, \xi)$ и превосходящие $V(x)$, будут говорить в пользу принятия этой гипотезы (см. выше замечание к (13)).

Будем моделировать I независимых выборок белого шума: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$, где каждая выборка состоит из независимых, равномерно распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией (для моделирования в данной работе используется функция `rand` математического пакета Matlab).

Найдем реально достигнутый уровень значимости исследуемого критерия (при основной гипотезе о стационарности исследуемой выборки). Определим множество $\{i : V(x, \xi^{(i)}) \geq V(x)\}$, обозначим число элементов этого множества через I_0 . Отношение I_0 / I определяет (приближенно) реально достигнутый уровень значимости критерия.

Уточним представленные выше процедуры, приводящие к критерию проверки основной гипотезы о стационарности, в следующем методе.

Метод. 1. Разобьем выборку x на L частей, а именно: $(x_{K(m-1)+1}, \dots, x_{Km})$, $m = 1, \dots, L$.

2. Найдем дискретную вытянутую сфероидальную последовательность $w = (w_r, r = 1, \dots, R)$ (поиск такой последовательности реализуется функцией `dpss` математического пакета Matlab). Для каждого $m = 1, \dots, L$ и для каждого элемента последовательности w определим дискретное преобразование Фурье (см. (10)).

3. В соответствии с (11) (используя п. 2) найдем для каждого $m = 1, \dots, L$ периодограмму (можно использовать функцию `periodogram` математического пакета Matlab).

4. Вычисляем статистику критерия $V(x)$ (см. (13)).

5. Смоделируем I независимых выборок белого шума: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$, где каждая выборка состоит из независимых, равномерно распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией. Вычислим $V(x, \xi^{(i)})$, $i = 1, \dots, I$ (в настоящей работе берется значение $I=5000$).

6. Сформируем множество $\{i : V(x, \xi^{(i)}) \geq V(x)\}$, обозначим число элементов этого множества через I_0 . Отношение I_0 / I определяет реально достигнутый уровень значимости критерия.

Проведем исследование полученного статистического критерия на нестационарной альтернативе, сформированной в соответствии с моделью нестационарного шума (1). Заметим, в [2] критерий исследуется на других альтернативах.

По стационарной последовательности $\xi = \{\xi_i, i = 1, 2, \dots\}$ с нулевым средним мы будем формировать нестационарный шум $\rho(\xi, \nu) = \{\rho_k(\xi, \nu), k = 1, 2, \dots\}$

$$\rho_k(\xi, \nu) = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_{k-i} \Delta p_\nu(i), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{19}$$

где $\Delta p_\nu(i) = p_\nu(i+1) - p_\nu(i)$ ($p_\nu(t) = t^\nu$, $0 \leq \nu \leq 1$ ($p_0(0) = 0$)).

Проведем моделирование 10 независимых друг от друга выборок белого шума $\xi^{(i)}$, $i = 1, \dots, 10$, так что каждая выборка состоит из N независимых стандартных нормальных случайных величин: $\xi^{(i)} = (\xi_1^{(i)}, \dots, \xi_N^{(i)})$, где $i = 1, \dots, 10$, $N = 500001$. В соответствии с (19) построим выборки $\rho(\xi^{(i)}, 0.1)$, $i = 1, \dots, 10$.

Для формирования альтернативы мы выбрали достаточно малое значение $\nu = 0.1$. Ниже мы покажем, что для R , равного 6 и 7, критерий обладает высокой чувствительностью к распознаванию нестационарной альтернативы.

В третьей и четвертой строке следующих таблиц приведены реально достигнутые уровни значимостей критерия стационарности на выборках $\xi^{(i)}$ и $\rho(\xi^{(i)}, 0.1)$ (см. (19)) соответственно.

Будем принимать основную гипотезу о стационарности, если реально достигнутый уровень значимости критерия превосходит 0.05.

Таблица 2.

$R = 4$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.128	0.168	0.021	0.221	0.341	0.088	0.515	0.013	0.030	0.430
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.106	0.134	0.002	0.016	0.080	0.016	0.427	0.000	0.008	0.131

В случае $R=4$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 50% случаев (см. последнюю строку таблицы).

Таблица 3.

$R = 5$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.100	0.128	0.014	0.137	0.312	0.034	0.402	0.006	0.016	0.289
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.076	0.108	0.001	0.007	0.069	0.002	0.311	0.000	0.003	0.053

В случае $R=5$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 50 % случаев.

Таблица 4.

$R = 6$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.077	0.095	0.018	0.161	0.172	0.011	0.313	0.002	0.016	0.215
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.08))$	0.067	0.108	0.003	0.026	0.045	0.002	0.242	0.000	0.003	0.101
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.046	0.082	0.001	0.006	0.017	0.001	0.169	0.000	0.002	0.050

В случае $R=6$ (при $\nu = 0.1$) критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 80 % случаев. Заметим, что уже в случае $\nu = 0.08$ чувствительность критерия к распознаванию нестационарной альтернативы уменьшается. В этом случае критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) в 60% случаев.

Таблица 5.

$R = 7$										
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\varepsilon(\xi^{(i)})$	0.051	0.077	0.008	0.072	0.201	0.003	0.310	0.000	0.011	0.154
$\varepsilon(\rho(\xi^{(i)}, 0.1))$	0.021	0.061	0.000	0.002	0.019	0.000	0.153	0.000	0.000	0.024

В случае $R=7$ критерий принимает альтернативу (при условии, что она верна) для 80% случаев.

В дальнейшем мы используем значение $R=6$, поскольку в этом случае имеет место достаточно высокая чувствительность критерия к распознаванию основной гипотезы (см. разд. 4). Более того, в этом случае критерий с высокой частотой отвергает основную гипотезу при условии, что верна альтернатива.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Метод дисперсий

Пусть $(x_k, k = 1, \dots, N)$ — выборка, реализующая стационарную последовательность $\{x_k\}$. Предполагается, что $\text{Var}(\sum_{k=1}^n x_k) \sim \sigma^2 n^{2H}$ при $n \rightarrow +\infty$. Следующий метод позволяет вычислять оценки параметров σ и H (см. [15]).

Метод. 1. Центрируем выборку $(x_k, k = 1, \dots, N)$, т. е. находим $x'_k = x_k - a_*, k = 1, \dots, N$, где $a_* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. В итоге получаем выборку $(x'_k, k = 1, \dots, N)$.

2. Вычисляем $m = \lceil \log_2(N) \rceil$. Для каждого $\tau = 2^L$, где $L = 0, \dots, m - 2$, масштабируем данные: $x_j^{(\tau)} = \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x'_i, j = 1, \dots, 2^{m-L}$.

3. Находим стандартное отклонение: $V_L := \sqrt{\frac{1}{2^{m-L}} \sum_{j=1}^{2^{m-L}} (x_j^{(2^L)})^2}$.

4. Составляем модель линейной регрессии $\ln V_L = HL \ln 2 + b + \varepsilon_L, L = 0, \dots, m - 2$, где $\{\varepsilon_L\}$ — ошибки модели.

5. Методом наименьших квадратов находим оценку H_* параметра H и свободный коэффициент b . Используя b , определяем оценку $\sigma_* = \exp(b)$ параметра σ .

Авторы признательны анонимным рецензентам за содержательные замечания и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аркашов Н.С., Селезнев В.А. О формировании соотношения нелокальностей в модели аномальной диффузии // ТМФ. 2017. Т. 193. 1. С. 115–132.

2. *Basu P., Rudoy D., Wolfe P.J.* A nonparametric test for stationarity based on local Fourier analysis // IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing. 2009. P. 3005–3008.
3. *Будаев В.П., Савин С.П., Зеленый Л.М.* Наблюдения перемежаемости и обобщённого самоподобия в турбулентных пограничных слоях лабораторной магнитосферной плазмы: на пути к определению количественных характеристик переноса // УФН. 2011. Т. 189. 9. С. 905–952.
4. *Metzler R., Klafter J.* The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // Physics Reports. 2000. V. 339. 1. P. 1–77.
5. *Пастухов В.П., Чудин Н.В.* Эффективная модель турбулентной конвекции плазмы центральной области токамака // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90. 10. С. 722–729.
6. *Аркашов Н.С.* Об одном методе вероятностно-статистического анализа плотности низкочастотной турбулентной плазмы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. 3. С. 429–440.
7. *Arkashov N.S.* On the model of random walk with multiple memory structure // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2022. V. 603. P. 127795.
8. *Platani M., Goldberg I., Lamond A.I., and Swedlow J.R.* Cajal Body dynamics and association with chromatin are ATP-dependent // Nature Cell Biology. 2002. V. 4. 7. P. 502–508.
9. *Cherstvy A.G., Chechkin A.V., Metzler R.* Anomalous diffusion and ergodicity breaking in heterogeneous diffusion // New Journal of Physics. 2013. V. 15. 8. P. 083039.
10. *Аркашов Н.С.* Принцип инвариантности в форме Донскера для процессов частных сумм скользящих средних конечного порядка // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т.16. С. 1276–1288.
11. *Колмогоров А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. 2. С. 115–118.
12. *Mandelbrot B., Van Ness J.* Fractional Brownian motions, fractional noise and applications // SIAM Review. 1968. V. 10. 4. P. 422–437.
13. *Samorodnitsky G. and Taqqu M.* Stable Non-Gaussian Random Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
14. *Konstantopoulos T., Sakhanenko A.* Convergence and convergence rate to fractional Brownian motion for weighted random sums // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2004. V. 1. P. 47–63.
15. *Cannon M.J., Percival D.B., Caccia D.C., Raymond G.M., Bassingthwaite J.B.* Evaluating scaled window variance methods for estimating the Hurst coefficient of time series // Physica A. 1997. V. 241. P. 606–626.
16. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.
17. *Олемской А.И., Флат А.Я.* Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. 1993. Т. 163. 12. С. 1–50.
18. *Нигматуллин Р.Р.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90. 3. С. 354–368.
19. *Владимирский В., Терлецкий Я.* Гидродинамическая теория поступательного броуновского движения // ЖЭТФ. 1945. Т. 15. 6. С. 258–263.
20. *Veran J.* Statistics for Long-Memory Processes. New York: Chapman & Hall, 1994.
21. *Королев В.Ю.* Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: ИПИ РАН, 2007.
22. *Пригарин С.М.* Методы численного моделирования случайных процессов и полей. Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2005.
23. *Prigarin S.M., Ogorodnikov V.A.* Numerical Modelling of Random Processes and Fields: Algorithms and Applications. Utrecht: VSP, 1996.
24. *Slepian D.* Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis, and Uncertainty-V: The Discrete Case // Bell System Technical Journal. 1978. V. 57. 5. P. 1371–1430.
25. *Haley C.L., Anitescu M.* Optimal Bandwidth for Multitaper Spectrum Estimation // IEEE Signal Processing Letters. 2017. V. 24. 11. P. 1696–1700.
26. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.

**ON THE PROBABILISTIC-STATISTICAL APPROACH TO THE ANALYSIS
OF NONLOCALITY PARAMETERS OF PLASMA DENSITY****N. S. Arkashov^{a,*}, V. A. Seleznev^{b,**}***^aSobolev Institute of Mathematics,
Ave. Ac. Koptuyuga, 4, Novosibirsk, 630090 Russia**^bNovosibirsk State Technical University,
Karl Marx Avenue, 20, Novosibirsk, 630073 Russia***e-mail: nicky1978@mail.ru****e-mail: selvad46@mail.ru*

Received 20 December, 2022

Revised 18 October, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. A sample of values of plasma density in a thermonuclear facility is studied. A methodology for processing experimental data that makes it possible to establish correspondence between this sample and a model of nonstationary noise is proposed. This model is formed as convolution of a stationary sequence and a memory function, and it makes it possible to simulate the competition between space and time nonlocalities. A physical interpretation of the nonlocality parameters is described.

Keywords: nonlocality in time and space, spectral analysis, time series of physical quantities, plasma density.

УДК 519.63.

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЙЯНИЯ ДЛЯ МОДЕЛИ МАНАКОВА¹⁾

© 2024 г. О.В. Белай^{1,*}, Л.Л. Фрумин^{1,**}, А.Е. Чернявский^{1,***}

¹1630090 Новосибирск, пр-т акад. Коптюга, 1, ИАиЭ СО РАН, Россия

*e-mail: ovbelai@gmail.com

**e-mail: lfrumin@iae.nsk.su

***e-mail: alexander.cher.99@gmail.com

Поступила в редакцию 09.07.2023 г.

Переработанный вариант 07.11.2023 г.

Принята к публикации 20.11.2023 г.

Рассматриваются алгоритмы решения обратных задач рассеяния, основанные на дискретизации интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко, ассоциированных с системой нелинейных уравнений Шрёдингера модели Манакова. Численный алгоритм решения задачи рассеяния, первого порядка точности аппроксимации, сводится к обращению ряда вложенных друг в друга блочно-тёплицевых матриц с помощью метода окаймления типа Левинсона. Повышение точности аппроксимации нарушает тёплицевую структуру блочных матриц. Описаны два алгоритма, решающие эту проблему для второго порядка точности. В одном алгоритме используется блочный вариант алгоритма окаймления Левинсона, восстанавливающий тёплицевую структуру матрицы, путем переноса некоторых слагаемых систем уравнений в правую часть. Другой алгоритм основан на тёплицевом разложении матрицы, близкой к блочно-тёплицевой, и алгоритме окаймления Тыртышниковой. На примере точного решения (векторного солитона Манакова) приводятся результаты сравнения скорости и точности расчетов представленных алгоритмов. Библ. 20. Фиг. 1.

Ключевые слова: модель Манакова, обратная задача рассеяния, солитон, алгоритм, тёплицева матрица.

DOI: 10.31857/S0044466924030091, **EDN:** XGHJFH

1. ВВЕДЕНИЕ

Векторный вариант нелинейного уравнения Шрёдингера, учитывающий одновременно эффекты дисперсии, нелинейности и поляризации оптического излучения, известен как модель Манакова [1]. Эта модель состоит из пары связанных нелинейных уравнений Шрёдингера с дисперсией второго порядка и кубической (керровской) нелинейностью для двух оптических поляризаций. Исследование поляризационных эффектов, осложненных дисперсией и нелинейностью, имеет большое значение для современной нелинейной оптики и оптических технологий. Модель Манакова находит важные применения в нелинейной физической оптике для описания явлений оптического просветления и самофокусировки. В последние годы эта модель особенно востребована для изучения нелинейно-дисперсионных и поляризационных эффектов, возникающих при распространении оптического излучения по волоконным линиям связи [2].

Векторное нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ), называемое моделью Манакова, имеет следующий вид:

$$i \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial x^2} - 2\sigma |\mathbf{q}|^2 \mathbf{q} = 0, \quad (1)$$

где i — мнимая единица, $\mathbf{q}(x,t) = (q_1, q_2)$ — двухкомпонентный вектор решения, содержащий две нормированные поляризационные компоненты поля q_1 и q_2 , x — пространственная координата, t — время. Параметр σ принимает значения $+1$ или -1 , для дефокусирующего и фокусирующего случаев, соответственно. Векторное уравнение Шрёдингера (1) принадлежит к нетривиальному классу интегрируемых нелинейных уравнений, изучаемых методом обратной задачи рассеяния (ОЗР) [3,4]. В рамках

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 22-22-00653).

метода ОЗР решение нелинейного уравнения сводится к исследованию линейных спектральных задач рассеяния (прямых и обратных), ассоциированных с исходным нелинейным уравнением.

Метод ОЗР – выдающееся достижение современной математической физики, позволившее аналитически исследовать целый ряд нелинейных эволюционных волновых уравнений (см. [4]), оказался мощным инструментом решения задачи Коши для этих нелинейных уравнений. Численная реализация метода ОЗР на основе алгоритмов решения обратных задач рассеяния позволяет развивать эффективные алгоритмы решения нелинейной задачи Коши, без каких-либо итераций.

Сущность метода ОЗР состоит в том, что нелинейному эволюционному уравнению ставится в соответствие система линейных уравнений, где в качестве коэффициентов используются решения нелинейного уравнения. Задачи, формулируемые как обратные задачи рассеяния для такой системы, позволяют находить решения нелинейного уравнения, при произвольном значении эволюционного параметра t . В случае модели Манакова эта линейная система называется системой Манакова и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} + i\lambda f_1 &= q_1 f_2 + q_2 f_3, \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - i\lambda f_2 &= \sigma q_1^* f_1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} - i\lambda f_3 = \sigma q_2^* f_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где λ – комплексное собственное значение, (f_1, f_2, f_3) – трехмерный собственный вектор, а символ * означает комплексное сопряжение. В дефокусирующем случае ($\sigma = +1$) – спектр собственных значений системы Манакова содержит только непрерывную компоненту, соответствующую диспергирующим волновым пакетам. В более сложном фокусирующем случае ($\sigma = -1$) к непрерывному спектру добавляется дискретный, соответствующий солитонным решениям модели Манакова. Определение (спектральных) данных рассеяния по заданному решению q представляет собой прямую задачу рассеяния, а нахождение решения по данным рассеяния, при фиксированном эволюционном параметре t , является обратной задачей рассеяния. Для достаточно быстро убывающих на бесконечности решений модели Манакова, эволюция непрерывной и дискретной компонент данных рассеяния сводится к фазовым сдвигам [1,3,4].

Таким образом, решение задачи Коши дается тремя процедурами.

1. По заданному начальному условию, путем решения прямой задачи рассеяния, находятся начальные спектральные данные задачи.
2. Умножение спектральных компонент на их фазовые эволюционные множители дает конечный спектр задачи.
3. Решение обратной задачи рассеяния для полученных спектральных данных дает решение задачи Коши для интегрируемого нелинейного эволюционного уравнения.

Описанная схема решения напоминает применение метода Фурье для решения линейных дифференциальных уравнений и часто называется методом нелинейного преобразования Фурье.

Данная работа посвящена наиболее сложному этапу схемы решения – обратной задаче рассеяния, алгоритмам ее решения для модели Манакова.

Метод ОЗР для нелинейных уравнений с локализованными (убывающими на бесконечности) решениями выводит из системы Манакова систему из девяти линейных интегральных уравнений Гельфанда – Левитана – Марченко (ГЛМУ) [5,6]. Для решения обратной задачи рассеяния достаточно трех интегральных уравнений системы ГЛМУ, которые (для левой задачи рассеяния и случая конечного носителя – $x \in [0, L]$) для системы Манакова запишем в следующем виде [7]:

$$\begin{aligned} u(x, s) + \sigma \int_s^{2x} \sum_{\alpha=1,2} \Omega_\alpha^*(\tau - s) v_\alpha(x, \tau) d\tau &= 0, \\ v_\alpha(x, \tau) + \int_0^\tau \Omega_\alpha(\tau - s) u(x, s) ds &= -\Omega_\alpha(\tau), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\tau < 2x$, Ω_α – ядра интегральных уравнений, $\alpha = 1, 2$. Решение ГЛМУ дает синтезирующее соотношение: $q_\alpha(x) = v_\alpha(x, 2x - 0)$.

Для случая более простого скалярного нелинейного уравнения Шрёдингера, не учитывающего поляризацию, ассоциированного с системой Захарова – Шабата [3], в нашей лаборатории на основе ГЛМУ были разработаны эффективные вычислительные алгоритмы тёплицева внутреннего окаймления (Toeplitz Inner Bordering – ТИВ) [8,9]. Эти алгоритмы основаны на численном решении сеточного дискретного аналога ГЛМУ с помощью алгоритма окаймления типа Левинсона [10]. Их численная эффективность

обусловлена использованием трёхдиагональной симметрии дискретизованных ГЛМУ. В алгоритме решения обратной задачи второго порядка точности используется оригинальный прием – перенос ряда слагаемых, содержащих неизвестные, в правую часть, восстанавливающий трёхдиагональную структуру матрицы. Алгоритмы ТПВ были успешно применены для расчета волоконных брэгговских решеток [11,12] и решения обратных задач для уравнения Гельмгольца [13]. Эти алгоритмы открывают перспективы для разработки новых подходов к передаче информации по оптическим сетям, основанных на интегрируемости НУШ [14,15].

Мы не касаемся здесь более простых прямых задач рассеяния. Основной целью работы является сравнение двух новых блочных алгоритмов, один из которых является дальнейшим развитием скалярного алгоритма ТПВ, а другой основан на трёхдиагональном разложении матрицы и алгоритме окаймления Тыртышниковой [16], для решения обратных задач рассеяния, ассоциированных с моделью Манакова.

Сначала мы рассмотрим алгоритм первого порядка точности аппроксимации интегралов ГЛМ, затем будут детально представлены два алгоритма второго порядка точности, где нарушена трёхдиагональная структура дискретизованной системы уравнений. В заключительной части работы на примере точного аналитического решения – векторного солитона Манакова, представлено сравнение точности и скорости этих двух алгоритмов.

2. АЛГОРИТМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

Опишем сначала общий подход первого порядка точности, основанный на блочной форме дискретизованных ГЛМУ. Введем дискретную вычислительную сетку путем разбиения рабочего интервала на равных частей:

$$h = \frac{2L}{N}, \quad x_m = \frac{hm}{2}, \quad m = 0, \dots, N, \quad s_k = hk, \quad \tau_n = hn, \quad n, k = 0, \dots, m. \quad (4)$$

Здесь h – шаг сетки. Сеточные функции вводятся посредством аппроксимации интегралов в ГЛМУ методом прямоугольников:

$$\Omega_{\alpha, m} = \Omega_{\alpha}(mh), \quad m = 0, \dots, N,$$

$$u_k^{(m)} = u(x_m, kh), \quad v_{\alpha, k}^{(m)} = v_{\alpha}(x_m, kh), \quad k = 0, \dots, m.$$

Дискретизация интегральных ГЛМУ (3) с первым порядком точности приводит к набору вложенных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Так как ядра ГЛМУ (3) зависят от разности аргументов, матрицы СЛАУ состоят из девяти квадратных трёхдиагональных блоков. Несмотря на то, что все эти блоки – трёхдиагональные, матрицы системы, в отличие от скалярного случая, не обладают трёхдиагональной симметрией. Для фиксированной координаты x_m дискретизованные ГЛМУ (3) представляют собой систему линейных уравнений размерности m . При изменении размера системы m от 1 до N получаются системы, вложенные одна в другую, т.е. каждая система является окаймлением системы на единицу меньшей размерности. Для численного решения ОЗР необходимо решить все полученные вложенные системы и взять последние элементы решения: $q_{\alpha, m} = 2v_{\alpha, m}^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots, N$, $\alpha = 1, 2$. Метод исключения Гаусса для N вложенных систем ГЛМУ требует $O(N^4)$ арифметических операций, что может потребовать применения суперкомпьютеров для решения задачи, при реальных размерах задачи в несколько тысяч отсчетов. Однако в случае первого порядка точности матрица $G^{(m)}$ системы дискретизованных ГЛМУ может быть представлена в виде блочной матрицы, имеющей трёхдиагональную симметрию, содержащую блоки – матрицы размером 3×3 . Блочным алгоритмом окаймления типа Левинсона [10] требуется всего $O(N^2)$ операций для решения всех вложенных систем с блочно-трёхдиагональной матрицей. Для решения трёхдиагональных систем разработаны эффективные “супербыстрые” алгоритмы (см. [17]), требующие всего $O(N \log^2 N)$ арифметических операций, не использующие идею окаймления. Однако для решения N вложенных друг в друга блочно-трёхдиагональных СЛАУ алгоритмы окаймления оказываются в итоге более быстрыми, поскольку решают каждую из вложенных систем всего за $O(N)$ арифметических операций.

Запишем систему уравнений 1-го порядка точности в следующем матричном виде:

$$G^{(m)} w^{(m)} = r^{(m)}, \quad (5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$w^{(m)} = \left(w_1^{(m)}, w_2^{(m)}, \dots, w_m^{(m)} \right)^T, w_k^{(m)} = \left(u_k^{(m)}, v_{1,k}^{(m)}, v_{2,k}^{(m)} \right)^T, \quad (6)$$

$$r^{(m)} = \left(r_1^{(m)}, r_2^{(m)}, \dots, r_m^{(m)} \right)^T, r_k^{(m)} = \left(0, -\Omega_{1,k}, -\Omega_{2,k} \right)^T, k = 1, \dots, m. \quad (7)$$

Здесь и далее символ τ обозначает блочное транспонирование: трехкомпонентные вектор-столбцы $w_k^{(m)}, r_k^{(m)}$ переставляются, оставаясь столбцами, квадратные блоки матрицы также переставляются без внутренних изменений.

Блочно-тёплицева матрица $G^{(m)}$ содержит блоки Ψ_0 и $\Psi_n, n = 1, \dots, m - 1$, размером 3×3 , и их эрмитовы сопряжения:

$$G^{(m)} = \begin{pmatrix} \Psi_0 & \sigma\Psi_1^\dagger & \dots & \sigma\Psi_{m-2}^\dagger & \sigma\Psi_{m-1}^\dagger \\ \Psi_1 & \Psi_0 & \dots & \sigma\Psi_{m-3}^\dagger & \sigma\Psi_{m-2}^\dagger \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{m-2} & \Psi_{m-3} & \dots & \Psi_0 & \sigma\Psi_1^\dagger \\ \Psi_{m-1} & \Psi_{m-2} & \dots & \Psi_1 & \Psi_0 \end{pmatrix}, m = 1, \dots, N, \quad (8)$$

где символ \dagger означает эрмитово сопряжение, а также введены следующие обозначения:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma h\Omega_{1,0}^* & \sigma h\Omega_{2,0}^* \\ h\Omega_{1,0} & 1 & 0 \\ h\Omega_{2,0} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h\Omega_{1,k} & 0 & 0 \\ h\Omega_{2,k} & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 1, \dots, m - 1. \quad (10)$$

Далее в этом и следующем разделах будем опускать верхний индекс (m) для всех матриц и векторов. Оставим его только для матрицы системы $G^{(m)}$, вектора решения $w_k^{(m)} = \left(u_k^{(m)}, v_{1,k}^{(m)}, v_{2,k}^{(m)} \right)^T$, верхней $g_1^{(m)}$ и нижней $g_m^{(m)}$ строк обратной матрицы.

Для блочно-тёплицевой матрицы существуют известные алгоритмы обращения, основанные на блочных вариантах алгоритма Левинсона, см. например, [18]. При этом, для обращения тёплицевой матрицы достаточно рекуррентно найти верхнюю $g_1^{(m)}$ и нижнюю $g_m^{(m)}$ блочные строки матрицы, обратной тёплицевой. Эти строки являются основными вспомогательными массивами в алгоритмах окаймления типа Левинсона. Обозначим элементы этих строк на шаге m блочного алгоритма следующим образом:

$$g_1^{(m)} = (X_0, \dots, X_m), g_m^{(m)} = (Y_0, \dots, Y_m). \quad (11)$$

Удобно ввести следующие матрицы, размером 3×3 , для более компактной записи алгоритма: $P = (p_{i,j}), F = (f_{i,j}), \hat{P} = (\hat{p}_{i,j}), \hat{F} = (\hat{f}_{i,j}), i, j = 1, 2, 3$, которые определяются следующими суммами:

$$\begin{aligned} F &= (X_0\Psi_1 + X_1\Psi_2 + \dots + X_{m-1}\Psi_m), \\ \hat{F} &= \sigma(Y_{m-1}\Psi_m^\dagger + Y_{m-2}\Psi_{m-1}^\dagger + \dots + Y_0\Psi_1^\dagger), \\ P &= \sigma(X_0\Psi_m^\dagger + X_1\Psi_{m-1}^\dagger + \dots + X_{m-1}\Psi_1^\dagger), \\ \hat{P} &= (Y_{m-1}\Psi_1 + Y_{m-2}\Psi_2 + \dots + Y_0\Psi_m). \end{aligned} \quad (12)$$

Эти суммы, по существу, составляют основной цикл алгоритма, выполняемый для каждого m от 1 до N . Основным шагом алгоритма окаймления является вычисление первой $g_1^{(m+1)}$ и последней $g_{m+1}^{(m+1)}$ блочных строк обратной матрицы на основе их значений $g_1^{(m)}$, $g_m^{(m)}$ на предыдущем шаге. Алгоритмы типа Левинсона находят новые строки как линейную комбинацию строк предыдущего шага:

$$\begin{aligned} g_1^{(m+1)} &= c \left(g_1^{(m)}, 0 \right) + d \left(0, g_m^{(m)} \right), \\ g_{m+1}^{(m+1)} &= \hat{d} \left(g_1^{(m)}, 0 \right) + \hat{c} \left(0, g_m^{(m)} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где 0 – блок из нулей, размером 3×3 . Умножив первую блочную строку обратной матрицы (13) на первый и последний блочный столбцы матрицы $G^{(m)}$, получим систему уравнений на коэффициенты c, d

$$\begin{aligned} c + d(Y_{m-1}\Psi_1 + \dots + Y_1\Psi_{m-1} + Y_0\Psi_m) &= E, \\ c\sigma(X_0\Psi_m^\dagger + X_1\Psi_{m-1}^\dagger + \dots + X_{m-1}\Psi_1^\dagger) + d &= 0. \end{aligned}$$

Здесь E – единичный блок размером 3×3 . Решение этой системы имеет вид:

$$c = (E - P\hat{P})^{-1}, \quad d = -cP. \quad (14)$$

Проделав то же самое с последней блочной строкой обратной матрицы, получим выражения для \hat{c}, \hat{d} :

$$\hat{c} = (E - \hat{P}P)^{-1}, \quad \hat{d} = -\hat{c}\hat{P}. \quad (15)$$

3. АЛГОРИТМ А ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Второй порядок точности нарушает трёхдиагональную структуру блочной матрицы G системы ГЛМУ, так как формула трапеций приводит к изменению первого и последнего блочных столбцов матрицы (а также блоков ее главной диагонали). Нарушение трёхдиагональной структуры матрицы формально не позволяет использовать для решения блочные алгоритмы окаймления типа Левинсона. Идея решения “испорченной” системы уравнений была предложена в работе авторов [9]. Она опирается на перенос части слагаемых системы, содержащих неизвестные, в правую часть СЛАУ. Убирая из системы уравнение для $w_0^{(m)}$, вновь приходим к системе вложенных матриц размером $m \times m$, $m = 1, \dots, N$. После процедуры переноса ряда слагаемых систем в правую часть СЛАУ, матрицы систем снова становятся трёхдиагональными, как в (8), однако в правой части появляются неизвестные. Сделаем замену $w_0^{(m)} = w_1^{(m)} + O(h)$, можно исключить из системы первое блочное уравнение и вновь прийти, как в (5), к последовательности вложенных систем с блочно-трёхдиагональными матрицами размером $m \times m$, $m = 1, \dots, N$. В результате преобразования диагональные блоки Ψ_0 матрицы системы и вектора-блоки правой части принимают вид:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} 1 & \sigma \frac{h}{2} \Omega_{1,0}^* & \sigma \frac{h}{2} \Omega_{2,0}^* \\ \frac{h}{2} \Omega_{1,0} & 1 & 0 \\ \frac{h}{2} \Omega_{2,0} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$r_k = \begin{pmatrix} \sigma \frac{h}{2} \Omega_{1,m+1-k} v_{1,m}^{(m)} + \sigma \frac{h}{2} \Omega_{2,m+1-k} v_{2,m}^{(m)} \\ -\left(1 + \frac{h}{2} u_1^{(m)}\right) \Omega_{1,k} \\ -\left(1 + \frac{h}{2} u_1^{(m)}\right) \Omega_{2,k} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, N.$$

В правой части системы появились первый $u_1^{(m)}$ и два последних неизвестных элемента решения $v_{1,m}^{(m)}$, $v_{2,m}^{(m)}$, которые, собственно, и требуется найти. Умножив первую и последнюю строки обратной матрицы на правую часть системы ГЛМУ, мы получаем пару уравнений для пары неизвестных – для первого и последнего элементов блочного вектора неизвестных:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(m)} \\ v_{1,1}^{(m)} \\ v_{2,1}^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{F}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + u_1^{(m)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{P}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1,m}^{(m)} \\ v_{2,m}^{(m)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_m^{(m)} \\ v_{1,m}^{(m)} \\ v_{2,m}^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{\hat{P}}{2} \begin{pmatrix} \frac{2}{h} + u_1^{(m)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\hat{F}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ v_{1,m}^{(m)} \\ v_{2,m}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Из шести уравнений этой системы мы выделили более простую подсистему всего из трех уравнений, содержащую компоненты $u_1^{(m)}$, $v_{1,m}^{(m)}$, $v_{2,m}^{(m)}$ вектора решения:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{F_{11}}{2} & -P_{12} & -P_{13} \\ \hat{P}_{21} & 1 - \frac{\hat{F}_{22}}{2} & -\hat{F}_{23} \\ \hat{P}_{31} & -\hat{F}_{32} & 1 - \frac{\hat{F}_{33}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_m^{(m)} \\ v_{1,m}^{(m)} \\ v_{2,m}^{(m)} \end{pmatrix} = -\frac{1}{h} \begin{pmatrix} F_{11} \\ \hat{P}_{21} \\ \hat{P}_{31} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Решение системы (16) находится по формулам Крамера, что практически не влияет на оценку числа арифметических операций, которая составляет $O(N^2)$.

3.1. Схема блочного алгоритма A

Для $m = 1$ вычисляем начальное значение для вспомогательного массива: $g_1^{(1)} = (\Psi_0)^{-1}$. Затем вычисляем элементы матриц P и \hat{P} , размером 3×3 : $\hat{P} = g_1^{(1)} \Psi_1$, $P = \sigma g_1^{(1)} \Psi_1^\dagger$, а также находим матрицы F и \hat{F} : $F = g_1^{(1)} \Psi_1$, $\hat{F} = \sigma g_1^{(1)} \Psi_1^\dagger$ (находим только те элементы матриц, которые используются в алгоритме).

Находим m -ю компоненту вектора решения $q_{1,m} = 2v_{1,m}^{(m)}$, $q_{2,m} = 2v_{2,m}^{(m)}$, используя решение системы (16) (это результат работы алгоритма на каждом шаге).

Вычисляем блочные коэффициенты c, d, \hat{c}, \hat{d} , используя формулы (14) и (15).

Определяем следующие значения вспомогательных массивов, т.е. строк $g_1^{(m+1)}$ и $g_{m+1}^{(m+1)}$, используя (13).

Находим необходимые элементы новых матриц P, F, \hat{P}, \hat{F} , вычислив суммы (12).

Увеличиваем m на единицу и переходим к шагу 2, пока $m < N$.

4. АЛГОРИТМ В ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Алгоритм В также аппроксимирует систему уравнений ГЛМ (3) системой линейных алгебраических уравнений, при помощи введения сеточных функций и замены интегралов конечными суммами. При этом используется та же численная сетка (4). В этом алгоритме второго порядка сеточные функции вводятся посредством аппроксимации интегралов в ГЛМУ методом трапеций, но немного по иному, чем в алгоритме А. Учитывая, что подынтегральные выражения состоят из двух множителей: известных ядер $\Omega_{1,2}$, и вектора неизвестных функций $w = (u, v_1, v_2)^T$, множитель $1/2$ формулы трапеций можно приписывать не элементам матриц, а соответствующим элементам искомым сеточным векторам, которые определены следующим образом:

$$u_m^{(0)} = \frac{1}{2}u(x_m, 0), m = 0, \dots, N, u_k^{(m)} = u(x_m, kh), k = 0, \dots, m,$$

$$v_{\alpha,k}^{(m)} = v(x_m, kh), k = 0, \dots, m - 1, v_{\alpha,m}^{(m)} = \frac{1}{2}v_{\alpha}(x_m, 0), m = 0, \dots, N, \alpha = 1, 2.$$

Такой выбор сеточных функций приводит к системе вложенных друг в друга СЛАО. Каждая из этих систем имеет сравнительно простую структуру матрицы. Перестановкой строк и столбцов эту матрицу можно преобразовать к матрице, близкой к блочно-тёплицевой, состоящей из $(m + 1) \times (m + 1)$ блоков размерности 3×3 :

$$G^{(m)} = \begin{pmatrix} A & \sigma\Psi_1 & \dots & \sigma\Psi_{m-1} & \sigma\Psi_m \\ \Psi_1 & \Psi_0 & \dots & \sigma\Psi_{m-2} & \sigma\Psi_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \Psi_{m-1} & \Psi_{m-2} & \dots & \Psi_0 & \sigma\Psi_1 \\ \Psi_m & \Psi_{m-1} & \dots & \Psi_1 & B \end{pmatrix}, m = 1, \dots, N,$$

где по-прежнему обозначено

$$\Psi_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ h\Omega_{1,k} & 0 & 0 \\ h\Omega_{2,k} & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = 0, \dots, N.$$

Тёплицеву структуру блочной матрицы $G^{(m)}$ нарушают лишь левый верхний A и правый нижний B блоки, которые имеют следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \sigma \frac{h}{2} \Omega_{1,0}^* & \sigma \frac{h}{2} \Omega_{2,0}^* \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} \Omega_{1,0} & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} \Omega_{2,0} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система уравнений по-прежнему имеет вид (5), но теперь включает и уравнение для индекса 0. Искомый вектор $w^{(m)}$ и вектор правой части $r^{(m)}$ имеют вид

$$w^{(m)} = \left(w_0^{(m)}, \dots, w_m^{(m)} \right)^T, w_k^{(m)} = \left(u_k^{(m)}, v_{1,k}^{(m)}, v_{2,k}^{(m)} \right)^T,$$

$$r^{(m)} = \left(r_0^{(m)}, \dots, r_m^{(m)} \right)^T, r_k^{(m)} = \left(0, -\Omega_{1,k}, -\Omega_{1,k} \right)^T, k = 1, \dots, m.$$

При $m = 0, 1$ решение записывается в виде:

$$\begin{aligned}
 u_0^{(0)} &= 0, v_{1,0}^{(0)} = -\Omega_{1;0}, v_{2,0}^{(0)} = -\Omega_{2;0}, \\
 u_0^{(1)} &= \frac{-h(\Omega_{1;0}^2 + \Omega_{2;0}^2 + \Omega_{1;1}^2 + \Omega_{2;1}^2)}{4 + h^2(\Omega_{1;1}^2 + \Omega_{2;1}^2)}, u_1^{(1)} = 0, \\
 v_{1,0}^{(1)} &= -\Omega_{1;0}, v_{1,1}^{(1)} = -\Omega_{1;1} [1 + hu_0^{(1)}], \\
 v_{2,0}^{(1)} &= -\Omega_{2;0}, v_{2,1}^{(1)} = -\Omega_{2;1} [1 + hu_0^{(1)}].
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Как было предложено в работе [19], матрицу СЛАУ размерности $(m + 1) \times (m + 1)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 G^{(m)} &= \begin{pmatrix} E & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Psi_0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ \Psi_m & \dots & \Psi_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Psi_0 & \dots & \Psi_m \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \Psi_0 \end{pmatrix} + \\
 &+ \begin{pmatrix} E_0 - \Psi_0 & & \\ & 0 & \\ & & E - E_0 + \Psi_0 \end{pmatrix}, E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

4.1. Алгоритм Тыртышникова обращения матриц, близких к тёплицевым

Применительно к матрицам, близким к тёплицевым, Тыртышников [16] разработал общий алгоритм обращения, основанный на тёплицевом разложении – представлении такой матрицы в виде суммы парных произведений левых и правых треугольных тёплицевых матриц [20]. Напомним, что тёплицево разложение не единственно и может иметь разное число слагаемых (длину разложения). Наименьшая возможная для данной матрицы длина называется тёплицевым рангом матрицы. Этот ранг не превышает двух для тёплицевой матрицы, а для произвольной матрицы может достигать ее размерности. Нахождение тёплицева разложения является в общем случае нетривиальной задачей, но если оно найдено, решение СЛАУ может быть получено по рекуррентным формулам, основанным на методе окаймления. Алгоритм не требует коммутативности операции умножения, что позволяет обобщить его на блочные матрицы. Алгоритм В, предложенный в работе [16], содержит $O((2.5 N_t N_b + 1) N_b^2 N^2)$ арифметических операций, где N_t – длина тёплицева разложения, N_b – размер блока (в нашем случае $N_b = 3$).

В работе [19] алгоритм Тыртышникова был применен для решения дискретизованной задачи рассеяния с семейством матриц (18). Тёплицево разложение для первых трех слагаемых очевидно, так как они являются тёплицевыми треугольными. Четвертое слагаемое – матрица, содержащая всего два ненулевых элемента, порождает еще три члена тёплицева разложения:

$$\begin{aligned}
 G^{(m)} &= \sum_{s=1}^6 \widehat{L}[\phi_s^{(m)}] \widehat{L}^T[\Psi_s^{(m)}], \quad m = 2, \dots, N, \\
 z &= \underbrace{0, \dots, 0}_m, \quad \widehat{z} = \underbrace{0, \dots, 0}_{m-1}, \\
 \phi_1^{(m)} &= \Psi_1^{(m)} = \Psi_2^{(m)} = \phi_3^{(m)} = \psi_4^{(m)} = (E, z)^T, \\
 \phi_2 &= (\Psi_0, \dots, \Psi_m)^T, \quad \psi_3 = -(\Psi_0^\dagger, \dots, \Psi_m^\dagger)^T, \\
 \phi_4 &= (E_0 - \Psi_0, z)^T, \quad \phi_5 = (0, -E_0 + \Psi_0, \widehat{z})^T, \quad \psi_5 = (0, E, \widehat{z})^T, \\
 \phi_6 &= (z, E - E_0 - \sigma \Psi_0^\dagger)^T, \quad \psi_6 = (z, E)^T.
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Здесь $\widehat{L}[\phi_s^{(m)}]$ обозначает левую треугольную блочно-тёплицеву матрицу размерности $(m + 1) \times (m + 1)$, составленную из элементов вектора $\phi_s^{(m)}$ по правилу: первый столбец матрицы совпадает с $\phi_s^{(m)}$, второй столбец – с $\phi_s^{(m)}$, сдвинутым вниз на один элемент, третий столбец – на два элемента и т.д. Освободившиеся места сверху заполняются нулями.

Алгоритм обращения матрицы [16] основан на методе окаймления. Он последовательно решает усеченные подсистемы, в которых матрицы являются ведущими подматрицами исходной матрицы СЛАУ, а вектор правой части состоит из соответствующего числа первых элементов исходного. При решении обратной задачи рассеяния с первым порядком аппроксимации последовательность систем уравнений при различных значениях параметра x совпадает с последовательностью вложенных подсистем алгоритма обращения тёплицевой матрицы. Таким образом, обратная задача рассеяния сводится к однократному обращению матрицы, при $x = L$, методом окаймления. В случае второго порядка аппроксимации, как уже отмечалось, тёплицева структура матриц нарушается. Как видно из (19), все векторы $\phi_s^{(m)}$, $\psi_s^{(m)}$, за исключением $\phi_6^{(m)}, \psi_6^{(m)}$ могут быть получены окаймлением $\phi_s^{(m-1)}$, $\psi_s^{(m-1)}$, начиная с $m = 2$. Алгоритм окаймления второго порядка точности (алгоритм В) для решения этой проблемы рассматривает вспомогательную задачу, которая отличается от исходной тем, что в тёплицевом разложении (19) $\phi_6^{(m)}, \psi_6^{(m)} = 0$. Тогда вспомогательная задача на шаге m будет окаймлением вспомогательной задачи на шаге $m - 1$: $\phi_s^{(m)} = (\phi_s^{(m-1)}, 0)^T$, $\psi_s^{(m)} = (\psi_s^{(m-1)}, 0)^T$. Исходная задача на шаге m также будет окаймлением вспомогательной задачи на шаге $m - 1$, но другого вида: $\phi_s^{(m)} = (\phi_s^{(m-1)}, 0)^T$, $\psi_s^{(m)} = (\psi_s^{(m-1)}, 0)^T$, $s \neq 6$, $\bar{\phi}_6^{(m)} = (\phi_6^{(m-1)}, E - E_0 - \sigma\Psi_0)^T$, $\bar{\psi}_6^{(m)} = (\psi_6^{(m-1)}, E)^T$. Вспомогательная и исходная задачи должны решаться совместно, что приводит к небольшому объёму дополнительных вычислений, не меняя асимптотической оценки числа операций. Основные шаги (схема) алгоритма приведены ниже.

4.2. Схема блочного алгоритма В

1. Решение при $m = 0,1$ дается формулами (17).

2. При $m = 2$ требуется инициализация процесса, поскольку матрица для $m = 2$ не является окаймлением матриц для $m = 0,1$:

$$\begin{aligned}
 y_0^{(0)} &= E, p_0 = G_{00}^{-1} = E - \frac{1}{2}(E_0 + \sigma\Psi_0), \\
 w_0^{(0)} &= p_0 r_0, \zeta_{s;0}^{(0)} = p_0 \phi_{s;0}, s = 1, \dots, 6, \\
 \mu_{s;1} &= \phi_{s;1} - \Psi_1 \zeta_{s;0}^{(0)}, v_{s;1} = \psi_{s;1}, s = 1, \dots, 6, \\
 p_1 &= p_0 \left(E + \sum_{s=1}^5 \mu_{s;1} v_{s;1} p_0 \right)^{-1}, y^{(1)} = \downarrow y^{(0)} - \sum_{s=1}^6 \uparrow \zeta_s^{(0)} v_{s;1}, \\
 \zeta_s^{(1)} &= \uparrow \zeta_s^{(0)} + y^{(1)} p_1 \mu_{s;1}, s = 1, \dots, 6, \\
 w^{(1)} &= \uparrow w^{(0)} + y^{(1)} p_1 \mu_{s;1}.
 \end{aligned}$$

3. Завершение вычислений при $m = 2$, а также все последующие шаги при $m = 3, \dots, N$ определяются общими формулами:

$$\begin{aligned}
 \mu_{s;m} &= \phi_{s;m} - \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_{m-k} \zeta_{s;k}^{(m-1)}, s = 1, \dots, 5, \\
 \mu_{6;m} &= - \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_{m-k} \zeta_{6;k}^{(m-1)}, \bar{\mu}_{6;m} = \mu_{6;m} + E - E_0 + \sigma\Psi_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{3;m} &= \sigma \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_{k+1}^+ y_k^{(m-1)}, v_{5;m} = y_0^{(m-1)}, v_{s;m} = 0, \quad s \neq 3,5, \\
 p_m &= p_{m-1} \left(E + \sum_{s=1}^5 \mu_{s;m} v_{s;m} p_{m-1} \right)^{-1}, \\
 \bar{p}_m &= p_{m-1} \left[E + \left(\sum_{s=1}^5 \mu_{s;m} v_{s;m} + \bar{\mu}_{6;m} y_{m-1}^{(m-1)} \right) p_{m-1} \right]^{-1}, \\
 y^{(m)} &= \downarrow y^{(m-1)} - \sum_{s=1}^5 \uparrow \zeta_s^{(m-1)} v_{s;m}, \bar{y}^{(m)} = y^{(m)} - \uparrow \zeta_6^{(m-1)} y_{m-1}^{(m-1)}, \\
 \zeta_s^{(m)} &= \uparrow \zeta_s^{(m-1)} + y^{(m)} p_m \mu_{s;m}, \quad s = 1, \dots, 6, \\
 w^{(m)} &= \uparrow w^{(m-1)} + y^{(m)} p_m \left[r_m - \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_{m-k} w_k^{(m-1)} \right], \\
 \bar{w}^{(m)} &= \uparrow w^{(m-1)} + \bar{y}^{(m)} \bar{p}_m \left[r_m - \sum_{k=0}^{m-1} \Psi_{m-k} w_k^{(m-1)} \right].
 \end{aligned}$$

Здесь все величины представляют собой блоки 3×3 , или вектор столбцы, состоящие из таких блоков, за исключением \bar{w}, w, r , которые состоят из блоков размером 3×1 . Стрелка вниз означает сдвиг элементов вектора вниз с добавлением нулевого блока в качестве первого элемента, стрелка вверх – аналогичный сдвиг в противоположном направлении, длина вектора при этом увеличивается на единицу. Вектор $\bar{w}^{(m)}$ дает решение обратной задачи рассеяния для точки $x = mh$.

5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Для проверки алгоритма использовалось точное аналитическое решение модели Манакова – векторный солитон Манакова. Солитон, как решение уравнений ГЛМ, для комплексного собственного значения дискретного спектра $\lambda = \xi + i\eta$, имеет следующий вид [1,7]:

$$\begin{aligned}
 q_1(x) &= -2\eta e^{-i(\theta_1 + 2x\xi)} \operatorname{sech}(2\eta(x - x_0)) \sin(\phi), \\
 q_2(x) &= -2\eta e^{-i(\theta_2 + 2x\xi)} \operatorname{sech}(2\eta(x - x_0)) \cos(\phi),
 \end{aligned}$$

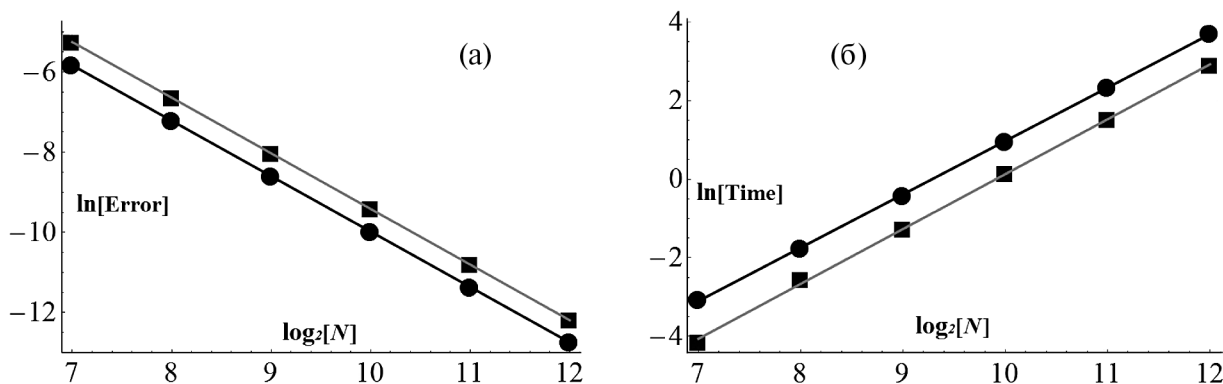
где x_0 задает положение центра солитона, $\theta_{1,2}$ – фазы компонент солитона, ϕ – угол поляризации. Солитон Манакова является решением ГЛМУ для следующего ядра:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1(x) &= 2\eta e^{2\eta(x-x_0) - i(\theta_1 + 2x\xi)} \sin(\phi), \\
 \Omega_2(x) &= 2\eta e^{2\eta(x-x_0) - i(\theta_2 + 2x\xi)} \cos(\phi).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Обратная задача восстановления солитона Манакова по ядру ГЛМ решалась на интервале $x \in [0, 20]$ при следующем наборе параметров солитона: $\xi = 0.01, \eta = 0.5, x_0 = 2.5, \theta_1 = -\frac{\pi}{4}, \theta_2 = -\frac{5\pi}{4}, \phi = \frac{\pi}{6}$.

Численное моделирование для алгоритмов А и В показало, что увеличение вдвое размера сетки N уменьшает ошибку расчета в 4 раза, что подтверждает второй порядок точности расчетов, при этом время расчета увеличивается в 4 раза, что означает квадратичную зависимость числа арифметических операций алгоритмов от размера задачи N .

Результаты численного моделирования представлены на фиг.1.



Фиг. 1. а – график зависимости ошибки восстановления векторного солитона; б – график зависимости времени расчета восстановления векторного солитона. Квадратами показаны расчетные значения для алгоритма А, кружками – для алгоритма В.

На фиг.1а показана зависимость натурального логарифма ошибки восстановления векторного солитона Манакова от количества точек расчета в логарифмическом (по основанию 2) масштабе. Прямые линии соответствуют подгонке функций $\frac{C_{err}}{N^2}$. Совпадение расчета с подгонкой подтверждает второй порядок точности обоих алгоритмов. При этом алгоритм В оказался примерно 1.8 раза точнее алгоритма А, при прочих равных условиях. Однако алгоритм А решает обратную задачу рассеяния почти в 2.2 раза быстрее алгоритма В. В подтверждение этого на фиг. 1б представлена зависимость натурального логарифма времени расчета (в секундах) обратной задачи рассеяния в зависимости от двоичного логарифма числа расчетных точек. Сплошными линиями показана подгонка функцией $C_t \times N^2$. Расчеты проводились на компьютере под управлением ОС Windows 7, 64 бит, с процессором Intel Core i7 Q720.

Для трансляции программы использовался Фортран: GNU Fortran (Rev1, Built by MSYS2 project) 12.2.0, с системными библиотеками MINGW, 64 бит.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены два численных алгоритма решения обратной задачи рассеяния для модели Манакова векторного нелинейного уравнения Шрёдингера. Оба алгоритма опираются на блочные варианты дискретизованных интегральных уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко. Решение задачи для первого порядка точности аппроксимации сводится к обращению ряда вложенных друг в друга блочных тёплицевых матриц блочным вариантом метода окаймления Левинсона. Повышение точности аппроксимации нарушает тёплицевую структуру блочных матриц. Проблема построения алгоритма повышенного (второго) порядка точности по-разному решена в представленных алгоритмах. Алгоритм А использует восстановление тёплицевой структуры матриц системы, путем переноса ряда слагаемых СЛАУ в правую часть. Затем в алгоритме А используется блочный вариант алгоритма окаймления Левинсона. В алгоритме В применяется тёплицево разложение для блочной матрицы, близкой к тёплицевой и алгоритм окаймления Тыртышниковца.

Представленные алгоритмы соответствуют расчетному интервалу координат $[0, L]$. Однако оба алгоритма инвариантны относительно выбора рабочего интервала и начала координат, как и большинство уравнений и алгоритмов математической физики. При изменении интервала меняется только расчетная сетка, но сам алгоритм не меняется. Численные тесты, проведенные путем сравнения результатов расчетов с известными точными аналитическими решениями (векторный солитон Манакова, секанс-потенциал), подтвердили устойчивость и второй порядок точности предложенных алгоритмов.

На примере векторного солитона Манакова приводятся результаты сравнения скорости и точности расчетов представленных алгоритмов. Алгоритм В оказался 1.8 раза точнее алгоритма А, при этом алгоритм А решает обратную задачу рассеяния почти в 2.2 раза быстрее алгоритма В. Алгоритм А значительно проще для кодирования, чем алгоритм В, однако алгоритм В имеет перспективы дальнейшего обобщения на еще более высокие порядки точности аппроксимации интегральных уравнений ГЛМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С.В.* К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн // Ж. эксперим. и теор. физ. 1973. Т. 65. № 2. С. 505.
2. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1995. 848 с.
3. *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Ж. эксперим. и теор. физ. 1971. Т. 61. С. 118.
4. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи, М.: Наука, 1980. 319 с.
5. *Maimistov A.I., Basharov A.M., Elyutin S.O., Sklyarov Y.M.* Present state of self-induced transparency theory // Phys. Reports. 1990. V. 191. No. 1. P. 1.
6. *Maimistov A.I., Basharov A.M.* Nonlinear optical waves. Dordrecht, Springer Science and Business Media, 2013.
7. *Frumin L.L.* Algorithms for solving scattering problems for the Manakov model of nonlinear Schrödinger equations // J. of Inv. and Ill-posed Probl. 2021. V. 29. No. 2. P. 369.
8. *Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.* Efficient numerical method of the fiber Bragg grating synthesis // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. V. 24. No. 7. P. 1451.
9. *Frumin L.L., Belai O.V., Podivilov E.V., Shapiro D.A.* Efficient numerical method for solving the direct Zakharov-Shabat scattering problem // J. Opt. Soc. Am. B. 2015. V. 32. P. 290.
10. *Блэйхут Р.* Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
11. *Buryak A., Bland-Hawthorn J., Steblina V.* Comparison of Inverse Scattering Algorithms for Designing Ultrabroadband Fibre Bragg Gratings // Optics Express 2009. V. 17. No. 3. P. 1995.
12. *Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.* Inverse scattering problem for gratings with deep modulation // Laser Physics. 2010. V. 20. N 2. P. 318.
13. *Belai O.V., Frumin L.L., Podivilov E.V., Shapiro D.A.* Inverse scattering for the one-dimensional Helmholtz equation: fast numerical method // Optics Letters. 2008. V. 33. No. 18. P. 2101.
14. *Frumin L.L., Gelash A.A., Turitsyn S.K.* New Approaches to Coding Information using Inverse Scattering Transform // Phys. Rev. Letters. 2017. V. 118. No. 22. P. 223901.
15. *Turitsyn S.K., Prilepsky J.E., Le S.T., Wahls S., Frumin L.L., Kamalian M., Derevyanko S.A.* Nonlinear Fourier transform for optical data processing and transmission: advances and perspectives // Optica. 2017. V. 4. No 3. P. 307.
16. *Тыртышников Е.Е.* Тёплые матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М.: Изд. АН СССР, 1989. 310 с.
17. *Тыртышников Е.Е.* Новые быстрые алгоритмы для систем с ганкелевой и тёплицевой матрицами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 5. С. 645.
18. *Akaike H.* Block Toeplitz matrix inversion // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 24. No 2. P. 234.
19. *Белай О.В.* Быстрый численный метод второго порядка точности решения обратной задачи рассеяния // Квант. Электроника. 2022. Т. 52. № 11. С. 1039.
20. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Вычислительные процессы с тёплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987. 320 с.

ALGORITHMS FOR SOLVING THE INVERSE SCATTERING PROBLEM FOR THE MANAKOV MODEL

O. V. Belai^{a,*}, L. L. Frumin^{a,**}, A. E. Chernyavsky^{a,***}

*^aInstitute of Automation and Electrometry, Siberian Branch, RAS,
Acad. Koptyug Ave. 1, Novosibirsk, 630090 Russia*

**e-mail: ovbelai@gmail.com*

***e-mail: lfrumin@iae.nsk.su*

****e-mail: alexander.cher.99@gmail.com*

Received 09 July, 2023

Revised 07 November, 2023

Accepted 20 November, 2023

Abstract. The paper considers algorithms for solving inverse scattering problems based on the discretization of the Gelfand–Levitan–Marchenko integral equations, associated with the system of nonlinear Schrödinger equations of the Manakov model. The numerical algorithm of the first order approximation for solving the scattering problem is reduced to the inversion of a series of nested block Toeplitz matrices using the Levinson-type bordering method. Increasing the approximation accuracy violates the Toeplitz structure of block matrices. Two algorithms are described that solve this problem for second order accuracy. One algorithm uses a block version of the Levinson bordering algorithm, which recovers the Toeplitz structure of the matrix by moving some terms of the systems of equations to the right-hand side. Another algorithm is based on the Toeplitz decomposition of an almost block-Toeplitz matrix and the Tyrtshnikov bordering algorithm. The speed and accuracy of calculations using the presented algorithms are compared on an exact solution (the Manakov vector soliton).

Keywords: Manakov model, inverse scattering problem, soliton, algorithm, Toeplitz matrix.

УДК 519.63

РАСЧЕТ ВОЗМУЩЕНИЯ СЛОЯ ПЛАЗМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

© 2024 г. Н. М. Гордеева^{1,2,*}

¹119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

²107005 Москва, ул. Бауманская, 5, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия

*e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru

Поступила в редакцию 11.07.2023 г.

Переработанный вариант 15.08.2023 г.

Принята к публикации 06.09.2023 г.

Представлены результаты решения краевой задачи для системы двух интегродифференциальных уравнений, моделирующей воздействие внешнего электрического поля на слой плазмы. Такая система является следствием уравнений Больцмана–Максвелла, а искомые функции имеют физический смысл напряженности самосогласованного электрического поля и возмущения плотности распределения электронов. При построении решения задачи использованы теория преобразования Фурье обобщенных функций и теория сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Исследована зависимость полученного решения от частоты внешнего поля. Библиография: 20. Фиг. 17.

Ключевые слова: уравнения Больцмана–Максвелла, возмущение плазмы, системы интегродифференциальных уравнений, сингулярные интегралы с ядром Коши.

DOI: 10.31857/S0044466924030102, EDN: XFZQQV

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение аналитических решений для задач плазмодинамики вызывает существенный интерес у специалистов, см., например, [1]–[3]. Настоящая работа посвящена численной реализации аналитического решения [4], [5] задачи об отклике слоя плазмы на возмущение внешним электрическим полем; о таких задачах см. [6]–[10].

Предполагается, что на слой плазмы действует электрическое поле постоянной частоты и малой амплитуды. Вектор электрической напряженности этого поля направлен перпендикулярно границе слоя. В результате в плазме возникают колебания заряженных частиц. Движением ионов будем пренебрегать (см. [8]), рассматривая только электроны. Состояние плазмы будет характеризоваться плотностью электронов и напряженностью самосогласованного поля. Приведем подробный вывод поставленной задачи, заимствуя общую схему рассуждений из работ [4] и [10].

Рассматривается бесконечный слой плазмы ширины $2L$, занимающий область $\{(x, y, z) : x \in (-L, L), y, z \in \mathbb{R}\}$. В невозмущенном состоянии распределение электронов описывается функцией Максвелла:

$$f_0(\mathbf{v}) = n_0 \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T}, \quad (1)$$

в которой $n_0 = \text{const}$ – концентрация заряженных частиц при отсутствии внешнего электрического поля, m – масса электрона, k_B – постоянная Больцмана, T – температура плазмы, которая считается постоянной в данной задаче.

В результате внешнего воздействия в слое плазмы возникает самосогласованное поле, описываемое векторами \mathbf{E} и \mathbf{B} , а распределение электронов – функцией $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Состояние плазмы характеризуется системой Больцмана–Максвелла

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{H}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = I_{st}, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = e \int_{\mathbb{R}^3} (f - f_0) d^3v, \quad (3)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = m\mathbf{H}, \quad (5)$$

где $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – искомая функция распределения электронов, ρ – плотность заряда, e – заряд электрона, \mathbf{v} и \mathbf{p} – скорость и импульс электрона, m – магнитная проницаемость.

В случае слабого воздействия интеграл столкновений в правой части уравнения (2) можно записать в приближении Бхатнагара–Гросса–Крука [11], [12]:

$$I_{st} = \nu(f_{eq} - f), \quad (6)$$

где параметр ν – частота столкновений электронов в плазме (эффективная частота рассеяния электронов), $f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ – локально равновесная функция распределения, определяемая формулой

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n_{eq}(\mathbf{r}, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}, \quad \beta = \frac{m}{2k_B T}, \quad (7)$$

в которой $n_{eq}(\mathbf{r}, t)$ – концентрация заряженных частиц:

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (8)$$

Учитывая условия задачи, вектор напряженности внешнего поля имеет только одну ненулевую координату:

$$\mathbf{E}_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E_{\text{ext}}, 0, 0),$$

тогда согласно [13], функция распределения будет зависеть только от одной пространственной переменной и будет иметь вид $f(x, \mathbf{v}, t)$. Согласно [6], [8], электрическая и магнитная напряженности самосогласованного поля в плазме допускают представления:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (E(x), 0, 0), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} (H_x, H_y, H_z),$$

которые после подстановки в уравнения (4), (5) дают результат

$$\mathbf{H} = -\frac{ic}{\omega m} \text{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Таким образом, магнитное поле не присутствует в уравнении (2), и система (2), (3) содержит только две неизвестных функции: функцию распределения $f(x, \mathbf{v}, t)$ и электрическую напряженность самосогласованного поля $E(x, t) = E(x)e^{-i\omega t}$.

Учитывая (6)–(9), уравнения (2), (3) преобразуются к виду (см. [10], [13]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + v_x \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial x} + eE(x, t) \frac{\partial f(x, \mathbf{v}, t)}{\partial p_x} = \\ = \nu(f_{eq}(x, \mathbf{v}, t) - f(x, \mathbf{v}, t)), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{dE(x, t)}{dx} = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} (f(x, \mathbf{v}, t) - f_0(v)) d^3v. \quad (11)$$

Здесь v – модуль скорости, т.е. $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Таким образом, в результате сделанных предположений поставленная задача свелась к одномерной. Пользуясь условием малости амплитуды внешнего поля, будем решать ее в линейном приближении. Ниже продемонстрируем вывод линеаризованной системы.

При воздействии слабого электрического поля на среду заряженных частиц концентрация электронов перестает быть константой и меняется с изменением координаты. Будем считать, что справедливо следующее представление:

$$n_{eq}(\mathbf{r}, t) = n_{eq}(x, t) = n_0 + n_1(x)e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

где ω – частота внешнего поля, а возмущение концентрации $n_1(x)e^{-i\omega t}$ мало по сравнению с величиной n_0 , т.е.

$$\max_{x \in (-L, L)} |n_1(x)| \ll n_0.$$

Локально-равновесная функция распределения запишется в виде

$$f_{eq}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{eq}(x, v, t) = n_{eq}(x, t) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2} =$$

$$= (n_0 + n_1(x) e^{-i\omega t}) \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2} = f_0(v) + f_1(x, v, t),$$
(13)

где

$$f_1(x, v, t) = n_1(x) e^{-i\omega t} \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta v^2}.$$
(14)

Функцию распределения электронов $f(x, v, t)$ будем искать в виде:

$$f(x, v, t) = f_0(v)(1 + h(x, v_x) e^{-i\omega t}),$$
(15)

предполагая, что $h(x, v_x)$ – неизвестная функция, причем достаточно малая, т.е. $|h(x, v_x)| \ll 1$. Заметим, что в линейном приближении

$$\epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon \mathbf{E} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} =$$

$$= \epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{m \partial v_x} = -\epsilon E(x) e^{-i\omega t} \frac{v_x f_0}{k_B T}.$$
(16)

Учитывая эти равенства и подставив в уравнения (10) и (11) выражения (13)–(16) для $f(x, v, t)$ и $f_{eq}(x, v, t)$, получаем уравнения

$$v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (v - i\omega) h(x, v_x) =$$

$$= \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + v \frac{n_1(x)}{n_0},$$
(17)

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi\epsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x.$$
(18)

Используя представления (8) и (12) для $n_{eq}(x, t)$ и учитывая закон сохранения числа частиц, получаем:

$$\int_{\mathbb{R}} f_{eq} d^3v = \int_{\mathbb{R}} f d^3v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_{eq}(x, t) = n_0 + e^{-i\omega t} \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n_1(x) = \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x.$$
(19)

Подставим результаты (19) в (17) и получим два уравнения относительно двух неизвестных функций $E(x)$ и $h(x, v_x)$:

$$v_x \frac{\partial h(x, v_x)}{\partial x} + (v - i\omega) h(x, v_x) = \frac{\epsilon v_x}{k_B T} E(x) + v \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x,$$
(20)

$$\frac{dE(x)}{dx} = 4\pi\epsilon \sqrt{\frac{m}{2\pi k_B T}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta v_x^2} h(x, v_x) dv_x.$$
(21)

Используя формулу для плазменной частоты

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi\epsilon^2 n_0}{m},$$

можно преобразовать коэффициент перед интегралом в уравнении (21):

$$4\pi\epsilon = \frac{4\pi e^2 n_0 m}{m\epsilon n_0} = \frac{\omega_p^2 m}{\epsilon n_0}.$$

Далее перейдем к безразмерным переменным v' и x' , используя скорость теплового движения частиц v_T и длину свободного пробега частиц между столкновениями x_0 :

$$x_0 = \frac{v_T}{\nu}, \quad v_T = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}, \quad v' = \frac{v_x}{v_T}, \quad x' = \frac{x}{x_0}.$$

Напряженность внешнего электрического поля на границе слоя равна E_{ext} . Введем следующие безразмерные функции:

$$G(x) = \frac{E(x)}{E_{\text{ext}}}, \quad H(x', v') = \frac{kT\nu}{eE_{\text{ext}}v_T} h(x', v').$$

Подставив новые переменные и новые функции в уравнения (20), (21) и отказавшись от индексов у переменных, получаем систему уравнений:

$$\nu H_x(x, \nu) + (1 - \frac{i\omega}{\nu})H(x, \nu) = \nu G(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi, \quad (22)$$

$$G'(x) = \frac{2\omega_p^2}{\nu^2} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi. \quad (23)$$

Функция

$$k(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (24)$$

обладает свойством $\int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)d\xi = 1$, а коэффициенты в уравнениях (22) и (23) соответственно $1 - i\omega / \nu$ и $2\omega_p^2 / \nu^2$ зависят от свойств плазмы и частоты внешнего поля.

В случае зеркального отражения электронов от границы плазмы для функции распределения электронов имеем следующие граничные условия на границе слоя размера $2L$:

$$f(\pm L, \nu, t) = f(\pm L, -\nu, t),$$

что равносильно условию:

$$h(\pm L, \nu_x) = h(\pm L, -\nu_x), \quad -\infty < \nu_x < +\infty.$$

Для электрического поля граничное условие имеет вид:

$$E(L) = E_{\text{ext}}, \quad E(-L) = E_{\text{ext}}.$$

Отсюда для функций $H(x, \nu)$ и $G(x)$ получаем следующие граничные условия:

$$H(l, \nu) = H(l, -\nu), \quad H(-l, \nu) = H(-l, -\nu), \quad (25)$$

$$G(l) = 1, \quad G(-l) = 1. \quad (26)$$

Здесь $l = L / x_0$ – величина слоя в единицах свободного пробега электронов. Таким образом, задача об отклике плазмы на внешнее воздействие состоит в нахождении такого решения уравнений (22), (23), которое удовлетворяет крайевым условиям (25), (26).

Статья организована следующим образом: в разд. 2 представлено аналитическое решение поставленной задачи, полученное на основе утверждений из [4] и [5]. В разд. 3 представлено численное исследование решения, полученного в разд. 2.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Мы получили систему интегродифференциальных уравнений для функций $H(x, \nu)$ и $G(x)$:

$$vH_x(x, v) + AH(x, v) = vG(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi, \tag{27}$$

$$G'(x) = B \int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)H(x, \xi)d\xi. \tag{28}$$

Функции $H(x, v)$ и $G(x)$ заданы в полосе

$$\Pi = \{x \in (-l, l), v \in \mathbb{R}\} \tag{29}$$

и удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$H(l, v) = H(l, -v), H(-l, v) = H(-l, -v), \tag{30}$$

$$G(l) = 1, G(-l) = 1. \tag{31}$$

Функция $k(\xi)$ определяется формулой (24), а коэффициенты A и B зависят от свойств плазмы и выражаются формулами

$$A = 1 - i \frac{\omega}{v}, B = \frac{2\omega_p^2}{v^2}. \tag{32}$$

Решение задачи (27)–(31) ищется в следующем классе функций:

$$H \in C(\overline{\Pi} \setminus \{v = \pm\infty\}), H_x \in C(\Pi), G \in C[-l, +l] \cap C^1(-l, +l). \tag{33}$$

В работах [4], [5] был предложен метод и построено аналитическое решение задачи (27)–(31) для случая, когда $k(\xi)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая функция с асимптотикой $k(\xi) = \mathcal{O}(e^{-\xi^2})$, $\xi \rightarrow \pm\infty$ и нормированная на единицу, т.е. $\int_{-\infty}^{+\infty} k(\xi)d\xi = 1$, а величины A и B являются комплексной и вещественной константами соответственно. Частным случаем такой функции является $k(\xi)$, определенная по формуле (24). Указанное решение задачи было построено с помощью новых результатов, развивающих подход [14], [15] в теории преобразования Фурье обобщенных функций, а также методов [16], [17] для решения сингулярных интегральных уравнений.

Для того чтобы выписать результат решения, введем функцию:

$$\Lambda(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2}\lambda^2 - \frac{B}{A^2}\lambda\left(\lambda^2 - \frac{A}{B}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda}d\xi, \tag{34}$$

от структуры множества нулей которой зависит общий вид решения задачи. Заметим, что вид функции $\Lambda(\lambda)$ общий для любого решения системы (27), (28), а ее свойства определяются набором параметров $k(\xi)$, A и B , которые зависят от свойств плазмы.

Аналитические и численные оценки показали, что и для модели, рассматриваемой в [4], и для модели, рассматриваемой в настоящей работе, для физически значимых параметров функция $\Lambda(\lambda)$ имеет два простых корня, которые являются комплексными и противоположными по знаку $\pm\lambda_0 \notin \mathbb{R}$, что позволяет нам использовать результаты работы [4].

Следуя [4], введем также функции

$$\varkappa(\lambda, v) := \frac{1}{A}\left(\frac{\lambda^2 - A/B}{\lambda - v} - \lambda\right), \tag{35}$$

$$\Lambda_0(\lambda) = 1 - \frac{B}{A^2}\lambda^2 - \frac{B}{A^2}\lambda\left(\lambda^2 - \frac{A}{B}\right)v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda}d\xi, \lambda \in (-\infty, +\infty), \tag{36}$$

где символ *v.p.* означает, что интеграл понимается в смысле главного значения. Введем еще одну величину, которая потребуется далее – значение дисперсионной функции $\Lambda(\lambda)$ на бесконечности:

$$\Lambda_\infty := \Lambda(\infty). \tag{37}$$

В дальнейшем также потребуются функции $S(v)$, удовлетворяющие требованиям приведенного замечания.

Замечание 1. Будем предполагать, что функция $S(v)$ непрерывна при $v \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условию $S(v) = o(e^{C_1|v|})$, $v \rightarrow \pm\infty$, $C_1 > 0$, а кроме того, при малых v для нее справедлива асимптотика $|S(v)| = O(v^2 e^{-C_2/|v|})$, $v \rightarrow 0$, $C_2 > 0$.

Таким образом, справедливо следующее утверждение, см. [5].

Теорема 1. Пусть функция $k(\xi)$, фигурирующая в (27), (28), определена формулой (24), $A \in \mathbb{C}$ и $B \in \mathbb{R}$ соответственно комплексная и вещественная величины, определяемые формулами (32), функция $\Lambda(\lambda)$, определенная из (34), имеет два комплексных корня λ_0 и $-\lambda_0$, $\lambda_0 \in \mathbb{H}^+$. Тогда решение краевой задачи (27)–(31) единственно и имеет вид:

$$H(x, v) = \frac{S_0 v}{A \Lambda_\infty} - \frac{B}{A} \cdot S_1 \lambda_0 \varkappa(\lambda_0, v) e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot S_2 \lambda_0 \varkappa(-\lambda_0, v) e^{Ax/\lambda_0} + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\lambda)k(\lambda)}{\Lambda_0(\lambda)} \varkappa(\lambda, v) e^{-Ax/\lambda} d\lambda - \frac{S(v)}{iv} e^{-Ax/v}, \tag{38}$$

$$G(x) = \frac{S_0}{\Lambda_\infty} - \frac{B}{A} \cdot S_1 \lambda_0 e^{-Ax/\lambda_0} + \frac{B}{A} \cdot S_2 \lambda_0 e^{Ax/\lambda_0} + \frac{B}{iA} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S(\lambda)k(\lambda)}{\Lambda_0(\lambda)} e^{-Ax/\lambda} d\lambda, \tag{39}$$

где постоянные величины S_j , $j = 0, 1, 2$, даются равенствами

$$S_0 = \left(\frac{1}{\Lambda_\infty} - \frac{2\lambda_0}{\Lambda'(\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)} + \frac{B}{A^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 k(\lambda) d\lambda}{\Lambda^+(\lambda)\Lambda^-(\lambda)} \right)^{-1}, \tag{40}$$

$$S_1 = \frac{AS_0}{B\Lambda'(\lambda_0) \cosh(A/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}, \tag{41}$$

$$S_2 = -S_1 = -\frac{AS_0}{B\Lambda'(\lambda_0) \cosh(A/\lambda_0)(\lambda_0^2 - A/B)}, \tag{42}$$

а функция $S(v)$ определяется формулой

$$S(v) = \frac{iS_0 v^2 \Lambda_0(v)}{A \cosh(A/v) \Lambda^+(v) \Lambda^-(v)}, \tag{43}$$

величина Λ_∞ дается равенством (37), функции $\varkappa(\lambda, v)$ и $\Lambda_0(\lambda)$ определены соответственно формулами (35) и (36).

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

3.1. Алгоритм вычисления

Для вычисления решения краевой задачи (27)–(31) по формулам (38)–(43) выполняются следующие действия: сначала для заданных параметров плазмы ω и v вычисляются значения констант A и B , затем находится значение корня λ_0 – решение уравнения $\Lambda(\lambda, A, B) = 0$ в нижней полуплоскости ($\text{Im } \lambda_0 < 0$). Для решения этого уравнения применяется итерационная процедура Ньютона [18], которая заключается в использовании уравнения, связывающего значение функции и ее производной:

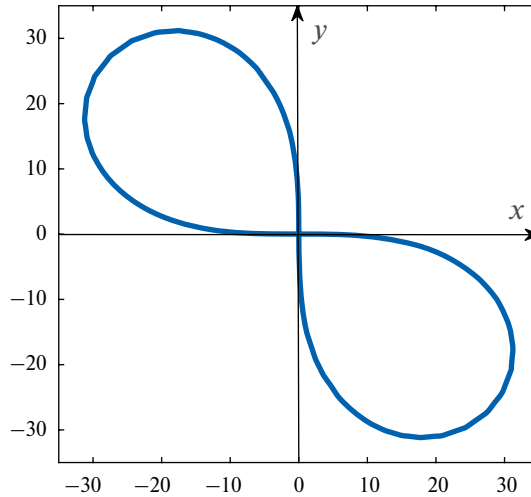
$$\lambda_0^{(n+1)} = \lambda_0^{(n)} - \frac{\Lambda(\lambda_0^{(n)}, A, B)}{\Lambda'(\lambda_0^{(n)}, A, B)}.$$

Значение производной вычисляется по формуле

$$\Lambda'(\lambda, A, B) = -\frac{2B}{A^2}\lambda + \frac{1}{A\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{3B}{A}\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t - \lambda} dt + \frac{1}{A\sqrt{\pi}}\left(\lambda - \frac{B}{A}\lambda^3\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{(t - \lambda)^2} dt, \text{Im } \lambda \neq 0. \tag{44}$$

Для вычисления интегралов в функциях $\Lambda(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ и $\Lambda'(\lambda_0^{(n)}, A, B)$ применяются квадратурные формулы Гаусса 10-го порядка [18].

На фиг. 1 приведены графики зависимости значений λ_0 от частоты внешнего поля ω . В 4-й четверти изображены λ_0 такие, что $\text{Im } \lambda_0 < 0$, во 2-й четверти λ_0 такие, что $\text{Im } \lambda_0 > 0$.



Фиг. 1. Значения корней дисперсионной функции при $\nu / \omega_p = 0.001$ и разных ω .

Отметим, что метод Ньютона применим, если начальное приближение $\lambda_0^{(1)}$ попадает в достаточно малую окрестность предполагаемого корня, поэтому начальное приближение находится с помощью асимптотических оценок.

После нахождения значения λ_0 можно вычислить значения констант S_0, S_1, S_2 по формулам (40)–(42) и приступить к вычислению решения задачи (27)–(31).

При вычислении константы S_0 , как и при вычислении $G(x), H(x, \nu)$, необходимо найти значения функций $\Lambda^\pm(\lambda)$ на вещественной оси. Эти значения вычисляются с помощью выражения для $\Lambda_0(\lambda)$, которое дается формулой (36), и формул Сохоцкого [19]:

$$\Lambda^\pm(\lambda) = \Lambda_0(\lambda) \mp \pi i \frac{B}{A^2} \lambda \left(\lambda^2 - \frac{A}{B} \right) k(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{45}$$

Выражение для функции $\Lambda_0(\lambda)$, как и представление для $H(x, \nu)$, содержит интеграл в смысле главного значения

$$I(\lambda) = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi,$$

к вычислению которого мы переходим в следующем пункте.

3.2. Представление для сингулярного интеграла $I(\lambda)$

В случае, когда равновесное состояние описывается распределением Максвелла, ядро $k(\xi)$ в уравнениях (38), (39) принимает вид (24):

$$k(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Интеграл $I(\lambda)$ в таком случае принимает вид:

$$I(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2} d\xi}{\xi - \lambda}. \quad (46)$$

Вводя функцию

$$f(u, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-u\xi^2} d\xi}{\xi - \lambda}, \quad (47)$$

убеждаемся, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению, в котором λ присутствует как параметр:

$$f'_u(u, \lambda) + \lambda^2 f(u, \lambda) = -\frac{\lambda}{\sqrt{u}}, \quad f(0, \lambda) = 0. \quad (48)$$

Тогда, как нетрудно показать,

$$f(u, \lambda) = -2\lambda e^{-\lambda^2 u} \int_0^{u^2} e^{\lambda^2 t^2} dt. \quad (49)$$

Отсюда, учитывая, что $f(1, \lambda) = I(\lambda)$, находим

$$I(\lambda) = -2\lambda \int_0^1 e^{\lambda^2(t^2-1)} dt. \quad (50)$$

Отметим, что этот интеграл может быть также выражен через функцию ошибок [20]. Для вычисления будем использовать формулу (50), к которой применяем квадратурные формулы Гаусса.

3.3. Результаты расчетов

Построены графики напряженности самосогласованного электрического поля в слое. Вместо обозначения функции $G(x)$ на рисунках будем использовать традиционное для напряженности обозначение $E(x)$. Как видно из формулы (39), напряженность можно представить в виде суммы

$$E(x) = E_a(x) + E_b(x) + E_c(x).$$

Величина E_a — это та составляющая самосогласованного поля, которая не зависит от координаты, являясь константой. Она показывает, какая часть внешнего поля проникает в плазменный слой. Второе слагаемое $E_b(x)$ представляет собой гиперболический косинус, значение которого резко уменьшается при удалении от границы слоя. Это можно трактовать, как экранирование плазмой внешнего поля. Третье слагаемое $E_c(x)$ имеет сложный характер, при малых частотах его вклад составляет доли процента, с ростом частоты внешнего поля его вклад растет. Но во всех случаях величина $E_c(x)$ уменьшается при удалении от границы слоя.

Заметим, что при частоте внешнего поля, близкой к плазменной частоте, в слое начинают наблюдаться осцилляции по координате.

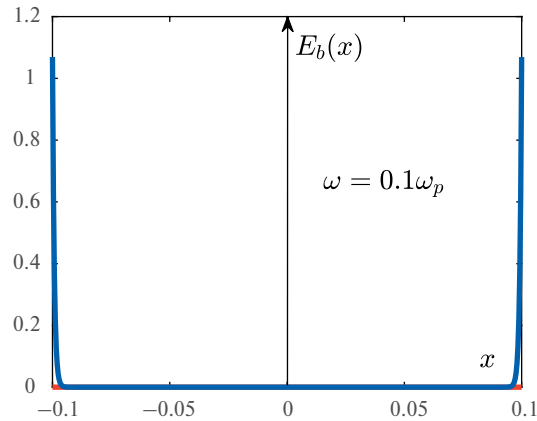
На графиках представлены зависимости от координаты как отдельных мод $E_b(x)$ и $E_c(x)$, так и суммарно всей напряженности $E(x)$, значения частоты внешнего поля варьируются от 0.1 до 1.5 плазменной частоты ω_p [8].

На фиг. 2–11 изображены отдельно моды $E_b(x)$ и $E_c(x)$ при разных значениях частоты внешнего поля. На фиг. 12–17 изображены графики напряженности $E(x)$, т.е. сумма всех слагаемых $E_a(x) + E_b(x) + E_c(x)$.

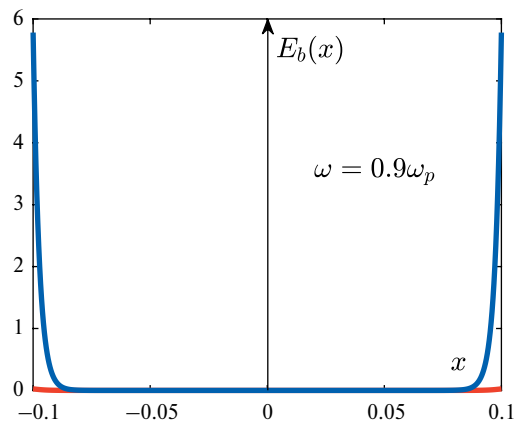
Численное моделирование показывает, что при малых значениях частоты внешнего поля оно почти полностью экранируется и не проникает в плазму. Явно выражен приграничный слой, имеющий размер порядка дебаевского радиуса r_D [1].

При увеличении частоты внешнего поля растет модуль постоянной составляющей E_a , увеличивается вклад слагаемого $E_c(x)$, а также сильнее выражен эффект экранирования. При частоте внешнего поля, равной плазменной частоте ω_p , возникает резонанс, который приводит к тому, что при частоте, немного превышающей плазменную, возникают осцилляции по координате.

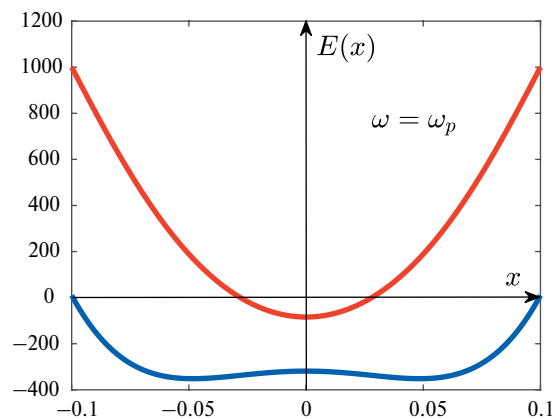
При частоте внешнего поля, равной 1.3 и 1.5 от плазменной частоты, внешнее электрическое поле «проходит» через плазменный слой, что соответствует теоретическим данным [6].



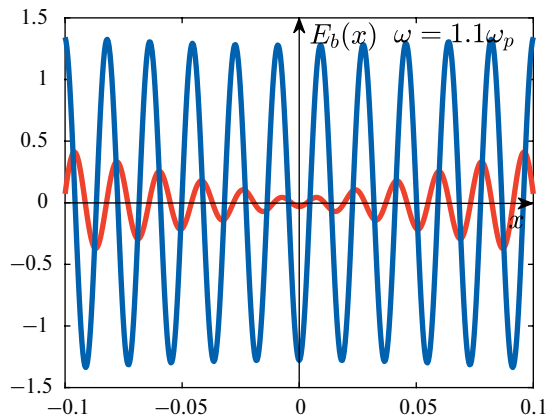
Фиг. 2. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



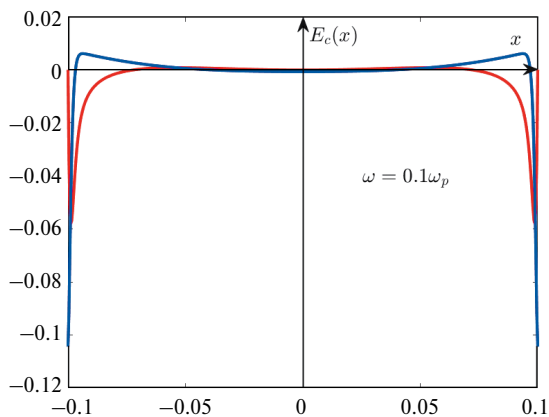
Фиг. 3. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



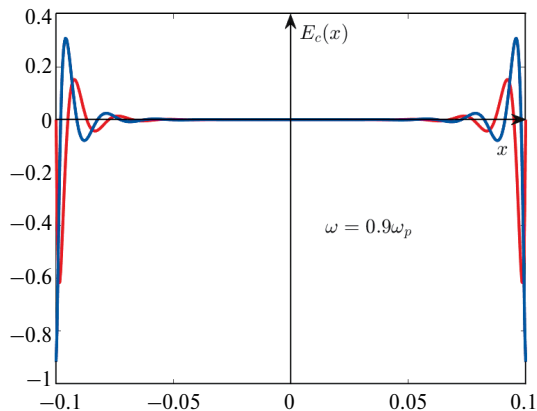
Фиг. 4. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = \omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



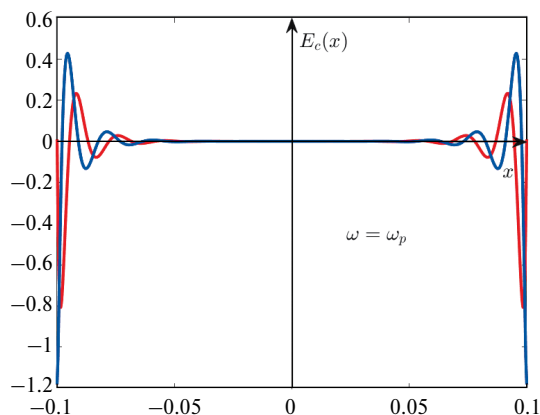
Фиг. 5. Величина $E_b(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



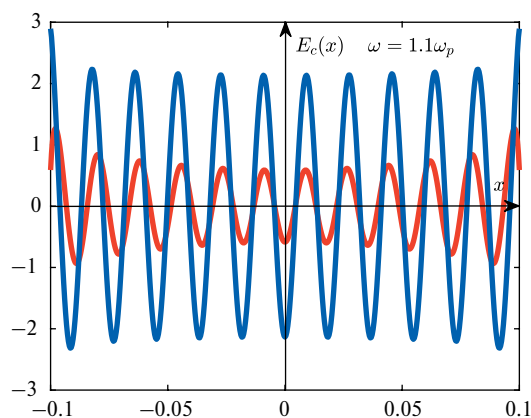
Фиг. 6. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



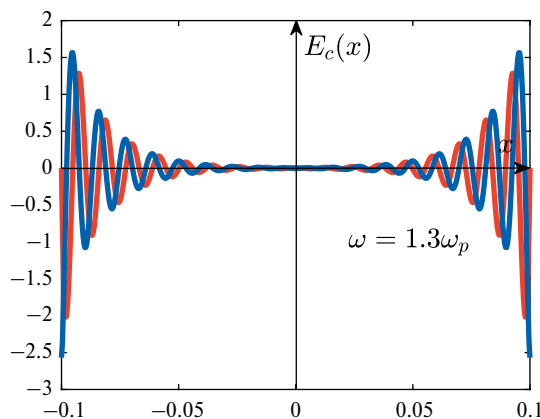
Фиг. 7. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



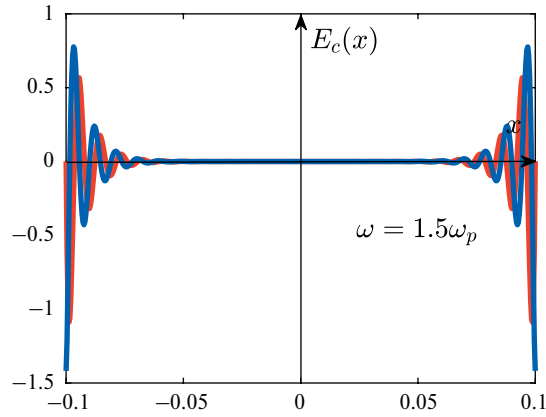
Фиг. 8. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = \omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



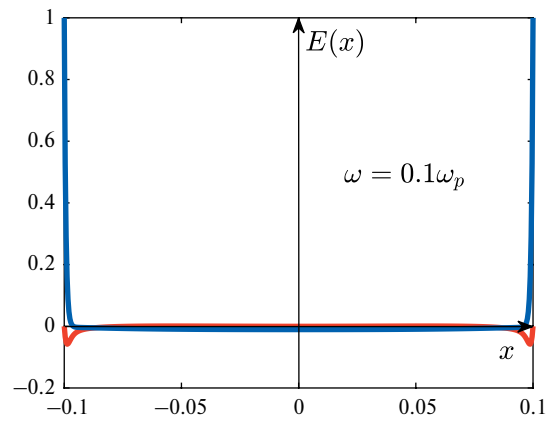
Фиг. 9. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



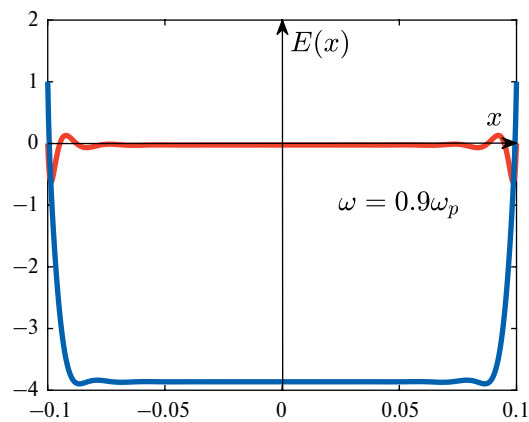
Фиг. 10. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.3\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



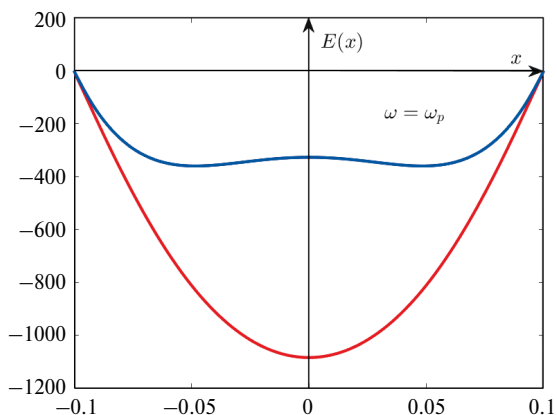
Фиг. 11. Величина $E_c(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.5\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



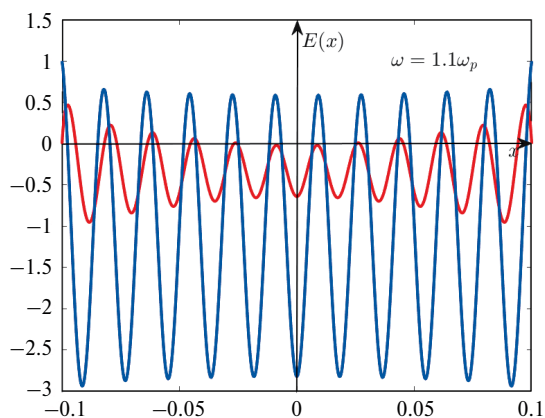
Фиг. 12. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



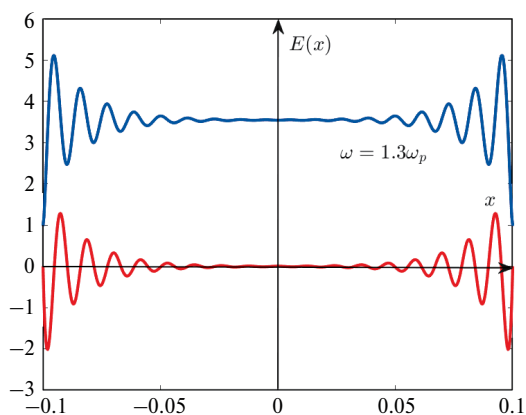
Фиг. 13. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 0.9\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



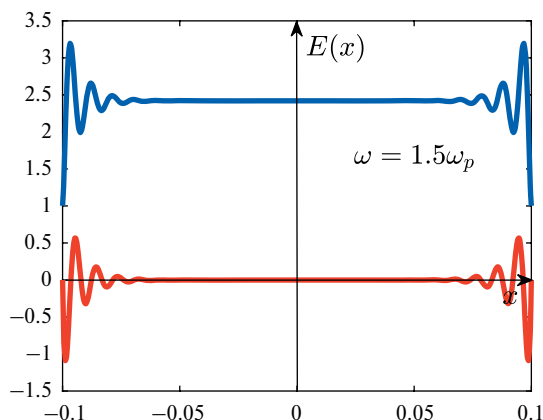
Фиг. 14. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.0\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



Фиг. 15. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.1\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



Фиг. 16. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.3\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.



Фиг. 17. Величина $E(x)$ в зависимости от координаты x при $\omega = 1.5\omega_p$, $\nu / \omega_p = 0.001$, синим – вещественная часть, красным – мнимая.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006.
2. Брушлинский К.В., Кондратьев И.А. Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 20. 20 с.
3. Грицык П.А., Сомов Б.В. Современные аналитические модели ускорения и распространения электронов в солнечных вспышках // Успехи физ. наук. 2023. Т. 193. № 5. С. 465–490.
4. Bezrodnykh S. I., Gordeeva N. M. Analytical Solution of a System of Integro-differential Equations for a Plasma Model in an External Field // Russian Journal of Mathematical Physics, 2023, 30:4, p. 23–36.
5. Bezrodnykh S.I., Gordeeva N.M. Solution of a Boundary Value Problem for a System of Integro-Differential Equations Arising in a Modal of Plasma Physics // Math. Notes. 2023. V. 114. No 5. P. 704–715.
6. Абрикосов А.А. Введение в теорию нормальных металлов. М.: Наука, 1972. 288 с.
7. Кейз К.М., Цвайфель П.Ф. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
8. Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // Собрание трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25.
9. Латышев А.В., Юшканов А.А. Электронная плазма в полупространстве металла в переменном электрическом поле // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1229–1241.
10. Гордеева Н.М., Юшканов А.А. Невырожденная электронная плазма в слое во внешнем электрическом поле с зеркальным условием на границе // Теплофиз. высоких температур. 2018. Т. 56. № 5. С. 687–695.
11. Компанец А.С. Курс теоретической физики. Т. 2. Статистические законы. М.: Просвещение, 1975. 480 с.
12. Bhatnagar P.L., Gross E.M., Krook M. A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one component systems // Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511–525.
13. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. М.: Наука, 1971. 936 с.
14. Гельфанд И.М., Шилев Г.Е. Обобщенные функции, вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматлит, 1959. 470 с.
15. Шилев Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука. 1965. 328 с.
16. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
17. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: Наука, 1968. 513 с.
18. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 636 с.
19. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973. 736 с.
20. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.

CALCULATING A PERTURBATION OF A PLASMA LAYER BY AN ELECTRIC FIELD

N.M. Gordeeva^{a,*}

^a*Federal Research Center “Computer Science and Control”, Russian Academy
of Sciences, Bauman Moscow State Technical University*

**e-mail: nmgordeeva@bmstu.ru*

Received 11 July, 2023

Revised 15 August, 2023

Accepted 06 September, 2023

Abstract. The paper presents the results of solving a boundary value problem for a system of two integro-differential equations that simulate the action of an external electric field on a plasma layer. This system is an implication of the Boltzmann–Maxwell equations, and the physical meaning of the sought functions is the strength of a self-consistent electric field and perturbation of the electron distribution density. The solution of the problem is constructed using the theories of Fourier transform of generalized functions and singular integral equations with the Cauchy kernel. The dependence of the solution on the frequency of the external field is studied.

Keywords: Boltzmann–Maxwell equations, plasma perturbation, systems of integro-differential equations, singular integral equations with the Cauchy kernel.

УДК 517.956.4

ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО УСЛОВИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2024 г. А. Н. Конёнков^{1,*}

¹390000 Рязань, ул. Свободы, 46,

Рязанский государственный университет им. С.А. Есенина, Россия

*e-mail: an.konenkov@gmail.com

Поступила в редакцию 15.07.2023 г.

Переработанный вариант 15. 07.2023 г.

Принята к публикации 20.10.2023 г.

Рассматривается задача Коши для уравнения теплопроводности с нулевой правой частью. Начальная функция предполагается принадлежащей пространству обобщенных функций медленного роста. Исследуется задача об определении носителя начальной функции по значениям решения в некоторый фиксированный момент времени $T > 0$. Получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы носитель лежал в заданном выпуклом компакте. Эти условия формулируются в терминах скорости убывания решения на бесконечности. Найдена точная константа в экспоненте для гипотезы Ландиса–Олейник о несуществовании сверхбыстро убывающих решений. Библ. 19.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, задача Коши, обратная задача, финальное наблюдение, метод теплового ядра, выпуклые множества, опорная функция.

DOI: 10.31857/S0044466924030112, EDN: XFZFZD

В слое $D_T = \mathbb{R}^n \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t - \Delta u = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad u|_{t=0} = \psi \in S'(\mathbb{R}^n), \quad (1)$$

где $S'(\mathbb{R}^n)$ – пространство обобщенных функций медленного роста в \mathbb{R}^n . Начальное условие понимается как

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (u(\cdot, t), \varphi) = (\psi, \varphi)$$

для всех φ из класса Шварца $S(\mathbb{R}^n)$. Решения предполагаются принадлежащими классу функций, допускающему не более чем полиномиальный рост при $x \rightarrow \infty$ и $t \rightarrow 0$. В этом классе решение задачи Коши существует и единственно для любой начальной функции из $S'(\mathbb{R}^n)$, см. ниже в разд. 2 теорему Мацузавы.

В работе изучается следующая обратная задача. По значениям температуры в момент времени $T > 0$ требуется определить, была ли температура в начальный момент времени отлична от нуля лишь на некотором ограниченном множестве. И если да, то что можно сказать о форме нагретой области? Эту задачу можно рассматривать как вопрос об определении мгновенного источника тепла, сосредоточенного на плоскости $t = 0$. Постановки задач о нахождении источника для различных типов уравнений в ограниченных и неограниченных областях приведены в [1-3]. В частности, рассматриваемый в настоящей работе вопрос аналогичен обратной задаче для уравнения Лапласа о нахождении распределения притягивающих масс по их внешнему потенциалу, исследовавшейся многими авторами, см. [1, 2]. С той, однако, разницей, что в рассматриваемой нами постановке требуется найти только часть информации об источнике.

Для заданного выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ мы устанавливаем необходимое и достаточное условие на значения решения u задачи (1) в момент времени $T > 0$ для того, чтобы носитель начальной функции ψ лежал в K . Это условие заключается в достаточно быстром убывании решения $u(x, T)$ при $x \rightarrow \infty$. Приведены две формы соответствующей оценки. В первой скорость убывания описывается с помощью функции расстояния до K , во второй – с помощью опорной функции множества K .

Е.М. Ландис и О.А. Олейник [4] для параболических уравнений второго порядка выдвинули гипотезу о несуществовании сверхбыстро убывающих решений. А именно, если u – ограниченное решение однородного параболического уравнения в \bar{D}_T и существуют положительные постоянные C, ε такие, что $|u(x, T)| \leq Ce^{-|x|^{2+\varepsilon}}$, то $u \equiv 0$ в \bar{D}_T . При этом указывалось, что для справедливости гипотезы на коэффициенты уравнения должны быть наложены подходящие условия на бесконечности. Эта гипотеза усиливает свойство единственности решения задачи Коши для параболических уравнений с обратным направлением времени: если $u(x, T) = 0$, то $u \equiv 0$ в \bar{D}_T , см., например, [5] и цитированную там литературу.

Для уравнения теплопроводности гипотеза Ландиса–Олейник была доказана в [6], а для параболических уравнений с переменными коэффициентами в [7, 8]. Во всех этих статьях тривиальность решения была установлена при условии $|u(x, T)| \leq C_k e^{-k|x|^2}$ для всех $k \geq 1$. В настоящей работе из результатов о локализации начального условия мы получаем, что достаточным условием тривиальности ограниченного решения уравнения теплопроводности в слое D_T является выполнение неравенства $|u(x, T)| \leq C(1 + |x|)^N e^{-|x|^2/(4T)}$, причем постоянная в экспоненте является точной.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ И ОЦЕНКИ

Для $z \in \mathbb{C}^n$ и $t > 0$ обозначим

$$\Gamma(z, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{\langle z, z \rangle}{4t}}.$$

Здесь и далее для $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$ полагаем $w = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n$. При фиксированном $t > 0$ решение u задачи Коши (1), представимое в виде свертки фундаментального решения с начальной функцией $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$, может быть продолжено до целой функции $u(z, t) = (\Gamma(z - \cdot, t), \psi)$. В этом разделе мы устанавливаем некоторые оценки функций комплексного переменного, которые нам понадобятся далее при исследовании решения $u(z, t)$ и преобразования Фурье–Лапласа от него.

Лемма 1. *Справедливы оценки*

$$\left| \partial_z^k \Gamma(z, t) \right| \leq C_{n,k} \left(|z| + t^{1/2} \right)^{|k|} t^{-|k|-n/2} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z, z \rangle}{4t}},$$

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \xi^N \partial_z^k \Gamma(z - \xi, t) \right| \leq C_{k,n,N} \left(|z| + t^{1/2} \right)^{N+|k|} t^{-|k|-n/2} e^{-\frac{|\operatorname{Im} z|^2}{4t}},$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$, $t > 0$, $N \geq 0$. Здесь $k = (k_1, \dots, k_n)$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$ и $\partial_z^k = \partial_{z_1}^{k_1} \dots \partial_{z_n}^{k_n}$, $|z| = \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2 \right)^{1/2}$, $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n)$, $\operatorname{Im} z = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$.

Доказательство. Из равенства

$$\partial_z^k \Gamma(z, t) = (-1)^{|k|} (4\pi t)^{-n/2} (2t^{1/2})^{-|k|} H_{k_1} \left(\frac{z_1}{2t^{1/2}} \right) \dots H_{k_n} \left(\frac{z_n}{2t^{1/2}} \right) e^{-\frac{\langle z, z \rangle}{4t}},$$

где $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$ – полиномы Эрмита, получаем

$$\begin{aligned} \left| \partial_z^k \Gamma(z, t) \right| &\leq C t^{-|k|-n/2} \left(|z_1| + t^{1/2} \right)^{k_1} \dots \left(|z_n| + t^{1/2} \right)^{k_n} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z, z \rangle}{4t}} \leq \\ &\leq C \left(|z| + t^{1/2} \right)^{|k|} t^{-|k|-n/2} e^{-\frac{\operatorname{Re}\langle z, z \rangle}{4t}}. \end{aligned}$$

Для $z = x + iy$, используя равенство $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^m e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} = C_{m,n} t^{m/2}$, $m \geq 0$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^N \left| \partial_z^k \Gamma(z - \xi, t) \right| &= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |x - \xi|^N \left| \partial_x^k \Gamma(\xi + iy, t) \right| \leq \\ &\leq C \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left(|x|^N + |\xi|^N \right) t^{-|k|-n/2} \left(|z| + t^{1/2} \right)^{|k|} e^{\frac{|y|^2 - |\xi|^2}{4t}} \leq \\ &\leq C \left(|z| + t^{1/2} \right)^{N+|k|} t^{-|k|-n/2} e^{\frac{|y|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функция f одного комплексного переменного является аналитической в угле $A = \{0 < \arg z < \pi / 2\}$ и непрерывна в \bar{A} . Если для некоторых постоянных $M, C, a > 0$ справедливы оценки

$$|f(z)| \leq C e^{a \operatorname{Re} z}, \quad z \in A, \quad (2)$$

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \partial A, \quad (3)$$

то

$$|f(z)| \leq M, \quad z \in \bar{A}. \quad (4)$$

Доказательство. Для малого $\alpha > 0$ в угле $A_\alpha = \{0 < \arg z < \pi / 2 - \alpha\}$ рассмотрим функцию $g(z) = f(z) e^{iabz^2}$, где $b = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$. Для $z = x + iy$

$$|g(z)| = |f(z)| e^{-2abxy},$$

откуда имеем

$$|g(z)| \leq |f(z)| \leq C e^{a|z|^2} \quad \text{в } A_\alpha.$$

На верхней стороне угла A_α имеем

$$\left| g\left(re^{i(\pi/2-\alpha)}\right) \right| \leq \left| f\left(re^{i(\pi/2-\alpha)}\right) \right| e^{-abr^2 \sin 2\alpha} \leq C e^{ar^2(\sin^2 \alpha - b \sin 2\alpha)} = C.$$

По теореме Фрагмена–Линделефа [9, гл. 8, § 6] получим

$$|g(z)| = |f(z)| e^{-axy \operatorname{tg} \alpha} \leq \max\{C, M\}, \quad z \in \bar{A}_\alpha.$$

Зафиксировав $z \in A$ и переходя к пределу $\alpha \rightarrow 0+$ заключаем, что $|f(z)| \leq \max\{C, M\}$ в A . Применяя теорему Фрагмена–Линделефа еще раз, получим (4).

Лемма доказана.

Для множества $K \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $d_K(x) = \operatorname{dist}(x, K)$ функцию расстояния до K .

Теорема 1. Пусть целая функция n комплексных переменных f для некоторого непустого выпуклого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и постоянных $N \geq 0, C, a > 0$, удовлетворяет оценкам

$$|f(x)| \leq C(1 + |x|)^N e^{-ad_K^2(x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

$$|f(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{a|\operatorname{Im} z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (6)$$

Тогда

$$|f(z)| \leq C_1 (1 + |z|)^{2N} e^{a(|\operatorname{Im} z|^2 - d_K^2(\operatorname{Re} z))}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (7)$$

где C_1 зависит от C , n , N и компакта K .

Доказательство. Если $x \in K$, то (7) для точки $z = x + iy$ вытекает из (6). Пусть $x \notin K$ и O – ближайшая к x точка K .

Обозначим через γ гиперплоскость в \mathbb{R}^n , проходящую через O и ортогональную отрезку Ox . Выберем декартову систему координат $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ с центром в точке O такую, что точка x лежит на луче $O\tilde{x}_n$. В ней точка x имеет координаты $\tilde{x} = (0, \dots, 0, \tilde{x}_n)$, где $\tilde{x}_n = d_K(x)$.

Плоскость γ является опорной для K . В самом деле, если бы существовала точка $P \in K$, принадлежащая полупространству $\tilde{x}_n > 0$, то, в силу выпуклости K , весь отрезок OP принадлежал бы K . Это противоречит предположению, что точка O является ближайшей к x точкой K . Следовательно, обозначая функцию расстояния до K в новых координатах той же буквой, для всех точек $\tilde{s} = (0, \dots, 0, \tilde{s}_n)$ на положительном луче $O\tilde{x}_n$, имеем $d_K(\tilde{s}) = \tilde{s}_n$.

В \mathbb{C}^n выберем координаты

$$\tilde{z}_j = \tilde{x}_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Положим $\tilde{z}' = (\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_{n-1})$ и обозначим через \tilde{f}_n ограничение f на плоскость $\tilde{z}_1 = iy_1, \dots, \tilde{z}_{n-1} = iy_{n-1}$. Так как точка $x \notin K$ выбирается произвольно, достаточно доказать (7) для \tilde{f}_n в полуплоскости $\operatorname{Re} \tilde{z}_n \geq 0$ при любых значениях $y_1, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Если K лежит в открытом шаре $B_R(0)$ радиуса R с центром в нуле, то для точки $z = x + iy$ ее координаты \tilde{z} удовлетворяют неравенствам

$$C_1 (1 + |\tilde{z}|)^N \leq (1 + |z|)^N \leq C_2 (1 + |\tilde{z}|)^N,$$

где $C_i = C_i(n, N, R)$ и, по условию,

$$|\tilde{f}_n(\tilde{z}_n)| \leq C (1 + |\tilde{z}_n|)^N (1 + |\tilde{z}'|)^N e^{a \sum_{j=1}^n y_j^2}, \quad \tilde{z}_n \in \mathbb{C},$$

$$|\tilde{f}_n(\tilde{x}_n)| \leq C (1 + |\tilde{x}_n|)^N e^{-a \tilde{x}_n^2}, \quad \tilde{x}_n \geq 0.$$

Функция $g(\tilde{z}_n) = (1 + \tilde{z}_n)^{-N} \tilde{f}_n(\tilde{z}_n) e^{a \tilde{z}_n^2}$ удовлетворяет в угле $A_1 = \{0 < \arg \tilde{z}_n < \pi / 2\}$ условию леммы 2 с постоянной

$$M = C (1 + |\tilde{z}'|)^N e^{a \sum_{j=1}^n y_j^2},$$

что проверяется с использованием неравенства $1 + |\tilde{z}_n| \leq 2|1 + \tilde{z}_n|$, справедливого при $\operatorname{Re} \tilde{z}_n \geq 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_n(\tilde{x}_n + iy_n)| &\leq C (1 + |\tilde{z}'|)^N (1 + |\tilde{z}_n|)^N e^{a \sum_{j=1}^n y_j^2} \left| e^{-a \tilde{z}_n^2} \right| \leq \\ &\leq C (1 + |z|)^{2N} e^{a \sum_{j=1}^n y_j^2 - a(\tilde{x}_n^2 - y_n^2)} = C (1 + |z|)^{2N} e^{a|y|^2 - ad_K^2(x)}. \end{aligned}$$

Случай угла $A_2 = \{-\pi / 2 < \arg \tilde{z}_n < 0\}$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

2. ЛОКАЛИЗАЦИЯ НАЧАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ

В работах [10-12] Т. Мацузава охарактеризовал некоторые классы обобщенных функций и гиперфункций в терминах возможного роста решений задачи Коши для уравнения теплопроводности с начальной функцией из данного класса. Этот подход, получивший название метода теплового ядра, использовался затем многими авторами для описания различных пространств обобщенных функций, см. [13] и цитированную там литературу. Мы будем использовать следующую характеристику функций из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ [14].

Теорема (Мацузава). Пусть $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $u(x, t) = (\Gamma(x - \cdot, t), \psi)$. Тогда функция $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $(\partial_t - \Delta)u(x, t) = 0$ при $t > 0$;
- 2) $u(\cdot, t) \rightarrow \psi$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $t \rightarrow 0+$;
- 3) существуют положительные константы L, N и C такие, что

$$|u(x, t)| \leq Ct^{-L}(1 + |x|)^N, \quad (x, t) \in D_1. \quad (8)$$

Обратно, для функции $u(x, t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, удовлетворяющей 1) и 3), существует единственное распределение ψ из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ такое, что $(\Gamma(x - \cdot, t), \psi) = u(x, t)$.

Очевидно, в формулировке теоремы можно заменить D_1 на произвольный слой D_T .

Обобщенные функции с компактным носителем были охарактеризованы подобным образом в [15]. Следующее утверждение является уточнением результата из этой работы. А именно, в оценке улучшается показатель экспоненты с $-d_K^2(x)/8t$ до $-d_K^2(x)/4t$.

Теорема 2. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — непустой выпуклый компакт и $\text{supp } \psi \subset K$. Тогда для решения $u(x, t) = (\Gamma(x - \cdot, t), \psi)$ задачи Коши (1) справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq Ct^{-L}(1 + |x|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 < t \leq T. \quad (9)$$

Доказательство. При $d_K(x) \leq t^{1/2}$ из (8) получаем

$$|u(x, t)| \leq Ct^{-L}(1 + |x|)^N \leq Ct^{-L}(1 + |x|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}.$$

Существует семейство функций $\mu_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, каждая из которых равна единице в некоторой окрестности K , и такова, что $\mu_\varepsilon(x) = 0$ при $d_K(x) \geq \varepsilon$, причем [16, гл. 1, § 4]

$$|\partial_x^k \mu_\varepsilon(x)| \leq C_k \varepsilon^{-|k|},$$

где постоянные C_k не зависят от ε .

Пусть $d_K(x) > t^{1/2} > \varepsilon > 0$ и $K \subset B_R(0)$. Положим $K_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n | d_K(x) \leq \varepsilon\} \subset B_{R+t^{1/2}}(0)$. По теореме Л. Шварца [17, гл. 2, § 8] любая обобщенная функция $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет конечный порядок и существуют числа $N \geq 0$, $C > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= |(\Gamma(x - \cdot, t)\mu_\varepsilon, \psi)| \leq \\ &\leq C \sup_{|k| \leq N, y \in \mathbb{R}^n} (1 + |y|)^N \left| \partial_y^k [\Gamma(x - y, t)\mu_\varepsilon(y)] \right| = \\ &= C \sup_{|k| \leq N, y \in K_\varepsilon} (1 + |y|)^N \left| \partial_y^k [\Gamma(x - y, t)\mu_\varepsilon(y)] \right| \leq \\ &\leq Ct^{-L} (1 + R + t^{1/2})^N e^{-\frac{(d_K(x) - \varepsilon)^2}{4t}} \times \\ &\quad \times \sum_{|k| \leq N} \varepsilon^{-|k|} (R + |x| + t^{1/2})^{N - |k|}. \end{aligned}$$

Нужная оценка получается, если положить $\varepsilon = t / (d_K(x) + t^{1/2})$ и использовать неравенство $d_K(x) \leq |x| + R$:

$$\begin{aligned}
 |u(x,t)| &\leq Ct^{-L_1} (1 + |x|)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t} + \frac{d_K(x)}{2(d_K(x)+t^{1/2})} - \frac{t}{4(d_K(x)+t^{1/2})^2}} \leq \\
 &\leq Ct^{-L_1} (1 + |x|)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}.
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Получим теперь необходимое и достаточное условие принадлежности носителя начальной функции заданному выпуклому компактному K . Отметим, что в методе теплового ядра [15] для описания обобщенных функций с компактным носителем используются значения решения $u = (\Gamma(x - \cdot, t), \psi)$ во всем слое D_T . Здесь же требуется знание решения лишь в один момент времени.

Обозначим через $h_K(x) = \sup_{y \in K}(x, y)$ опорную функцию выпуклого множества $K \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 3. Пусть u – решение задачи Коши (1), удовлетворяющее для некоторых постоянных $C > 0, N, L \geq 0$ оценке

$$|u(x,t)| \leq C(1 + |x|)^N t^{-L}, \quad (x,t) \in D_T, \tag{10}$$

и $K \subset \mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый компакт. Тогда $\text{supp } \psi \subset K$, если и только если существуют константы $C_1 > 0, N_1 \geq 0$ такие, что

$$|u(x,T)| \leq C_1(1 + |x|)^{N_1} e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2. Установим достаточность. Пусть выполнено условие (11). По теореме Мацузавы при выполнении (10) решение u может быть представлено в виде потенциала Пуассона $(\Gamma(x - \cdot, T), \psi)$ для некоторой функции $\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$. По теореме Л. Шварца

$$\begin{aligned}
 |u(x + iy, T)| &= |(\Gamma(x + iy - \cdot, T), \psi)| \leq \\
 &\leq C \sup_{|k| \leq N, \xi \in \mathbb{R}^n} (1 + |\xi|)^N \left| \partial_x^k \Gamma(x + iy - \xi, T) \right| \leq \\
 &\leq CT^{-L} (|x + iy| + T^{1/2})^{N_1} e^{\frac{|y|^2}{4T}} \leq \\
 &\leq C(|x + iy| + 1)^{N_1} e^{\frac{|y|^2}{4T}}.
 \end{aligned}$$

Учитывая (11), заключаем, что функция $u(z, T)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно,

$$|u(z, T)| \leq C(|z| + 1)^N e^{\frac{|y|^2 - d_K^2(x)}{4T}}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Рассмотрим преобразование Фурье–Лапласа от решения $u(z, T)$:

$$\tilde{u}(\xi + i\eta, T) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x, T) e^{-i\langle \xi + i\eta, x \rangle} dx.$$

Так как функция $u(x + iy, T)$ быстро убывает при $x \rightarrow \infty$, то можно сдвинуть плоскость интегрирования:

$$\tilde{u}(\xi + i\eta, T) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x + iy, T) e^{-i\langle \xi + i\eta, x + iy \rangle} dx.$$

Поскольку $\left| e^{-i\langle \xi + i\eta, x + iy \rangle} \right| = e^{(x, \eta) + (y, \xi)}$, то получим

$$\begin{aligned}
 |\tilde{u}(\xi + i\eta, T)| &\leq Ce^{(y, \xi)} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x + iy, T)| e^{(x, \eta)} dx \leq \\
 &\leq Ce^{(y, \xi) + \frac{|y|^2}{4T}} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x + iy|)^N e^{(x, \eta) - \frac{d_K^2(x)}{4T}} dx.
 \end{aligned}$$

Минимизируя выражение $(y, \xi) + \frac{|y|^2}{4T}$ по y , получим $y^* = -2T\xi$, $e^{(y^*, \xi) + \frac{|y^*|^2}{4T}} = e^{-T|\xi|^2}$ и

$$\begin{aligned}
 |\tilde{u}(\xi + i\eta, T)| &\leq C e^{-T|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT\xi|)^N e^{(x, \eta) - \frac{d_K^2(x)}{4T}} dx = \\
 &= C e^{-T|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT\xi + 2T\eta|)^N e^{(x+2T\eta, \eta) - \frac{d_K^2(x+2T\eta)}{4T}} dx = \\
 &= C e^{-T|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N \sup_{a \in K} e^{(x-a, \eta) + (a, \eta) - \frac{|x+2T\eta-a|^2}{4T} + 2T|\eta|^2} dx \leq \\
 &\leq C e^{-T|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N \sup_{a \in K} e^{(a, \eta)} \times \\
 &\quad \times \sup_{a \in K} e^{(x-a, \eta) - \frac{|x-a|^2}{4T} - (x-a, \eta) - T|\eta|^2 + 2T|\eta|^2} dx = \\
 &= C e^{T|\eta|^2 - T|\xi|^2 + h_K(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N \sup_{a \in K} e^{-\frac{|x-a|^2}{4T}} dx = \\
 &= C e^{T|\eta|^2 - T|\xi|^2 + h_K(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}} dx \leq \\
 &\leq C e^{-T|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N \sup_{a \in K} e^{(a, \eta)} \times \\
 &\quad \times \sup_{a \in K} e^{(x-a, \eta) - \frac{|x-a|^2}{4T} - (x-a, \eta) - T|\eta|^2 + 2T|\eta|^2} dx = \\
 &= C e^{T|\eta|^2 - T|\xi|^2 + h_K(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N \sup_{a \in K} e^{-\frac{|x-a|^2}{4T}} dx = \\
 &= C e^{T|\eta|^2 - T|\xi|^2 + h_K(\eta)} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}} dx.
 \end{aligned}$$

Пусть $K \subset B_R(0)$. Разделим получившийся интеграл на две части и оценим их по отдельности:

$$\begin{aligned}
 &\int_{B_{2R}(0)} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}} dx \leq \\
 &\leq C \int_{B_{2R}(0)} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N dx \leq \\
 &\leq CR^n (1 + |R| + 2T|\xi + i\eta|)^N \leq C(1 + |\xi + i\eta|)^N,
 \end{aligned}$$

а для точек вне шара $B_{2R}(0)$ расстояние $d_K(x) \geq |x|/2$ и

$$\begin{aligned}
 &\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{2R}(0)} (1 + |x - 2iT(\xi + i\eta)|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4T}} dx \leq \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|^N + 2T|\xi + i\eta|^N) e^{-\frac{|x|^2}{16T}} dx \leq C(1 + |\xi + i\eta|)^N.
 \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$|\tilde{u}(\xi + i\eta, T)| \leq C(1 + |\xi + i\eta|)^N e^{h_K(\eta) + T(|\eta|^2 - |\xi|^2)}.$$

С другой стороны, из равенства $u(x, T) = (\Gamma(x - \cdot, T), \psi)$ следует, что

$$\tilde{u}(\xi, T) = \tilde{\Gamma}(\xi, T) \tilde{\psi}(\xi) = e^{-T|\xi|^2} \tilde{\psi}(\xi).$$

В левой части стоит целая функция. Поэтому $\tilde{\psi}$ также можно продолжить до целой функции по формуле

$$\tilde{\psi}(\xi + i\eta) = e^{T(\xi + i\eta, \xi + i\eta)} \tilde{u}(\xi + i\eta, T),$$

причем

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(\xi + i\eta)| &= e^{T(|\xi|^2 - |\eta|^2)} |\tilde{u}(\xi + i\eta, T)| \leq \\ &\leq C(1 + |\xi + i\eta|)^N e^{T(|\xi|^2 - |\eta|^2)} e^{h_K(\eta) + T(|\eta|^2 - |\xi|^2)} \leq \\ &\leq C(1 + |\xi + i\eta|)^N e^{h_K(\eta)}. \end{aligned}$$

По теореме Пэли–Винера–Шварца [16, гл. 7, § 3] полученная оценка на $\tilde{\psi}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы $\text{supp } \psi \subset K$.

Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 следует, что если для решения задачи Коши (1) выполнено (10) и для некоторого момента времени $t \in (0, T]$ справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^N e^{-\frac{d_K^2(x)}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то решение удовлетворяет (возможно, с другими константами) неравенству вида (9).

Сформулируем полученное условие на скорость убывания решения в терминах опорной функции h_K . Она более удобна для практического определения формы выпуклого компакта K , чем расстояние d_K . Во-первых, поскольку функция h_K однородна степени один, достаточно найти ее значения на единичной сфере S^{n-1} . Во-вторых, ее значение в точке $\zeta \in S^{n-1}$ задает опорное полупространство $(x, \zeta) \leq h_K(\zeta)$, которому принадлежит искомое множество K , причем пересечение всех опорных полупространств равно K .

При $x \rightarrow \infty$ расстояние $d_K(x)$ растет примерно как $|x|$. Установим более точную асимптотику.

Теорема 4. Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый компакт. Тогда

$$d_K(x) = |x| - h_K\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Выберем R таким, чтобы $K \subset B_R(0)$ и пусть $x \notin B_R(0)$. Воспользуемся известной формулой [18, В.3], связывающей расстояние до выпуклого замкнутого множества и его опорную функцию: если $x \notin K$, то

$$d_K(x) = \sup_{\zeta \in S^{n-1}} [(x, \zeta) - h_K(\zeta)].$$

Обозначим через $\zeta_x \in S^{n-1}$ и $p_x \in K$ точки, для которых $d_K(x) = (x, \zeta_x) - h_K(\zeta_x)$ и $h_K(\zeta_x) = \sup_{y \in K} (y, \zeta_x) = (p_x, \zeta_x)$. Тогда

$$d_K(x) = (x - p_x, \zeta_x) \leq |x - p_x|.$$

С другой стороны, $d_K(x) \leq |x - y|$ для всех $y \in K$. Следовательно, p_x является ближайшей к x точкой

K , т.е. $d_K(x) = |x - p_x|$ и $\zeta_x = \frac{x - x_p}{|x - x_p|}$. Для $v_x = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$ имеем

$$\begin{aligned} (x, v_x) - h_K(v_x) &\leq d_K(x) = (x, \zeta_x) - h_K(\zeta_x), \\ 0 \leq |x| - (x, \zeta_x) &= (x, v_x - \zeta_x) \leq h_K(v_x) - h_K(\zeta_x). \end{aligned}$$

Единичные векторы $-v_x$, $-\zeta_x$ указывают направления из точки x на начало координат и точку p_x соответственно. Обе эти точки лежат в $B_R(0)$. Поэтому $|v_x - \zeta_x|$ не превосходит величины плоского угла, под которым шар $B_R(0)$ виден из точки x , откуда

$$v_x - \zeta_x = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty.$$

Опорная функция h_K выпукла на \mathbb{R}^n и, следовательно, липшицева на S^{n-1} [19, § 5]. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq (x, v_x - \zeta_x) &\leq h_K(v_x) - h_K(\zeta_x) \leq \\ &\leq C|v_x - \zeta_x| = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} d_K(x) &= (x, \zeta_x) - h_K(\zeta_x) = (x, v_x) - h_K(v_x) - \\ &- (x, v_x - \zeta_x) + (h_K(v_x) - h_K(\zeta_x)) = \\ &= |x| - h_K\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть u – решение задачи Коши (1), удовлетворяющее для некоторых постоянных $C > 0, N, L \geq 0$ оценке

$$|u(x, t)| \leq C(t^{1/2} + |x|)^N t^{-L}, \quad (x, t) \in D_T,$$

и $K \subset \mathbb{R}^n$ – непустой выпуклый компакт. Тогда $\text{supp } \psi \subset K$, если и только если существуют постоянные $C_1 > 0, N_1 \geq 0$ такие, что

$$|u(x, T)| \leq C_1(1 + |x|)^{N_1} e^{\frac{2h_K(x) - |x|^2}{4T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (13)$$

Доказательство. Возводя равенство (12) в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} d_K^2(x) &= |x|^2 - 2|x|h_K\left(\frac{x}{|x|}\right) + h_K^2\left(\frac{x}{|x|}\right) + O(1) = \\ &= |x|^2 - 2h_K(x) + O(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, существуют константы $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} |x|^2 - 2h_K(x) + C_1 &\leq d_K^2(x) \leq \\ &\leq |x|^2 - 2h_K(x) + C_2, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

и требуемое утверждение вытекает из теоремы 3.

Из (13) можно получить оценку на скорость убывания решения при $x \rightarrow \infty$ по направлениям:

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{|u(r\zeta, T)|}{\Gamma(r\zeta, T)} \leq \frac{h_K(\zeta)}{2T}, \quad \zeta \in S^{n-1}.$$

Пусть в условиях теоремы 5 начальное распределение температуры $\psi \not\equiv 0$ неотрицательно, т.е. $(\varphi, \psi) \geq 0$ для всех неотрицательных функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда решение u будет положительным при всех $t > 0$. Поставим следующий вопрос. Пусть K – выпуклая оболочка $\text{supp } \psi$. Верно ли, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \ln \frac{u(r\zeta, T)}{\Gamma(r\zeta, T)} = \frac{h_K(\zeta)}{2T}$$

для всех $\zeta \in S^{n-1}$? В этом случае формулу

$$h_K(\zeta) \approx \frac{2T}{r} \ln \frac{u(r\zeta, T)}{\Gamma(r\zeta, T)}$$

можно было бы использовать как отправную точку для численного нахождения множества K по значениям температуры вне некоторого шара в момент времени T .

Получим теперь условие на скорость убывания решения в гипотезе Ландиса–Олейник.

Теорема 6. Пусть функция u является решением уравнения теплопроводности $u_t - \Delta u = 0$ в $\mathbb{R}^n \times (0, T]$ и для некоторых постоянных $C > 0$, $N \geq 0$,

$$|u(x, t)| \leq C(1 + |x|)^N, \quad (x, t) \in D_T.$$

Если

$$|u(x, T)| \leq C_1(1 + |x|)^{N_1} e^{-\frac{|x|^2}{4T}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{14}$$

то $u \equiv 0$ в D_T .

Доказательство. По теореме Мацузавы решение u представляется в виде

$$u(x, t) = (\Gamma(x - \cdot, t), \psi)$$

для некоторой функции $\psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Так как $|x|$ является функцией расстояния для компакта из одной точки $K = \{0\}$, то, по теореме 3, $\text{supp } \psi \subset \{0\}$. Как известно, обобщенная функция с точечным носителем является конечной линейной комбинацией дельта-функции и ее производных:

$$\psi(x) = \sum_{|k| \leq m} c_k \delta^{(k)}(x).$$

Следовательно, решение задачи (1) имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{|k| \leq m} c_k \partial_x^k \Gamma(x, t).$$

Но единственная такая функция, ограниченная в некоторой окрестности начала координат, это $u \equiv 0$. Действительно, для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ должно быть выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0+} (u(\cdot, t), \varphi) = \sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} c_k \partial_x^k \varphi(0),$$

что для ограниченной функции u возможно только если все коэффициенты c_k равны нулю.

Теорема доказана.

Константа $\frac{1}{4T}$ в (14) является точной, как показывает следующий пример. Для любого $\varepsilon > 0$ функция $u(x, t) = \Gamma(x, t + \varepsilon)$ является решением уравнения теплопроводности в слое D_T и удовлетворяет оценке $|u(x, T)| \leq Ce^{-\frac{|x|^2}{4(T+\varepsilon)}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Приленко А.И.* Обратные задачи теории потенциала (эллиптические, параболические, гиперболические уравнения и уравнения переноса) // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 5. С. 755–767.
2. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. Marcel Dekker, N.Y., 2000. 750 p.
3. *Приленко А.И., Костин А.Б., Соловьёв В.В.* Обратные задачи нахождения источника и коэффициентов для эллиптических и параболических уравнений в пространствах Гёльдера и Соболева // Сиб. журнал чистой. и прикл. матем. 2017. Т. 17. № 3. С. 67–85.
4. *Ландис Е.М., Олейник О.А.* Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29. Вып. 2. С. 190–206.
5. *Wang W., Zhang L.* Backward uniqueness of Kolmogorov operators // Methods Appl. Anal. 2013. V. 20. No. 1. P. 79–88.
6. *Escauriza L., Kenig C.E., Ponce G., Vega L.* Decay at infinity of caloric functions within characteristic hyperplanes // Math. Res. Lett. 2006. V. 13. No. 2–3. С. 441–453.
7. *Nguyen T.* On a question of Landis and Oleinik // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. V. 362. P. 2875–2899.
8. *Wu J., Zhang L.* The Landis-Oleinik conjecture in the exterior domain // Adv. Math. 2016. V. 302. P. 190–230.
9. *Евграфов М.А.* Аналитические функции. М.: Наука, 1991. 447 с.
10. *Matsuzawa T.* A calculus approach to hyperfunctions I // Nagoya Math. J. 1987. V. 108. P. 53–66.
11. *Matsuzawa T.* A calculus approach to hyperfunctions II // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 313. No. 2. P. 619–655.
12. *Matsuzawa T.* A calculus approach to the hyperfunctions III // Nagoya Math. J. 1990. V.118. P. 133–153.
13. *Suwa M.* A characterization of distributions of exponential growth with support in a regular closed set // Complex Var. Elliptic Equ. 2014. V. 59. No 10. P. 1418–1435.
14. *Suwa M., Yoshino K.* A Characterization of Tempered Distributions with Support in a Cone by the Heat Kernel Method and its Applications // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 2004. V.11. P. 75–90.
15. *Chung S.-Y., Lee S.-M.* The Paley-Wiener theorem by the heat kernel method // Bull. Korean Math. Soc. 1998. V. 35. No. 3. P. 441–453.
16. *Hörmander L.* The Analysis of Linear Partial Differential Operators I. Distribution Theory and Fourier Analysis. Springer Verlag, 1990. 440 p.
17. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
18. *Andrews B., Hopper C.* The Ricci Flow in Riemannian Geometry: A Complete Proof of the Differentiable 1/4-Pinching Sphere Theorem. Lecture Notes in Mathematics. Vol. 2011. Springer, Heidelberg, 2010. 266 p.
19. *Schneider R.* Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013. 752 p.

LOCALIZING THE INITIAL CONDITION FOR SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE HEAT EQUATION*A. N. Konenkov^{a,*}*^a*Yesenin Ryazan State University, ul. Svobody, 46, Ryazan, 390000 Russia***e-mail: an.konenkov@gmail.com*

Received 15 July, 2023

Revised 15 July, 2023

Accepted 20 October, 2023

Abstract. The Cauchy problem for the heat equation with zero right-hand side is considered. The initial function is assumed to belong to the space of tempered distributions. The problem of determining the support of the initial function from solution values at some fixed time $T > 0$ is studied. Necessary and sufficient conditions for the support to lie in a given convex compact set are obtained. These conditions are formulated in terms of the solution's decay rate at infinity. A sharp constant in the exponential for the Landis–Oleinik conjecture on the nonexistence of fast decaying solutions.

Keywords: heat equation, Cauchy problem, inverse problem, final observation, heat kernel method, convex sets, reference function.

УДК 517.955.8 + 519.633

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА С МАЛОЙ ДИФФУЗИЕЙ В СЛУЧАЕ МНОГИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ¹⁾

© 2024 г. А. В. Нестеров^{1,*}

¹117997 Москва, Стремянный пер., 36, Российский экономический университет

им. Г. В. Плеханова, Россия

*e-mail: andrenesterov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.10.2023 г.

Переработанный вариант 12.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Строится формальное асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малыми нелинейностями и диффузией в случае многих пространственных переменных. При принятых на данные задачи условиях, главный член асимптотики описывается многомерным обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Фриза. При выполнении ряда условий приведена оценка остаточного члена по невязке. Библ. 8.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярные возмущения, асимптотическое разложение, обобщенное многомерное уравнение Бюргерса–Кортевега–де Фриза.

DOI: 10.31857/S0044466924030128, **EDN:** XFWMYE

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Строится асимптотическое разложение решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с малой нелинейностью и диффузионными слагаемыми

$$\varepsilon^2 \left(U_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) U_{x_i} \right) = L_p U + \varepsilon F(U, p) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_{i,p} U_{x_i x_i}, \quad (1)$$

$$|x_i| < \infty, 1 \leq i \leq m, t > 0,$$

$$U(\bar{x}, 0, p) = \omega(\bar{x} \varepsilon^{-1}, p). \quad (2)$$

Здесь $U(\bar{x}, t, p)$ – решение, зависящее от времени, пространственных переменных и переменной p , $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый положительный параметр, $D_i(p)$ – непрерывные по переменной p функции, $F(U, p)$ достаточно гладкая, $\omega(\bar{z}, p)$ быстро убывает вместе со всеми своими производными при $\|\bar{z}\| \rightarrow \infty$:

$$|\omega^{(k)}(\bar{z}, p)| < C e^{-\kappa \|\bar{z}\|^2} \quad \forall z, C, \kappa > 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots, \quad (3)$$

константы C, κ могут зависеть от номера k . Операторы коэффициентов диффузионного обмена $B_{i,p}$ описывают диффузионные потоки по пространственным переменным x_i (первый индекс относится к пространственным переменным, второй указывает, что операторы $B_{i,p}$ действуют по переменной p).

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания в сфере научной деятельности на тему «Модели, методы и алгоритмы искусственного интеллекта в задачах экономики для анализа и стилизации многомерных данных, прогнозирования временных рядов и проектирования рекомендательных систем», номер проекта FSSW-2023-0004.

На данные задачи наложим условия.

I. Оператор L_p имеет счетное количество простых собственных значений $\lambda_i, i=0,1,\dots$, которым отвечает полная система собственных функций h_i . Оператор L_p имеет однократное нулевое собственное значение $\lambda_0=0$, которому отвечает собственная функция h_0 , собственная функция h^*_0 есть собственная функция сопряженного оператора L^* , отвечающая нулевому собственному значению; остальные ненулевые собственные значения λ имеют отрицательные вещественные части: $\text{Re } \lambda < -\kappa < 0$.

II. $(F(Z, p), h^*_0) = 0$.

III. Операторы B^*_i имеют нулевые собственные значения, которым отвечают собственные функции $h^*_0 : B^*_i h^*_0 = 0 \forall 1 \leq i \leq m$.

IV. $(h_0, h^*_0) \neq 0$. Ниже положим $(h_0, h^*_0) = 1$.

Легко показать, что из условий I–III следует закон сохранения

$$\int_{R^m} (U, h^*_0) d\bar{x} = \text{const.} \tag{4}$$

Начальные условия (2), имеющие вид асимптотически узкой «шапочки», выбраны таким образом для того, чтобы исследовать асимптотику решения в наиболее интересных зонах больших градиентов начальных условий.

Настоящая работа является продолжением работ [1]–[3]. Основная цель настоящей работы – получение формального асимптотического разложения решения (ФАР, АР) задачи (1), (2) по малому параметру и определение задач, описывающих главный член разложения, представляющий в прикладных областях основной интерес.

Асимптотическое разложение (АР) решения начальной задачи строится методом пограничных функций (см. [4]) и имеет вид

$$\begin{aligned} U(\bar{x}, t, p) &= \bar{U}(\bar{x}, t, p) + S(\zeta, t, p) + \Pi(\xi, \tau, p) + R_N = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(\bar{u}_i(\bar{x}, t, p) + s_i(\zeta, t, p) + \pi_i(\xi, \tau, p) \right) + R_N = U_N + R_N. \end{aligned} \tag{5}$$

Вид переменных $\bar{\zeta}, \bar{\xi}, \tau$ описан ниже. Порядок разложения N определяется гладкостью входных данных.

Для краткости записи в тех случаях, когда это не вызывает неоднозначности при прочтении, в формулах зависимость от параметра p может быть опущена.

В соответствии с погранслоинным методом А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова (см. [4]) нелинейная функция $F(U)$ представляется в виде

$$\begin{aligned} F(U) &= F(\bar{U} + S + \Pi + R) = F(\bar{U}) + \\ &+ (F(\bar{U} + S) - F(\bar{U})) + (F(\bar{U} + \Pi) - F(\bar{U})) + \\ &+ (F(\bar{U} + S + \Pi + R) - F(\bar{U} + S) - F(\bar{U} + \Pi) + F(\bar{U})) = \\ &= \bar{F} + SF + \Pi F + RF. \end{aligned} \tag{6}$$

В представлениях (5) и (6) \bar{U} играет вспомогательную роль.

2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

Наличие нулевого собственного значения у оператора L_p относит сингулярно возмущенное уравнение (1) к так называемому критическому случаю (см. [4]). Построение АР для решения аналогичных задач подробно описано в работах [1]–[3], поэтому многие выкладки ниже опущены.

2.1. Построение регулярной части AP

Регулярная часть AP решения задачи (1) при условиях (2) равна нулю, но для дальнейшего изложения необходимо выписать задачу, из которой определяется главное слагаемое регулярной части:

$$\bar{U}(\bar{x}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \bar{u}_i(\bar{x}, t, p). \quad (7)$$

Опуская выкладки, аналогичные выкладкам в работах [1]–[3], сразу выпишем форму главного члена $\bar{u}_0(x, t, p) = h(p)u_0(x, t)$ и уравнение, которому подчиняется функция $u_0(\bar{x}, t)$:

$$u_{0,t} + \sum_{i=1}^m V_i u_{0,x_i} = 0, \quad (8)$$

где

$$V_i = (D_i(p)h_0, h_0^*) / (h_0, h_0^*). \quad (9)$$

Полученные выражения для коэффициентов V_i существенны для дальнейших построений.

При начальных условиях, зависящих только от растянутых переменных \bar{x} / ε , начальные условия для u_0 имеют вид $u_0(\bar{x}, 0, p) = 0$, поэтому $u_0(\bar{x}, t, p) \equiv 0 \forall \bar{x}, t, p$, все остальные u_i тоже равны нулю. Соответственно этому, $\bar{U} = 0$ и представление (6) принимает вид

$$F(U) = F(S + \Pi + R) = F(S) + F(\Pi) + \\ + (F(S + \Pi + R) - F(S) - F(\Pi)) = SF + \Pi F + RF.$$

2.2. Построение функции S

Функция S , зависящая от растянутых переменных $\bar{\zeta}, t$, строится в виде

$$S(\bar{\zeta}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i s_i(\bar{\zeta}, t, p), \quad \zeta_i = (x_i - V_i t) / \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

где V_i определяются формулами (9). Функция S есть решение уравнения

$$\varepsilon^2 \left(S_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) S_{x_i} \right) = L_p S + \varepsilon S F + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m S B_{i,p} S_{x_i}, \quad (11) \\ |\bar{\zeta}| < \infty, \quad t > 0.$$

Переходя к переменным $(\bar{\zeta}, t)$ и принимая во внимание $\bar{U} = 0$, получаем уравнение для определения $S(\bar{\zeta}, t, p)$

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) S_{\zeta_i} = AS + \varepsilon F(S, p) + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_{i,p} S_{\zeta_i \zeta_i}. \quad (12)$$

Подставляя (10) в (12) (см. [4]), получаем соотношения

$$\varepsilon^0 : L_p s_0 = 0, \\ \varepsilon^1 : L_p s_1 = \tilde{S}_1, \\ \varepsilon^2 : L_p s_2 = s_{0,t} + \tilde{S}_2, \\ \dots$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) s_{0,\zeta_i} - F(s_0, p) - \sum_{i=1}^m B_{i,p} s_{0,\zeta_i}, \\ \tilde{S}_2 &= \sum_{i=1}^m (D_i(p) - V_i) s_{1,\zeta_i} - F'_u(s_0, p) s_1 - \sum_{i=1}^m B_{i,p} s_{1,\zeta_i}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Из первого соотношения получаем

$$s_0(\bar{\zeta}, t, p) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p). \tag{13}$$

Легко показать, что уравнение для s_1 разрешимо в силу условий II и III, следовательно, s_1 можно записать в виде

$$s_1(\bar{\zeta}, t) = \varphi_1(\bar{\zeta}, t) h_0(p) + G\tilde{S}_1. \tag{14}$$

В (13) и (14) $\varphi_0(\bar{\zeta}, t), \varphi_1(\bar{\zeta}, t)$ – пока не определенные функции, зависящие от переменных $(\bar{\zeta}, t)$, G – псевдообратный к L_p оператор. (Назовем линейный оператор G псевдообратным к оператору L , имеющему однократное нулевое собственное значение $\lambda = 0$, если решение уравнения $LY = F$ при выполнении условия $(F, h_0^*) = 0$ представимо в виде $Y = GF + Ch_0$, где C не зависит от p , h_0^* – собственная функция сопряженного оператора L^* , отвечающая собственному значению $\lambda = 0$.)

Исключим с помощью (14) функцию φ_1 из условия разрешимости уравнения для определения s_2 :

$$(s_{0,t} + \tilde{S}_2, h^*_0) = 0.$$

Подставляя сюда $s_0 = \varphi_0 h_0, \tilde{S}_2$, исключая s_1 с помощью соотношения (14), принимая во внимание условия I–III и легко проверяемое равенство $((D_i(p) - V_j)h_0, h^*_0) = 0$, получаем замкнутое уравнение для определения φ_0 . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Psi_i &= (D_i(p) - V_i), \quad M_{ii} = (\Psi_i G \Psi_i h_0, h^*_0), \\ M_{ij} &= ((\Psi_i G \Psi_j h_0, h^*_0) + (\Psi_j G \Psi_i h_0, h^*_0)) / 2, \\ F_{i,\text{eff}} &= -(\Psi_i G F(\varphi_0 h_0), h^*_0), \quad B_{ik,\text{eff}} = -(\Psi_k G B_i h_0, h^*_0). \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда уравнение для определения φ_0 может быть записано в компактной форме

$$\begin{aligned} \varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{i,\text{eff}}(\varphi_0))'_{\zeta_i} + \\ + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Наложим условие диссипативности.

V. Квадратичная форма $\sum_{i,j=1}^m M_{ij} z_i z_j$ является отрицательно знакоопределенной (или полузнакоопределенной):

$$\sum_{i,j=1}^m M_{ij} z_i z_j \leq 0 \quad \forall \sum_{i=1}^m z_i^2 > 0.$$

Не затрагивая вопросы существования, единственности и свойств решений уравнения (16), формально построим остальные члены разложения (10).

Уравнения для остальных членов разложения (10) получаются стандартно (см. [4]). Опуская объемные выкладки, которые приведены, например, в [1],[2], вводя обозначение

$$F1_{i,\text{eff}} = (\Psi_i G F'(\varphi_0 h_0) h_0, h^*_0), \quad i > 0,$$

и принимая во внимание обозначения (15), введенные выше, запишем уравнение для определения φ_1 :

$$\varphi_{1,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{1,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m (F_{1,\text{eff}} \varphi_1)_{\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{1,\zeta_i \zeta_k} = \Phi_1(\bar{\zeta}, t), \quad (17)$$

где Φ_j выражается через φ_0 . Отметим, что уравнение (17), в отличие от уравнения (16), линейное.

Уравнения для остальных членов разложения получаются аналогично и имеют аналогичный вид (с заменой индекса у φ и Φ с 1 на n , при этом Φ_n выражается через $\varphi_j, j < n$).

2.3. Построение функции Π

Построенная выше функция S ни в каком приближении не может удовлетворить начальным условиям. Для удовлетворения начальным условиям строится функция Π :

$$\Pi(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p), \quad \bar{\xi} = \bar{x} / \varepsilon, \quad \tau = t / \varepsilon^2, \quad (18)$$

Построение функции Π делается стандартно (см. [4]). Функция Π есть решение уравнения

$$\Pi_\tau + \varepsilon \sum_{i=1}^m D_i(p) \Pi_{\xi_i} = L_p \Pi + \varepsilon P F + \varepsilon \sum_{i=1}^m B_{i,p} \Pi_{\xi_i}, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0, \quad (19)$$

совместно с функцией S должна удовлетворять начальным условиям и быть функцией погранслоя:

$$S(\bar{\zeta}, 0, p) + \Pi(\bar{\xi}, 0, p) = \omega(\bar{x} \varepsilon^{-1}, p), \quad \Pi(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0. \quad (20)$$

$\tau \rightarrow +\infty$

Построение уравнений, из которых определяются члены разложения (18), проводится стандартно (см. [4]), описано во многих работах и здесь не приводится.

Главный член разложения (18) есть решение уравнения

$$\pi_{0,\tau} = L_p \pi_0, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0. \quad (21)$$

Начальные условия для s_0 и π_0 ставятся совместно с условием $\pi_0 \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\pi_0|_{\tau=0} + s_0|_{t=0} = \omega(\bar{\xi}, p), \quad \pi_0(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0. \quad (22)$$

$\tau \rightarrow +\infty$

В силу условия I на собственные значения оператора L_p и условия (20) функция π_0 имеет вид

$$\pi_0(\bar{\xi}, \tau, p) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i(\bar{\xi}) h_i(p) e^{\lambda_i \tau}. \quad (23)$$

Начальные условия для φ_0 и π_0 получаются из (22) и (23) с учетом $s_0 = h_0(p) \varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ и полноты системы собственных функций h_i :

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i(\bar{\xi}) h_i(p) + \varphi_0(\bar{\zeta}, 0) h_0(p) = \omega(\bar{\xi}, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i(\bar{\xi}) h_i(p),$$

откуда однозначно находятся $\varphi_0(\bar{\zeta}, 0)$ и все $C_i, i=1, 2, \dots$:

$$\varphi_0(\bar{\zeta}, 0) = \omega_0(\bar{\zeta}), \quad C_i(\bar{\xi}) = \omega_i(\bar{\xi}) \quad \forall i \geq 1. \quad (24)$$

Начальные условия для $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ определены, функция π_0 построена в явном виде.

Остальные $\pi_i (i \geq 1)$ определяются из неоднородных уравнений

$$\pi_{i,\tau} = L_p \pi_i + P_i, \quad i \geq 1, \quad \|\bar{\xi}\| < \infty, \tau > 0. \quad (25)$$

Здесь P_i выражаются через $\pi_j, j < i$.

Начальные условия для функций φ_i и π_i ставятся совместно:

$$s_i(\bar{\xi}, 0, p) + \pi_i(\bar{\xi}, 0, p) = 0, \pi_i(\bar{\xi}, \tau, p) \rightarrow 0 \quad \forall i > 0. \quad (26)$$

$\tau \rightarrow \infty$

Из (26) получаются начальные условия для φ_i и π_i по аналогии с [4].

Тем самым, построены задачи для определения всех членов AP (5).

3. ОЦЕНКА S- И П-ФУНКЦИЙ

3.1. Оценка S-функций

Авторам не удалось найти в литературе исчерпывающих результатов, касающихся вопросов существования, единственности и оценок решений начальных задач для уравнений типа (16). Для одномерных уравнений подобного вида ряд результатов приведен, например, в работах [5]–[7].

Ввиду этого обстоятельства, ниже придется оперировать с, по сути, непроверяемыми условиями на данные задачи.

Будем считать выполненными следующие условия 1 и 2.

Условие 1. Пусть выполнены условия I–V и функция $F(U, p)$, операторы L_p и $B_{i,p}$ таковы, что решение задачи (15), (23) существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, и на этом промежутке выполняется оценка

$$|\varphi_0(x, t)| < C e^{-\kappa t^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, C > 0, \kappa > 0, \quad (27)$$

где C и κ – положительные постоянные.

Условие 2. Решения всех задач (16), (26) до номера N существуют, единственны и удовлетворяют на том же промежутке оценке

$$|\varphi_i(x, t)| < C e^{-\kappa t^2} \quad \forall 0 \leq t \leq T, \forall 1 \leq i \leq N, C > 0, \kappa > 0. \quad (28)$$

3.2. Оценка П-функций

Из явного вида функции π_0 (23) и алгоритма построения функций $\pi_i, i=1, 2, \dots$, при выполнении условия I справедливы оценки

$$\|\pi_i(\bar{\xi}, \tau, p)\| < C \exp\left(-\kappa\left(\|\bar{\xi}\|^2 + \tau\right)\right), \quad \kappa > 0, \quad i = 0, 1, \dots \quad (29)$$

Доказательство элементарное и здесь не приводится.

4. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Ограничимся теоремой об оценке остаточного члена в AP (5) по невязке.

Будем считать выполненным следующее условие 3, непроверяемое непосредственно по данным задачи.

Условие 3. Пусть решение задачи (1), (2), существует и единственно на некотором промежутке $[0, T]$, где $T > 0$ не зависит от ε .

Оценка остаточного члена проводится по невязке.

Теорема. Если справедливы условия I–V и условия 1, 2, 3, то решение задачи (1), (2) представимо в виде

$$U(\bar{x}, t) = S_N(\bar{\xi}, t) + \Pi_N(\bar{\xi}, \tau) + R_{N+3} = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\bar{\xi}, t) + \pi_i(\bar{\xi}, \tau)) + R_N = U_N + R_N,$$

где S+П есть построенное AP, и остаточный член удовлетворяет задаче Коши

$$\varepsilon^2 \left(R_t + \sum_{i=1}^m D_i(p) R_{x_i} \right) = L_p R + \varepsilon R F + \varepsilon^3 \sum_{i=1}^m B_i R_{x_i x_i} + r,$$

$$|\bar{x}| < \infty, t > 0, R(\bar{x}, 0) = 0, r = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Доказательство. Существование самой величины R следует из условия 3. Оценка $r = O(\varepsilon^{N+1})$ непосредственно вытекает из оценок (27)–(29) и алгоритма построения АР.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Отметим еще раз, что главный член АР (5)

$$U(\bar{x}, t, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(s_i(\bar{\zeta}, t, p) + \pi_i(\bar{\zeta}, \tau, p) \right) + R_N$$

при $t > t_0$, где $t_0 > 0$ – любое фиксированное (не зависящее от ε) число, имеет вид

$$s_0(\bar{\zeta}, t, p) = \varphi_0(\bar{\zeta}, t) h_0(p). \quad (30)$$

В представлении (30) $\varphi_0(\bar{\zeta}, t)$ есть решение уравнения (15), которое в развернутой форме имеет вид

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m F'_{i,\text{eff}}(\varphi_0) \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \quad (31)$$

Уравнение (31) можно назвать обобщенным уравнением Бюргерса–Кортевега–де Фриза (см. [8]). Для квадратичной по переменной u функции $F(u, p)$ уравнение (31) становится прямым обобщением уравнения Бюргерса–Кортевега–де Фриза на многомерный случай:

$$\varphi_{0,t} + \sum_{i,j=1}^m M_{ij} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_j} + \sum_{i=1}^m k_i \varphi_0 \varphi_{0,\zeta_i} + \sum_{i,k=1}^m B_{ik,\text{eff}} \varphi_{0,\zeta_i \zeta_k} = 0. \quad (32)$$

В случае одной пространственной переменной уравнение (32) отличается от уравнения Бюргерса–Кортевега–де Фриза (см. [8]) только коэффициентами.

2. Представляется интересным тот факт, что эволюция начального распределения (2), имеющего вид асимптотически узкой «шапочки», определяется уравнением (31) – уравнением в частных производных третьего порядка, в то время как исходное уравнение (1) содержит производные по пространственным переменным второго порядка.

3. При иной расстановке степеней малого параметра, а также при изменении условий на функцию F и на операторы L, B асимптотика решения может иметь иной вид.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров А.В.* Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 3. С. 519–528.
2. *Заборский А.В., Нестеров А.В., Нечаев Д.Ю.* Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения переноса с многими пространственными переменными // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 12. С. 137–145.
3. *Заборский А.В., Нестеров А.В.* Об асимптотике решения задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциально операторного уравнения переноса с малой диффузией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 2. С. 87–95.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 106.
5. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Асимптотика решения уравнения Уизема при больших временах // Матем. моделирование. 1990. Т. 2. № 3. С. 72.

6. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Об асимптотике при $t \rightarrow \infty$ решений нелинейных уравнений с диссипацией // Матем. заметки. 1989. Вып. 4. С. 118.
7. Наумкин П.И., Шишмарев И.А. Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега–де-Фриза–Бюргера // Функц. анализ и его прил. 1991. Т. 25. Вып. 1. С. 21.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 624.

ON ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION TO THE CAUCHY PROBLEM FOR A SINGULARLY PERTURBED OPERATOR-DIFFERENTIAL TRANSPORT EQUATION WITH WEAK DIFFUSION IN THE CASE OF SEVERAL SPACE VARIABLES

A. V. Nesterov^{a,*}

^a*Plekhanov Russian University of Economics, 36 Stremyanny Lane, Moscow, 117997 Russia*

**e-mail: andrenerov@yandex.ru*

Received 10 October, 2023

Revised 12 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. A formal asymptotic expansion is constructed for the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed operator differential transport equation with small nonlinearities and weak diffusion in the case of several space variables. Under the conditions imposed on the data of the problem, the leading asymptotic term is described by the multidimensional generalized Burgers–Korteweg–de Vries equation. Under certain conditions, the remainder is estimated with respect to the residual.

Keywords: small parameter, singular perturbations, asymptotic expansion, generalized multidimensional Burgers–Korteweg–de Vries equation.

УДК 519.63

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА О РАСЧЕТЕ ЛУЧЕВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ОКЕАНИЧЕСКИХ ВОЛН, ОТРАЖЕННЫХ ОТ БЕРЕГОВОЙ ЛИНИИ¹⁾

© 2024 г. И. А. Носиков^{1,*}, А. А. Толченников^{2,**}, М. В. Клименко^{3,4,***}

¹150003 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ, Россия

²117526 Москва, пр-т Вернадского, 101, ИПМех, Россия

³236035 Калининград, ул. Пионерская, 61, КФ ИЗМИРАН, Россия

⁴1199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9, СПбГУ, Россия

*e-mail: ianosikov@wdizmiran

**e-mail: tolchennikovaa@gmail.com

***e-mail: myklimenko@wdizmiran.ru

Поступила в редакцию 05.07.2023 г.

Переработанный вариант 09.10.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Рассматривается вариационный способ решения задачи об отражении лучевых характеристик длинных океанических волн от береговой линии с заданными положениями источника и точки регистрации волны. Показано, что исходная краевая задача может быть сведена к расчету стационарных точек функционала времени распространения волны вдоль луча. Информация о целевой функции в области решений траекторной задачи позволяет построить систематическую процедуру поиска минимумов, седловых точек и максимумов. Особенностью предложенного подхода является оптимизация точки отражения луча вдоль заданной береговой линии. Библ. 19. Фиг. 5. Табл. 1.

Ключевые слова: лучевое приближение, принцип Ферма, граничная задача, волны цунами, метод бихарактеристик.

DOI: 10.31857/S0044466924030134, **EDN:** XFPIDM

ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работах [1–4] был предложен аналитико-численный подход, осуществляющий быстрый расчет основных параметров длинных океанических волн в рамках теории мелкой воды, состоящий из двух основных этапов: нахождения фронта волны на основе лучей, рассчитанных для заданных граничных условий, и определение высоты профиля с использованием асимптотических формул оператора Маслова. В представленном аналитико-численном подходе, с вычислительной точки зрения, наиболее трудоемким является первый этап – решение краевой задачи. Задача значительно усложняется в случае сложной формы дна океана, а также рассмотрения лучей, отраженных от береговой линии. Наиболее распространенный подход к решению краевой задачи основан на сведении исходной граничной задачи к задаче Коши для гамильтоновой системы лучевых уравнений.

Запишем систему Гамильтона [5, 6] $\mathbf{r} = \mathbf{R}(\phi, t)$, $\mathbf{p} = \mathbf{P}(\phi, t)$ в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{r}} = H_p(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = c(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -H_r(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\nabla c(\mathbf{r})|\mathbf{p}|, \quad (1)$$

где $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}| c(\mathbf{r})$ – гамильтониан, $c(\mathbf{r}) = \sqrt{gD(\mathbf{r})}$ – скорость волны в среде, g – ускорение свободного падения, $D(\mathbf{r})$ – глубина океана в точке с радиус–вектором \mathbf{r} . Лучи испускаются из начальной точки $\mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0)$ (точки, где локализовано начальное возмущение $\eta^0((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / l)$) с начальными импульсами, лежащими на единичной окружности $\mathbf{p}|_{t=0} = \mathbf{n}(\phi) = (\cos \phi, \sin \phi)$.

¹⁾ Работа по реализации вариационного метода выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 21-71-30011 (Носиков И. А.). Разработка и развитие метода обобщенной силы и численное моделирование выполнено при финансовой поддержке Проекта Минобрнауки РФ № 075-15-2021-583 (Клименко М. В.).

Запишем краевые условия нахождения траекторий, выпущенных с неизвестным углом из заданной точки \mathbf{r}_0 и приходящих за некоторое (также неизвестное) время в заданную точку наблюдения \mathbf{r}_1 :

$$\mathbf{R}(\phi, t) = \mathbf{r}_1.$$

Как правило, решение краевой задачи осуществляется методом пристрелки, что в случае сложной формы дна представляет собой ресурсоемкую задачу, которая не всегда сходится.

Альтернативным подходом к решению краевой задачи является вариационный расчет лучей на основе принципа Ферма [7]. Ранее в работе [8] был предложен вариант вариационного метода для расчета лучевых траекторий, соответствующих экстремалям функционала времени прихода волны:

$$\delta T[\gamma] = \delta \int_A^B \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl = 0, \tag{2}$$

где A и B – положения начальной и конечной точек лучевой траектории γ , $c(\mathbf{r})$ – скорость волны в точке \mathbf{r} на лучевой траектории γ , dl – элемент длины. Основная идея вариационного метода заключается в прямой численной оптимизации функционала (2), нахождению траекторий, на которых функционал принимает стационарное значение. Главным преимуществом вариационного подхода является автоматическое выполнение граничных условий, так как положения конечных точек зафиксированы в процессе расчета луча. Также на примере модельных сред было показано [8], что вариационный метод позволяет быстро рассчитывать все лучи с заданными граничными условиями и имеет широкие перспективы для дальнейшего применения в задаче распространения океанических волн.

Вместе с тем, одной из важных проблем описания распространения океанических волн является задача о расчете параметров волны, отраженной от берега. В наиболее общем случае переменная глубина океана и сложная геометрия береговой линии снижает эффективность метода пристрелки. Стоит отметить, что в других областях науки, в частности, в сейсмологии, известны варианты вариационных методов [9, 10], учитывающих эффекты преломления и отражения лучей на границах раздела сред с различными значениями показателя преломления. Однако ввиду сложности и ряда ограничений, широкого применения данные методы не получили, что определяет актуальность дальнейшего развития вариационного метода [8] для решения краевой задачи о расчете лучей океанических волн, отраженных от берега.

Целью данной работы является представление нового варианта вариационного метода для расчета лучей, отраженных от берега, и его применение в модельной среде.

Статья организована следующим образом: в разд. 1 приведено описание нового варианта вариационного метода. В разд. 2 представлены результаты расчетов лучей с различным числом отражений в аналитических моделях океанического дна с линейной и нелинейной геометрией берега. Приведено сравнение лучей, полученных вариационным методом, с решениями системы Гамильтона. Заключение и выводы представлены в разд. 3.

1. ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД

Рассмотрим модификацию вариационного метода, представленного в работе [8, 11], с учетом отражения лучевой траектории от берега. Функционал времени распространения океанической волны вдоль некоторой кривой γ имеет следующий вид:

$$T[\gamma] = \int_A^B \frac{1}{c(\mathbf{r})} dl, \tag{3}$$

где A и B – положения начальной и конечной точек кривой γ , $c(\mathbf{r})$ – скорость волны в точке \mathbf{r} , dl – элемент длины. Будем считать, что кривая γ является начальным приближением луча, отраженного M раз от линии берега на всем протяжении от начальной точки A до конечной точки B .

Используя метод прямоугольников, запишем приближенное выражение для функционала:

$$T[\gamma] \approx T(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{c(\mathbf{r}_{i+1/2})} |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|. \tag{4}$$

Кривая γ представлена в виде кусочно-линейной кривой со следующими параметрами: N – число узлов (точек) с радиус-векторами \mathbf{r}_i , $i = [1, \dots, N]$ – номер узла, $c(\mathbf{r}_{i+1/2})$ – значение скорости на интервале

$\mathbf{r}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_i)$ между узлами i и $i + 1$, $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots, \mathbf{r}_{N-1})$ – многомерный вектор, компонентами которого являются вектор \mathbf{r}_i . Здесь и далее под символами, выделенными полужирным шрифтом, понимаются векторы в многомерном пространстве целевой функции (4). Конечные узлы (точки A и B) зафиксированы по умолчанию, а положения $N - 2$ промежуточных узлов не закреплены на протяжении всего процесса поиска оптимума.

Отметим, что приближенный расчет интеграла (3) может быть осуществлен методом трапеций, Симпсона и другими методами. В данном случае использование метода прямоугольников (4) позволяет избежать проблемы сингулярности подинтегральной функции на берегу ($c = 0$), поскольку величина $c(\mathbf{r}_{i+1/2})$ рассчитывается на интервалах $\mathbf{r}_{i+1/2}$ кусочно-линейной кривой γ , на каждом из которых выполняется условие $c > 0$.

Выделим из числа промежуточных узлов набор точек числом M , соответствующих предполагаемым точкам отражения луча от берега. Примем, что начальные положения таких точек должны принадлежать кривой ε , описывающей береговую линию. Далее будем учитывать, что смещения всех точек отражения осуществляется только вдоль касательных τ_j к кривой ε , где $j = [1, \dots, M]$ – номер точки отражения.

В результате вариационная задача поиска стационарных точек целевой функции (4) сводится к определению истинных положений всех точек отражений \mathbf{r}_j , а также промежуточных узлов \mathbf{r}_i . Оптимальная конфигурация кусочно-линейной кривой, удовлетворяющая принципу стационарности, представляет собой решение исходной краевой задачи.

Далее последовательно рассмотрим способ оптимизации по переменным \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j . В качестве независимых переменных будем считать положение точек отражения \mathbf{r}_j .

1.1. Оптимизация промежуточных узлов

Для начала рассмотрим процедуру оптимизации целевой функции (4) по переменным \mathbf{r}_i в соответствии с методом обобщенной силы [11].

В случае поиска локального минимума движение каждого i -го узла осуществляется под действием фиктивной силы, основанной на модифицированном градиенте целевой функции \mathbf{F}_{\min} :

$$\mathbf{F}_{\min} = -\nabla T(\mathbf{r})|_{\perp} + \mathbf{F}_{\text{sp}}, \tag{5}$$

где

$$\nabla T(\mathbf{r})|_{\perp} = (\nabla_2 T(\mathbf{r})|_{\perp}, \nabla_3 T(\mathbf{r})|_{\perp}, \dots, \nabla_{N-1} T(\mathbf{r})|_{\perp}), \tag{6}$$

$$\mathbf{F}_{\text{sp}} = (\mathbf{F}_2^{\text{sp}}, \mathbf{F}_3^{\text{sp}}, \dots, \mathbf{F}_{N-1}^{\text{sp}}), \tag{7}$$

здесь $(\nabla_i T(\mathbf{r})|_{\perp}) = (\partial T / \partial \mathbf{r}_i)|_{\perp}$ – поперечная к траектории компонента градиента целевой функции вдоль \mathbf{r}_i , $\mathbf{F}_i^{\text{sp}} = \kappa(|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i| - |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|)\tau_i$ – “фиктивная” сила взаимодействия точек траектории или сила упругости [12], действующая на каждый узел \mathbf{r}_i , κ – константа упругости (в наших расчетах $\kappa = 0.1$), τ_i – касательная к траектории в точке \mathbf{r}_i . Введение силы упругого взаимодействия между точками кусочно-линейной кривой позволяет равномерно распределять точки вдоль траектории, избегая областей их компактной локализации, и, также, значительно ускорить сходимость луча [13].

В случае поиска седловой точки, движение каждого i -го узла осуществляется под действием фиктивной силы $\mathbf{F}_{\text{saddle}}$:

$$\mathbf{F}_{\text{saddle}} = \begin{cases} \sum_{\eta=1}^R (\nabla T(\mathbf{r})|_{\perp} \cdot \mathbf{Q}_{\eta}) \mathbf{Q}_{\eta} + \mathbf{F}_{\text{sp}}, & \text{если } \lambda_{\eta} \geq 0, \\ -\nabla T(\mathbf{r})|_{\perp} + 2 \sum_{\eta=1}^R (\nabla T(\mathbf{r})|_{\perp} \cdot \mathbf{Q}_{\eta}) \mathbf{Q}_{\eta} + \mathbf{F}_{\text{sp}}, & \text{если } \lambda_{\eta} < 0. \end{cases} \tag{8}$$

Здесь η – индекс отрицательного собственного значения λ_{η} гессиана $H_{i,k} = \partial^2 T / \partial \mathbf{r}_i \partial \mathbf{r}_k$ (i и k – индекс промежуточного узла) и \mathbf{Q}_{η} – соответствующий отрицательному собственному значению нормированный собственный вектор, R – число отрицательных собственных значений гессиана.

В результате выражения (5) и (8) составляют основу итерационной процедуры сходимости, в ходе которой положения узлов \mathbf{r}_i последовательно смещаются к оптимальной форме. Критерием останова

оптимизации является падение модуля максимальной силы $\max\{\mathbf{F}_i\}$ ниже некоторого малого параметра σ : $\max\{\mathbf{F}_i\} < \sigma$. В данной работе используется значение параметра $\sigma = 10^{-9}$.

1.2. Оптимизация точек отражения

Далее рассмотрим процедуру оптимизации целевой функции (4) по независимым переменным \mathbf{r}_j . Запишем выражение для частной производной функционала в каждой j -й точке отражения, спроецированной на направление касательной к линии берега τ_j :

$$\frac{\partial T}{\partial \tau_j} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_j} - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \mathbf{n}_j \right) \mathbf{n}_j, \tag{9}$$

где \mathbf{n}_j – нормаль к линии берега ε в точке \mathbf{r}_j . Тогда выражение для силы, действующей на каждую j -ю точку отражения, имеет следующий вид:

$$\hat{\mathbf{F}}_j = \frac{dT}{d\tau_j} = \frac{\partial T}{\partial \tau_j} + \sum_{i=1}^N \frac{d\mathbf{r}_i}{d\tau_j} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}_i}, \tag{10}$$

где τ_j – касательная к линии берега ε , $d\mathbf{r}_i / d\tau_j$ – матрица связи переменных \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j .

Поиск стационарных точек по переменным \mathbf{r}_j может быть осуществлен аналогично (5) и (8) заменой $\nabla T(\mathbf{r})$ на $\hat{\mathbf{F}} = (\hat{\mathbf{F}}_1, \hat{\mathbf{F}}_2, \dots, \hat{\mathbf{F}}_M)$:

$$\dot{\mathbf{F}}_{\min} = -\hat{\mathbf{F}}, \tag{11}$$

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{saddle}} = \begin{cases} \sum_{\eta=1}^R (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_\eta) \mathbf{Q}_\eta, \text{ если } \lambda_\eta \geq 0, \\ -\hat{\mathbf{F}} + 2 \sum_{\eta=1}^R (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_\eta) \mathbf{Q}_\eta, \text{ если } \lambda_\eta < 0. \end{cases} \tag{12}$$

Выражения (11) и (12) составляют основу сходимости точек отражения \mathbf{r}_j к оптимальной форме. Аналогично оптимизации по переменным \mathbf{r}_i , критерием останова является падение модуля максимальной силы $\max\{\mathbf{F}_j\}$ ниже некоторого малого параметра ν : $\max\{\mathbf{F}_j\} < \nu$. В данной работе используется значение параметра $\nu = 10^{-9}$.

1.3. Начальное приближение луча

В наиболее общем случае начальное приближение к искомому лучу выбирается исходя из особенностей рассматриваемой задачи. Как правило, простым примером начального приближения луча является отрезок прямой линии, соединяющей конечные точки. Кроме того, в качестве начального приближения также может выступать предварительно найденный луч, соответствующий ближайшему локальному минимуму. Отметим, что начальное положение точек отражения \mathbf{r}_j должно находиться на берегу, соответствующего некоторой кривой ε . Для этого необходимо для каждой \mathbf{r}_j осуществить градиентный спуск вдоль вектора

$$\mathbf{q}_j = p(D(\mathbf{r}_j) - D_0) \mathbf{g}_j \tag{13}$$

до выполнения условия $D(\mathbf{r}_j) = D_0 = 0$. Здесь $D(\mathbf{r}_j)$ – функция глубины дна, D_0 – глубина, на которой необходимо закрепить точку \mathbf{r}_j , $\mathbf{g}_j = \nabla D(\mathbf{r}_j) / \|\nabla D(\mathbf{r}_j)\|$ – единичный вектор вдоль градиента $\nabla D(\mathbf{r}_j)$ в точке \mathbf{r}_j , p – константа, регулирующая скорость градиентного спуска (в нашем случае $p = 1$). Важной особенностью сходимости точек отражения \mathbf{r}_j , является учет зависимости $\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_j)$ в процедуре оптимизации, в результате чего после каждого смещения \mathbf{r}_j требуется коррекция положений всех узлов \mathbf{r}_i .

1.4. Алгоритм оптимизации луча

Ниже приведем алгоритм оптимизации луча с учетом отражения от берега.

1. Инициализация метода:

- (а) задание положений точек A и B , числа узлов (точек) N и числа точек отражения M ;
- (б) генерация начального приближения траектории (в данном случае прямой отрезок, соединяющий точки A и B);
- (в) фиксация всех M точек отражения на береговой линии (выражение (13)).

2. Расчет силы F_i для промежуточных узлов r_i (выражение (5) для минимума/максимума или (8) для седловых точек). Если выполняется условие $\max\{F_i\} < \sigma$, то переход к п. 4. Иначе переход к п. 3.
3. Смещение промежуточных узлов r_i вдоль силы F_i . Возврат к п. 2.
4. Расчет силы \hat{F}_j для точек отражения r_j (выражение (11) для минимума/максимума или (12) для седловых точек). Если выполняется условие $\max\{\hat{F}_j\} < \nu$, то переход к п. 6. Иначе переход к п. 5.
5. Смещение точек отражения r_j луча вдоль силы \hat{F}_j . Возврат к п. 2.
6. Если выполнены оба условия $\max\{F_i\} < \sigma$ и $\max\{\hat{F}_j\} < \nu$, то решение найдено. Иначе переход к п. 2.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ ОТРАЖЕНИЯ ЛУЧА ОТ БЕРЕГА

В данном разделе рассматриваются численные расчеты распространения длинных волн вариационным методом в аналитических моделях океанического дна. Рассмотрены две простые задачи с различной геометрией береговой линии: плоский берег и круглый бассейн с параболическим дном. Верификация решений, полученных вариационным методом, осуществляется сопоставлением с решениями гамильтоновой системы (1).

2.1. Плоский берег

Применение вариационного подхода для расчета лучей, отраженных от плоского берега, рассмотрим на примере среды, где функция глубины $D(y)$ задается следующим выражением [14]:

$$D(y) = y. \quad (14)$$

Скорость распространения волны задается формулой Лагранжа $c = \sqrt{gD(y)}$, где в качестве упрощения примем $g = 1$. Для рассматриваемой модельной задачи воспользуемся аналитическими выражениями для лучевых траекторий из работы [14], которые будем считать эталонными:

$$X_1(\tau, \psi) = \left(\frac{\tau}{2} \pm 1\right)^2, \quad P_1(\tau, \psi) = \left(\frac{\tau}{2} \pm 1\right)^{-1}, \quad (15)$$

$$Q(\tau, \psi) = \frac{\tau}{2} \pm 1, \quad \Theta(\tau, \psi) = 1, \quad (16)$$

$$X_2(\tau, \psi) = Y(\tau, \psi) = P_2(\tau, \psi) = \Xi(\tau, \psi) = 0,$$

при $\psi \in \{0, \pi\}$ (верхний знак отвечает $\psi = 0$, а нижний $-\psi = \pi$), а при $\psi \notin \{0, \pi\}$ – функциями

$$X_1(\tau, \psi) = \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \psi}, \quad P_1(\tau, \psi) = \frac{\sin \psi}{\phi}, \quad (17)$$

$$Q(\tau, \psi) = \frac{\phi}{\sin \psi}, \quad \Theta(\tau, \psi) = \cos^2 \phi,$$

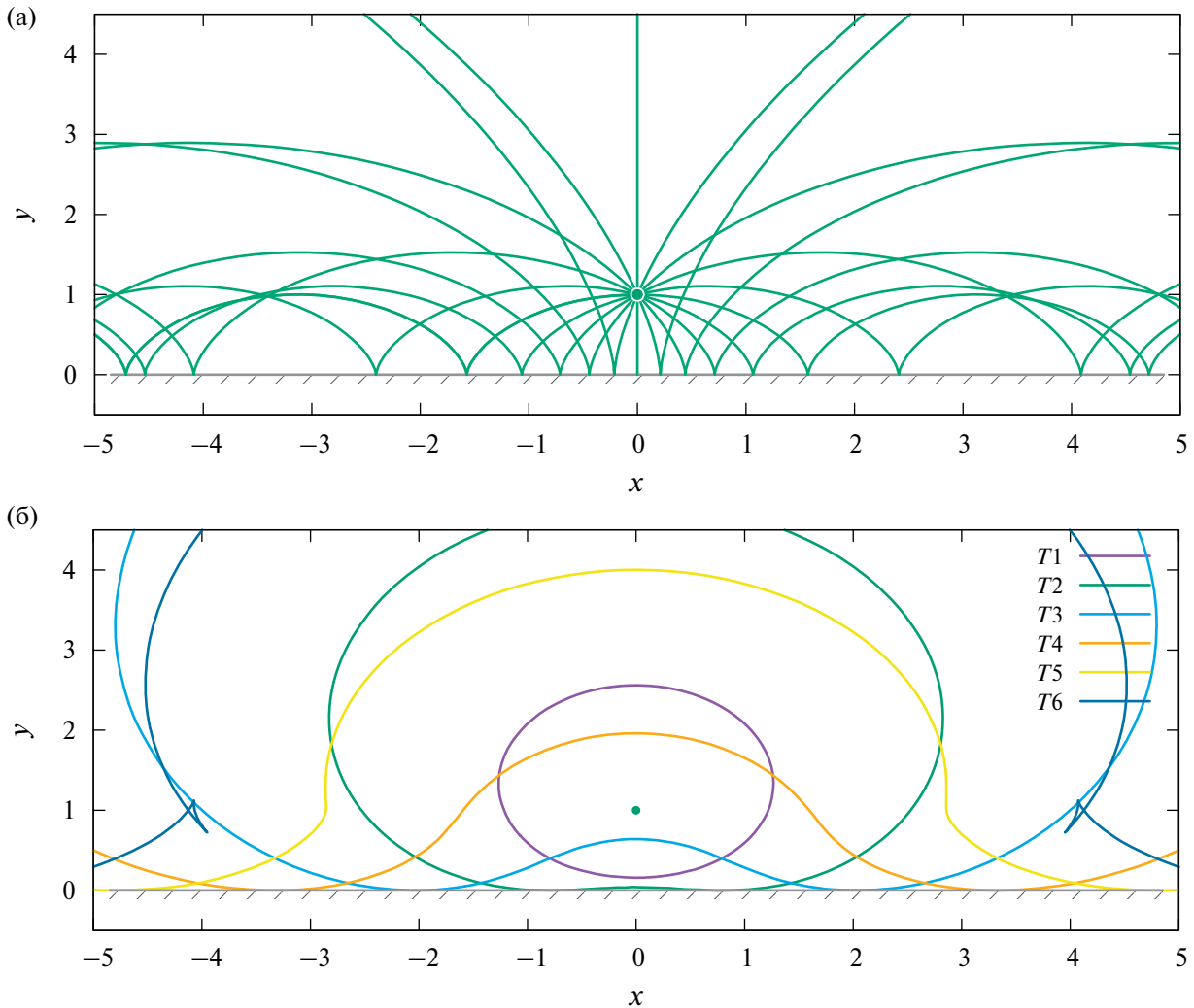
$$X_2(\tau, \psi) = Y(\tau, \psi) = \frac{\tau}{2 \sin \psi} + \frac{\sin 2\psi - \sin 2\phi}{2 \sin^2 \psi}, \quad (18)$$

$$P_2(\tau, \psi) = \Xi(\tau, \psi) = \sin \psi,$$

где $\phi = \psi + \frac{\tau \cdot \sin \psi}{2}$.

Здесь функции, описывающие траекторию в стандартных координатах (x, p) в фазовом пространстве Φ обозначены через $x = X(\tau, \psi)$, $p = P(\tau, \psi)$, а в окрестности берега в расширенном фазовом пространстве Φ_∞ через нестандартные (q, y, η, ξ) : $q = Q(\tau, \psi)$, $y = Y(\tau, \psi)$, $\theta = \Theta(\tau, \psi)$, $\xi = \Xi(\tau, \psi)$. На фиг. 1 представлен пример семейства лучевых траекторий и фронтов волны, полученных на основе выражений (15) – (18) для набора начальных углов излучений в диапазоне $[0, 2\pi]$ с шагом $\frac{\pi}{10}$.

Рассмотрим лучевые траектории с заданными граничными условиями $A(0, 1)$ и $B(5, 1)$. В данном случае решениями граничной задачи являются три отраженных луча (см. фиг. 2), соответствующие трем стационарным точкам целевой функции (4). Выполним проверку соответствия полученных лучевых траекторий стационарным точкам целевой функции на основе численной процедуры “экспресс анализа” [15].

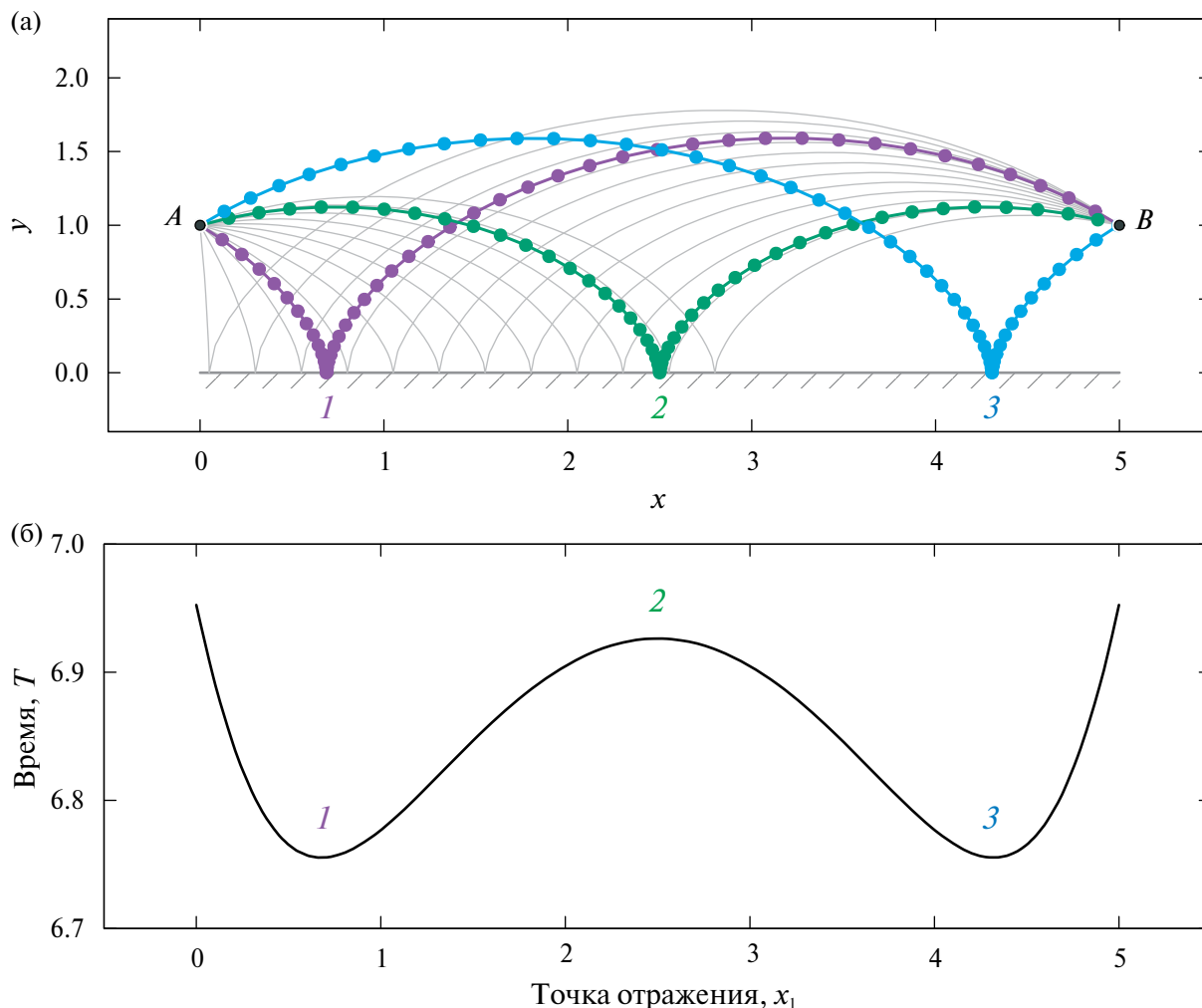


Фиг. 1. а – Семейство лучевых траекторий (зеленые линии) – решений гамильтоновой системы (1), отраженных от береговой линии; б – фронты океанической волны, полученные на основе лучевых траекторий для моментов времени $T_1 - T_6$ с шагом $\Delta T = 1.2$. Источник расположен в точке с координатами (0,1). Начальные углы излучений заданы в диапазоне $[0, 2\pi]$ с шагом $\pi/10$. Скорость распространения волны $c = \sqrt{gD(y)}$, где $D(y) = y$. Берег представлен в виде горизонтальной линии серого цвета.

Численное исследование функционала (4) основано на понятии “виртуальный луч”. Под термином “виртуальный луч” будем понимать траекторию, разделенную точками отражения на интервалы, где каждый из которых минимизируется независимо. Таким образом, после расчета набора виртуальных лучей для различных положений точки отражения x_1 в диапазоне $x_1 = [0; 5]$ (см. фиг. 2а), была определена функциональная зависимость времени распространения вдоль каждого виртуального луча от положения точки x_1 (см. фиг. 2б). Полученная зависимость характеризуется наличием трех экстремумов: локальный минимум 1 (фиг. 2б) и соответствующий ему луч 1 (фиг. 2а), максимум 2 – луч 2, локальный минимум 3 – луч 3.

Применение вариационного метода для определения луча 1 осуществлялось на основе прямой минимизации целевой функции. Расчет лучей 2 и 3 вариационным методом осуществлялся в результате последовательного перехода от минимума 1 в минимум 3 через максимум 2 с помощью алгоритма глобальной оптимизации [11]. Полученные результаты согласуются с аналитическими решениями (см. фиг. 2).

Рассмотрим пример расчета лучевых траекторий с несколькими отражениями для граничных условий $A(0,1)$ и $B(10,1)$. Лучевые траектории с одним отражением определены аналогично предыдущему примеру (см. фиг. 2). Лучевые траектории с двумя и тремя отражениями получены в результате последовательного перехода от минимума к максимуму через седловые точки. Результаты расчетов согласуются с решениями гамильтоновой системы (см. фиг. 3). Для случая с двумя отражениями,



Фиг. 2. а – Сравнение лучей 1, 2 и 3, полученных из аналитических выражений [14] (сплошные линии) и рассчитанных вариационным методом (кружки). Серыми тонкими линиями представлен набор виртуальных лучей, используемых в процедуре экспресс-анализа. Берег представлен в виде горизонтальной линии серого цвета; б – зависимость времени распространения от положения точки отражения виртуальных лучей. Локальные минимумы и максимум обозначены цифрами 1, 2 и 3.

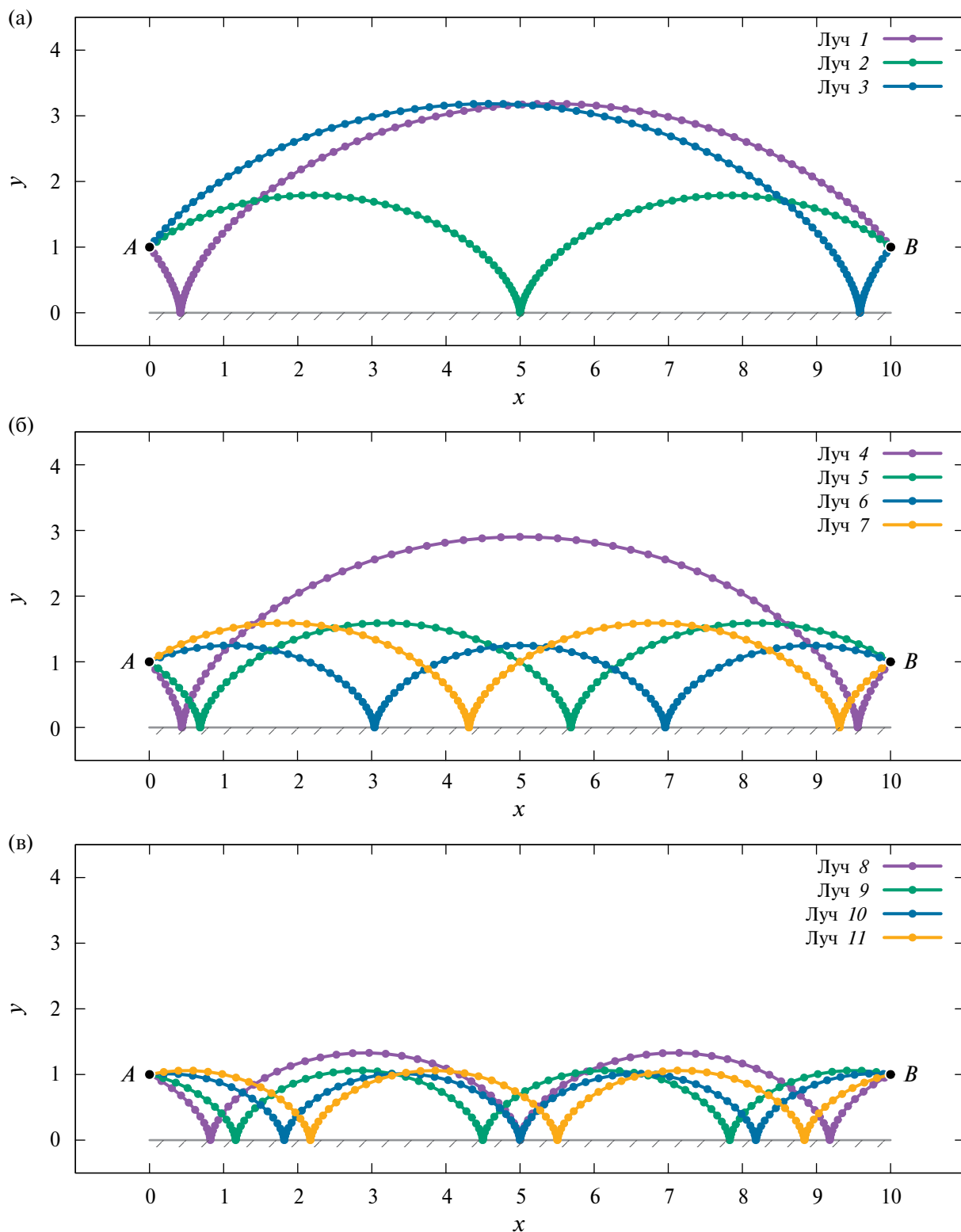
аналогично предыдущему примеру (см. фиг. 2б), была применена процедура “экспресс анализа”. На фиг. 3 представлена зависимость времени распространения от положения двух предполагаемых точек отражения x_1 и x_2 вдоль виртуальных лучей. В данном случае задание виртуальных лучей осуществлялось в результате последовательных смещений точек x_1 и x_2 в диапазонах $x_1 = [0;10]$ и $x_2 = [0;10]$. Отметим, что в случае совпадения x_1 и x_2 виртуальный луч вырождался в траекторию с одним отражением. Симметричность полученной зависимости на фиг. 4 связана с особенностью задания виртуальных лучей, а именно возможность выбора направления движения вдоль луча и возможными перестановками точек отражения x_1 и x_2 . На фиг. 4 представлены экстремумы, соответствующие всем лучевым траекториям: два минимума и максимум, расположенные на оси симметрии, соответствуют лучам с одним отражением (см. фиг. 3а), оставшиеся два минимума, четыре седловые точки и два максимума соответствуют лучам с двумя отражениями (см. фиг. 3б).

2.2. Круглый бассейн с параболическим дном

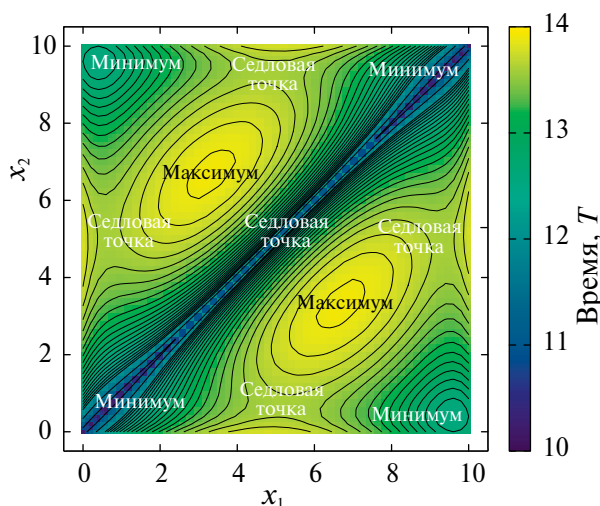
Рассмотрим пример расчета лучей, отраженных от береговой линии некоторого заданного водоема, где функция дна задается следующим выражением:

$$D(\mathbf{r}) = a(\|\mathbf{r}\|^2 - R^2), \quad (19)$$

где $a = -1$ и $R = 2$.



Фиг. 3. а – Лучи с одним, б – двумя, в – тремя отражениями от берега. Решения, полученные вариационным методом, представлены кружками. Аналитические решения представлены сплошными линиями.



Фиг. 4. Карта зависимости времени распространения вдоль виртуальных лучей от положений двух точек отражения x_1 и x_2 . Стационарные точки соответствуют лучам 1 – 7 из фиг. 3а, б.

Особенностью применения вариационного метода для данного примера является оптимизация точек отражения \mathbf{r}_j вдоль единичного вектора касательной τ_j к берегу, рассчитываемого по формуле

$$\tau_j = \frac{\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j}{\|\mathbf{q} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_j) \mathbf{n}_j\|}, \quad (20)$$

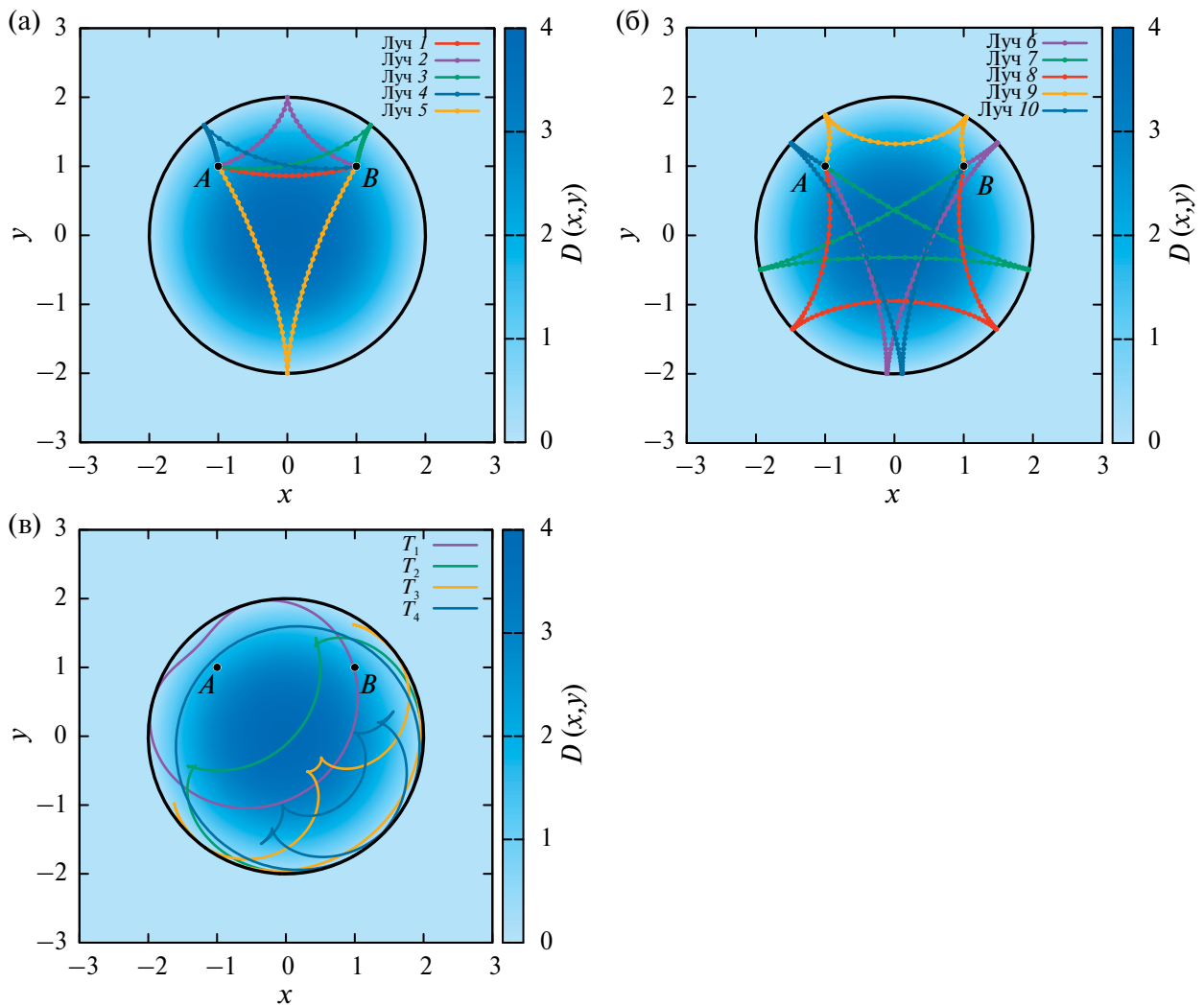
где \mathbf{q} – произвольно заданный вектор, $\mathbf{n}_j = \nabla D(\mathbf{r}_j)$ – единичный вектор нормали к линии берега в точке \mathbf{r}_j .

Результаты расчетов лучевых траекторий и фронтов вариационным методом и методом бихарактеристик представлены на фиг. 5. Вариационный алгоритм последовательно определил четыре луча с одним отражением (см. фиг. 5а) и пять лучей с двумя отражениями (см. фиг. 5б), полностью согласующихся с решениями, полученными методом бихарактеристик. На основе полученных результатов осуществлен расчет величины расходимости лучей в окрестности рассматриваемой точки на основе варьирования начальных углов с последующим построением траекторий методом бихарактеристик и численной оценки якобиана расходимости. В табл. 1 представлены результаты расчетов величин времени прихода волны и расходимости в точке B . В табл. 1 номер лучей соответствует нумерации на фиг. 5: луч 1 представляет траекторию без отражения от берега, лучи 2, 3, 4 и 5 – траектории с одним отражением от берега, лучи 6, 7, 8, 9 и 10 – траектории с двумя отражениями соответственно. Расчетные величины времени прихода волны вариационным методом и методом бихарактеристик, представленные в табл. 1, показывают высокую степень совпадения. Результаты расчетов расходимости лучей для рассматриваемого примера (см. таблицу 1) показывают, что наиболее значимый вклад в суммарное поле волны в точке наблюдения дают лучи с одним отражением от берега. Величина расходимости лучей с двумя отражениями значительно больше, в результате чего их вклад в суммарное поле волны в точке наблюдения менее значителен. Отметим, что для луча 9, ввиду близкого расположения каустики, значение якобиана $J \approx 0$, в результате чего расходимость в геометрикооптическом приближении не может быть корректно определена.

2.3. Обсуждение

Результаты расчетов показывают, что успешное применение вариационного метода основано на соответствии решений гамильтоновой системы типам стационарных точек целевой функции. В данной работе было показано, что тип искомого экстремума зависит от выбранного числа отражений луча от берега. Например, в случае одного отражения, целевая функция с одной независимой переменной имеет два экстремума: минимум и максимум. В случае двух отражений число независимых переменных составляет 2, при этом возможны следующие экстремумы: минимум, седловая точка 1-го порядка, максимум. Аналогично для трех отражений возможны: минимум, седловая точка 1-го порядка, седловая точка 2-го порядка и максимум.

Таким образом, отражение от берега приводит к последовательному вырождению стационарного решения: от минимума через седловые точки различного порядка к максимуму. Число отражений луча,



Фиг. 5. Результаты расчетов лучевых траекторий между точками A и B с одной (а) и двумя (б) точками отражения в круглом бассейне с параболическим дном. Решения, полученные вариационным методом, представлены кружками. Лучевые траектории, рассчитанные методом бихарактеристик, представлены сплошными линиями. (в) Фронты волны, восстановленные на основе лучевых расчетов методом бихарактеристик, для моментов времени $T_1 - T_4$ с шагом $\Delta T = 1.2$. Цветовая шкала соответствует распределению функции глубины водоема $D(x, y)$. Берег, где выполняется условие $D = 0$, представлен сплошной черной кривой.

являющееся заранее заданным параметром в вариационном методе, предопределяет возможные типы экстремумов. Наблюдаемая последовательность стационарных точек позволяет использовать алгоритм глобальной оптимизации [11] для поиска всех лучевых траекторий краевой задачи с заданным числом отражений. Отметим, представленные расчеты на аналитических моделях океанического дна позволили решению. Можно предположить, что, рассматривая сложные модели океанического дна, в том числе на основе данных батиметрии, свой вклад в вырождение стационарных точек будут вносить как отражение от берега, так и наличие фокусов и каустик вдоль луча.

В представленной работе приведены расчеты лучей на основе принципа Ферма без рассмотрения эффектов отражения профиля волны от берега. Данный подход позволяет осуществить быструю оценку времени прихода волны в заданную точку без необходимости построения лучевого семейства. Профиль волны далее может быть оценен, например, с использованием асимптотических формул оператора Маслова.

Таблица 1. Результаты расчета времени прихода T_1 и T_2 методом бихарактеристик и вариационным методом

соответственно и расходимости в точке регистрации B для примера с нелинейным берегом (см фиг. 5).

Номер луча	Время. T_1	Время. T_2	Расходимость. $1 / \sqrt{ J }$
1	1.21	1.211	0.56
2	2.844	2.844	0.9124
3	2.721	2.722	0.721
4	2.721	2.722	0.721
5	4.526	4.526	0.3471
6	6.084	6.084	0.3645
7	7.728	7.729	0.2763
8	6.661	6.662	0.3766
9	4.2	4.2	–
10	6.084	6.084	0.3645

В то же время применение вариантов лучевых методов – квазиклассического приближения, канонического оператора Маслова, также актуально при решении нелинейной задачи в рамках теории мелкой воды. Именно, в недавней работе [4] было показано, что в случае необрушающихся волн решение нелинейной задачи для уравнений мелкой воды в окрестности пологого берега приближенно эффективно выражается через решения линейной системы мелкой воды и, как следствие, через решения волнового уравнения, но с отсутствующими стандартными краевыми условиями. Способ построения асимптотики решения линейной задачи с достаточно плавным переменным дном также недавно развит в работах [16, 17, 14, 18, 19].

Основным результатом работы является демонстрация возможности применения вариационного подхода для расчета лучей, отраженных от берега. Стоит отметить, что предложенный вариационный метод позволяет рассчитывать многократно отраженные от берега лучи (см. фиг. 3 и фиг. 5), причем число отражений является входным параметром программной реализации метода. Как показали численные расчеты якобиана расходимости лучей (см. табл. 1), с увеличением числа отражений геометрическая расходимость увеличивается. В дальнейшем оценка предельного числа отражений при решении двухточечной задачи может быть сделана на основе якобиана расходимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен новый вариант вариационного метода для решения краевой задачи о расчете лучей океанических волн, отраженных от берега. Особенностью нового подхода является фиксация заданного числа узлов траектории (точек предполагаемого отражения) на береговой линии с последующей оптимизацией. Важно отметить, что точки предполагаемого отражения в процессе оптимизации двигаются исключительно вдоль береговой линии. В результате новый вариант вариационного метода позволяет:

- 1) рассчитать лучевые траектории, многократно отраженные от берега, с заданными граничными условиями. Сравнение с решениями гамильтоновой системы показало полное согласие;
- 2) представить соответствие лучей экстремумам различного типа: минимумы, седловые точки, максимумы. Количество и типы экстремумов целевой функции зависит от числа отражений луча от берега;
- 3) определить все множество лучей с использованием алгоритма глобальной оптимизации в результате последовательных переходов между стационарными точками целевой функции.

Представленный метод имеет перспективы применения в моделях с переменной глубиной океанического дна с нелинейной геометрией береговой линии, в том числе на основе осреднения данных батиметрии, что является предметом дальнейших исследований.

Авторы выражают благодарность Доброхотову С. Ю. и Назайкинскому В. Е. за постановку задачи, внимание к работе и полезные советы. Авторы также выражают благодарность Бессарабу П. Ф. за многолетнее плодотворное сотрудничество, а также Бессарабу Ф. С. и Носиковой В. В. за помощь и полезные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dobrokhotov S.Y., Sekerzh-Zenkovich S.Y., Tirozzi B., Tudorovskii T.Y.* Description of tsunami propagation based on the Maslov canonical operator // *Dokl. Math.* 2006. V. 74. No 1. P. 592–596.
2. *Dobrokhotov S.Y., Shafarevich A.I., Tirozzi B.* Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V. 15. No 2. P. 192–221.
3. *Dobrokhotov S.Y., Nazaikinskii V.E.* Punctured Lagrangian manifolds and asymptotic solutions of the linear water wave equations with localized initial conditions // *Math. Notes.* 2017. V. 101. No 5. P. 1053–1060.
4. *Dobrokhotov S.Y., Minenkov D.S., Nazaikinskii V.E.* Asymptotic solutions of the Cauchy problem for the nonlinear shallow water equations in a basin with a gently sloping beach // *Russ. J. Math. Phys.* 2022. V. 29. No 1. P. 28–36.
5. *Казанцев А.Н., Лукин Д.С., Спиридонов Ю.Г.* Метод исследования распространения радиоволн в неоднородной магнитоактивной ионосфере // *Косм. исследования.* 1967. Т. 5. №. 4. С. 593–600.
6. *Пелиновский Е.Н.* Гидродинамика волн цунами. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996. 276 с.
7. *Марчук А.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.* Численное моделирование волн цунами. М.: Наука, 1983. 175 с.
8. *Доброхотов С.Ю., Клименко М.В., Носиков И.А., Толченников А.А.* Вариационный метод расчета лучевых траекторий и фронтов волн цунами, порожденных локализованным источником // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2020. Т. 60. №. 8. С. 1439–1448.
9. *Koketsu K., Sekine S.* Pseudo-bending method for three-dimensional seismic ray tracing in a spherical earth with discontinuities // *Geophys. J. Int.* 1998. V. 132. No 2. С. 339–346.
10. *Rawlinson N., Hauser J., Sambridge M.* Seismic ray tracing and wavefront tracking in laterally heterogeneous media // *Adv. geophys.* 2008. V. 49. P. 203–273.
11. *Nosikov I.A., Klimenko M.V., Zhbankov G.A., Podlesnyi A.V., Ivanova V.A., Bessarab P.F.* Generalized force approach to point-to-point ionospheric ray tracing and systematic identification of high and low rays // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2019. V. 68. No 1. P. 455–467.
12. *Jónsson H., Mills G., Jacobsen K.W.* Nudged elastic band method for finding minimum energy paths of transitions. В сб. *Classical and Quantum Dynamics in Condensed Phase Simulations.* World Scientific, 1998. P. 385–404.
13. *Носиков И.А., Клименко М.В., Бессараб П.Ф.* Применение метода поперечных смещений для расчета коротковолновых радиотрасс. Постановка задачи и предварительные результаты // *Известия вузов. Радиофиз.* 2016. Т. 59. №. 1. С. 1–14.
14. *Доброхотов С.Ю., Назайкинский В.Е.* Характеристики с особенностями и граничные значения асимптотического решения задачи Коши для вырождающегося волнового уравнения // *Матем. заметки.* 2016. Т. 100. №. 5. С. 710–731.
15. *Носиков И.А., Клименко М.В.* Исследование функционала верхних и нижних лучей в задаче расчета радиотрасс в модельной ионосфере // *Хим. физика.* 2017. Т. 36. № 12. С. 61–65.
16. *Dobrokhotov S.Y., Nazaikinskii V.E., Tirozzi B.* Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and asymptotic solutions with localized initial data // *Russ. J. Math. Phys.* 2013. V. 20. P. 389–401.
17. *Назайкинский В.Е.* Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающемуся на границе волновому уравнению // *Матем. заметки.* 2014. Т. 96. №. 2. С. 261–276.
18. *Dobrokhotov S.Y., Nazaikinskii V.E., Tolchennikov A.A.* Uniform asymptotics of the boundary values of the solution in a linear problem on the run-up of waves on a shallow beach // *Math. Notes.* 2017. V. 101. P. 802–814.
19. *Аникин, А.Ю., Доброхотов, С.Ю., Назайкинский, В.Е., Руло, М.* Лагранжевы многообразия и конструкция асимптотик для (псевдо) дифференциальных уравнений с локализованными правыми частями // *Теор. и матем. физ.* 2023. Т. 214. №. 1. С. 3–29.

BOUNDARY VALUE PROBLEM OF CALCULATING RAY CHARACTERISTICS OF OCEAN WAVES REFLECTED FROM COASTLINE

I. A. Nosikov^{a,*}, A. A. Tolchennikov^{b,**} M. V. Klimenko^{c,d,***}

^a*Demidov Yaroslavl State University,*

ul. Sovetskaya, 14, Yaroslavl, 150003 Russia

^b*Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences,*

101 Vernadskogo Ave., Moscow, 117526 Russia

^c*West Department of the Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere
and Radio Wave Propagation, Pionerskaya str., 61, Kaliningrad, 236035 Russia*

^d*St. Petersburg State University, University Embankment, 7-9, St. Petersburg, 1199034 Russia*

**e-mail: ianosikov@wdizmiran*

***e-mail: tolchennikovaa@gmail.com*

****e-mail: mvklimenko@wdizmiran.ru*

Received 05 July, 2023

Revised 09 October, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. A direct variational method for solving the problem of reflection of ocean waves ray paths from the coastline with given positions of the source and the point of registration is considered. It is shown that the original boundary value problem can be reduced to the direct search of stationary points of the functional. Information about the objective function in the area of solutions of the ray problem allows us to construct a systematic procedure for finding minima and saddle points. A feature of the proposed approach is the optimization of the ray reflection point along a given coastline.

Keywords: ray approximation, Fermat's principle, boundary value problem, tsunami waves, bi-characteristic method.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЦЕЛЕВОЙ ТОЧКЕ В ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ

© 2024 г. А. В. Алексеев^{1,*}, А. А. Ершов^{2,3,**}

¹620091 Екатеринбург, пр-т Космонавтов, 18, АО “ОКБ “Новатор”, Россия

²620108 Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16, Институт математики и механики
им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Россия

³620002 Екатеринбург, ул. Мира, 19, Уральский федеральный университет им. первого
Президента России Б.Н. Ельцина, Россия

*e-mail: sztern987@gmail.com

**e-mail: ale10919@yandex.ru

Поступила в редакцию 01.10.2023 г.

Переработанный вариант 10.11.2023 г.

Принята к публикации 17.11.2023 г.

Для нелинейной управляемой системы рассматривается задача о сближении в фиксированный момент времени, в которой положение целевой точки становится известным только в момент начала движения. Предлагается заблаговременное вычисление узловых разрешающих программных управлений, соответствующих конечному набору целевых точек из множества их возможных положений, и получение уточненного управления для заданной (в момент начала движения) целевой точки методом линейной интерполяции узловых управлений. Процедура конструирования такого разрешающего управления сформулирована в виде двух алгоритмов, один из которых выполняется заблаговременно до начала движения, а второй – непосредственно во время движения системы в режиме реального времени. Получена оценка погрешности перевода состояния системы в целевую точку с помощью сформулированных алгоритмов. В качестве примера рассмотрена задача о сближении модифицированной модели машины Дубипса с целевой точкой, о которой до начала движения известно лишь компактное множество возможных положений. Библ. 30. Фиг. 1.

Ключевые слова: управляемая система, задача о сближении, линейная интерполяция, программное управление, неопределенная целевая точка.

DOI: 10.31857/S0044466924030142, **EDN:** XFJZMV

ВВЕДЕНИЕ

Одной из особенностей теории управления (см. [1]) является то, что вычисление разрешающего программного управления в задачах о сближении или позиционной стратегии в дифференциальных играх (см. [2], [3]) зачастую представляет собой длительный вычислительный процесс, в ходе которого вычисляются так называемые множества достижимости и интегральные воронки. Это обстоятельство представляет собой известную проблему, особенно в случае, когда условия задачи содержат некоторые неопределенности, которые невозможно выяснить до начального момента времени (см. [4]–[7]). Например, согласно работе [8], решение задачи управления с неполностью известным начальным условием состоит из трех подзадач:

- 1) сбор информации о динамической системе,
- 2) применение полученных сведений для устранения неопределенности,
- 3) переход к этапу активного управления.

В этой схеме первый и второй этапы могут быть выполнены, в том числе, с помощью применения кратковременного пробного управления (см. [6], [7]). Однако, стоит обратить внимание на переход к третьему этапу, так как после устранения неопределенности осуществить мгновенное построение разрешающего управления при уже начавшемся движении некоторой динамической системы будет практически невозможно.

Также можно рассмотреть вполне естественную задачу, когда требуется быстрое реагирование динамической системы на обнаружение целевого множества в наблюдаемой области фазового пространства. Вторая ситуация, приводящая к схожим условиям задачи, это обработка сигналов коррекции относительно целевого множества, поступающих непосредственно во время движения управляемой системы.

В настоящей статье в качестве решения предлагается заранее построить разрешающие управления, соответствующие нескольким возможным положениям целевой точки, а для промежуточных положений целевой точки воспользоваться формулами линейной интерполяции. Отметим, что в общем случае линейная комбинация управлений, соответствующих разным “поводырям” (по терминологии метода экстремального прицеливания Н.Н. Красовского из [9], [10]), может привести к слишком большой погрешности. Из-за этого в настоящей работе применяется схема, которая минимизирует диаметр интегральных воронок, содержащих ячейки сетки, наложенной на множество возможных положений целевой точки.

Ранее в работе [11] была рассмотрена задача линейной интерполяции программного управления по скалярному параметру, а в [12] – по векторному параметру. В [13] была, в частности, рассмотрена интерполяция оптимального управления по пространственной переменной для систем с обратной связью. Кроме того, запатентован метод интерполяции в автоматическом программировании (см. [14]). К данной тематике также примыкают работы по интерполяции структуры нелинейных управляемых систем с помощью линейных (см. [15], [16]) и билинейных (см. [17], [18]) систем.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на конечном промежутке времени $[t_0, \vartheta]$ задана управляемая система

$$\frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad t \in (t_0, \vartheta), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}, \quad (1)$$

где t – время, $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ – начальное состояние системы, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $\mathbf{f} : [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P \mapsto \mathbb{R}^n$ – вектор-функция динамики системы, $\mathbf{u}(t) : [t_0, \vartheta] \mapsto P$ – измеримая вектор-функция управления, значения которой принадлежат компакту $P \subset \mathbb{R}^p$, n и p – натуральные числа.

Будем предполагать, что правая часть $\mathbf{f}(\cdot, \cdot)$ системы (1) удовлетворяет следующим условиям.

Условие С1. Вектор-функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ определена и непрерывна на области $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Условие С2. На любом компакте $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ удовлетворяет условию Липшица по \mathbf{x} с некоторой конечной и положительной постоянной Липшица $L = L(D)$, т.е.

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{u}) \right\| &\leq L \left\| \mathbf{x}_* - \mathbf{x}^* \right\|, \\ (t, \mathbf{x}_*) \in D, \quad (t, \mathbf{x}^*) \in D, \quad \mathbf{u} \in P, \end{aligned}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора в \mathbb{R}^n .

Условие С3. Выполняется условие подлинейного роста по фазовой переменной с некоторой конечной и положительной постоянной γ , т.е.

$$\left\| \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \right\| \leq \gamma \cdot (1 + \|\mathbf{x}\|), \quad (t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P.$$

Замечание 2.1. Под допустимым управлением $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, мы понимаем измеримую по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$ вектор-функцию со значениями из P . Условий С1, С2 и С3 достаточно, чтобы каждому допустимому управлению $\mathbf{u}(t)$ соответствовало движение $\mathbf{x}(t)$, являющееся решением системы (1) в классе абсолютно непрерывных функций (см. [19, §2.1]). При этом производная $\dot{\mathbf{x}}(t)$ понимается в обобщенном смысле, и для нее выполняется формула Ньютона–Лейбница (см., например, [20, гл. 2, §4]).

Замечание 2.2. В силу условия С3 существует некоторый достаточно большой компакт $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, в котором заведомо содержатся всевозможные движения системы (1) вместе со всеми вспомогательными конструкциями для построения разрешающих управлений. В дальнейшем будем всюду использовать постоянную Липшица $L = L(D)$ и другие конструкции именно для этой области D .

Замечание 2.3. Учитывая условие С1, получаем, что модуль непрерывности

$$\omega(\delta) = \max \left\{ \left\| f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_*) - f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \right\| : (t, \mathbf{x}, \mathbf{u}_*), (t, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*) \in D \times P, \left\| \mathbf{u}_* - \mathbf{u}^* \right\| \leq \delta \right\}, \quad \delta \in (0, \infty),$$

удовлетворяет предельному соотношению $\omega(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$.

Условие С4. Для любых точек $(t, \mathbf{x}) \in D$ и векторов $\mathbf{u} \in P$ функция $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ является дважды непрерывно дифференцируемой по совокупности компонент векторных переменных \mathbf{x} и \mathbf{u} с ограниченными вторыми частными производными, т.е.

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \leq M_2, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_i \partial u_j} \right\| \leq M_2, \quad i, j = \overline{1, p},$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_i \partial x_j} \right\| \leq M_2, \quad i = \overline{1, p}, j = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_p)$, постоянная $M_2 \geq 0$ определяется видом функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, областями D и P .

Оговорим информационные условия, в рамках которых осуществляется управление системой (1).

Условие И1. Заблаговременно до момента начала движения t_0 управляющему лицу известно только ограниченное множество возможных целевых точек $M \subset \mathbb{R}^n$ и приближенное значение $\mathbf{x}^*(t_0)$ начального состояния системы $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$ с погрешностью δ_x , т.е. выполнено неравенство

$$\left\| \mathbf{x}^*(t_0) - \mathbf{x}(t_0) \right\| \leq \delta_x.$$

Условие И2. Целевая точка $\mathbf{x}^{(f)} \in M$ сообщается управляющему лицу только в момент t_0 начала движения системы (1).

Условие И3. Лицо, управляющее системой, не в состоянии производить большой объем вычислений в реальном времени (а именно, не может мгновенно вычислять множества достижимости пиксельным методом). Также объем заранее вычисленной информации для быстрого построения разрешающих управлений не должен быть слишком большим.

Сформулируем для системы (1) задачу о сближении с заранее неизвестной целевой точкой.

Задача 1. Пусть система (1) удовлетворяет условиям С1–С4, а ее управление производится в рамках информационных условий И1–И3. Требуется определить существование разрешающего программного управления $\mathbf{u}(t)$, переводящего движение системы (1) в момент ϑ в малую окрестность точки $\mathbf{x}^{(f)}$ (заданной в момент t_0), и, в случае его существования, сконструировать его.

3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СБЛИЖЕНИИ

Прежде чем сформулировать алгоритм решения задачи, состоящий из двух частей, введем некоторые вспомогательные обозначения.

Под диаметром $\text{diam}(M)$ произвольного множества M (находящегося, как минимум, в метрическом пространстве) мы будем понимать точную верхнюю грань расстояний между любыми двумя точками из M .

Обозначим через $\Omega^{(\delta)}(\cdot)$ отображение, “прореживающее” множество, т.е. любому ограниченному множеству $A \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, оно сопоставляет конечное множество $\tilde{A} = \Omega^{(\delta)}(A)$, состоящее, по возможности, из меньшего количества его точек и обладающее свойством

$$d(A, \tilde{A}) \leq \delta,$$

где $d(A, \tilde{A})$ есть хаусдорфово расстояние между множествами A и \tilde{A} . Способы построения такого “прореженного” множества \tilde{A} приведены в [21, с. 549].

Обозначим $\tilde{P} = \Omega^{(\Delta_u)}(P)$, где $\Delta_u > 0$ – достаточно малая постоянная, выбранная из соображений оптимального соотношения между точностью и производительностью вычислений.

Пусть \mathcal{P} – множество всех равномерных разбиений всех отрезков. Определим отображение $\mathcal{F} : \mathcal{P} \times \mathbb{R}^n \times P \mapsto \mathbb{R}^n$, действующее по правилу

$$\mathcal{F}(\bar{\Gamma}, \mathbf{x}_*, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^{(N)},$$

где $N \in \mathbb{N}$ – натуральное число, $\bar{\Gamma} = \{\tau_0 = t_*, \tau_1, \dots, \tau_N = t^*\}$ – равномерное разбиение некоторого отрезка $[t_*, t^*]$, точка $\mathbf{x}^{(N)}$ вычисляется с помощью рекуррентных соотношений

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}_*,$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + (\tau_{k+1} - \tau_k) f\left(\frac{\tau_k + \tau_{k+1}}{2}, \mathbf{x}^{(k)} + \frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2} \cdot f(\tau_k, \mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{u})\right),$$

$$k = \overline{0, N-1},$$

представляющих собой явный метод Рунге–Кутты второго порядка (см. [22], [23]).

Определим еще одно отображение $\tilde{X} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times 2^{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{P} \mapsto 2^{\mathbb{R}^n}$ следующим образом:

$$\tilde{X}(t^*, t_*, X_*, \bar{\Gamma}) := \bigcup_{\mathbf{x} \in X_*} \bigcup_{\mathbf{u} \in P} \mathcal{F}(\Gamma[t_*, t^*], \mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $\bar{\Gamma}$ – равномерное разбиение отрезка $[t_*, t^*]$, концы которого определены первыми двумя аргументами отображения.

Завершив введение необходимых обозначений, сформулируем вычислительный метод решения задачи 1 в виде двух алгоритмов. Первый алгоритм содержит громоздкие вычисления, которые выполняются заблаговременно до начала движения системы (1), второй алгоритм применяется непосредственно в процессе движения системы (1) в режиме реального времени.

Алгоритм 1

1. Выберем достаточно большое натуральное число N и введем равномерное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N = \vartheta\}$ временного промежутка $[t_0, \vartheta]$ с диаметром $\Delta_t = t_{i+1} - t_i = N^{-1} \cdot (\vartheta - t_0), i = \overline{0, N-1}$. Кроме того, выберем натуральное число N_1 , и на каждом отрезке разбиения $[t_i, t_{i+1}]$ введем свое подразбиение:

$$\Gamma_{i+1} = \left\{ t_{i,0} = t_i, t_{i,1} = t_i + \frac{\Delta_t}{N_1}, \dots, t_{i,k} = t_i + k \cdot \frac{\Delta_t}{N_1}, \dots, t_{i,N_1} = t_{i+1} \right\}, \quad i = \overline{0, N-1}.$$

2. Выберем достаточно малую постоянную $\Delta_x > 0$ и вычислим аппроксимации множеств достижимости по следующей итерационной процедуре:

$$\tilde{X}_0 = \{\mathbf{x}^*(t_0)\}, \quad \tilde{X}_{k+1} = \Omega^{(\Delta_x)}(\tilde{X}(t_{k+1}, t_k, \tilde{X}_k, \Gamma_k)), \quad k = \overline{0, N-1}.$$

При построении конечных множеств $\tilde{X}_k, k = \overline{1, N}$, для каждой точки $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} \in \tilde{X}_k$ мы будем запоминать “родительскую” точку $\bar{\mathbf{x}}^{(k-1)} \in \tilde{X}_{k-1}$ и управляющий вектор $\bar{\mathbf{u}}^{(k)} \in \tilde{P}$, для которых выполнено соотношение $\bar{\mathbf{x}}^{(k)} = \mathcal{F}(\Gamma_k, \bar{\mathbf{x}}^{(k-1)}, \bar{\mathbf{u}}^{(k)})$, где обозначено $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} = \mathbf{x}^*(t_0)$.

3. Если евклидово расстояние $\rho(M, \tilde{X}_N) = \min_{\mathbf{x} \in M} \min_{\mathbf{y} \in \tilde{X}_N} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| > \Delta_x$, то заключаем, что разрешающее программное управление, переводящее движение системы (1) на любую точку из M в момент ϑ с приемлемой точностью нашим методом построить не представляется возможным, и завершаем решение задачи о сближении.

Если хаусдорфово отклонение $h(M, \tilde{X}_N) = \max_{\mathbf{x} \in M} \min_{\mathbf{y} \in \tilde{X}_N} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \Delta_x$, то заключаем, что задача 1 разрешима для любой точки $\mathbf{x}^{(f)} \in M$, которая будет сообщена в момент t_0 .

В остальных случаях мы не сможем гарантировать решение задачи 1 с приемлемой точностью для того $\mathbf{x}^{(f)}$, которое будет сообщено управляющему лицу в момент t_0 .

4. Обозначим через $\Delta_f > 0$ достаточно малую постоянную. В качестве конечного множества \tilde{M} выберем такое множество точек $\{\mathbf{x}^{(f,j)}\}_{j=1}^{N_f}$, чтобы любая возможная целевая точка $\mathbf{x}^{(f)} \in M$ была внутри “своего” n -мерного куба K_j с вершинами

$$\mathbf{x}^{(f,j,\pm,\pm,\dots,\pm)} = \left(\mathbf{x}_1^{(f,j)} \pm \frac{\Delta_f}{2}, \mathbf{x}_2^{(f,j)} \pm \frac{\Delta_f}{2}, \dots, \mathbf{x}_n^{(f,j)} \pm \frac{\Delta_f}{2} \right),$$

которые должны быть либо из \tilde{X}_n , либо хотя бы удовлетворять соотношению

$$h(\mathbf{x}^{(f,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}, \tilde{X}_n) \leq \Delta_x. \tag{2}$$

Замечание 3.1. Если выделение конечного множества \tilde{M} указанным способом невозможно по причине “неудобной” геометрии M и \tilde{X}_N , то можно модифицировать наши алгоритмы, соотнеся “неудобные” точки к ближайшим кубам и выразив их в дальнейшем через невыпуклые линейные комбинации вершин (см. [12]), перейдя, таким образом, от интерполяции к экстраполяции. При этом оценка погрешности перевода состояния системы в целевую точку несколько ухудшится.

5. Для каждого куба K_j с центром $\mathbf{x}^{(f,j)}$, $j = \overline{1, N_f}$, выбираем соответствующее сужение значений управляющего вектора $\tilde{P}_j(t) \subset P$ так, чтобы $K_j \subset \tilde{X}_j(\vartheta, t_0, \mathbf{x}^{(0)})$, где $\tilde{X}_j(\vartheta, t_0, \mathbf{x}^{(0)})$ – множество достижимости системы (1) в момент ϑ из начальной позиции $(t_0, \mathbf{x}^{(0)})$, порожденное всевозможными кусочно-постоянными управлениями со значениями из сужения $\tilde{P}_j(t)$ при $t \in [t_0, \vartheta]$. При этом выбор таких сужений мы производим таким образом, чтобы максимальный диаметр временных сечений сужений

$\Delta_u = \max_{j=1, N_f} \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \text{diam}(P_j(t))$ был, по возможности, минимальным.

6. Для каждого $j = \overline{1, N_f}$ и для каждой вершины $\mathbf{x}^{(f,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}$ выбираем из \tilde{X}_N по одной точке $\mathbf{x}^{-(N,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}$, ближайшей к $\mathbf{x}^{(f,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}$ и порожденной сеточным алгоритмом, аппроксимирующего воздействие некоторого кусочно-постоянного управления, которое обозначим через $\mathbf{u}^{-(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t) \in \tilde{P}_j(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

Алгоритм 2

1. Определяем куб K_j , содержащий заданную целевую точку $\mathbf{x}^{(f)}$.
2. Представляем радиус-вектор $\mathbf{x}^{(f)}$ в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(f)} = & \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{x}^{(f,j,-,-,\dots,-)} + (1 - \lambda_1) \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{x}^{(f,j,+,-,\dots,-)} + \dots \\ & \dots + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{x}^{(f,j,+,+,\dots,+)}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $0 \leq \lambda_k \leq 1$ при $k = \overline{1, n}$.

3. В качестве искомого разрешающего программного управления используем функцию

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) = & \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{u}^{-(j,-,-,\dots,-)}(t) + \\ & + (1 - \lambda_1) \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{u}^{-(j,+,-,\dots,-)}(t) + \dots + \\ & + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{u}^{-(j,+,+,\dots,+)}(t). \end{aligned}$$

4. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Лемма 4.1. Пусть m и n – натуральные числа, постоянные $0 \leq \lambda_k \leq 1$ при $k = \overline{1, n}$, векторы $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ из \mathbb{R}^n , функция $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ и все ее вторые частные производные ограничены некоторой постоянной $m_2 > 0$, т.е.

$$\left\| \frac{\partial^2 \mathbf{f}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| \leq m_2, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1, \lambda_2 x_2 + (1 - \lambda_2)y_2, \dots, \lambda_n x_n + (1 - \lambda_n)y_n) - \right. \\ & \quad - \sum_{(b_1, b_2, \dots, b_n) \in B_2^n} \prod_{k=1}^n (b_k \lambda_k + (1 - b_k)1 - \lambda_k) \times \\ & \quad \left. \times \mathbf{f}(b_1 x_1 + (1 - b_1)y_1, b_2 x_2 + (1 - b_2)y_2, \dots, b_n x_n + (1 - b_n)y_n) \right\| \leq \\ & \quad \leq \frac{3}{8} m_2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \end{aligned} \tag{3}$$

где через B_2^n обозначено множество всех векторов $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ длины n , координаты $\{b_k\}_{k=1}^n$ которых принимают значения только 0 или 1.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции по размерности n . Для доказательства базы индукции рассмотрим случай $n = 1$, а именно, докажем, что

$$\left\| \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1) - \lambda_1 \mathbf{f}(x_1) - (1 - \lambda_1) \mathbf{f}(y_1) \right\| \leq \frac{3}{8} m_2 |x_1 - y_1|^2.$$

Действительно, разложив вектор-функцию $\mathbf{f}(\xi)$ в точках x_1 и y_1 в ряды Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и подставив в эти разложения $\xi = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1$, получаем, что

$$\mathbf{f}(\xi) = \mathbf{f}(x_1) + \mathbf{f}'(x_1)(\xi - x_1) + \int_{x_1}^{\xi} (\xi - t) \mathbf{f}''(t) dt,$$

$$\mathbf{f}(\xi) = \mathbf{f}(y_1) + \mathbf{f}'(y_1)(\xi - y_1) + \int_{y_1}^{\xi} (\xi - t) \mathbf{f}''(t) dt,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1) &= \mathbf{f}(x_1) + \mathbf{f}'(x_1)(1 - \lambda_1)(y_1 - x_1) + \\ &+ \int_{x_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1) &= \mathbf{f}(y_1) + \mathbf{f}'(y_1)\lambda_1(x_1 - y_1) + \\ &+ \int_{y_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Теперь домножим (4) на λ_1 , (5) на $1 - \lambda_1$ и сложим их между собой:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1) &= \lambda_1 \mathbf{f}(x_1) + (1 - \lambda_1) \mathbf{f}(y_1) + \\ &+ \lambda_1 (1 - \lambda_1) (y_1 - x_1) (\mathbf{f}'(x_1) - \mathbf{f}'(y_1)) + \\ &+ \lambda_1 \int_{x_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt + \\ &+ (1 - \lambda_1) \int_{y_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda_1 \mathbf{f}(x_1) + (1 - \lambda_1) \mathbf{f}(y_1) + \lambda_1 (1 - \lambda_1) (y_1 - x_1) \int_{y_1}^{x_1} \mathbf{f}''(t) dt + \\
 &\quad + \lambda_1 \int_{x_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt + \\
 &\quad + (1 - \lambda_1) \int_{y_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1 - t) \mathbf{f}''(t) dt.
 \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned}
 &\| \mathbf{f}(\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1) - \lambda_1 \mathbf{f}(x_1) - (1 - \lambda_1) \mathbf{f}(y_1) \| \leq \\
 &\leq \lambda_1 (1 - \lambda_1) (y_1 - x_1) \left| \int_{y_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1} \|\mathbf{f}''(t)\| dt \right| + \\
 &\quad + \lambda_1 \left| \int_{x_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1 - t) \|\mathbf{f}''(t)\| dt \right| + \\
 &\quad + (1 - \lambda_1) \left| \int_{y_1}^{\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1} (\lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y_1 - t) \|\mathbf{f}''(t)\| dt \right| \leq \\
 &\leq \lambda_1^2 (1 - \lambda_1) m_2 (y_1 - x_1)^2 + \lambda_1 m_2 \frac{(1 - \lambda_1)^2 (x_1 - y_1)^2}{2} + \\
 &\quad + (1 - \lambda_1) m_2 \frac{\lambda_1^2 (y_1 - x_1)^2}{2} = \\
 &= \frac{3}{2} \lambda_1 (1 - \lambda_1) m_2 (y_1 - x_1)^2 \leq \frac{3}{8} m_2 (y_1 - x_1)^2.
 \end{aligned}$$

Тем самым база индукции (лемма 4.1.) доказана.

Предположим, что неравенство (3) выполняется для некоторого n . Докажем его для $n + 1$. Опираясь на базу и предположение индукции, с помощью неравенства треугольника несложно доказать его для размерности $n + 1$. Тем самым, мы осуществили индукционный переход, и, значит, лемма доказана.

Замечание 4.1. Для скалярной функции одной переменной $f : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$ с ограниченной второй производной (т.е. $|f''(x)| \leq m_2$, где постоянная $m_2 \geq 0$) из оценки погрешности формулы интерполяции Лагранжа (см. [24, гл. XIV, §14, (6)])

$$\left| f(x) - \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) \right| \leq \frac{\max_{x_0 \leq x \leq x_1} |f''(x)|}{2} |(x - x_0)(x - x_1)|$$

и неравенства

$$(x - x_0)(x_1 - x) \leq \frac{(x_1 - x_0)^2}{4}, \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

непосредственно следует оценка

$$|f(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)| \leq \frac{m_2}{8} (y - x)^2, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \tag{6}$$

Однако для нашего многомерного случая приведенное в [24, гл. XIV, §14] доказательство оценки (6) не будет корректным из-за использования теоремы Лагранжа о конечных приращениях, которая, как известно, не применима для векторзначных функций.

Лемма 4.2. Пусть $\tilde{P}(t) \subset P$, $t \in [t_0, \vartheta]$, — некоторое сужение значений управления. И пусть измеримые по Лебегу вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ действуют из $[t_0, \vartheta]$ в $\tilde{P}(t) \subset \mathbb{R}^p$ и порождают некоторые абсолютно

непрерывные движения $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ при подстановке их в систему (1) в качестве программных управлений. При этом считаем, что система (1) удовлетворяет условиям С1–С4 на правую часть (информационные условия П1–П3 не имеют значения).

Тогда выполняется оценка

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \frac{\omega(\Delta_u)}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1), \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Доказательство. Поскольку $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ есть движения системы (1), соответствующие программным управлениям $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$, то они удовлетворяют начальным условиям $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}^{(0)}$ и дифференциальным уравнениям

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t)),$$

которые в интегральной форме можно записать следующим образом:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) d\tau, \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}^{(0)} + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau.$$

Учитывая условие С2 и замечание 2.3, можно оценить

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau))\| d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t (\|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau))\| + \|\mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) - \mathbf{f}(\tau, \mathbf{y}(\tau), \mathbf{v}(\tau))\|) d\tau \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t L \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)\| d\tau + \int_{t_0}^t \omega(\|\mathbf{u}(\tau) - \mathbf{v}(\tau)\|) d\tau \leq \\ &L \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{y}(\tau)\| d\tau + (t - t_0) \omega(\Delta_u). \end{aligned}$$

Отсюда в силу усиленной леммы Гронуолла (см. [25, гл.1, §2, с. 26]) вытекает утверждение леммы.

Пусть $\bar{\mathbf{u}}(t)$ – фиксированная кусочно постоянная вектор-функция со значениями из P с разрывами на концах отрезков разбиения Γ , $\mathbf{x}(t)$ – решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}^{(0)}, \end{aligned} \tag{7}$$

$\bar{\mathbf{x}}(t)$ – простейшая линейная аппроксимация сеточной функции, являющейся численным решением задачи (6) явным методом Рунге-Кутты второго порядка с шагом Δ_t / N_k на участках $[t_{k-1}, t_k]$ при $k = \overline{1, N}$, а именно, по рекуррентным формулам

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}^*(t_0), \quad \bar{\mathbf{x}}(t_{k+1}) = \mathcal{F}(\Gamma_{k+1}, \bar{\mathbf{x}}(t_k), \bar{\mathbf{u}}(t_k + \Delta_t / 2)), \quad k = \overline{0, N-1},$$

где подразделения $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ определены согласно первому шагу алгоритма 1 с некоторыми числами N_1, N_2, \dots, N_N .

Посредством функции $\delta(t)$ обозначим оценку

$$\|\bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \delta(t), \tag{8}$$

вид которой, согласно [23, п. 4.3.1, п. 4.3.2], есть

$$\|\delta(t)\| = \tilde{\Delta}_t^2 \frac{C}{\Lambda} \left(e^{(t-t_0)\Lambda} - 1 \right) + \delta_x e^{L(t-t_0)},$$

где

$$\Lambda = L + \frac{L\tilde{\Delta}_t}{2} + \left(\frac{L\tilde{\Delta}_t}{2} \right)^2, \quad \tilde{\Delta}_t = \max\left\{ \frac{\Delta_t}{N_1}, \dots, \frac{\Delta_t}{N_N} \right\},$$

постоянная C выражается некоторым образом через максимум функции $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$, ее первых и вторых частных производных по всем $(t, \mathbf{x}) \in \Omega$ и $\mathbf{u} \in P$.

Замечание 4.2. Заметим, что в местах линейной аппроксимации $\bar{\mathbf{x}}(t)$ сеточной функции погрешность может оказаться несколько больше, чем в узловых точках метода Рунге–Кутты, что может привести к некоторому увеличению постоянной C . В дальнейшем такую линейную аппроксимацию сеточной функции будем называть *ломаной Эйлера*.

Теорема 4.1 Пусть система (1) удовлетворяет условиям С1–С4, а управление ей производится в информационных условиях П1–П3, и пусть при решении задачи 1 на шаге 5 алгоритма 1 было установлено существование допустимого разрешающего управления, а затем с помощью алгоритма 2 было построено программное управление $\hat{\mathbf{u}}(t)$, порождающее движение $\mathbf{x}(t)$. Тогда

$$\rho(\hat{\mathbf{x}}(\vartheta), \mathbf{x}^{(f)}) \leq \Delta_x + \delta(\vartheta) + \frac{3M_2}{8L} \times \left(\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right) \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right). \quad (9)$$

Доказательство. В соответствии с шагом 3 алгоритма 1 целевая точка $\mathbf{x}^{(f)}$ находится внутри некоторого n -мерного куба K_j с вершинами $\mathbf{x}^{(f, j, \pm, \pm, \dots, \pm)}$. Тогда $\mathbf{x}^{(f)}$ можно выразить в виде некоторой выпуклой линейной комбинации вершин куба K_j , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(f)} &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{x}^{(f, j, -, -, \dots, -)} + (1 - \lambda_1) \lambda_2 \dots \lambda_n \mathbf{x}^{(f, j, +, -, \dots, -)} + \dots \\ &\dots + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{x}^{(f, j, +, +, \dots, +)}, \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Через $\hat{\mathbf{x}}(t)$ в формулировке теоремы обозначено движение системы (1), порожденное управлением

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \bar{\mathbf{u}}^{-(j, -, -, \dots, -)}(t) + (1 - \lambda_1) \lambda_2 \dots \lambda_n \bar{\mathbf{u}}^{-(j, +, -, \dots, -)}(t) + \dots \\ &\dots + (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) \dots (1 - \lambda_n) \bar{\mathbf{u}}^{-(j, +, +, \dots, +)}(t). \end{aligned}$$

Отметим, что в наших обозначениях $\hat{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0)$ есть точное начальное состояние системы. По построению (см. (2)) для всех $\mathbf{x}^{(f, j, \pm, \pm, \dots, \pm)}$ найдется такое $\bar{\mathbf{x}}^{-(N, j, \pm, \pm, \dots, \pm)} \in \tilde{X}_N$, что

$$\left\| \bar{\mathbf{x}}^{-(N, j, \pm, \pm, \dots, \pm)} - \mathbf{x}^{(f, j, \pm, \pm, \dots, \pm)} \right\| \leq \Delta_x. \quad (10)$$

Обозначим через

$$\bar{\mathbf{x}}^{-(k, j)} = \lambda_1 \dots \lambda_n \bar{\mathbf{x}}^{-(k, j, -, -, \dots, -)} + \dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \bar{\mathbf{x}}^{-(k, j, +, +, \dots, +)}, \quad k = \overline{0, N}. \quad (11)$$

Из (9) и (10) следует соотношение

$$\left\| \bar{\mathbf{x}}^{-(N, j)} - \mathbf{x}^{(f)} \right\| \leq \Delta_x. \quad (12)$$

Далее оценим $\left\| \hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \bar{\mathbf{x}}^{-(N, j)} \right\|$.

Через $\bar{\mathbf{x}}^{-(j, \pm, \pm, \dots, \pm)}(t)$ обозначим ломаные Эйлера, проходящие через точки

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)}, \bar{\mathbf{x}}^{-(1,j,\pm,\pm,\dots,\pm)} &= \mathcal{F}\left(\Gamma_1, \mathbf{x}^{(0)}, \bar{\mathbf{u}}^{-(1,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}\right), \dots, \\ \bar{\mathbf{x}}^{-(k,j,\pm,\pm,\dots,\pm)} &= \mathcal{F}\left(\Gamma_k, \mathbf{x}^{(k-1,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}, \bar{\mathbf{u}}^{-(k,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}\right), \dots, \\ \bar{\mathbf{x}}^{-(N,j,\pm,\pm,\dots,\pm)} &= \mathcal{F}\left(\Gamma_N, \mathbf{x}^{(N-1,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}, \bar{\mathbf{u}}^{-(N,j,\pm,\pm,\dots,\pm)}\right), \end{aligned}$$

соответственно, через $\bar{\mathbf{x}}^{-(j)}(t)$ обозначим линейную комбинацию ломанных Эйлера

$$\bar{\mathbf{x}}^{-(j)}(t) = \lambda_1 \dots \lambda_n \bar{\mathbf{x}}^{-(k,j,-,\dots,-)}(t) + \dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \bar{\mathbf{x}}^{-(k,j,+, \dots,+)}(t),$$

проходящую через точки $\bar{\mathbf{x}}^{-(k,j)}$, $k = \overline{0, N}$.

Через $\mathbf{x}^{(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t)$ обозначим решения задач Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^{(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t)}{dt} &= \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}^{(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t), \bar{\mathbf{u}}^{-(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t)\right), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ \mathbf{x}^{(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t_0) &= \hat{\mathbf{x}}(t_0), \end{aligned}$$

их линейную комбинацию обозначим через

$$\mathbf{x}^{(j)}(t) = \lambda_1 \dots \lambda_n \mathbf{x}^{(j,+, \dots,+)}(t) + \dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{x}^{(j,-, \dots,-)}(t). \tag{13}$$

В силу обозначения (8) выполнены оценки

$$\left\| \bar{\mathbf{x}}^{-(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t) - \mathbf{x}^{(j,\pm,\pm,\dots,\pm)}(t) \right\| \leq \delta(t), \quad t \in [t_0, \vartheta]. \tag{14}$$

Применяя неравенство треугольника и учитывая обозначение $\bar{\mathbf{x}}^{-(N,j)} = \bar{\mathbf{x}}^{-(j)}(\vartheta)$, получаем, что

$$\left\| \hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \bar{\mathbf{x}}^{-(N,j)} \right\| \leq \left\| \hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \mathbf{x}^{(j)}(\vartheta) \right\| + \left\| \mathbf{x}^{(j)}(\vartheta) - \bar{\mathbf{x}}^{-(j)}(\vartheta) \right\| \leq \left\| \hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \mathbf{x}^{(j)}(\vartheta) \right\| + \delta(\vartheta), \tag{15}$$

где второе слагаемое оценено через $\delta(\vartheta)$ в силу (14).

Чтобы оценить первое слагаемое, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\mathbf{x}}(t)}{dt} &= \mathbf{f}\left(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{u}}(t)\right), \quad t \in (t_0, \vartheta), \\ \hat{\mathbf{x}}(t_0) &= \mathbf{x}(t_0). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу леммы 4.1

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}^{(j)}(t), \lambda_1 \dots \lambda_n \bar{\mathbf{u}}^{-(j,-,\dots,-)}(t) + \dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \bar{\mathbf{u}}^{-(j,+, \dots,+)}(t)\right) &= \\ &= \lambda_1 \dots \lambda_n \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}^{(j,-,\dots,-)}(t), \bar{\mathbf{u}}^{-(j,-,\dots,-)}(t)\right) + \dots \\ &\dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}^{(j,+, \dots,+)}(t), \bar{\mathbf{u}}^{-(j,+, \dots,+)}(t)\right) + \mathbf{r}(t), \end{aligned} \tag{16}$$

где $\mathbf{x}^{(j)}(t)$ определено в (13), $\|\mathbf{r}(t)\| \leq \frac{3}{8} M_2 \tilde{\Delta}_u^2$, $\tilde{\Delta}_u = \sqrt{\Delta_u^2 + d_x^2}$, d_x – максимальный диаметр сечений интегральных воронок, соответствующих сужениям \tilde{P}_j .

Учитывая лемму 4.2, можно оценить

$$d_x \leq \frac{\omega(\Delta_u)}{L} (e^{L(\vartheta-t_0)} - 1).$$

Соответственно, в таком случае мы получим оценку

$$\|\mathbf{r}(t)\| \leq \frac{3}{8}M_2 \left[\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right]. \quad (17)$$

Из сложения соответствующих уравнений выполняется следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}^{(j)}}{dt} &= \lambda_1 \dots \lambda_n \mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}^{(j, -, \dots, -)}, \mathbf{u}^{(1; j, -, \dots, -)} \right) + \dots \\ &\dots + (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{f} \left(t, \mathbf{x}^{(j, +, \dots, +)}, \mathbf{u}^{(1; j, +, \dots, +)} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Из (16)–(18) и условия С2 следует, что

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}^{(j)}(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t \left(\mathbf{f} \left(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau), \hat{\mathbf{u}}(\tau) \right) - \lambda_1 \dots \lambda_n \mathbf{f} \left(\tau, \mathbf{x}^{(j, -, \dots, -)}(\tau), \mathbf{u}^{(j, -, \dots, -)}(\tau) \right) - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \dots - (1 - \lambda_1) \dots (1 - \lambda_n) \mathbf{f} \left(\tau, \mathbf{x}^{(j, +, \dots, +)}(\tau), \mathbf{u}^{(j, +, \dots, +)}(\tau) \right) \right) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \left\| \mathbf{f} \left(\tau, \hat{\mathbf{x}}(\tau), \hat{\mathbf{u}}(\tau) \right) - \mathbf{f} \left(\tau, \mathbf{x}^{(j)}(t), \hat{\mathbf{x}}(\tau) \right) + \mathbf{r}(\tau) \right\| d\tau \leq \\ &\leq L \int_{t_0}^t \|\hat{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{x}^{(j)}(\tau)\| d\tau + \frac{3}{8}M_2 \left[\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right] (t - t_0). \end{aligned}$$

Отсюда, в силу усиленной леммы Гронуолла (см. [25, гл. §1, §2, с. 26]) следует, что

$$\|\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)\| \leq \frac{3M_2}{8L} \left[\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right] \left(e^{L(t-t_0)} - 1 \right).$$

В частности,

$$\|\hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \mathbf{y}(\vartheta)\| \leq \frac{3M_2}{8L} \left[\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right] \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right).$$

Отсюда и из (15) получаем, что

$$\|\hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \bar{\mathbf{x}}^{(N, j)}\| \leq \frac{3M_2}{8L} \left[\Delta_u^2 + \frac{\omega^2(\Delta_u)}{L^2} \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right)^2 \right] \times \left(e^{L(\vartheta-t_0)} - 1 \right) + \delta(\vartheta).$$

С учетом (12) получаем утверждение теоремы.

Замечание 4.3. Если учесть, что $\Delta_u^{(j)}$ – это минимальная величина, при которой интегральная воронка, соответствующая сужению управления \bar{P}_j , покрывает своим последним временным сечением куб K_j , то можно предполагать, что для многих систем (или при некоторых дополнительных условиях) d_x будет величиной сопоставимой с диагональю наибольшего куба K_j , т.е. $O(\Delta_f)$.

5. ПРИМЕР

В качестве примера управляемой системы рассмотрим модифицированную математическую модель машины Дубинса. Пусть на промежутке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 1]$ задана управляемая система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= u_2(t) \cos \varphi(t), \quad \dot{y}(t) = u_2(t) \sin \varphi(t), \\ \dot{\varphi}(t) &= u_1(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0), \end{aligned} \quad (19)$$

где t – время, $\mathbf{x} = (x(t), y(t), \varphi(t)) \in \mathbb{R}^3$ – вектор фазового состояния управляемой системы, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^{(0)}$ – начальное состояние системы, $\mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t))$ – измеримая по Лебегу вектор-функция управления со значениями из $P = \{(u_1, u_2) : -1 \leq u_1 \leq 1, 0 \leq u_2 \leq 2\}$.

Задача состоит в быстром предъявлении разрешающего программного управления $\mathbf{u}(\cdot) = \{\mathbf{u}(t) : t_0 \leq t \leq \vartheta\}$, которое бы переводило движение $\mathbf{x}(t)$ управляемой системы (19) из начальной точки $\mathbf{x}^{(0)}$ в малую окрестность точки $\mathbf{x}^{(f)}$, координаты которой будут сообщены в начальный момент $t_0 = 0$. Вместе с тем, заранее известно, что целевая точка $\mathbf{x}^{(f)}$ будет принадлежать множеству $M = [0.7, 0.9] \times [0.1, 0.3] \times [0.4, 0.6] \subset \mathbb{R}^3$. Кроме того, предположим, что начальное состояние $\mathbf{x}^{(0)}$ системы (19) известно без погрешности, т.е. $\delta_x = 0$.

Итак, выполним алгоритм 1.

1. Выберем $N = 2$, тогда имеем разбиение $\Gamma = \{t_0 = 0, t_1 = 0.5, t_2 = 1\}$ с диаметром $\Delta_t = 0.5$. Также выберем $N_1 = N_2 = 100$, на отрезке $[t_0, t_1]$ введем подразбиение

$$\Gamma_1 = \left\{ t_{0,0} = t_0 = 0, t_{0,1} = t_0 + \frac{\Delta_t}{100} = 0.005, \dots, t_{0,k} = t_0 + \frac{k\Delta_t}{100}, \dots, t_{0,N_1} = t_1 = 0.5 \right\},$$

на отрезке $[t_1, t_2]$ введем подразбиение

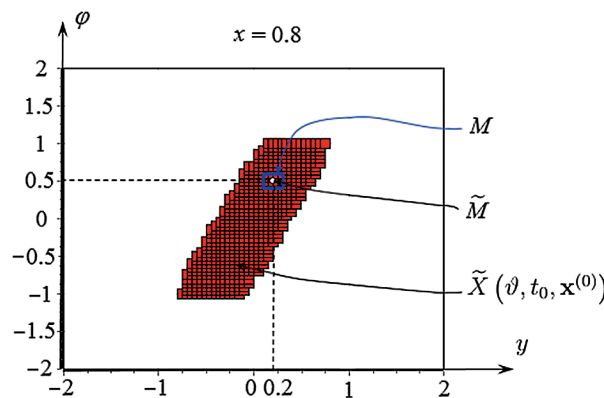
$$\Gamma_2 = \left\{ t_{1,0} = t_1 = 0.5, t_{1,1} = t_1 + \frac{\Delta_t}{100} = 0.505, \dots, t_{1,k} = t_1 + \frac{k\Delta_t}{100}, \dots, t_{1,N_1} = t_2 = 1 \right\}.$$

2. Выберем $\Delta_x = \sqrt{3} / 50$ и вычислим множества достижимости \tilde{X}_1 и \tilde{X}_2 , соответствующие моментам времени $t_1 = 0.5$ и $t_2 = 1$ (сечение \tilde{X}_2 плоскостью $x = 0.8$ изображено на фиг. 1).

3. Поскольку хаусдорфово отклонение $h(M, \tilde{X}_2) = \max_{x \in M} \min_{y \in \tilde{X}_2} \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \leq \Delta_x$ (см. фиг. 1), то мы заключаем,

что задача 1 разрешима для любой точки $\mathbf{x}^{(f)}$, которая будет сообщена в момент времени t_0 .

4. Выберем $\Delta_f = 0.1$, $\tilde{M} = \{x^{(f,1)}\}$, $\mathbf{x}^{(f,1)} = (0.8, 0.2, 0.5)$, т.е. $N_f = 1$, $K_1 = M = [0.7, 0.9] \times [0.1, 0.3] \times [0.4, 0.6]$ (см. фиг. 1).



Фиг. 1. Сечения множеств M , \tilde{M} и $\tilde{X}(\vartheta, t_0, \mathbf{x}^{(0)})$ плоскостью $x = 0.8$.

5. Поскольку чистым перебором найти минимально возможное значение Δ_u затруднительно, то мы найдем квазиоптимальное решение следующим образом. Сперва заметим, что управление $\mathbf{v}(t) = (v_1(t), v_2(t)) = (0.5, 0.831)$ при $t \in [0, 1]$ приводит состояние системы $\mathbf{x}(t)$ в точку $\mathbf{x}^{(1)} = (0.797, 0.203, 0.5)$, т.е. практически в центр куба K_1 . В связи с этим искомые кусочно постоянные управления, выводящие движение системы на вершины куба K_1 , будем искать в виде суммы управлений $\mathbf{u}^{(1, \pm, \pm, \pm)}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{w}^{(\pm, \pm, \pm)}(t)$ и для каждой вершины $\mathbf{x}^{(f, 1, \pm, \pm, \pm)}$ будем минимизировать

$\max_{t \in [t_0, \vartheta]} \| \mathbf{w}^{(\pm, \pm, \pm)}(t) \|$. Последняя задача минимизации нормы имеет уже приемлемую размерность и вполне может быть решена, например, методом циклического покоординатного спуска (см. [26, гл. 7, §3]).

В результате было найдено сужение управления

$$\tilde{P}(t) = \begin{cases} [0.114, 0.866] \times [0.331, 1.331], & t \in [0, 0.5), \\ [0, 1] \times [0.417, 1.202], & t \in [0.5, 1], \end{cases}$$

с диаметром $\Delta_u = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \text{diam}(\tilde{P}(t)) = \max_{t \in [t_0, \vartheta]} \max_{\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{P}(t)} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = 1.271$.

6. Были выбраны $\bar{\mathbf{x}}^{-(N,1,\pm,\pm,\pm)}$, ближайšie к $\mathbf{x}^{(N,1,\pm,\pm,\pm)}$, и соответствующие им кусочно постоянные управления $\bar{\mathbf{u}}^{-(1,\pm,\pm,\pm)}(t)$ со значениями из \tilde{P} . Для дальнейшего выполнения алгоритма 2 достаточно запомнить только следующие кусочно-постоянные «узловые» управления:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,-,-)}(t) &= \begin{cases} (0.156, 0.684), & t \in [0, 0.5), \\ (0.644, 0.741), & t \in [0.5, 1], \end{cases} & \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,-,+)}(t) &= \begin{cases} (0.226, 1.015), & t \in [0, 0.5), \\ (0.974, 0.417), & t \in [0.5, 1], \end{cases} \\ \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,+,-)}(t) &= \begin{cases} (0.844, 0.331), & t \in [0, 0.5), \\ (0, 1.202), & t \in [0.5, 1], \end{cases} & \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,+,+)}(t) &= \begin{cases} (0.866, 0.586), & t \in [0, 0.5), \\ (0.335, 0.959), & t \in [0.5, 1], \end{cases} \\ \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,-,-)}(t) &= \begin{cases} (0.114, 1.082), & t \in [0, 0.5), \\ (0.68, 0.742), & t \in [0.5, 1], \end{cases} & \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,-,+)}(t) &= \begin{cases} (0.185, 1.331), & t \in [0, 0.5), \\ (1, 0.495), & t \in [0.5, 1], \end{cases} \\ \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,+,-)}(t) &= \begin{cases} (0.802, 0.766), & t \in [0, 0.5), \\ (0, 1.146), & t \in [0.5, 1], \end{cases} & \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,+,+)}(t) &= \begin{cases} (0.743, 1.055), & t \in [0, 0.5), \\ (0.457, 0.872), & t \in [0.5, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, мы заготовили «узловые» управления, выполнив алгоритм 1.

Далее, пусть в некоторый момент t_0 были сообщены следующие координаты целевой точки $\mathbf{x}^{(f)} = (0.8, 0.2, 0.5)$. Для немедленного перевода состояния системы (1) в $\mathbf{x}^{(f)}$ выполним алгоритм 2.

1. Очевидно, целевую точку $\mathbf{x}^{(f)} = (0.8, 0.2, 0.5)$ содержит единственный имеющийся куб $K_1 = [0.7, 0.9] \times [0.1, 0.3] \times [0.4, 0.6]$.

2. Представляем $\mathbf{x}^{(f)}$ в виде линейной комбинации

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(f)} &= \frac{1}{8} \left(\mathbf{x}^{(f,1,-,-,-)} + \mathbf{x}^{(f,1,-,-,+)} + \mathbf{x}^{(f,1,-,+,-)} + \mathbf{x}^{(f,1,-,+,+)} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{x}^{(f,1,+,-,-)} + \mathbf{x}^{(f,1,+,-,+)} + \mathbf{x}^{(f,1,+,+,-)} + \mathbf{x}^{(f,1,+,+,+)} \right). \end{aligned}$$

3. В качестве искомого разрешающего программного управления получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}(t) &= \frac{1}{8} \left(\bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,-,-)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,-,+)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,+,-)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,-,+,+)}(t) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,-,-)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,-,+)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,+,-)}(t) + \bar{\mathbf{u}}^{-(1,+,+,+)}(t) \right) = \\ &= \begin{cases} (0.492, 0.856), & t \in [0, 0.5), \\ (0.511, 0.822), & t \in [0.5, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

Моделирование движения системы (1) под действием полученного управления $\hat{\mathbf{u}}(t)$ с помощью метода Рунге–Кутты с шагом по времени $\Delta_t = 0.001$ показало, что состояние системы в момент времени $\vartheta = 1$ перешло в точку $\hat{\mathbf{x}}(\vartheta) = (0.804869, 0.2016473, 0.5014999)$. Величина промаха (в евклидовой метрике) составила $\|\hat{\mathbf{x}}(\vartheta) - \mathbf{x}^{(f,1)}\| = 0.005355$, что составляет 2.68 % от длины ребра куба K_1 , являющимся ячейкой разбиения множества возможных целевых точек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что исследуемая в настоящей работе задача была рассмотрена ранее в [12, п. 5]. В той работе было предложено путем замены фазовой переменной переводить неопределенность в целевой точке в неопределенность по параметру. Однако в общем случае ранее предложенный в [12, п. 5] алгоритм не годится, так как для выполнения введенного в [12, п. 2] условия Е фактически необходимо совпадение размерностей управляющего вектора и фазового пространства. В настоящей работе построено «прямое»

решение поставленной задачи без введения вспомогательного параметра, рассмотрен пример, в котором размерность управляющего вектора меньше размерности фазового пространства. Кроме того, способы проверки выполнения введенного в [12, п. 2] условия Е пока еще не найдены. В настоящей же работе все условия на управляемую систему легко проверяемы, теоретическая оценка погрешности может быть явно вычислена.

Направлениями дальнейших исследований могут быть использование нелинейной интерполяции (см. [27], [28]) программного управления для еще большей точности, исследование возможности применения интерполяции программного управления и оценке его погрешности в задачах управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка (см. [29], [30]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972. [E.B. Lee, L. Markus *Foundations of Optimal Control Theory*. New York: Wiley, 1967.]
2. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970.
3. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.
4. Veliov V.M. Parametric and functional uncertainties in dynamic systems local and global relationship. In book: *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*. Amsterdam: North-Holland, 1992.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. М.: Наука, 1977.
6. Ершов А.А., Ушаков В.Н. О сближении управляемой системы, содержащей неопределенный параметр // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 9. С. 56. [A.A. Ershov, V.N. Ushakov An approach problem for a control system with an unknown parameter // *Sb. Math.* 2017. V. 208, 9. P. 1312–1352.]
7. Ushakov V.N., Ershov A.A., Ushakov A.V. An approach problem with an unknown parameter and inaccurately measured motion of the system // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. № 32. С. 234.
8. Никольский М.С. Об одной задаче управления с неполностью известным начальным условием // Прикл. матем. и информ. 2015. Т. 51, С. 16–23. [M.S. Nikol'skii, "A Control Problem with a Partially Known Initial Condition", *Comput. Math. Model.* 2017. V. 28. P. 12–17.]
9. Лемак С.С. К вопросу о формировании позиционных стратегий дифференциальной игры в методе экстремального прицеливания Н.Н. Красовского // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2015. Т. 6. С. 61. [S.S. Lemak, "Formation of positional strategies for a differential game in Krasovskii's method of extremal aiming", *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2015. V. 70. No. 6. P. 157–160.]
10. Ушаков В.Н., Матвийчук А.Р., Паршиков Г.В. Метод построения разрешающего управления задачи о сближении, основанный на притягивании к множеству разрешимости // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 2. С. 275. [V.N. Ushakov, A.R. Matviychuk, G.V. Parshikov, "A method for constructing a resolving control in an approach problem based on attraction to the solvability set", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, V. 284, suppl. 1. 2014. P. 135–144.]
11. Ершов А.А. Интерполяция программного управления по параметру в задаче о сближении // Пробл. матем. анализа. 2022. Т. 113. С. 17. [A.A. Ershov, "Linear parameter interpolation of a program control in the approach problem", *J. Math. Sci.* 2022. V. 260. No 6. P. 725–737.]
12. Ершов А.А. Билинейная интерполяция программного управления в задаче о сближении // Уфимск. матем. журн. 2023. Т. 15. № 3. С. 42.
13. Nader M., Ali J. Approximation methods and spatial interpolation in distributed control systems // *ACC'09: Proceed. of the 2009 Conf. on American Control Conf.* 2009. P. 860.
<https://folk.ntnu.no/skoge/prost/proceedings/acc09/data/papers/1097.pdf>
14. <https://patents.google.com/patent/US5197014A/en>
15. Kowalski K., Steeb W.-H. *Nonlinear dynamical systems and Carleman linearization*. Singapore: World Scientific, 1991.
<https://doi.org/10.1142/1347>
16. Antoulas A.C., Beattie C.A., Gugercin S. *Interpolatory methods for model reduction*. Philadelphia: PA, 2020.
<https://doi.org/10.1137/1.9781611976083>
17. Condon M., Ivanov R. Krylov subspaces from bilinear representations of nonlinear systems // *Compel-Int. J. Comp. Math. Electr. Electron. Eng.* 2007. V. 26. № 2. P. 399–406.
<https://doi.org/10.1108/03321640710727755>

18. *Benner P., Gugercin S., Werner S.W.R.* Structure-preserving interpolation of bilinear control systems // *Adv. Comput. Math.* 2021. V. 47. № 43.
<https://doi.org/10.1007/s10444-021-09863-w>
19. *Брессан А., Пикколи Б.* Введение в математическую теорию управления. М.-Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2015. [A. Bressan, B. Piccoli *Introduction to the mathematical theory of control.* New York: American Institute of Math. Sci., 2007.]
20. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. М.: Наука. 1968.
21. *Ушаков В.Н., Ершов А.А.* К решению задач управления с фиксированным моментом окончания // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки.* 2016. Т. 26. № 4. С. 543. [V.N. Ushakov, A.A. Ershov, “On the solution of control problems with fixed terminal time” [in Russian], *Vestn. Udmurt. Univ. Math. Mekh. Komp'yut. Nauki.* 2016. V. 26. № 4. P. 543–564.]
22. *Новикова А.О.* Построение множеств достижимости двумерных нелинейных управляемых систем пиксельным методом // *Тр. “Прикладная математика и информатика”.* 2015. Т. 50. С. 62.
23. *Авдюшев В.А.* Численное моделирование орбит небесных тел. Томск: Изд-кий Дом Томского гос. ун-та, 2015.
24. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. [B.P. Demidovich, I.A. Maron, *Fundamentals of computational mathematics.* Nauka, Moscow (1966)]
25. *Лизоркин П.И.* Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. М.: Наука. 1981.
26. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
27. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Нелинейная интерполяция компонент диффузионных марковских процессов (прямые уравнения, эффективные формулы) // *Теория вероятн. и ее примен.* 1968. Т. 13. Вып. 4. С. 602. [R. Sh. Liptser and A. N. Shiryaev, *Non-Linear Interpolation of Components of Markov Diffusion Processes (Direct Equations, Effective Formulas)* // *Theory of Probability and its Appl.* 1968. V. 13. Iss. 4. P. 564–583. <https://doi.org/10.1137/1113074>]
28. *Tsuda T.* Nonlinear interpolation of functions of very many variables // *Numer. Math.* 1975. V. 24. P. 395. <https://doi.org/10.1007/BF01437408>
29. *Гомоюнов М.И., Лукоянов Н.Ю.* Построение решений задач управления линейными системами дробного порядка на основе аппроксимационных моделей // *Тр. ИММ УрО РАН.* 2020. Т. 26. № 1. С. 39. [M.I. Gomoynov, N.Y. Lukoyanov, *Construction of Solutions to Control Problems for Fractional-Order Linear Systems Based on Approximation Models.* *Proc. Steklov Inst. Math.* 2021. V. 313 (Suppl 1). S73–S82. <https://doi.org/10.1134/S0081543821030093>]
30. *Плеханова М.В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка // *Челяб. физ.-матем. журн.* 2016. Т. 1. № 3. С. 15. [M. V. Plekhanova, “Start control problems for fractional order evolution equations”, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.* 2016. V. 1. P. 15–36.
<https://www.mathnet.ru/eng/chfmj27>]

TARGET-POINT INTERPOLATION OF A PROGRAM CONTROL IN THE APPROACH PROBLEM

A. V. Alekseev^{a,*} & A. A. Ershov^{b,c,**}

^a*Experimental Machine-Design Bureau "Novator",
Kosmonavtov Ave. 18, Yekaterinburg, 620091 Russia*

^b*Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy
of Sciences, ul. Sofia Kovalevskaya, 16, Yekaterinburg, 620108 Russia*

^c*Ural Federal University, ul. Mira, 19, Yekaterinburg, 620002 Russia*

^{*}*e-mail: sztern987@gmail.com*

^{**}*e-mail: ale10919@yandex.ru*

Received 01 October, 2023

Revised 10 November, 2023

Accepted 17 November, 2023

Abstract. For a no Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch, Russian Academy of Sciences, 620108, Yekaterinburg, Russian linear controlled system, a fixed-time approach problem is considered in which the target point location becomes known only at the start of motion. According to the proposed solution method, node resolving program controls corresponding to a finite collection of target points from the set of their admissible locations are computed in advance and a refined control for the target point given at the start of motion is determined via linear interpolation of the node controls. The procedure for designing such a resolving control is formulated in the form of two algorithms, one of which is run before the start of the motion, and the other is executed in real time while the system is moving. The error in the transfer of the system's state to the target point by applying these algorithms is estimated. As an example, we consider the approach problem for a modified Dubins car model and a target point about which only a compact set of its admissible locations is known before the start of motion.

Keywords: controlled system, approach problem, linear interpolation, program control, uncertain target point.