ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2420–2448

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.86

ГИПОТЕЗА РАМСЕЯ О СОЦИАЛЬНОЙ СТРАТИФИКАЦИИ КАК ПРИНЦИП ОТБОРА ПО ФИШЕРУ[1)]

© 2024 г. Г.С. Парастаев[1,2,*], А.А. Шананин[1,2,3,4,5,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ, Россия
[2] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия
[3] 141701 М.о., Долгопрудный, Институтский пер., 9, МФТИ, Россия
[4] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Россия
[5] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия
**e-mail: parastaew1996@yandex.ru*
***e-mail: alexshan@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.08.2024 г.
Переработанный вариант 23.08.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

Гипотеза Рамсея о социальной стратификации утверждает, что в популяции домашних хозяйств богатство концентрируется у наиболее бережливых агентов, которые дисконтируют потребительские расходы с наименьшим коэффициентом дисконтирования. Гипотезу Рамсея можно рассматривать как утверждение о справедливости принципа естественного отбора по Фишеру в популяции домашних хозяйств. В статье на основе гипотезы Дж. Дьюзенберри коэффициенты дисконтирования формируются в зависимости от распределения капитала между агентами. Поведение домашних хозяйств описывается моделями рационального репрезентативного потребителя рамсеевского типа. Для соответствующих задач оптимального управления построены решения в форме синтеза, которые использованы при моделировании динамики популяции домашних хозяйств. Доказаны теоремы для популяции домашних хозяйств, обосновывающие справедливость гипотезы Рамсея. Исследовано влияние потребительского кредита на социальную стратификацию домашних хозяйств. Библ. 28. Фиг. 2.

Ключевые слова: оптимальное управление в форме синтеза, коэффициент дисконтирования, гипотеза относительного дохода, гипотеза Рамсея, функция Ляпунова.

DOI: 10.31857/S0044466924120156, **EDN**: KBERNL

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблемы неравенства в распределении богатства, доходов и расходов в последние десятилетия приобретают такую же актуальность, как и сто лет назад. Тома Пикетти в монографии [1] утверждает, что такие явления, как социальные лифты, сокращение неравенства в доходах и расходах являются особенностью XX века и в современных условиях неравенство будет определяться возрастающим неравенством в распределении богатства, характерным для XVIII и XIX веков. В книге Филиппа Агийона и Джеффри Уильямсона [2], так же как и в монографии Т. Пикетти [1] обсуждается влияние возрастания неравенства на замедление темпов экономического роста мировой экономики. Ведущие экономисты, такие как Энтони Б. Аткинсон [3], ищут стратегии решения этих проблем.

Истоки современной теории экономического роста принято отсчитывать с конца 20-х годов XX века, когда на свет появилась работа английского математика Ф. П. Рамсея [4]. В ней Рамсей исследовал несколько вопросов, касающихся сбережений. Рамсеем было выдвинуто предположение о том, что в равновесном состоянии совокупность экономических агентов разделяется на два класса – тех, кто увеличивает свои сбережения и в конечном итоге оказывается собственником всего капитала, и тех, кто сокращает свои сбережения и впоследствии живет на уровне заработной платы. При этом всем богатством завладевает тот экономический агент, что имеет наименьший коэффициент дисконтирования среди всех остальных. Вопрос справедливости данного утверждения для более широкого класса моделей стал со временем приобретать все больший интерес среди

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 24-11-00329).

специалистов в области экономики и в смежных с ней областях и впоследствии закрепился как гипотеза Рамсея.

Глубина рассмотренной Рамсеем модели позволила развить ее в самых разных вариациях [5–7]. Одной из таких вариаций стала статья Р. Беккера [8], в которой изучается модель рамсеевского типа в дискретном времени с наложением запрета на заимствование капитала. Запрет был наложен с целью исключения ситуации, когда агент может брать определенную сумму в долг под свою будущую заработную плату. Вывод, полученный автором, также подтверждает справедливость гипотезы Рамсея.

Не менее весомый вклад внес Т. Бьюли, совместивший в своей работе рассмотрением модели рамсеевского типа теорию общего равновесия с классом теорем о магистрали [9]. Построенная Бьюли модель в дискретном времени допускает заимствование капитала, в отличие от модели, предложенной Беккером.

В совместной работе Г. Зоргера и Т. Митры [10] была рассмотрена модель Рамсея–Беккера в непрерывном времени, где коэффициенты дисконтирования заданы константными значениями. Помимо справедливости гипотезы Рамсея, авторам удалось установить единственность стационарного равновесного состояния, его глобальную асимптотическую устойчивость, а также следующее свойство: самое терпеливое домашнее хозяйство, т.е. то хозяйство, которое обладает наименьшим значением коэффициента дисконтирования, в пределе завладевает всем богатством, располагаемым в экономике.

В статье К. Ю. Борисова и М. А. Пахнина [7], посвященной обзору моделей экономического роста с неоднородным дисконтированием, приведены ссылки на эмпирические исследования, говорящие о наличии зависимости значения коэффициента дисконтирования от неравенства в распределении доходов, что приводит к выводу о необходимости рассмотрения альтернативных способов формирования временного предпочтения выбора. Одним из таких способов является эндогенное формирование межвременных предпочтений, которое было впервые рассмотрено Купмансом [11] и Удзавой [12]. В обзорной статье [7], в частности, приводятся ссылки на две работы одного из авторов [13, 14], где рассматриваются модели с эндогенностью временных предпочтений в дискретном времени.

Стоит также отметить, что в работе [7] обсуждается вопрос существования равновесных траекторий для моделей рамсеевского типа в случае, когда коэффициенты дисконтирования экономических агентов являются социально обусловленными, то есть, зависят от отношения располагаемого конкретным агентом богатства к средней величине богатства в экономике. Такой подход восходит к гипотезе относительного дохода американского экономиста Дж. Дьюзенберри [15]. В свое время Дж. М. Кейнс [16] заметил, что по мере увеличения своего текущего дохода индивиды сберегают все большую долю дохода, а тратят на потребление все меньшую долю дохода. Иными словами, функция потребления является вогнутой по доходу, а функция сбережений — выпуклой по доходу. Дж. Дьюзенберри [15] уточнил мысль Кейнса и выдвинул гипотезу относительного дохода, согласно которой предельная и средняя склонность индивида к сбережению растет с ростом его относительного дохода. К сожалению, теория потребления, основанная на идеях Дьюзенберри, была практически забыта, хотя, как отмечает известный специалист по поведенческой экономике Р. Фрэнк [17], она превосходит вытеснившую ее теорию перманентного дохода как в теоретическом, так и в эмпирическом разрезе.

Модели, формализующие гипотезу относительного дохода, были построены в работах [18] и [19]. В этих моделях естественным образом возникают двухклассовые равновесия. Однако эти модели обладают тем недостатком, что в них функции потребления и сбережения задаются непосредственным образом без микроэкономических оснований. Попытки преодолеть этот недостаток были предприняты в [13] и [14], где рассматривается модель, в которой каждый отдельный потребитель максимизирует межвременную полезность с коэффициентом дисконтирования, зависящим от его относительного уровня благосостояния, а также в [20], где предполагается, что функция полезности отдельного индивида подвержена отрицательной потребительской экстерналии (или, по-простому, зависти). В этих моделях тоже естественным образом возникают двухклассовые равновесия.

Данная работа предлагает несколько иной подход, когда в модели экономического роста стратегия потребления каждого агента определена оптимальным управлением в форме синтеза в задаче о поведении рационального репрезентативного потребителя. Благодаря такому подходу становится возможным использовать технику теории устойчивости. Кроме того, гипотеза Рамсея поддается интерпретации на языке популяционной динамики, что позволяет выявить аналогию гипотезы с принципом естественного отбора, изложенным в монографии Рональда Фишера (см. [21, Глава 2]).

Дальнейшее изложение устроено следующим образом. В разд. 2 описывается модель репрезентативного экономического агента на бесконечном горизонте. Разд. 3 посвящен построению синтеза оптимального управления в соответствующих экстремальных задачах. Модель социальной динамики и формулировки основных результатов приведены в разд. 4, в то время как их доказательства изложены в разд. 5. В разд. 6 установлена связь функции Ляпунова для модели популяционной динамики из разд. 4 с индексом неравенства Джини. В разд. 7 приводится заключение с указанием дальнейших направлений работы.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ АГЕНТОВ

В основу модели экономического поведения, описываемой задачами оптимального управления, положим концепцию Ф. Рамсея (см. [4]) и будем предполагать денежный рынок совершенным, т.е. равенство процентных ставок по кредитам и депозитам. Будем считать, что экономические решения, принимаемые типичным агентом, являются ограниченно рациональными, т.е. агент определяет потребительские расходы, сбережения и заимствования по потребительскому кредиту так, чтобы максимизировать дисконтированное потребление с учетом бюджетных ограничений. При этом предполагается, что он не может спрогнозировать изменения экономической конъюнктуры и принимает решения, считая, что его заработная плата w и процентная ставка на денежном рынке r будут оставаться на неизменном уровне. Будем также считать, что текущее финансовое состояние агента в момент времени t описывается его капиталом $k\left(t\right)$. Капитал агента изменяется в результате поступления заработной платы w, доходов $rk\left(t\right)$ и потребительских доходов $c\left(t\right) \geq 0$. Таким образом, ожидаемая агентом динамика капитала описывается уравнением

$$\dot{k}(t) = rk(t) + w - c\left(t\right)$$

с начальным условием

$$k\left(0\right) = k_0.$$

Тогда задание программы потребительских расходов $c\left(t\right)$ определяет предполагаемую динамику капитала. Предполагается, что агент стремится максимизировать дисконтированную функцию полезности с постоянным отвращением к риску

$$J\left(c\left(\cdot\right)\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho s}\left(c\left(s\right)\right)^{\beta}\, ds \to \max_{c(\cdot)},$$

где $\rho > 0$ – коэффициент дисконтирования, $1-\beta$ – коэффициент отвращения к риску, $\beta \in (0,1)$. Потребительские расходы $c\left(t\right)$ являются кусочно-непрерывной функцией.

Будем рассматривать две постановки задачи. В первой постановке допускается потребительский кредит, т.е. величина капитала может принимать отрицательные значения, и в этом случае агент, обслуживая кредит, выплачивает процентные платежи. Величина задолженности по потребительскому кредиту должна быть обеспечена будущими поступлениями заработной платы, т.е.

$$k\left(t\right) \geq -\frac{w}{r},\ t \in [0,+\infty)\,.$$

Во второй постановке потребительский кредит не допускается, и капитал агента должен быть неотрицательным, т.е.

$$k\left(t\right) \geq 0,\ t \in [0,+\infty)\,.$$

Первая постановка, названная в [7] моделью Рамсея–Бьюли, приводит к задаче оптимального управления вида

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1}$$

$$\dot{k}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - c\left(t\right),\ k\left(0\right) = k_0, \tag{2}$$

$$c\left(t\right) \geq 0, \tag{3}$$

$$k\left(t\right) \geq -\frac{w}{r}. \tag{4а}$$

Вторая постановка, названная в [7] моделью Рамсея–Беккера, приводит к задаче оптимального управления

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\rho t}\left(c\left(t\right)\right)^{\beta}\, dt \to \max_{c(\cdot)}, \tag{1}$$

$$\dot{k}\left(t\right) = rk\left(t\right) + w - c\left(t\right),\ k\left(0\right) = k_0, \tag{2}$$

$$c\left(t\right) \geq 0, \tag{3}$$

$$k\left(t\right) \geq 0. \tag{4б}$$

Поскольку далее описание поведения агента будет использоваться в модели «популяции» агентов, в которой коэффициенты дисконтирования формируются эндогенно в зависимости от распределения капитала между агентами, требуется получить из решения этих задач оптимального управления выбор размеров потребления агента в форме синтеза оптимального управления $c(k, \rho)$, т.е. как функцию текущего значения капитала (фазовой переменной задачи оптимального управления) и параметра ρ.

3. СИНТЕЗ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Решать задачи (1)–(3), (4а) и (1)–(3), (4б) мы будем, используя подход, который был использован в работах [22, 23] для доказательства утверждений, связанных с принципом максимума Понтрягина на бесконечном полуинтервале. Он заключается в рассмотрении последовательности вспомогательных задач оптимального управления на конечных отрезках $[0, T_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ – произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, такая что $T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Следовательно, для любого $T > 0$ найдется такое $n_1 \in \mathbb{N}$, что $T_{n_1} \geq T$.

Будем рассматривать вспомогательную задачу оптимального управления с фиксированным временным горизонтом $[0, T]$ при функционале полезности вида

$$\int_0^T e^{-\rho t} (c(t))^{\beta} \, dt \to \max_{c(\cdot)} \tag{1_T}$$

с ограничениями (2), (3) на отрезке $[0, T]$, а также ограничением (4а) или (4б) соответственно.

Будем называть пару (c, k) *допустимой* для задачи оптимального управления, если управление $c(t)$ является кусочно-непрерывной функцией, удовлетворяющей ограничению (3), а соответствующая ему траектория $k(t)$ удовлетворяет задаче Коши (2) и ограничению (4а) (или (4б) соответственно).

Определение 1. Пусть для любого $T > 0$ $c_{T_n}(t)$ сходится к $c_*(t)$ по норме в $L^1[0, T]$, а $k_{T_n}(t)$ равномерно сходится к функции $k_*(t)$ на отрезке $[0, T]$, где (c_{T_n}, k_{T_n}) – оптимальная допустимая пара для задачи оптимального управления (1_{T_n}), (2), (3), (4а) (или (4б) соответственно) на отрезке $[0, T_n]$, $n = 1, 2, \ldots$ Пусть также пара (c_*, k_*) является допустимой для задачи (1)–(3), (4а) (или (4б) соответственно). Тогда пара (c_*, k_*) называется *обобщенным* решением задачи оптимального управления на бесконечном полуинтервале (1)–(3), (4а) (или (4б) соответственно).

Введенное выше понятие обобщенного решения позволяет разрешить вопрос с определением понятия оптимальности в случае, когда функционал (1) является расходящимся несобственным интегралом. При этом если значение функционала (1) конечно, то обобщенное решение задачи на бесконечном полуинтервале времени совпадает с классическим решением (см. [22]). С другими понятиями оптимальности при расходящемся интеграле в задаче оптимального управления на бесконечном полуинтервале можно ознакомиться, к примеру, в [24, 25].

Для вспомогательной задачи первого типа предлагается рассмотреть альтернативное ограничение. Оно заключается в том, что мы допускаем возможность домашнему хозяйству брать потребительский кредит, но обязываем его к конечному моменту времени погасить все накопленные долги. Иными словами, капитал домашнего хозяйства в конечный момент времени должен быть неотрицательным:

$$k(T) \geq 0. \tag{4_T^{a}}$$

Отметим, что на решении задачи (1_T), (2), (3), (4_T^{a}) условие (4а) выполняется автоматически. Мы далее покажем, что в пределе при $T \to +\infty$ решение этой задачи даст оптимальное управление на бесконечном горизонте времени для задачи (1)–(3) с ограничением (4а).

Далее под записью p_+ будем понимать $p_+ = \max\{p, 0\}$.

Теорема 3.1. *Синтез в задаче оптимального управления* (1)–(3) *с ограничением* (4а) *имеет вид*

$$c_1(k, \rho) = \frac{(\rho - \beta r)_+}{1 - \beta} \left[k + \frac{w}{r}\right]. \tag{4}$$

Теорема 3.2. *Синтез в задаче оптимального управления* (1)–(3) *с ограничением* (4б) *имеет вид*

$$c_2(k, \rho) = \begin{cases} c_1(k, \rho), & \rho \leq r, \\ \hat{c}(k, \rho), & \rho > r, \end{cases} \tag{5}$$

где функция $\hat{c} = \hat{c}(k, \rho) \geq w$ является решением уравнения

$$\frac{\rho - \beta r}{1 - \beta}\left(k + \frac{w}{r}\right) = \hat{c} + \frac{\rho - r}{(1 - \beta) r} w \left(\frac{w}{\hat{c}}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}. \tag{6}$$

Перед доказательством теорем напомним одно важное утверждение, которое позволяет проверить полученное решение на оптимальность. Рассмотрим функцию цены

$$V(t, k) = \sup\left\{\int\limits_t^T e^{-\rho(s-t)} (c(s))^{\beta}\, ds\right\},$$

соответствующую задаче Коши (2) с условием $k(t) = k$, ограничению (3) и ограничению ($4^{\text{а}}_T$) или (4б) соответственно. Задаче (1_T), (2), (3), ($4^{\text{а}}_T$) (или (4б) соответственно) соответствует уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \rho V + \sup\left\{\left.\frac{\partial V}{\partial k}[rk + w - c] + c^{\beta}\right| c \geq 0\right\} = 0 \tag{7}$$

с граничным условием $V(T, k[T]) = 0$.

Сформулируем и докажем вариант теоремы верификации (см. [26, с.12]).

Лемма 3.1. *Пусть функция $\mathcal{V}(t, k)$ непрерывно дифференцируема по (t, k) в области $[0, T] \times (a + \mathbb{R}_+)$, $a \leq 0$, и удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби–Беллмана* (7) *с граничным условием $\mathcal{V}(T, k) = 0$. Тогда $\mathcal{V}(t, k) \geq V(t, k)$. Пусть также управление $c^0(s)$ и отвечающая ему траектория $k^0[s] = k^0(s, t, k)$, $s \geq t$, $k^0[t] = k$, удовлетворяют соотношению*

$$\frac{\partial \mathcal{V}(s, k^0(s))}{\partial k}\left[rk^0(s) + w - c^0(s)\right] + \left(c^0(s)\right)^{\beta} =$$
$$= \sup_{c \geq 0}\left\{\frac{\partial \mathcal{V}(s, k^0(s))}{\partial k}\left[rk^0(s) + w - c\right] + c^{\beta}\right\}.$$

Тогда управление $c^0(\cdot)$ и соответствующая ему траектория $k^0[\cdot]$ оптимальны, и $\mathcal{V}(t, k) = V(t, k)$.

Доказательство. Возьмем произвольное управление $\tilde{c}(\cdot) \geq 0$ и отвечающую ему траекторию $\tilde{k}[s] = \tilde{k}(s, t, k)$ с начальным значением $\tilde{k}[t] = k$. Из уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана для функции $\mathcal{V}$ следует, что для управления $\tilde{c}(\cdot)$ выполняется неравенство

$$\frac{\partial \mathcal{V}\left(t, \tilde{k}[t]\right)}{\partial t} - \rho \mathcal{V}\left(t, \tilde{k}[t]\right) + \frac{\partial \mathcal{V}\left(t, \tilde{k}[t]\right)}{\partial k}\left[r\tilde{k}[t] + w - \tilde{c}(t)\right] + (\tilde{c}(t))^{\beta} \leq 0.$$

Представив разность

$$e^{-\rho T}\mathcal{V}\left(T, \tilde{k}[T]\right) - e^{-\rho t}\mathcal{V}(t, k) = \int\limits_t^T \frac{d\left(e^{-\rho s}\mathcal{V}\left(s, \tilde{k}(s)\right)\right)}{ds}\, ds,$$

имеем

$$e^{-\rho T}\mathcal{V}\left(T, \tilde{k}[T]\right) - e^{-\rho t}\mathcal{V}(t, k) = \int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(-\rho \mathcal{V}\left(s, \tilde{k}(s)\right) + \frac{\partial \mathcal{V}\left(s, \tilde{k}(s)\right)}{\partial s} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathcal{V}\left(s, \tilde{k}(s)\right)}{\partial k}\left[r\tilde{k}(s) + w - \tilde{c}(s)\right]\right) ds \leq -\int\limits_t^T e^{-\rho s}(\tilde{c}(s))^{\beta}\, ds.$$

Следовательно, так как $\mathcal{V}\left(T, \tilde{k}[T]\right) = 0$, имеем

$$\mathcal{V}(t, k) \geq e^{\rho t}\int\limits_t^T e^{-\rho s}(\tilde{c}(s))^{\beta}\, ds,$$

откуда следует, что $\mathcal{V}(t,k) \geq V(t,k)$. С другой стороны, для управления $c^0(\cdot)$ и отвечающей ему траектории $k^0(\cdot)$ имеем

$$e^{-\rho T}\mathcal{V}\left(T,k^0[T]\right) - e^{-\rho t}\mathcal{V}(t,k) = \int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(-\rho\mathcal{V}\left(s,k^0(s)\right) + \frac{\partial\mathcal{V}\left(s,k^0(s)\right)}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\mathcal{V}\left(s,k^0(s)\right)}{\partial k}\left[rk^0(s) + w - c^0(s)\right]\right) ds = -\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c^0(s)\right)^{\beta} ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(t,k) = e^{\rho t}\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c^0(s)\right)^{\beta} ds \leq V(t,k),$$

поэтому $\mathcal{V}(t,k) = V(t,k)$, и управление $c^0(\cdot)$ является оптимальным. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Задача оптимального управления* (1_T), (2), (3) *с ограничением* (4_T^{a}) *имеет решение вида*

$$c_{T,1}(t,k) = \frac{\rho - \beta r}{1-\beta}\frac{k + \frac{w}{r}\left(1 - e^{-r(T-t)}\right)}{1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}. \tag{8}$$

Доказательство. Функция Гамильтона–Понтрягина задачи (1_T), (2), (3), (4_T^{a}) имеет вид

$$\mathcal{H}_1(k,p,c) = c^{\beta} + p(rk + w - c).$$

Первое условие – достижение максимума функции Гамильтона–Понтрягина по c. Поскольку функция $\mathcal{H}_1$ дифференцируема по c, для нее справедливо необходимое условие экстремума:

$$\left.\frac{\partial\mathcal{H}_1(k,c,p)}{\partial c}\right|_{\substack{k=k_1(s),\, c=c_1(s),\\ p=p_1(s)}} = \beta\left(c_1(s)\right)^{\beta-1} - p_1(s) = 0 \Rightarrow c_1(s) = \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Полученное выражение имеет смысл при $p_1(s) > 0$. При $p_1(s) \leq 0$ мы имеем $\frac{\partial\mathcal{H}_1}{\partial c} > 0$, поэтому максимум функции Гамильтона–Понтрягина достигается при $c_1 = +\infty$. Поскольку управление должно быть конечным, условие $p_1(s) > 0$ является необходимым. Следовательно,

$$c_{T,1}[s] = \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Сопряженное уравнение для функции $p_1(s)$ имеет вид

$$\dot{p}_1(s) = \rho p_1(s) - \left.\frac{\partial\mathcal{H}_1(k,p,c)}{\partial k}\right|_{\substack{k=k_1(s), p=p_1(s),\\ c=c_1(s)}} = (\rho - r)\,p_1(s),$$

решением которого является функция $p_1(s) = p_1(t)\,e^{(\rho-r)(s-t)}$.

Также имеем условие трансверсальности в момент времени T:

$$p_1(T)\,k_1(T) = 0.$$

Из формулы для $p_1(s)$ очевидно, что сопряженная переменная p_1 не меняет знака на отрезке $[t,T]$. В силу конечности значения капитала в момент времени T имеем $p_1(t) > 0$, поэтому $p_1(T) > 0$. Следовательно, по условию трансверсальности должно выполняться равенство $k_1(T) = 0$, при этом мы имеем следующую систему ОДУ для пары (k_1, p_1):

$$\dot{k}_1(s) = rk_1(s) + w - \left(\frac{\beta}{p_1(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}},\ k_1(t) = k,$$

$$\dot{p}_1(s) = (\rho - r)\,p_1(s),\ p_1(t) = p_{1t}.$$

Подставляя найденное решение второго уравнения в первое, находим формулу для капитала:

$$k_1(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)} - 1\right) - \left(\frac{\beta}{p_{1t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}e^{r(s-t)}\left(1 - e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\right).$$

Следовательно, используя условие трансверсальности $k_1(T)=0$, мы можем выразить

$$\left(\frac{\beta}{p_{1t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)}{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}}.$$

Тогда управление в программной форме для первой задачи имеет вид

$$c_{T,1}[s]=\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}\frac{k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)}{e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(T-t)}-1}e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}(s-t)},$$

а функционал принимает значение, равное

$$J\left(c_{T,1}[\cdot]\right)=\int\limits_t^T e^{-\rho s}\left(c_{T,1}[s]\right)^{\beta}ds=e^{-\rho t}\left(\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}\frac{k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)}{e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(T-t)}-1}\right)^{\beta}\times$$

$$\times\int\limits_t^T e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(s-t)}ds=e^{-\rho t}\left(k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\beta r-\rho}\left(e^{\frac{\beta r-\rho}{1-\beta}(T-t)}-1\right)\right)^{1-\beta}.$$

Воспользуемся теоремой верификации (леммой 3.1). Значение функционала имеет вид

$$J\left(c_{T,1}[\cdot]\right)=e^{-\rho t}\left(k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)\right)^{\beta}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)\right]^{1-\beta}.$$

Тогда $\mathcal{V}(t,k)=e^{\rho t}J\left(c_{T,1}[\cdot]\right)$. Функция $\mathcal{V}(t,k)$ по построению является непрерывно дифференцируемой по (t,k). Найдем частные производные функции $\mathcal{V}$, обозначив $\mathcal{V}_1(t,k)=k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)$, $\mathcal{V}_2(t)=$ $=\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)$:

$$\mathcal{V}(t,k)=\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}=-we^{-r(T-t)}\beta\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}(1-\beta)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{-\beta},$$

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k}=\beta\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}.$$

Найдем максимизатор:

$$c=\left(\frac{\beta}{\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}=\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}.$$

Тогда

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t}-\rho\mathcal{V}+\sup_{c\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k}[rk+w-c]+c^{\beta}\right\}=$$

$$=-we^{-r(T-t)}\beta\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}(1-\beta)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{-\beta}-$$

$$-\rho\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}+\beta\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}[rk+w]-$$

$$-\beta\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}+\left(\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}\right)^{\beta}=$$

$$=\underbrace{(1-\beta)\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T-t)}\right)}_{(\rho-\beta r)\mathcal{V}_2(t)}\left(\frac{\mathcal{V}_1(t,k)}{\mathcal{V}_2(t)}\right)^{\beta}+$$

$$+\beta r\underbrace{\left(k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)\right)}_{\mathcal{V}_1(t,k)}\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta-1}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-\rho\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}=$$

$$=(\rho-\beta r)\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}+\beta r\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}-\rho\mathcal{V}_1(t,k)^{\beta}\mathcal{V}_2(t)^{1-\beta}=0.$$

Таким образом, по теореме верификации (см. лемму 3.1) построенные с помощью принципа максимума Понтрягина траектория и управление (8) являются оптимальным решением задачи (1_T), (2), (3), (4_T^{a}). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Искомое управление находится в результате перехода к пределу в управлении, полученном в лемме 3.2, при $T \to +\infty$:

$$c_1[s] = \lim_{T\to+\infty} c_{T,1}[s] = \begin{cases} \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\left(k+\frac{w}{r}\right)e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}(s-t)}, & \rho > \beta r, \\ 0, & \rho \le \beta r, \end{cases}$$

$$\lim_{T\to+\infty} J\left(c_{T,1}[\cdot]\right) = \begin{cases} \left(k+\frac{w}{r}\right)^{\beta}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\right)^{1-\beta}, & \rho > \beta r, \\ +\infty, & \rho \le \beta r. \end{cases}$$

Заметим, что при $T \to +\infty$ выражение капитала для первой задачи принимает вид

$$k_1(s) = \left(k+\frac{w}{r}\right)e^{\frac{r-\rho}{1-\beta}(s-t)} - \frac{w}{r}.$$

Данное обстоятельство позволяет нам выразить $c_1[s]$ в форме синтеза $c_1(k,\rho)$ по формуле (4).

Для доказательства теоремы 3.2 докажем четыре вспомогательные леммы.

Лемма 3.3. *Пусть выполняется неравенство* $\rho \le r$. *Тогда решения задач* (1_T), (2), (3), ($4^{\text{а}}_T$) *и* (1_T), (2), (3), (4б) *совпадают.*

Доказательство. Так как фазовое ограничение (4б) включает в себя ограничение ($4^{\text{а}}_T$), то если управление $c_{T,1}[s]$ является допустимым и для задачи с ограничением (4б), то доставляемое им значение функционала оказывается оптимальным. Возьмем оптимальное управление $c_{T,2}[s] = c_{T,1}(s,t,k)$ и убедимся, что доставляемая этим управлением траектория $k_2(s)$ не нарушает фазовых ограничений. Так как $k_2(t) = k, k_2(T) = 0$, то рассмотрим $s \in (t,T)$. Введя обозначение $F(x) = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-rx}\right)}{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}}$, запишем выражение для траектории капитала $k_2(s)$ в следующем виде:

$$k_2(s) = ke^{r(s-t)} + \frac{w}{r}\left(e^{r(s-t)}-1\right) - F(T-t)\,e^{r(s-t)}\frac{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} =$$

$$= e^{r(s-t)}\frac{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}\left(F(s-t)-F(T-t)\right).$$

Вычислим производную функции $F(x)$:

$$F'(x) = \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}\frac{we^{-rx}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\right) - \frac{\rho-\beta r}{1-\beta}e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\left(k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-rx}\right)\right)}{\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}\right)^2} =$$

$$= e^{-\frac{\rho+(1-2\beta)r}{1-\beta}x}\left(\frac{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}}{1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}}\right)^2\left(w\left[\frac{e^{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}x}-1}{\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}} - \frac{e^{rx}-1}{r}\right] - ke^{rx}\right).$$

Исследуем теперь поведение функции $f(a,x) = \frac{e^{ax}-1}{a}$ с параметром $x > 0$:

$$\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} = \frac{(ax-1)\,e^{ax}+1}{a^2} = \frac{e}{a^2}\left((ax-1)\,e^{ax-1}+\frac{1}{e}\right).$$

Так как функция $w(s) = se^s$ достигает минимума в точке $s_0 = -1$ со значением, равным $-\frac{1}{e}$, то числитель дроби положителен при $a \ne 0$. Разложим экспоненту e^{ax} в ряд Тейлора с точностью до второго порядка малости по a:

$$\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} = \frac{(ax-1)\left(1+ax+\frac{a^2x^2}{2}+o\left(a^2\right)\right)+1}{a^2} = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{ax^3}{2}+o(1)\right)\xrightarrow[a\to 0]{}\frac{x^2}{2}.$$

Следовательно, для любого $x > 0$ $\frac{\partial f(a,x)}{\partial a} > 0, \forall a \in \mathbb{R}$. Но тогда $f\left(\frac{\rho-\beta r}{1-\beta},x\right) \le f(r,x)$, и поэтому $F'(x) < 0, \forall x > 0$, и по теореме Лагранжа о среднем значении отсюда следует, что найдется такая точка $\xi = \xi(s-t,T-t) \in (s-t,T-t)$, что $F(s-t) - F(T-t) = F'(\xi)(s-T) > 0, \forall s \in (t,T)$. Следовательно, $k_2(s) > 0$. При $k = 0$ и $\rho = r$ имеет место равенство $F(x) = w\ \forall x \ge 0$, поэтому $k_2(s) = 0$. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть* $\rho > r$. *Тогда уравнение* (6) *при каждом фиксированном значении* $k > 0$ *имеет два корня* $c_1 \in (0, w)$, $c_2 > w$, *а при* $k = 0$ *обладает единственным корнем* $c = w$.

Доказательство. Исследуем правую часть уравнения (6) как функцию от c:

$$f(c) = c + \frac{\rho - r}{(1-\beta) r} w \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho - r}}.$$

Найдем ее производную: $f'(c) = 1 - \left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho - r}}$. Нетрудно заметить, что $f'(w) = 0$, причем $f'(c) < 0$, $0 < c < w$ и $f'(c) > 0$, $c > w$. Следовательно, в точке $c = w$ функция достигает минимального значения, равного $f_{\min} = \frac{\rho-\beta r}{(1-\beta)r} w$. Левая часть уравнения (6), которую мы обозначим через $h(k)$, достигает значения $f_{\min}$ тогда и только тогда, когда $k = 0$. Так как $f(c)$ и $h(k)$ являются непрерывными функциями своих аргументов, причем $\lim\limits_{c\to 0+} f(c) = \lim\limits_{c\to+\infty} f(c) = +\infty = \lim\limits_{k\to+\infty} h(k)$, то в силу теоремы о прохождении непрерывной функции через промежуточное значение для любого $f \in (f_{\min}, +\infty)$ найдутся $c_1 \in (0, w)$ и $c_2 \in (w, +\infty)$ такие, что $f(c_1) = f(c_2) = f$. В свою очередь, для функции h найдется такое $\tilde{k}$, что $h\left(\tilde{k}\right) = f$. Таким образом, имеем для каждого $k \in (0, +\infty)$ два корня: $c_1 \in (0, w)$ и $c_2 > w$. Лемма доказана.

Лемма 3.5. *Пусть* $\rho > r$. *Тогда задача оптимального управления* (1_T), (2), (3) *с ограничением* (4б) *при* $k_0 = 0$ *имеет решение* $c(t) = w$.

Доказательство. Так как x^β – вогнутая функция, в силу неравенства Иенсена имеем

$$\int\limits_0^T \frac{\rho e^{-\rho t}}{1 - e^{-\rho T}} (c(t))^\beta \, dt \le \left(\int\limits_0^T \frac{\rho e^{-\rho t}}{1 - e^{-\rho T}} c(t)\, dt\right)^\beta = \left(\frac{\rho}{1 - e^{-\rho T}}\right)^\beta \left(\int\limits_0^T e^{-\rho t} c(t)\, dt\right)^\beta.$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_0^T e^{-\rho t} (c(t))^\beta \, dt \le \left(\frac{1 - e^{-\rho T}}{\rho}\right)^{1-\beta} \left(\int\limits_0^T e^{-\rho t} c(t)\, dt\right)^\beta,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $c(t) \equiv \mathrm{const}$, $t \in [0, T]$.

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу оптимального управления с функционалом

$$\int\limits_0^T e^{-\rho t} c(t)\, dt \to \max_{c(\cdot)},$$

задачей Коши (2) при начальном условии $k_0 = 0$ и ограничениями (3), (4б). Тогда траектория капитала имеет вид

$$k(t) = \int\limits_0^t e^{r(t-\tau)} (w - c(\tau))\, d\tau \ge 0.$$

Из формулы для траектории капитала и ограничения (4б) следует, что справедливо неравенство

$$\int\limits_0^t e^{-r\tau} c(\tau)\, d\tau \le \frac{w}{r}\left(1 - e^{-rt}\right).$$

Тогда

$$\int\limits_0^T e^{-\rho t} c(t)\, dt = \int\limits_0^T e^{-(\rho - r)t} d\left(\int\limits_0^t e^{-rs} c(s)\, ds\right) = e^{-(\rho-r)t} \int\limits_0^t e^{-rs} c(s)\, ds \Bigg|_0^T +$$
$$+ (\rho - r) \int\limits_0^T e^{-(\rho-r)t} \left(\int\limits_0^t e^{-rs} c(s)\, ds\right) dt = e^{-(\rho-r)T} \int\limits_0^T e^{-rs} c(s)\, ds +$$
$$+ (\rho - r) \int\limits_0^T e^{-(\rho-r)t} \left(\int\limits_0^t e^{-rs} c(s)\, ds\right) dt.$$

Положив $x(t)=\int\limits_0^t e^{-rs}c(s)\,ds$, получаем задачу оптимизации

$$(\rho-r)\int\limits_0^T e^{-(\rho-r)t}x(t)\ dt+e^{-(\rho-r)T}x(T)\to\max_{x(\cdot)},$$
$$0\le x(t)\le\frac{w}{r}\left(1-e^{-rt}\right),$$

решение которой достигается равенством $x(t)=\frac{w}{r}\left(1-e^{-rt}\right), t\in[0,T]$. Тогда, взяв производную по времени функции $x(t)$, получаем, что для любого $t\in[0,T]$

$$\frac{dx}{dt}=we^{-rt}=e^{-rt}c(t).$$

Следовательно, $c(t)=w, t\in[0,T]$. Но на функции, равной константе, неравенство Иенсена обращается в равенство, поэтому функционал (1_T) достигает на функции $c(t)=w$ максимального значения. Следовательно, управление $c(t)=w$ оптимально. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Задача оптимального управления* (1_T)*,* (2)*,* (3) *с ограничением* (4б) *имеет решение вида*

$$c_{T,2}(t,k)=\begin{cases}c_{T,1}(t,k), & \rho\le r,\\ \hat{c}(k,\rho), & \rho>r,\end{cases}\tag{9}$$

где функция $\hat{c}=\hat{c}(k,\rho)\ge w$ *является решением уравнения* (6).

Доказательство. Функция Гамильтона–Понтрягина для задачи (1_T), (2), (3), (4б) имеет вид

$$\mathcal{H}_2(k,c,p,\mu)=c^{\beta}+p\,[rk+w-c]+\mu k,\ \mu\ge0,\ \mu k=0.$$

Первое условие – достижение максимума функций Гамильтона–Понтрягина по c. Поскольку функция $\mathcal{H}_2$ дифференцируема по c, для нее справедливо необходимое условие экстремума:

$$\left.\frac{\partial\mathcal{H}_2(k,c,p,\mu)}{\partial c}\right|_{\substack{k=k_2(s),\,c=c_2(s),\\ p=p_2(s),\,\mu=\mu(s)}}=\beta\,(c_2(s))^{\beta-1}-p_2(s)=0\Rightarrow c_2(s)=\left(\frac{\beta}{p_2(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Полученное выражение имеет смысл при $p_2(s)>0$. При $p_2(s)\le0$ мы имеем $\frac{\partial\mathcal{H}_2}{\partial c}>0$, поэтому максимум функции Гамильтона–Понтрягина достигается при $c_2=+\infty$. Поскольку управление должно быть конечным, условие $p_2(s)>0$ является необходимым. Следовательно,

$$c_{T,2}[s]=\left(\frac{\beta}{p_2(s)}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}.$$

Сопряженное уравнение для функции $p_2(s)$ имеет вид

$$\dot{p}_2(s)=\rho p_2(s)-\left.\frac{\partial\mathcal{H}_2(k,c,p,\mu)}{\partial k}\right|_{\substack{k=k_2(s),\,c=c_2(s),\\ p=p_2(s),\,\mu=\mu(s)}}=(\rho-r)\,p_2(s)-\mu(s),$$

решением которого являются функция $p_2(s)=p_2(t)\,e^{(\rho-r)(s-t)}-e^{(\rho-r)(s-t)}\int\limits_t^s\mu(\tau)\,e^{-(\rho-r)(\tau-t)}\,d\tau$.

Условие трансверсальности в момент времени T имеет вид

$$p_2(T)\,k_2(T)=0.$$

Теперь разберем решение второй задачи. Так как по лемме 3.3 решения задач совпадают при $\rho\le r$, нам осталось разобрать случай, когда $\rho>r$.

Для начала покажем, что ранее рассмотренная траектория капитала становится недопустимой. Для этого рассмотрим производную по времени функции k_2 в момент времени T, используя формулу (8) и условие трансверсальности $k_2(T)=0$:

$$\dot{k}_2(T)=rk_2(T)+w-c_{T,2}[T]=w-F(T-t)\,e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(T-t)}\vee0.$$

Посредством арифметических преобразований нетрудно привести сравнение с нулем к эквивалентному сравнению вида

$$w\left(\frac{e^{\frac{\rho-r}{1-\beta}(T-t)}-1}{\frac{\rho-r}{1-\beta}}-\frac{1-e^{-r(T-t)}}{r}\right)\vee\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}k.$$

Так как при $a>0,\ b>0$ у функции $g\left(x,a,b\right)=\frac{e^{ax}-1}{a}-\frac{1-e^{-bx}}{b}$ частная производная

$$\frac{\partial g}{\partial x}\left(x,a,b\right)=e^{ax}-e^{-bx}>0\,\forall\,x>0,$$

то левая часть возрастает по T, причем $g\left(T-t,\frac{\rho-r}{1-\beta},r\right)\xrightarrow[T\to+\infty]{}+\infty$, $g\left(0,\frac{\rho-r}{1-\beta},r\right)=0$, поэтому по теореме о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение найдется такое $\hat{T}$, что полученное сравнение обращается в равенство при $T=\hat{T}$. Следовательно, выбрав $T>\hat{T}$, получаем, что $\dot{k}_2\left(T\right)>0$, что означает, что найдется $\Delta>0$ такое, что $k_2\left(t\right)<0, t\in\left(T-\Delta,T\right)$. Это свидетельствует о нарушении фазового ограничения задачи и недопустимости траектории $k_2\left(s\right)$. Следовательно, существует момент времени $T_1\in\left[t,T\right)$ такой, что $k_2\left(T_1\right)=0$. В силу леммы 3.5 выполняется равенство $c_2\left(s\right)=w, s\in\left[T_1,T\right]$, откуда следует, что $k_2\left(s\right)=0\ \forall s\in\left[T_1,T\right]$. Следовательно, в силу условия дополняющей нежесткости $p_2\left(s\right)=\beta w^{\beta-1}$, и $\mu\left(s\right)=\left(\rho-r\right)\beta w^{\beta-1}>0$. Тогда из соотношений $k_2\left(T_1\right)=0, c_2\left(T_1\right)=w$ можно вывести систему из двух уравнений с неизвестными моментом времени T_1 и значением сопряженной переменной $p\left(t\right)=p_{2t}$:

$$\left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(T_1-t)}=w,$$
$$k+\frac{w}{r}\left(1-e^{-r(T_1-t)}\right)-\left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T_1-t)}\right)=0.$$

Так как $c_2\left(t\right)=\left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$, нам удобнее выразить момент времени T_1 из первого уравнения как $T_1=t+\frac{1-\beta}{\rho-r}\ln\frac{c(t)}{w}$. Подставив T_1 во второе уравнение, получаем следующее уравнение относительно $c_2\left(t\right)$:

$$k+\frac{w}{r}\left(1-\left(\frac{w}{c_2\left(t\right)}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right)-c_2\left(t\right)\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-\left(\frac{w}{c_2\left(t\right)}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right)=0,$$

которое посредством арифметических преобразований приводится к уравнению (6) относительно $\hat{c}=c_2\left(t\right)$. По лемме 3.4 уравнение (6) при положительном значении k имеет два корня: $c^1\in\left(0,w\right)$ и $c^2>w$.

Теперь мы покажем, что момент времени T_1 является единственным, причем оптимальным управлением является функция

$$c_{T,2}\left[s\right]=\begin{cases}\left(\dfrac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}e^{-\frac{\rho-r}{1-\beta}(s-t)},\ s\in\left[t,T_1\right],\\ w,\ s\in\left(T_1,T\right],\end{cases}$$

со значением $c=\left(\frac{\beta}{p_{2t}}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}>w$, являющимся корнем уравнения (6). Для этого нам следует проверить выполнение условий леммы 3.1. Вычислим функционал:

$$J\left(c_{T,2}\left[\cdot\right]\right)=e^{-\rho t}\left(c^{\beta}\int\limits_{t}^{T_1}e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(s-t)}\,ds+\int\limits_{T_1}^{T}e^{\rho(t-s)}w^{\beta}\,ds\right)=$$
$$=e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-e^{-\frac{\rho-\beta r}{1-\beta}(T_1-t)}\right)c^{\beta}+\frac{w^{\beta}}{\rho}\left(e^{-\rho(T_1-t)}-e^{-\rho(T-t)}\right)\right).$$

Здесь T_1 – такой момент времени, что $k_2(T_1) = 0$, $c_2(T_1) = w$, следовательно, $ce^{-\frac{r-\rho}{1-\beta}(T_1-t)} = w$, и $T_1 - t = \frac{1-\beta}{\rho-r}\ln\frac{c}{w}$. Тогда

$$J(c_{T,2}[\cdot]) = e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right)c^{\beta} + \frac{w^{\beta}}{\rho}\left(\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{(1-\beta)\rho}{\rho-r}} - e^{-\rho(T-t)}\right)\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left(1-\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right)c^{\beta} + \frac{c^{\beta}}{\rho}\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}} - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(c^{\beta}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r} + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right).$$

С другой стороны, используя уравнение (6), удобно получить эквивалентное представление:

$$J(c_{T,2}[\cdot]) = e^{-\rho t}\left(c^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}c + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}c\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(c^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}c + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}w\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{(1-\beta)r}{\rho-r}}\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(c^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}c + \frac{\beta}{\rho}\left(rk + w - \frac{(1-\beta)r}{\rho-\beta r}c\right)\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= e^{-\rho t}\left(c^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}c + \frac{\beta}{\rho}(rk+w)\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right).$$

Тогда положим $\mathcal{V}(t,k) = e^{\rho t}J(c_{T,2}[\cdot])$. Так как по построению функция $\mathcal{V}(t,k)$ является непрерывно дифференцируемой, мы можем найти ее частные производные. Для начала продифференцируем уравнение (6) по k:

$$\frac{\rho-\beta r}{1-\beta} = \frac{\partial c}{\partial k}\left[1-\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right].$$

Тогда получим

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k} = \beta c^{\beta-1}\frac{\partial c}{\partial k}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r} + \frac{\beta}{\rho}\frac{\rho-r}{\rho-\beta r}\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] - c^{\beta-1}\frac{\beta}{\rho}\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\frac{\partial c}{\partial k} =$$

$$= \beta c^{\beta-1}\frac{\partial c}{\partial k}\left[\frac{1-\beta}{\rho-\beta r} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\left(\beta\frac{\rho-r}{\rho-\beta r} - 1\right)\right] =$$

$$= \beta c^{\beta-1}\frac{\partial c}{\partial k}\frac{1-\beta}{\rho-\beta r}\left[1-\left(\frac{w}{c}\right)^{\frac{\rho-\beta r}{\rho-r}}\right] = \beta c^{\beta-1}.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} = -w^{\beta}e^{-\rho(T-t)}.$$

Вычисляя супремум в уравнении Гамильтона–Якоби–Беллмана, имеем, что $c = \left(\frac{1}{\beta}\frac{\partial\mathcal{V}(t,k)}{\partial k}\right)^{\frac{1}{\beta-1}}$. Тогда

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} - \rho\mathcal{V} = -w^{\beta}e^{-\rho(T-t)} - \rho\left(c^{\beta-1}\left[\frac{1-\beta}{\rho}c + \frac{\beta}{\rho}(rk+w)\right] - \frac{w^{\beta}}{\rho}e^{-\rho(T-t)}\right) =$$

$$= -c^{\beta-1}\left[(1-\beta)c + \beta(rk+w)\right],$$

$$\sup_{c\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k}[rk+w-c] + c^{\beta}\right\} = \beta c^{\beta-1}[rk+w-c] + c^{\beta} =$$

$$= c^{\beta-1}\left[\beta(rk+w) + (1-\beta)c\right].$$

Складывая полученные выражения, получаем, что

$$\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial t} - \rho\mathcal{V} + \sup_{c\geq 0}\left\{\frac{\partial\mathcal{V}}{\partial k}[rk+w-c] + c^{\beta}\right\} = -c^{\beta-1}\left[(1-\beta)c + \beta(rk+w)\right] +$$

$$+ c^{\beta-1}\left[\beta(rk+w) + (1-\beta)c\right] = 0,$$

то есть функция $\mathcal{V}(t,k)$ является решением уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана, а значит, в силу леммы 3.1 функция $\mathcal{V}(t,k)$ при $\rho > r$ является искомой функцией цены, а соответствующее ей управление $\hat{c}(k,\rho)$ является оптимальным. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.2. Искомое оптимальное управление получается в результате перехода к пределу для управления, полученного в лемме 3.6, при $T \to +\infty$.

Замечание 1. Использование леммы 3.1 оказывается корректным при $\rho > \beta r$. При $\rho \leq \beta r$ значение интегрального функционала полезности расходится при $T \to +\infty$, а предельное управление равно нулю. В силу расходимости несобственного интеграла пользоваться леммой 3.1 в качестве достаточного условия оптимальности при $T = +\infty$, вообще говоря, неверно, несмотря на оптимальность на любом конечном отрезке времени $[t,T]$. Поэтому полученное при $\rho \leq \beta r$ решение понимается в обобщенном смысле. Экономическая же интерпретация данного результата такова, что при увеличении горизонта времени экономический агент откладывает потребление своего капитала на конец временного промежутка.

4. МОДЕЛЬ СОЦИАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ. ФОРМУЛИРОВКИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Используя полученные решения задач оптимального управления в форме синтеза, опишем модель социальной динамики популяции из H домашних хозяйств. В стартовый момент времени $t_0 = 0$ у каждого домашнего хозяйства с индексом $h \in \{1,\dots,H\}$ имеется в распоряжении сбережений в размере $k_0^h \geq 0$, причем суммарные сбережения всех домашних хозяйств положительны: $K_0 = \sum\limits_{h=1}^{H} k_0^h > 0$.

Положим $K = \sum\limits_{h=1}^{H} k^h$. Используя синтез оптимального управления, построенный в теоремах 3.1 и 3.2, будем описывать динамику капитала с помощью задачи Коши

$$\frac{dk^h}{dt} = rk^h + w - c\left(k^h, \rho^h\left(k^h, K\right)\right),\ k^h(0) = k_0^h,$$

где функция $\rho^h\left(k^h,K\right)$ будет определена ниже. Основываясь на гипотезе относительного дохода Дж. Дьюзенберри [15], положим

$$\rho^h\left(k^h, K\right) = r\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right), \tag{10}$$

где функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет следующим предположениям.

Предположение 1. Функция $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ непрерывна по Липшицу, строго монотонно убывает на отрезке $[0,1]$, $\varphi(x) = \varphi(1)\,, x \geq 1$, $\varphi(x) = \varphi(0)\,, x \leq 0$, $\beta \leq \varphi(1) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1 < \varphi(0)$.

Предположение 2. Функция $\varphi(x)$ вогнута на отрезке $[0,1]$.

Определение 2. Моделью Рамсея–Бьюли социальной динамики называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dk^h}{dt} = \frac{1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1-\beta}\left[rk^h + w\right],\ k^h(0) = k_0^h,\ h = 1,\dots,H. \tag{11}$$

Сформулируем теперь основный результат для модели Рамсея–Бьюли.

Теорема 4.1 (о гипотезе Рамсея–Бьюли). *Пусть для модели Рамсея–Бьюли выполнены предположения 1,2. Тогда для любого вектора начальных значений $\mathbf{k_0}$ капиталов домашних хозяйств в модели Рамсея–Бьюли, принадлежащего множеству*

$$\mathcal{K}_0^l = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^H : k^1 = \ldots = k^l > k^{l+1} \geq \ \ldots \geq k^H\right\},\ 1 \leq l \leq H-1,$$

выполняется

$$k^h[t] \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty, & h = 1,\dots,l, \\ -\dfrac{w}{r}, & h = l+1,\dots,H, \end{cases}$$

$$\frac{k^h[t]}{K[t]} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1,\dots,l, \\ 0, & h = l+1,\dots,H, \end{cases}$$

где вектор-функция $\mathbf{k}[t] = \left(k^1[t],\dots,k^H[t]\right) = \mathbf{k}(t,0;\mathbf{k_0})$ является решением задачи Коши (11).

Определение 3. Моделью Рамсея–Беккера социальной динамики называется задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\frac{dk^h}{dt} = \frac{1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1-\beta}\left[rk^h + w\right] + \frac{\left(\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-1\right)_+}{1-\beta} w \left(\frac{w}{c_2\left(k^h, r\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-1}}, \tag{12}$$
$$k^h(0) = k_0^h,\ h = 1, \ldots, H,$$

где функция $c_2(k, \rho)$ является решением уравнения (6) при $k = k^h(t), \rho = r\varphi\left(\frac{k^h(t)}{K(t)}\right)$.

Для модели Рамсея–Беккера справедлива аналогичная

Теорема 4.2 (о гипотезе Рамсея–Беккера). *Пусть для модели Рамсея–Беккера выполнено предположение 1. Тогда для любого вектора начальных значений* $\mathbf{k_0}$ *капиталов домашних хозяйств в модели Рамсея–Беккера, принадлежащего множеству*

$$\mathcal{K}_0^l = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}_+^H : k^1 = \ldots = k^l > k^{l+1} \geq \ \ldots \geq k^H\right\},\ 1 \leq l \leq H-1,$$

выполняется

$$k^h[t] \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty, & h = 1, \ldots, l, \\ \ \ 0, & h = l+1, \ldots, H, \end{cases}$$

$$\frac{k^h[t]}{K[t]} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{1}{l}, & h = 1, \ldots, l, \\ 0, & h = l+1, \ldots, H, \end{cases}$$

где вектор-функция $\mathbf{k}[t] = \left(k^1[t], \ldots, k^H[t]\right) = \mathbf{k}(t, 0; \mathbf{k_0})$ *является решением задачи Коши* (12).

Замечание 2. Заметим, что можно выразить решение задачи Коши (11) в следующей форме:

$$rk^h(t) + w = \left[rk_0^h + w\right]\exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^t \left(1-\varphi\left(\frac{k^h(\tau)}{K(\tau)}\right)\right) d\tau\right\}. \tag{13}$$

Из данного представления следует, что $k^h(t) > -\frac{w}{r},\ t \in [0, +\infty),\ h = \overline{1, H}$.

Замечание 3. Из теоремы о единственности решения задачи Коши следует, что все неравенства, задаваемые начальными значениями капиталов для домашних хозяйств, сохраняются, т.е. если $k_0^i > k_0^j$, то $k^i(t) > k^j(t)$, $t \in [0, +\infty), 1 \leq i < j \leq H$. Тогда для любого $t \in [0, +\infty)$ выполняется неравенство $\frac{k^1(t)}{K(t)} > \frac{1}{H}$. Справедливость этого факта легко доказать от противного. Пусть $\frac{k^1(t)}{K(t)} \leq \frac{1}{H}$, тогда $\frac{k^h(t)}{K(t)} < \frac{1}{H}, h = l{+}1, \ldots, H$. Просуммировав все слагаемые $\frac{k^h(t)}{K(t)}$ по h от 1 до H, получаем, что $1 = \sum\limits_{h=1}^{H}\frac{k^h(t)}{K(t)} < \sum\limits_{h=1}^{H}\dfrac{1}{H} = 1$. Следовательно, $\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1$.

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ГИПОТЕЗ РАМСЕЯ–БЬЮЛИ И РАМСЕЯ–БЕККЕРА

Нам понадобится доказать несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5.1. *В модели Рамсея–Бьюли на решении задачи Коши* (11) *с положительными начальными условиями справедливо неравенство* $K(t) = \sum\limits_{h=1}^{H} k^h(t) > 0$ *для любого* $t \in [0, +\infty)$.

Доказательство. Из (11) имеем, что

$$\dot{K} = \sum_{h=1}^{H}\frac{1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1-\beta}\left[rk^h + w\right] = \frac{rK + wH}{1-\beta}\left(1 - \sum_{h=1}^{H}\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\frac{rk^h + w}{rK + wH}\right).$$

В силу замечания 2 коэффициенты при $\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)$ неотрицательны. Тогда рассмотрим следующее выражение из внутренней скобки:

$$\sum_{h=1}^{H}\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\frac{rk^h+w}{rK+wH}=\sum_{h:\frac{k^h}{K}<0}\varphi(0)\frac{rk^h+w}{rK+wH}+\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\frac{rk^h+w}{rK+wH}+$$

$$+\sum_{h:\frac{k^h}{K}>1}\varphi(1)\frac{rk^h+w}{rK+wH}\le\varphi\left(\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\frac{k^h}{K}\frac{rk^h+w}{rK+wH}+\sum_{h:\frac{k^h}{K}>1}\frac{rk^h+w}{rK+wH}\right).$$

Покажем, что

$$\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\frac{k^h}{K}\frac{rk^h+w}{rK+wH}+\sum_{h:\frac{k^h}{K}>1}\frac{rk^h+w}{rK+wH}\ge\frac{1}{H}.$$

Обозначив $N_1=\left|\left\{h:\frac{k^h}{K}>1\right\}\right|, N_2=\left|\left\{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1\right\}\right|$, рассмотрим два случая:

- $N_1>0$. В этом случае достаточно оценить первое слагаемое снизу нулем, тогда

$$\sum_{h:\frac{k^h}{K}>1}\frac{rk^h+w}{rK+wH}=\sum_{h:\frac{k^h}{K}>1}\frac{\frac{k^h}{K}+\frac{w}{r}\frac{1}{K}}{1+\frac{w}{r}\frac{H}{K}}>N_1\frac{1+\frac{w}{r}\frac{1}{K}}{1+\frac{w}{r}\frac{H}{K}}>\frac{N_1}{H}\ge\frac{1}{H}.$$

- $N_1=0$. Тогда очевидно, что $\sum\limits_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\frac{k^h}{K}\ge 1$, вследствие чего имеем

$$\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\frac{k^h}{K}\frac{rk^h+w}{rK+wH}=\frac{1}{1+\frac{w}{r}\frac{H}{K}}\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\left[\left(\frac{k^h}{K}\right)^2+\frac{w}{r}\frac{1}{K}\frac{k^h}{K}\right]\ge$$

$$\ge\left\{H\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\left(\frac{k^h}{K}\right)^2\ge\sum_{h:0\le\frac{k^h}{K}\le 1}\frac{k^h}{K}\ge 1\right\}\ge\frac{1}{1+\frac{w}{r}\frac{H}{K}}\left[\frac{1}{H}+\frac{w}{r}\frac{1}{K}\right]=\frac{1}{H}.$$

Следовательно,

$$\sum_{h=1}^{H}\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\frac{rk^h+w}{rK+wH}\le\varphi\left(\frac{1}{H}\right)\le 1,$$

и мы получаем неотрицательность производной суммарного капитала K, откуда при положительности начального значения K_0 следует справедливость требуемого неравенства.

Замечание 4. В случае задачи Коши (12) для любого $t\in[0,+\infty)$, $h\in\{1,\ldots,H\}$ выполняются неравенства $k^h(t)\ge 0,\ K(t)>0$. Отсюда также следует, что для любых $t\in[0,+\infty)$, $h=\overline{1,H}$ выполняется двойное неравенство $0\le\frac{k^h(t)}{K(t)}\le 1$. Данное обстоятельство и положительность капитала, как будет выяснено позже, позволят нам провести доказательство теоремы 4.2 при более слабых условиях, нежели в случае с теоремой 4.1.

Лемма 5.2. *Для каждого $j=\overline{l+1,H}$ существует константа $M_j>0$ такая, что для любого $t\in[0,+\infty)$ выполняется неравенство*

$$\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)-\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right)>M_j.$$

Доказательство. Пусть $1\le i\le l<j\le H$, тогда из (13) получаем, что

$$\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w}=\frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w}\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\left(\varphi\left(\frac{k^j(\tau)}{K(\tau)}\right)-\varphi\left(\frac{k^i(\tau)}{K(\tau)}\right)\right)d\tau\right\}.$$

В силу замечания 3 подынтегральное выражение неотрицательно, поэтому имеет место неравенство

$$\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w} \le \frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w} = \frac{k_0^j+\frac{w}{r}}{k_0^i+\frac{w}{r}}.$$

Домножив обе части неравенства на множитель $\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)}$, получаем неравенство

$$\frac{k^j(t)}{K(t)} + \frac{w}{r}\frac{1}{K(t)} \le \frac{k_0^j+\frac{w}{r}}{k_0^i+\frac{w}{r}}\left(\frac{k^i(t)}{K(t)} + \frac{w}{r}\frac{1}{K(t)}\right).$$

В свою очередь, домножив обе части полученного неравенства на -1 и прибавив слагаемое $\frac{k^i(t)}{K(t)} + \frac{w}{r}\frac{1}{K(t)}$, получаем неравенство

$$\frac{k^i(t)}{K(t)} - \frac{k^j(t)}{K(t)} \ge \frac{k_0^i-k_0^j}{k_0^i+\frac{w}{r}}\left(\frac{k^i(t)}{K(t)} + \frac{w}{r}\frac{1}{K(t)}\right).$$

Наконец, положив $i = 1$ и пользуясь тем, что по замечанию 3 имеем $\frac{k^1(t)}{K(t)} > \frac{1}{H}$, а по лемме 5.1 $\frac{w}{r}\frac{1}{K(t)} > 0$, выводим оценку

$$\frac{k^1(t)}{K(t)} - \frac{k^j(t)}{K(t)} > \frac{k_0^1-k_0^j}{k_0^1+\frac{w}{r}}\frac{1}{H}, j = \overline{l+1,H}.$$

Тогда для каждого $j = \overline{l+1,H}$ имеем

$$\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right) - \varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right) > \varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)} - \frac{k_0^1-k_0^j}{k_0^1+\frac{w}{r}}\frac{1}{H}\right) - \varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right) \ge$$

$$\ge \min_{x\in\left[\frac{1}{H},1\right]}\left[\varphi\left(x - \frac{k_0^1-k_0^j}{k_0^1+\frac{w}{r}}\frac{1}{H}\right) - \varphi(x)\right] = M_j > 0.$$

Полученная константа M_j является положительной, так как в противном случае найдется точка $\tilde{x} \in \left[\frac{1}{H},1\right]$, такая что $M_j = \varphi\left(\tilde{x} - \frac{k_0^1-k_0^j}{k_0^1+\frac{w}{r}}\frac{1}{H}\right) - \varphi(\tilde{x}) \le 0$, откуда в силу строгого убывания функции $\varphi(\cdot)$ следует неравенство $k_0^1 \le k_0^j$, что противоречит условию $k_0^1 > k_0^j$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим теперь задачу Коши (12). При $1 \le i \le l < j \le H$ в силу замечания 3 имеем $\frac{k^i(t)}{K(t)} > \frac{1}{H}$, поэтому $\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right) < 1$, и для $k^i(t)$ справедлива формула (13). Рассмотрим теперь уравнение при $h = j$. Так как $c\left(k^h, r\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\right)$ устроено как решение уравнения (6), причем $c\left(k^h, r\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\right) \ge w$, то имеем следующую оценку:

$$\dot{k}^j(t) \le \frac{1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)}{1-\beta} rk^j(t) + \frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)\right)_+}{1-\beta} w \le$$

$$\le \left\{1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right) \le \left(1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)\right)_+\right\} \le \frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)\right)_+}{1-\beta}\left[rk^j(t)+w\right].$$

Следовательно, по лемме Гроноулла–Беллмана справедливо неравенство

$$rk^j(t) + w \le \left[rk_0^j + w\right]\exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int_0^t\left(1-\varphi\left(\frac{k^j(\tau)}{K(\tau)}\right)\right)_+ d\tau\right\},$$

откуда, используя (13) при $h = i$, получаем неравенство

$$\frac{rk^j(t)+w}{rk^i(t)+w} \le$$

$$\le \frac{rk_0^j+w}{rk_0^i+w}\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\int_0^t \min\left\{\left(\varphi\left(\frac{k^j(\tau)}{K(\tau)}\right) - \varphi\left(\frac{k^i(\tau)}{K(\tau)}\right), 1-\varphi\left(\frac{k^i(\tau)}{K(\tau)}\right)\right)\right\} d\tau\right\}.$$

В силу замечания 3 подынтегральное выражение неотрицательно, поэтому дальнейшие рассуждения в точности повторяют те, что были приведены при рассмотрении задачи Коши (11).

Напомним формулировку основной теоремы о дифференциальных неравенствах.

Теорема (Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, см. [27]). *Если при $t \in [t_0, t_1]$ существует решение задачи Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, являющееся однозначной функцией t, и если функция $x_u(t) \in C^1[t_0, t_1]$ такова, что $\dot{x}_u > f(t, x_u)$, $x_u(t_0) \geq x_0$, то имеет место неравенство $x(t) < x_u(t)$ $\forall\, t \in (t_0, t_1]$.*

Введем обозначение $K_{-l}(t) = \sum\limits_{h=l+1}^{H} k^h(t)$.

Лемма 5.3. *Для любого $t \in (0, +\infty)$ справедлива оценка*

$$\frac{K_{-l}(t)}{K(t)} \leq R(t), \tag{14}$$

где

$$R(t) = 1 - \left(\frac{1}{1 - \frac{K_{-l,0}}{K_0}} \exp\left\{ -\int\limits_0^t (a - b(\tau))\, d\tau \right\} + a \int\limits_0^t \exp\left\{ \int\limits_t^\tau (a - b(s))\, ds \right\} d\tau \right)^{-1}, \tag{15}$$

$$K_{-l,0} = \sum_{h=l+1}^{H} k_0^h, \quad K_0 = l k_0^1 + K_{-l,0}, \quad a = \frac{M_{l+1} r}{1 - \beta},$$

$$b(t) = \frac{w}{(1-\beta) K(t)} \left((H - l) \left(1 - \varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)} \right) - M_{l+1} \right)_+ + l \left(1 - \varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)} \right) \right) \right).$$

Доказательство. Заметим, что так как по лемме 5.2 для каждого $h = \overline{l+1, H}$ существует константа $M_h > 0$ такая, что $\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right) - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) > M_h$, а также $\frac{k^{l+1}}{K} \geq \frac{k^h}{K}$, то для любого $h = \overline{l+1, H}$ справедливо также и неравенство $\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right) - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) > M_{l+1}$. Добавляя и вычитая единицу в левой части полученного неравенства, получаем $1 - \varphi\left(\frac{k^h}{K}\right) < 1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) - M_{l+1}$.

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K_{-l}}{K}\right) = \frac{l}{K^2} \sum_{h=l+1}^{H} \left(\frac{dk^h}{dt} k^1 - k^h \frac{dk^1}{dt} \right).$$

В случае задачи Коши (11) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dk^h}{dt} k^1 - k^h \frac{dk^1}{dt} &= \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1 - \beta} \left(r k^h + w \right) k^1 - \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1 - \beta} \left(r k^1 + w \right) k^h < \\ &< \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) - M_{l+1}}{1 - \beta} \left(r k^h + w \right) k^1 - \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1 - \beta} \left(r k^1 + w \right) k^h = \\ &= -\frac{M_{l+1} r}{1 - \beta} k^1 k^h + w \left(\frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) - M_{l+1}}{1 - \beta} k^1 - \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1 - \beta} k^h \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{K_{-l}}{K}\right) &< \frac{l}{K^2} \sum_{h=l+1}^{H} \left[-\frac{M_{l+1} r}{1 - \beta} k^1 k^h + w \left(\frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) - M_{l+1}}{1 - \beta} k^1 - \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1 - \beta} k^h \right) \right] = \\ &= -\frac{M_{l+1} r}{1 - \beta} \frac{l k^1}{K} \frac{K_{-l}}{K} + \frac{w}{K} \left((H - l) \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right) - M_{l+1}}{1 - \beta} \frac{l k^1}{K} - l \frac{1 - \varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1 - \beta} \frac{K_{-l}}{K} \right). \end{aligned}$$

В случае задачи Коши (12) имеем

$$\frac{dk^h}{dt}k^1 - k^h\frac{dk^1}{dt} = \frac{1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)k^1 + \frac{\left(\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-1\right)_+}{1-\beta}w\left(\frac{w}{c^h}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-1}}k^1 -$$

$$-\frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)k^h \le \frac{1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)}{1-\beta}\left(rk^h+w\right)k^1 + \frac{\left(\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-1\right)_+}{1-\beta}wk^1 -$$

$$-\frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)k^h = -\frac{\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}rk^1k^h + \frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^h}{K}\right)\right)_+}{1-\beta}wk^1 -$$

$$-\frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}wk^h < -\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}k^1k^h + w\left(\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)-M_{l+1}\right)_+}{1-\beta}k^1 - \frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}k^h\right),$$

откуда получаем, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{K_{-l}}{K}\right) < \frac{l}{K^2}\sum_{h=l+1}^{H}\left[-\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}k^1k^h + w\left(\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)-M_{l+1}\right)_+}{1-\beta}k^1 - \frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}k^h\right)\right] =$$

$$= -\frac{M_{l+1}r}{1-\beta}\frac{lk^1}{K}\frac{K_{-l}}{K} + \frac{w}{K}\left((H-l)\frac{\left(1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)-M_{l+1}\right)_+}{1-\beta}\frac{lk^1}{K} - l\frac{1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)}{1-\beta}\frac{K_{-l}}{K}\right).$$

Обратим внимание, что полученная оценка на производную в случае задачи Коши (12) отличается от оценки при (11) лишь вторым слагаемым. Применяя неравенство $1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)-M_{l+1} \le \left(1-\varphi\left(\frac{k^1}{K}\right)-M_{l+1}\right)_+$, считаем, что при рассмотрении обеих задач Коши выполняется одна и та же оценка.

Далее, заметив, что $\frac{lk^1}{K} = 1-\frac{K_{-l}}{K}$, сгруппировав слагаемые и введя для удобства следующие обозначения:

$$x(t) = \frac{K_{-l}(t)}{K(t)}, \quad c(t) = \frac{w}{(1-\beta)K(t)}(H-l)\left(1-\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right)-M_{l+1}\right)_+,$$

получаем дифференциальное неравенство

$$\dot{x}(t) \le a(x(t))^2 - (a+b(t))x(t) + c(t).$$

Правую часть неравенства можно преобразовать следующим образом:

$$a(x(t))^2 - (a+b(t))x(t) + c(t) = a(x(t)-1)^2 + (a-b(t))(x(t)-1) - b(t) + c(t).$$

Обратим внимание, что функция

$$b(t) - c(t) = l\frac{w}{K(t)}\frac{1-\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right)}{1-\beta}$$

неотрицательна, в силу чего мы можем перейти к более грубому дифференциальному неравенству относительно функции $q(t) = x(t)-1$, а именно $\dot{q}(t) < a(q(t))^2 + (a-b(t))q(t)$. По теореме Чаплыгина решением является функция, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению Бернулли $\dot{y} = a(y(t))^2 + (a-b(t))y(t)$, сводимому заменой $z(t) = \frac{1}{y(t)}$ к линейному дифференциальному уравнению $\dot{z}(t) = -(a-b(t))z(t) - a$. Решение последнего, в свою очередь, определяется функцией

$$z(t) = z_0\exp\left\{-\int\limits_0^t (a-b(\tau))\,d\tau\right\} - a\int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_t^\tau (a-b(s))\,ds\right\}d\tau.$$

При $t=0$ значение константы z_0 определяется выражением $z_0 = \frac{1}{y(0)} = -\frac{1}{1-\frac{K_{-l,0}}{K_0}}$, тогда решение дифференциального уравнения Бернулли имеет вид

$$y(t) = -\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{K_{-l,0}}{K_0}}\exp\left\{-\int\limits_0^t (a-b(\tau))\,d\tau\right\} + a\int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_t^\tau (a-b(s))\,ds\right\}d\tau} = R(t) - 1.$$

Следовательно, по теореме Чаплыгина для функции $q(t)=\frac{K_{-l}(t)}{K(t)}-1$ справедлива оценка (14), что и требовалось.

Лемма 5.4. *Справедливы соотношения*

$$k^h(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty,\ h=\overline{1,l},\ K(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty,\ R(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Доказательство. В силу замечания 2 и леммы 5.1 можно вывести неравенство

$$\dot{(rk^1+w)}\geq r\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{H}\right)}{1-\beta}\left(rk^1+w\right)>0,$$

откуда по лемме Гроноулла–Беллмана следует, что при $\varphi\left(\frac{1}{H}\right)<1$ получим

$$rk^1(t)+w\geq\left(rk_0^1+w\right)\exp\left\{r\frac{1-\varphi\left(\frac{1}{H}\right)}{1-\beta}t\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty.$$

Следовательно, $k^1(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$, а поскольку в случае задачи Коши (11) справедливо неравенство $K(t)\geq$ $\geq lk^1(t)-\frac{w}{r}(H-l)$ (задачи Коши (12) – $K(t)\geq lk^1(t)$), то и $K(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty$. Случай $\varphi\left(\frac{1}{H}\right)=1$ повторяет предыдущие рассуждения с точностью до замены значения $\varphi\left(\frac{1}{H}\right)$ на $\varphi\left(\frac{1}{H}+\gamma\right)$, где $\gamma>0$ – такая константа, что $\frac{k^1}{K}\geq\frac{1}{H}+\gamma, t\in[0,+\infty)$. Константа γ положительна, так как в противном случае вариант $\frac{k^1}{K}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{1}{H}$ возможен тогда и только тогда, когда $\frac{k^j}{K}\xrightarrow[t\to+\infty]{}\frac{1}{H}, j=\overline{2,H}$, т.е. $\frac{k^1}{K}-\frac{k^j}{K}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$, что неверно в силу доказанной в лемме 5.2 оценки $\frac{k^1}{K}-\frac{k^j}{K}>\frac{k_0^1-k_0^j}{k_0^1+\frac{w}{r}}\frac{1}{H}$.

Заметим, что функция $1-\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right)$ является ограниченной как сверху, так и снизу. Кроме того, $\lim\limits_{t\to+\infty}K(t)=$ $=+\infty$, поэтому $b(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$. Следовательно, $a-b(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}a$, и отсюда следует, что найдется момент времени $\tau^*\in(0,+\infty)$ такой, что для любого $t>\tau^*$ выполняется неравенство $a-b(t)>\frac{a}{2}$. Тогда при $t>\tau^*$ имеем

$$\int\limits_0^t(a-b(\tau))\,d\tau=\int\limits_0^{\tau^*}(a-b(\tau))\,d\tau+\int\limits_{\tau^*}^t(a-b(\tau))\,d\tau\geq\int\limits_0^{\tau^*}(a-b(\tau))\,d\tau+\frac{a}{2}(t-\tau^*)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty,$$

следовательно,

$$\exp\left\{-\int\limits_0^t(a-b(\tau))\,d\tau\right\}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0.$$

Исследуем теперь поведение функции $\int\limits_0^t\exp\left\{\int\limits_t^\tau(a-b(s))\,ds\right\}d\tau$ при $t\to+\infty$. Полагая $t>\tau^*$, имеем

$$\int\limits_0^t\exp\left\{\int\limits_0^\tau(a-b(s))\,ds\right\}d\tau=\overbrace{\int\limits_0^{\tau^*}\exp\left\{\int\limits_0^\tau(a-b(s))\,ds\right\}d\tau}^{A_1}+$$
$$+\underbrace{\exp\left\{\int\limits_0^{\tau^*}(a-b(s))\,ds\right\}}_{A_2}\int\limits_{\tau^*}^t\exp\left\{\int\limits_{\tau^*}^\tau(a-b(s))\,ds\right\}d\tau>A_1+A_2\int\limits_{\tau^*}^t\exp\left\{\frac{a}{2}(\tau-\tau^*)\right\}d\tau=$$
$$=A_1+\frac{2A_2}{a}\left(\exp\left\{\frac{a}{2}(t-\tau^*)\right\}-1\right)\xrightarrow[t\to+\infty]{}+\infty.$$

Выражение $\int\limits_0^t\exp\left\{\int\limits_t^\tau(a-b(s))\,ds\right\}d\tau$ можно представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются положительными и дифференцируемыми по t функциями, стремящимися к плюс бесконечности. Тогда, применяя правило Лопиталя, получаем, что

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\int\limits_0^t \exp\left\{\int\limits_0^\tau (a-b(s))\,ds\right\}d\tau}{\exp\left\{\int\limits_0^t (a-b(s))\,ds\right\}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\exp\left\{\int\limits_0^t (a-b(\tau))\,d\tau\right\}}{(a-b(t))\exp\left\{\int\limits_0^t (a-b(\tau))\,d\tau\right\}} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{a-b(t)} = \frac{1}{a}.$$

Но тогда

$$R(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1-\left(\frac{1}{1-\frac{K_{-l,0}}{K_0}}0 + a\frac{1}{a}\right)^{-1} = 1-1=0,$$

что и требовалось доказать.

Теперь мы готовы доказать гипотезы Рамсея–Бьюли и Рамсея–Беккера.

Доказательство теоремы 4.1. Так как по лемме 5.4 мы имеем $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, $h=\overline{1,l}$, нам нужно показать,

$$k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\frac{w}{r}, \quad h=\overline{l+1,H}.$$

В силу леммы 5.1 суммарный капитал домашних хозяйств $K(t)$ положителен для любого $t\in[0,+\infty)$, поэтому по лемме 5.3 и замечанию 2 справедливо двойное неравенство

$$-\frac{w}{r}\frac{H-l}{K(t)} \le \frac{K_{-l}(t)}{K(t)} \le R(t).$$

Левая и правая части этого неравенства по лемме 5.4 сходятся к нулю, откуда следует, что $\frac{K_{-l}(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. Теперь докажем, что $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h=\overline{l+1,H}$. Используя двойное неравенство

$$-\frac{w}{r}\frac{1}{K(t)} \le \frac{k^H(t)}{K(t)} \le \frac{1}{H-l}\frac{K_{-l}(t)}{K(t)},$$

получаем сходимость к нулю для $\frac{k^H}{K}$ и, следовательно, для суммы $\sum\limits_{j=l+1}^{H-1}\frac{k^j}{K}$. Далее повторяем аналогичные рассуждения, применяя двойные неравенства вида

$$-\frac{w}{r}\frac{1}{K(t)} \le \frac{k^h(t)}{K(t)} \le \frac{1}{h-l}\sum_{j=l+1}^{h}\frac{k^j(t)}{K(t)}, \quad h=H-1,\ldots,l+2.$$

Следовательно, $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{l}$, $h=\overline{1,l}$.

Далее, так как $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h=\overline{l+1,H}$, то в силу непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\varphi\left(\frac{k^h(t)}{K(t)}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \varphi(0)>1$. Следовательно, найдется момент времени $\tau^{**}\in[0,+\infty)$ такой, что при $t>\tau^{**}$ выполняется неравенство $1-\varphi\left(\frac{k^h(t)}{K(t)}\right) < -\frac{\varphi(0)-1}{2}$.

Тогда, пользуясь представлением (13), имеем

$$0 < rk^h(t)+w \le \left[rk_0^h+w\right]\exp\left\{\frac{r}{1-\beta}\int\limits_0^{\tau^{**}}\left(1-\varphi\left(\frac{k^h(\tau)}{K(\tau)}\right)\right)d\tau\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\frac{\varphi(0)-1}{2}(t-\tau^{**})\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

откуда следует, что $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} -\frac{w}{r}$.

Теорема 4.1 доказана.

Доказательство теоремы 4.2. Так как по лемме 5.4 мы имеем $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, $h = \overline{1, l}$, нам нужно показать, $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1, H}$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям доказательства теоремы 4.1 с той лишь разницей, что в силу леммы 5.3 и замечания 4 справедливо двойное неравенство $0 \le \frac{K_{-l}(t)}{K(t)} \le R(t)$, а сходимость $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1, H}$, следует из двойного неравенства $0 \le \frac{k^h(t)}{K(t)} \le \frac{K_{-l}(t)}{K(t)}$. Следовательно, $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{1}{l}$, $h = \overline{1, l}$.

Так как $\frac{k^h(t)}{K(t)} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, $h = \overline{l+1, H}$, то по непрерывности функции $\varphi(\cdot)$ имеем $\varphi\left(\frac{k^h(t)}{K(t)}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \varphi(0) > 1$. Следовательно, найдется момент времени $\tau^{**} \in [0, +\infty)$ такой, что при $t > \tau^{**}$ выполняется неравенство $1 - \varphi\left(\frac{k^h(t)}{K(t)}\right) < -\frac{\varphi(0)-1}{2}$. Но тогда при $t > \tau^{**}$ справедливо дифференциальное неравенство

$$\frac{dk^h}{dt} < -\frac{\varphi(0)-1}{2}\frac{r}{1-\beta}k^h,$$

из которого по лемме Гронуолла–Беллмана следует, что

$$0 \le k^h(t) \le k^h(\tau^{**}) \exp\left\{-\frac{r}{1-\beta}\frac{\varphi(0)-1}{2}(t-\tau^{**})\right\} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0,$$

откуда получаем, что $k^h(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Теорема 4.2 доказана.

6. ИНДЕКС НЕРАВЕНСТВА ДЖИНИ И КРИВАЯ ЛОРЕНЦА

Проблемы расслоения населения по доходам обсуждаются в экономической литературе с начала XX века. В 1905 г. американский статистик М. Лоренц разработал подход к измерению неравенства в распределении доходов между домашними хозяйствами, который позволял анализировать изменение неравенства в динамике и сравнивать уровень неравенства в разных экономических сообществах. Для этого измерение неравенства не должно зависеть от абсолютных величин доходов, поскольку в разных экономических сообществах доходы могут измеряться в различных денежных единицах и в разные моменты времени покупательная способность денег также различна. Кроме того, неравенство должно определяться распределением доходов между домашними хозяйствами и не изменяться при перестановке доходов между ними. Следуя М. Лоренцу, рассмотрим сообщество из H домашних хозяйств. Обозначим через y_i доход i-го домашнего хозяйства. Вектор $y = (y_1, \dots, y_H)$ задает распределение совокупного дохода $\sum\limits_{i=1}^{H} y_i$ между домашними хозяйствами. Поскольку измерение неравенства не зависит от перестановки доходов, т.е. компонент вектора y, построим перестановку σ, такую, что $y_{\sigma(1)} \le \dots \le y_{\sigma(H)}$. Рассмотрим на плоскости точки с координатами $\left(\frac{m}{H}, u_m\right)$, $m = 1, \dots, H$, где

$$u_m = \sum_{i=1}^{m} y_{\sigma(i)} \Bigg/ \sum_{j=1}^{H} y_j\,, \quad m = 1, \dots, H.$$

Все эти точки лежат внутри единичного квадрата $\{(x, y)\,|x \in [0,1]\,,\, y \in [0,1]\}$. Соединяя вершины квадрата $(0,0)\,, (1,1)$ и соседние построенные точки отрезками, получим кривую Лоренца. На множестве кривых Лоренца вводится частичный порядок: если первая кривая Лоренца лежит ниже второй, то говорят, что распределение доходов, по которому построена первая кривая, мажорирует (по Лоренцу) распределение доходов, по которому построена вторая кривая. Равномерное распределение доходов, при котором

$$y_i = \frac{1}{H}\sum_{j=1}^{H} y_j,\ i = 1, \dots, H,$$

мажорируется любым другим распределением доходов. Ему соответствует кривая Лоренца, совпадающая с диагональю квадрата, соединяющей вершины $(0,0)\,, (1,1)$. Распределение

$$y_{\sigma(1)} = \dots = y_{\sigma(H-1)} = 0, \quad y_{\sigma(H)} = \sum_{j=1}^{H} y_j > 0,$$

при котором весь совокупный доход принадлежит самому богатому домашнему хозяйству, мажорирует любое другое распределение доходов. Кривые Лоренца используются для измерения неравенства в распределении доходов статистическими службами многих стран. В первой трети XX века была разработана математическая теория, связавшая мажоризацию по Лоренцу с перераспределением доходов (передачи Пигу-Дальтона), стохастическим доминированием и «отвращением к риску» (см. подробнее [28]). Для численного измерения неравенства используются индексы неравенства, которые согласованы с мажоризацией по Лоренцу, так что у мажорирующего распределения доходов значение индекса неравенства должно быть не меньшим. Самым распространенным индексом неравенства является индекс Джини, который равняется удвоенной площади между кривой Лоренца и диагональю единичного квадрата, соединяющей его вершины $(0,0)$, $(1,1)$. Для распределения доходов $y=(y_1,\ldots,y_H)$ индекс Джини равен

$$G(y_1,...,y_H)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{H}\sum\limits_{j=1}^{H}|y_i-y_j|}{2H^2\overline{y}},\quad \overline{y}=\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}y_i.$$

Если перестановка σ такая, что $y_{\sigma(1)}\le y_{\sigma(2)}\le\ldots y_{\sigma(H)}$, то выражение для индекса имеет вид

$$G(y_1,...,y_H)=\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(2i-H-1)\,\frac{y_{\sigma(i)}}{\hat{y}},\quad \hat{y}=\sum_{j=1}^{H}y_j.$$

Индекс Джини равномерного распределения доходов равен нулю. Для распределения доходов $y^*=(y_1^*,\ldots,y_H^*)$, при котором весь доход достается самому богатому домашнему хозяйству, индекс Джини принимает максимальное значение $G^*=G\left(y_1^*,\ldots,y_H^*\right)=\frac{H-1}{H}$.

Используя обозначения из предыдущих разделов, положим

$$y_i=\frac{rk^{H+1-i}+w}{rK+Hw}\ge 0,\ i=1,\ldots,H.$$

Заметим, что $\hat{y}=\sum\limits_{j=1}^{H}y_j=1$. Согласно замечанию 3 область

$$\Gamma=\left\{\left(k^1,\ldots,k^H\right)\middle|k^1=k^2=\ldots=k^l>k^{l+1}\ge\ldots\ge k^H\right\}$$

является «ловушкой» как для задачи Коши (11), так и (12), т.е. если $\left(k_0^1,\ldots,k_0^H\right)\in\Gamma$, то $\left(k^1(t),\ldots,k^H(t)\right)\in\Gamma$ при $t\in[0,+\infty)$. Положим

$$\Lambda=\left\{\left(y^1,\ldots,y^H\right)\middle|y_i=\frac{rk^{H+1-i}+w}{rK+Hw}\ge 0,\ i=1,\ldots,H,\ \left(k^1,\ldots,k^H\right)\in\Gamma\right\}.$$

Динамической траектории $\left(k^1(t),\ldots,k^H(t)\right)\in\Gamma$ будем ставить в соответствие траекторию $(y_1(t),\ldots,y_H(t))\in\Lambda$, по которой строится динамика кривых Лоренца. Это соответствие определяет в области Λ автономные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, порождаемые соответственно системами (11) или (12). Обеим системам (11) и (12) соответствует единственная стационарная траектория $\hat{y}^*=(\hat{y}_1^*,\ldots,\hat{y}_H^*)$, где $\hat{y}_H^*=\ldots=\hat{y}_{H-l+1}^*=\frac{1}{l}$, $\hat{y}_i^*=0$, $i=1,\ldots,H-l$, в области Λ. Индекс Джини принимает максимальное в области Λ значение на распределении $\hat{y}^*$, равное $\hat{G}^*=\frac{H-l}{H}$.

Рассмотрим в области Λ функцию

$$V\left(y_1,\ldots,y_H\right)=\hat{G}^*-G\left(y_1,\ldots,y_H\right)=\hat{G}^*-\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(2i-H-1)\,y_i.$$

Функция $V\left(y_1,\ldots,y_H\right)>0$ при $(y_1,\ldots,y_H)\in\Lambda\backslash\{\hat{y}^*\}$, $V\left(\hat{y}^*\right)=0$, и непрерывно дифференцируема в области Λ.

Теорема 6.1. *Пусть выполнены предположения* 1 *и* 2, $\left(k^1(t),\ldots,k^H(t)\right)\in\Gamma$ *является решением задачи Коши* (11) *(модель Рамсея–Бьюли) или* (12) *(модель Рамсея–Беккера). Тогда*

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right)<0.$$

Замечание 5. Положение равновесия $\hat{y}^*$ является глобально асимптотически устойчивым по Ляпунову в области Λ, а построенная по индексу Джини функция

$$V(y_1,\ldots,y_H)=\hat{G}^*-G(y_1,\ldots,y_H)$$

является функцией Ляпунова в области Λ.

Доказательство теоремы 6.1. Пусть

$$\left(\frac{rk_0^H+w}{rK_0+Hw},\ldots,\frac{rk_0^{H+1-i}+w}{rK_0+Hw},\ldots,\frac{rk_0^1+w}{rK_0+Hw}\right)\in\Gamma.$$

Тогда имеем

$$\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right)\in\Gamma.$$

Вычислим производную

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right)=$$
$$=-\frac{1}{H}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{r}{(rK(t)+Hw)^2}\left(\frac{dk^i(t)}{dt}(rK(t)+Hw)-\frac{dK(t)}{dt}\left(rk^i(t)+w\right)\right).$$

В случае модели Рамсея–Бьюли, т.е. задачи Коши (11), имеем, что

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^1+w}{rK+Hw}\right)=$$
$$=-\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\frac{rk^i+w}{rK+Hw}\left(\left(1-\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right)\right)-\sum_{j=1}^{H}\left(1-\varphi\left(\frac{k^j}{K}\right)\right)\frac{rk^j+w}{rK+Hw}\right).$$

В случае модели Рамсея–Беккера, т.е. задачи Коши (12), имеем, что

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}+w}{rK+Hw},\ldots,\frac{rk^1+w}{rK+Hw}\right)=$$
$$=-\frac{r}{H(1-\beta)(rK+Hw)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\times$$
$$\times\left\{\left(1-\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right)\right)(rk^i+w)+\left(\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right)-1\right)_+ w\left(\frac{w}{c_2\left(k^i,r\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^i}{K}\right)-1}}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{H}\left(\left(1-\varphi\left(\frac{k^j}{K}\right)\right)(rk^j+w)+\left(\varphi\left(\frac{k^j}{K}\right)-1\right)_+ w\left(\frac{w}{c_2\left(k^j,r\varphi\left(\frac{k^j}{K}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^j}{K}\right)-1}}\right)\frac{rk^i+w}{rK+Hw}\right\}.$$

Пусть $\alpha_i(t)=\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+Hw}$, $i=1,\ldots,H$. Поскольку

$$\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw},\ldots,\frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right)\in\Gamma,$$

имеем $\alpha_1(t)=\alpha_2(t)=\ldots=\alpha_l(t)>\alpha_{l+1}(t)\geq\ldots\geq\alpha_H(t)\geq 0$, кроме того, $\sum\limits_{i=1}^{H}\alpha_i(t)=1$.

Положим в случае модели Рамсея–Бьюли

$$f_j(t)=1-\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right),\quad j=1,\ldots,H,$$

а в случае модели Рамсея–Беккера имеем

$$f_i(t) = 1 - \varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right) +$$

$$+\left(\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right) - 1\right)_+ w\left(\frac{w}{c_2\left(k^i(t), r\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)-1}} \frac{1}{rk^i(t)+w}, \quad i = 1, \ldots, H.$$

В обоих случаях

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right) =$$

$$= -\frac{r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}(H+1-2i)\,\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t)\right).$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^{H}\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t)\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right) =$$

$$= \frac{2r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H}i\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t)\right).$$

В силу предположения 1 в случае модели Рамсея–Бьюли имеем, что

$$f_1(t) = f_2(t) = \ldots = f_l(t) > f_{l+1}(t) \geq \ldots \geq f_H(t),$$

$$f_1(t) > \sum_{i=1}^{H}\alpha_i(t)\,f_i(t) > f_H(t),$$

откуда получаем, что $f_1(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) > 0,\ f_H(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) < 0$. Кроме того,

$$f_1(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) = f_2(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) = \ldots = f_l(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) >$$

$$> f_{l+1}(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) \geq \ldots \geq f_H(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t).$$

Таким образом, в случае модели Рамсея–Бьюли существует j^* такой, что

$$f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) \geq 0, \quad i \leq j^*; \quad f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) < 0, \quad i > j^*.$$

В лемме 5.1 с использованием предположения 2 доказано, что

$$\sum_{i=1}^{H}\left(1 - \varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)\right)\frac{rk^i(t)+w}{rK(t)+Hw} \geq 1 - \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \geq 0.$$

В модели Рамсея–Беккера с учетом предположения 1 имеем, что

$$\sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t)\,f_j(t) = \sum_{j=1}^{H}\left(\left(1 - \varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)\right)\frac{rk^j(t)+w}{rK(t)+Hw} +\right.$$

$$\left.+\left(\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right) - 1\right)_+ w\left(\frac{w}{c_2\left(k^j(t), r\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^j(t)}{K(t)}\right)-1}} \frac{1}{rK(t)+Hw}\right) \geq 0.$$

В случае модели Рамсея–Беккера заметим, что если $\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right) > 1$, то

$$f_i(t) = \frac{1}{rk^i(t)+w}\left(\left(1-\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)\right)\left(rk^i(t)+w\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)-1\right)_+ w\left(\frac{w}{c_2\left(k^i(t), r\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)\right)}\right)^{\frac{1-\beta}{\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)-1}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{rk^i(t)+w}\left(1-\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right)\right) rk^i(t) < 0.$$

Следовательно, если $\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right) > 1$, то $f_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t) < 0$. С другой стороны, из предположения 1 следует, что если $\varphi\left(\frac{k^i(t)}{K(t)}\right) \leq 1$, $k^s(t) \geq k^i(t)$, то $f_s(t) - \sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t) \geq f_i(t) - \sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)$. Кроме того, поскольку $\frac{k^1(t)}{K(t)} > \frac{1}{H}$, имеем, что $\varphi\left(\frac{k^1(t)}{K(t)}\right) < \varphi\left(\frac{1}{H}\right) \leq 1$, $f_1(t) - \sum\limits_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t) > 0$. Таким образом, в случае модели Рамсея–Беккера также существует j^* такой, что

$$f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t) \geq 0, \quad i \leq j^*; \quad f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t) < 0, \quad i > j^*.$$

Тогда получаем следующую оценку:

$$\frac{d}{dt}V\left(\frac{rk^H(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^{H+1-i}(t)+w}{rK(t)+Hw}, \ldots, \frac{rk^1(t)+w}{rK(t)+Hw}\right) =$$

$$= \frac{2r}{H(1-\beta)}\sum_{i=1}^{H} i\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right) =$$

$$= \frac{2r}{H(1-\beta)}\left\{\sum_{i=1}^{j^*} i\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=j^*+1}^{H} i\alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right)\right\} \leq$$

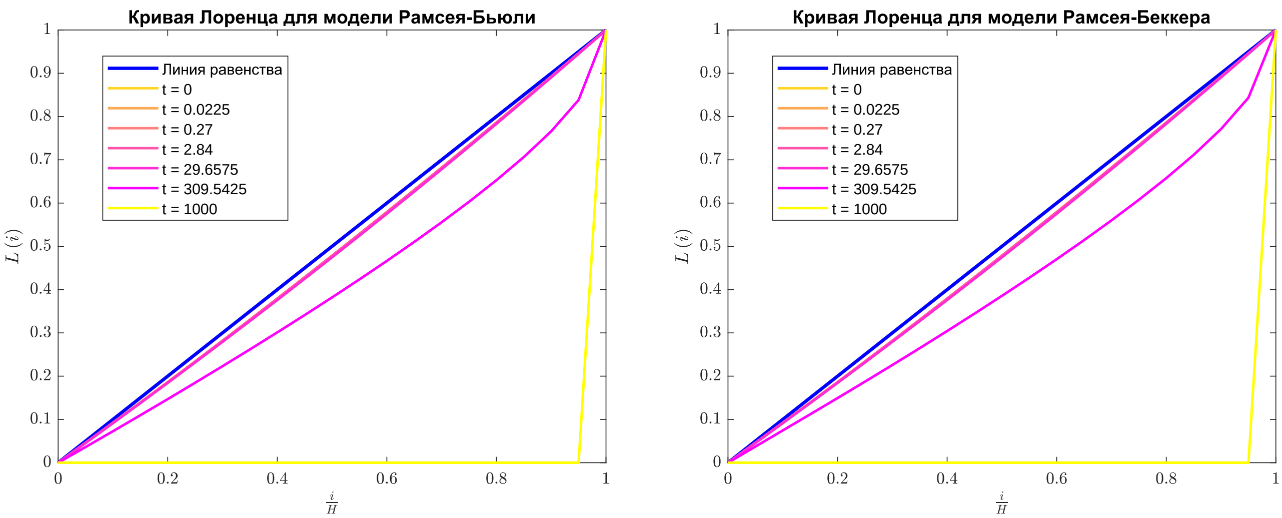
$$\leq \frac{2r}{H(1-\beta)}\left\{j^*\sum_{i=1}^{j^*} \alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right)+\right.$$

$$\left.+(j^*+1)\sum_{i=j^*+1}^{H} \alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right)\right\} =$$

$$= \frac{2r}{H(1-\beta)}\sum_{i=j^*+1}^{H} \alpha_i(t)\left(f_i(t) - \sum_{j=1}^{H}\alpha_j(t) f_j(t)\right) < 0.$$

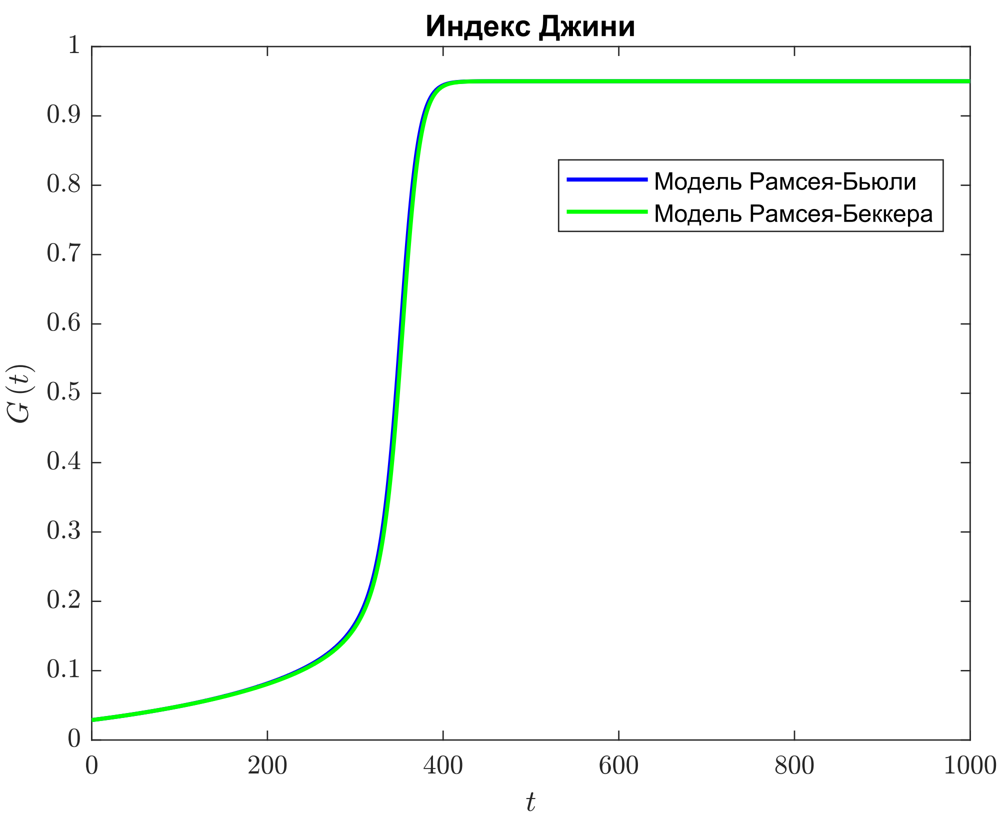
Теорема доказана.

На фиг. 1 приведена эволюция с течением времени кривой Лоренца для двух моделей – модели Рамсея–Бьюли (см. фиг. 1а) и модели Рамсея–Беккера (см. фиг. 1б). На фиг. 2 показана динамика индекса неравенства Джини. Сходимость распределения доходов к двухклассовому сообществу в модели Рамсея–Бьюли происходит быстрее.



(а) Модель Рамсея–Бьюли (б) Модель Рамсея–Беккера

Фиг. 1. Кривая Лоренца для популяции из $H = 20$ домашних хозяйств. Подсчитана при следующих функциях и значениях параметров: $T = 1000$, $\beta = 0.1$, $\varphi(x) = \varphi_{\max} - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})\, x^2$, $\varphi_{\max} = 1.001, \varphi_{\min} = \beta$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3, K_0 = 10^5$.



Фиг. 2. Индекс неравенства Джини в зависимости от времени t для популяции из $H = 20$ домашних хозяйств в моделях Рамсея–Бьюли и Рамсея–Беккера. Подсчитан при следующих функциях и значениях параметров: $T = 1000$, $\beta = 0.1$, $\varphi(x) = \varphi_{\max} - (\varphi_{\max} - \varphi_{\min})\, x^2$, $\varphi_{\max} = 1.001, \varphi_{\min} = \beta$, $r = 0.1$, $w = 5 \cdot 10^3, K_0 = 10^5$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гипотеза Рамсея связывает формирование двухклассовой социальной структуры с различием в коэффициентах дисконтирования у экономических агентов. В большинстве работ, обосновывающих эту гипотезу, коэффициенты дисконтирования являются неизменными и заданными априори. В данной статье доказана справедливость гипотезы Рамсея с эндогенно формирующимися коэффициентами дисконтирования в соответствии с гипотезой относительного дохода Дьюзенберри. В статье исследуется влияние потребительского кредита на формирование социальной структуры общества. В модели Рамсея—Бьюли допускается потребительский кредит, обеспеченный будущими заработками. В модели Рамсея—Беккера потребительский кредит не допускается. В обоих моделях обоснована справедливость гипотезы Рамсея. Однако формирующаяся двухклассовая социальная структура оказывается различной. В модели Рамсея—Бьюли — это класс собственников и класс должников, отрабатывающих задолженность по ранее взятому потребительскому кредиту. В модели Рамсея—Беккера — это класс собственников и класс трудящихся, обеспеченных заработной платой.

В математических моделях двухклассовая структура понимается как распределение доходов, устанавливающееся в пределе на неограниченном временном горизонте. Для измерения экономического неравенства в обществе на конечных временных горизонтах статистические службы многих стран сравнивают кривые Лоренца, описывающие распределение доходов между экономическими агентами, вычисляют индексы неравенства, среди которых наиболее популярным является индекс Джини. В статье доказано, что индекс Джини связан с функциями Ляпунова в моделях популяционной динамики Рамсея—Бьюли и Рамсея—Беккера.

В завершение отметим интересные с нашей точки зрения направления дальнейших исследований гипотезы Рамсея и социальной динамики. Показанное в статье влияние потребительского кредита на социальную структуру актуализирует анализ влияния на социальную динамику ограничений ликвидности капитала и несовершенства рынка капитала, при котором различаются цена покупки и цена продажи капитала.

В статье исследовалась динамика популяции экономических агентов в условиях стационарных экономических условий (постоянство доходности капитала и заработной платы). Представляет интерес изучение социальной динамики и гипотезы Рамсея при изменении этих условий, описываемых моделями экономического роста или случайными процессами Леви.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Piketty T.* Capital in the Twenty-First Century. Cambridge: The Belknap Press of Harvard University Press, 2014.
2. *Aghion P., Williamson J. G.* Growth, Inequality and Globalization: Theory, History and Policy. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
3. *Atkinson A. B.* Inequality: What Can Be Done? Cambridge: Harvard University Press, 2015.
4. *Ramsey F. P.* A Mathematical Theory of Saving // Econ. J. 1928. V. 38. № 152. P. 543—559.
5. *Acemoglu D.* Introduction to Modern Economic Growth. Princeton: Princeton University Press, 2009.
6. *Becker R. A.* Equilibrium Dynamics with Many Agents. In: Dana R.-A., Le Van C., Mitra T., Nishimura K. Handbook on Optimal Growth 1: Discrete Time. Berlin: Springer, 2006. P. 385—442.
7. *Борисов К. Ю., Пахнин М. А.* Модели экономического роста с неоднородным дисконтированием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 3. С. 355—379.
8. *Becker R. A.* On the Long-run Steady State in a Simple Dynamic Model of Equilibrium with Heterogeneous Households // Q. J. Econ. 1980. V. 95. № 2. P. 375—382.
9. *Bewley T. F.* An integration of equilibrium theory and turnpike theory // J. Math. Econ. 1982. V. 10. P. 233—267.
10. *Mitra T., Sorger G.* On Ramsey's conjecture // J. Econ. Theory. 2013. V. 148. № 5. P. 1953—1976.
11. *Koopmans T. C.* Stationary Ordinal Utility and Impatience // Econometrica. 1960. V. 28. № 2. P. 287—309.
12. *Uzawa H.* Time Preference, the Consumption Function, and Optimal Asset Holdings. In: Wolfe J. N. (ed.) Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks. Chicago: Aldine Publishing Company, 1968. P. 485—505.
13. *Borissov K.* Growth and Distribution in a Model with Endogeneous Time Preferences and Borrowing Constraints // Math. Soc. Sci. 2013. V. 66. № 2. P. 117—128.

14. *Borissov K., Lambrecht S.* Growth and Distribution in an AK-model with Endogeneous Impatience // Econ. Theory. 2009. V. 39. № 1. P. 93–112.

15. *Duesenberry J. S.* Income, Saving and the Theory of Consumer Behavior. Cambridge: Harvard University Press, 1949.

16. *Keynes J. M.* The General Theory of Employment, Interest and Money. London: Macmillan, 1936.

17. *Frank R. H.* Falling Behind: How Rising Inequality Harms the Middle Class. Berkeley: University of California Press, 2007.

18. *Schlicht E.* A Neoclassical Theory of Wealth Distribution // Jahrb. Natl. Stat. 1975. V. 189. P. 78–96.

19. *Bourguignon F.* Pareto Superiority of Unegalitarian Equilibria in Stiglitz' Model of Wealth Distribution with Convex Saving Function // Econometrica. 1981. V. 49. P. 1469–1475.

20. *Borissov K.* The Rich and the Poor in a Simple Model of Growth and Distribution // Macroecon. Dyn. 2016. V. 20. № 7. P. 1934–1952.

21. *Fisher R. A.* The Genetical Theory of Natural Selection. Oxford: Clarendon Press, 1930.

22. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Тр. МИАН. 2007. Т. 257. С. 3–271.

23. *Асеев С. М., Бесов К. О., Кряжимский А. В.* Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике // Успехи матем. наук. 2012. Т. 67. Вып. 2 (404). С. 3–64.

24. *Carlson D. A., Haurie A. B., Leizarowitz A.* Infinite Horizon Optimal Control: Deterministic and Stochastic Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

25. *Seierstad A., Sydsæter K.* Optimal Control Theory with Economic Applications. Amsterdam: North-Holland, 1987.

26. *Fleming W. H., Soner H. M.* Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. New York: Springer, 2006.

27. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 256 с.

28. *Marshall A. W., Olkin I., Arnold B. C.* Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications. Second Edition. New York: Springer, 2011.

RAMSEY'S CONJECTURE OF SOCIAL STRATIFICATION AS FISHER'S SELECTION PRINCIPLE

G. S. Parastaev[a,b,*], **A. A. Shananin**[a,b,c,d,e,**]

[a] *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*
[b] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119333 Russia*
[c] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow oblast, 141701 Russia*
[d] *Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, 119991 Russia*
[e] *Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, 117198 Russia*
**e-mail: parastaew1996@yandex.ru*
***e-mail: alexshan@yandex.ru*

Received: 23.08.2024
Revised: 23.08.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. Ramsey's conjecture of social stratification states that wealth in a population of households is concentrated among the most frugal agents, who discount consumer spending with the lowest discount factor. Ramsey's conjecture can be viewed as stating that Fisher's principle of natural selection holds in a population of households. In this paper, based on Duesenberry's hypothesis, discount factors are formed depending on the capital distribution among the agents. The behavior of households is described by Ramsey-type models of a rational representative consumer. For the corresponding optimal control problems, we construct solutions in the form of synthesis, which are used to model the dynamics of a household population. Theorems for a household population are proved that justify the validity of Ramsey's conjecture. The influence of consumer loans on the social stratification of households is studied.

Keywords: optimal control synthesis, discount factor, relative income hypothesis, Ramsey's conjecture, Lyapunov function.