

# РАЗВИТИЕ МЕТОДА АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ СЕТКАХ<sup>1)</sup>

© 2024 г. А. Ю. Круковский<sup>1</sup>, И. В. Попов<sup>1,\*</sup>, В. А. Гасилов<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: piv2964@mail.ru

Поступила в редакцию 05.07.2024 г.

Переработанный вариант 27.07.2024 г.

Принята к публикации 23.08.2024 г.

Метод адаптивной искусственной вязкости в настоящей работе обобщается с целью построения разностных схем газовой динамики, обеспечивающих высокое разрешение структуры течений как на равномерных, так и на неравномерных сетках. Рассматриваются разностные схемы, аппроксимирующие одномерную систему уравнений газовой динамики. Полученные в работе оценки величины адаптивной вязкости учитывают неоднородность распределения газодинамических величин в расчетной области и неравномерность разностной сетки. Построенные схемы с адаптивной искусственной вязкостью обладают свойствами однородности и консервативности. Апробация предложенных схем выполнена на модельных задачах, решения которых описывают различные гладкие газодинамические структуры, а также сильные и слабые разрывы. Продемонстрирована возможность получения высокоточных решений на расчетных сетках с существенной разницей геометрических размеров соседних разностных ячеек. Библи. 13. Фиг. 5.

**Ключевые слова:** газовая динамика, адаптивная искусственная вязкость, однородная консервативная разностная схема, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.31857/S0044466924120126, EDN: KBNHIO

## ВВЕДЕНИЕ

Исходный вариант метода адаптивной искусственной вязкости (АИВ) (см. [1]) на равномерных сетках приводит к разностной схеме второго порядка точности, обладающей свойством монотонности. Целью разработки модифицированного метода было сохранение, по возможности, свойств исходного метода АИВ — монотонности и высокой точности решений, в случае его применения к решению газодинамических задач на неравномерных разностных сетках. Публикации, посвященные разработкам методик расчетов на неравномерных сетках, в основном содержат результаты, полученные в предположении о гладком изменении размеров сеточных ячеек. Под этим обычно понимается правило распределения сеточных элементов, квазиравномерное согласно определению А.А. Самарского: шаги такой сетки должны удовлетворять условию  $h_{i+1} = h_i + O(h_i^2)$  (см., например, [2], [3]). В настоящей работе построена разностная схема с высоким разрешением структуры газовых течений на сетках, которые могут не удовлетворять условию квазиравномерности. Таковы, например, сетки иерархической (древовидной) либо нерегулярной структуры (см. [4]–[7]).

При построении модификации АИВ для определения величины искусственной вязкости использован часто применяемый в подобных случаях анализ по принципу “замороженных” коэффициентов (см. [8], [9]). Наряду с этим потребовалось провести более полное исследование, в ходе которого были учтены как неоднородности распределения вычисляемых искомых значений функций (плотности, скорости, давления, полной энергии и др.), так и неравномерность геометрических размеров разностной сетки. При этом использовались общие принципы построения однородных разностных схем (см. [10]). В итоге в настоящей работе построена однородная разностная схема, аппроксимирующая исходную систему газодинамики как на равномерной, так и на неравномерной расчетных сетках. Апробация модифицированного метода АИВ выполнена на известных тестовых задачах (см. [11], [12]). Численная методика на основе предложенной однородной схемы показала

<sup>1)</sup> Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (суперкомпьютеры К-60, К-100).

возможность расчета газодинамических структур с высоким разрешением даже в случае существенного, многократного различия размеров соседних расчетных ячеек на разностной сетке, построенной со сгущением в областях локализации больших градиентов газодинамических величин.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разностная схема с адаптивной искусственной вязкостью рассматривалась для одномерных задач газовой динамики в декартовой системе координат в переменных Эйлера. Систему дифференциальных уравнений, описывающих одномерные течения сжимаемой среды, запишем в виде законов сохранения (см. [8]):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Iu + p) &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((E + p)u) &= 0.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:  $t$  – время,  $x$  – пространственная переменная,  $\rho$  – плотность,  $u$  – скорость,  $I = \rho u$  – механический импульс,  $\epsilon$  – внутренняя энергия,  $E = \rho \epsilon + \rho \frac{u^2}{2}$  – полная энергия. Система уравнений замыкается уравнением состояния  $p = p(\rho, \epsilon)$ , например, уравнением состояния идеального газа  $p = (\gamma - 1) \rho \epsilon$ , где  $\gamma$  – показатель адиабаты Пуассона.

Начально-краевая задача для системы дифференциальных уравнений (1) рассматривается в области  $D(x, t)$  ( $t \geq T_0$ ,  $L_1 \leq x \leq L_2$ ). Начальные распределения газодинамических величин, например,  $\rho$ ,  $u$ ,  $I$ ,  $E$ , в некоторых точках могут претерпевать существенные разрывы. Учитывая, что основное внимание в настоящей работе уделяется свойствам численного решения внутри расчетной области, особенности реализации граничных условий не рассматриваются. Соответственно, расчеты проводятся либо до заданного момента времени, либо до выхода возмущений на границу расчетной области.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

Методику аппроксимации системы дифференциальных уравнений (1) рассмотрим на примере уравнения неразрывности. Введем сетку по времени с переменным шагом  $\tau_n$   $\omega_\tau = \{t_0 = T_0, t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = 0, 1, \dots\}$ . Функции, которые относятся к моментам времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$ , обозначим верхними индексами  $n$  и  $n + 1$  соответственно:  $r^n = r(t_n)$ ,  $r^{n+1} = r(t_{n+1})$ , где  $r = \rho, u, I, E, p$ . Разностную производную по времени от сеточной функции будем вычислять следующим образом:

$$r_t^n = \frac{r^{n+1} - r^n}{\tau_n}.$$

Построение явной разностной схемы второго порядка аппроксимации в областях гладкости решения основано, как и в исходном варианте метода АИВ (см. [1]), на использовании поправок Лакса–Вендроффа. Получим уравнение, являющееся дифференциально-разностным приближением к уравнению неразрывности. Для этого используем приближенное выражение, связывающее значение плотности газа  $\rho$  на моменты времени  $t = t_n$ ,  $t = t_{n+1}$ , по формуле многочлена Тейлора, ограничиваясь слагаемыми до  $O(\tau_n^2)$ :

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \tau_n \frac{\partial \rho^n}{\partial t} + \frac{\tau_n^2}{2} \frac{\partial^2 \rho^n}{\partial t^2} + \dots$$

Производную по времени  $\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{t=t_n}$  заменим с помощью уравнения неразрывности, записанного при  $t = t^n$ :

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u)^n.$$

Вторую производную от плотности  $\frac{\partial^2(\rho)}{\partial t^2}$  найдем дифференцированием по времени уравнения неразрывности. Производная по времени от механического импульса  $\rho u$  выражается через плотность потока импульса  $\rho u^2 + p$  из уравнения баланса импульса:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho u^2 + p).$$

В результате имеем дифференциально-разностное уравнение баланса массы

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\tau_n} + \frac{\partial W_\rho^n}{\partial x} = 0,$$

в котором поток вещества вычисляется по формуле

$$W_\rho^n = (\rho u)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_\rho^n.$$

Выражение  $\frac{\tau_n}{2} L W_\rho^n$  является поправкой Лакса–Вендроффа

$$L W_\rho^n = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p)^n. \quad (2)$$

Аналогичным способом получаем поправки Лакса–Вендроффа для уравнений импульса и полной энергии:

$$W_I^n = (Iu + p)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_I^n, \quad W_E^n = ((E + p)u)^n - \frac{\tau_n}{2} L W_E^n. \quad (3)$$

Поправки Лакса–Вендроффа при аппроксимации уравнений балансов импульса и энергии соответственно имеют следующий вид:

$$L W_I^n = \left( \frac{\partial}{\partial x} (Iu^2) + 3u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n, \quad (4)$$

$$L W_E^n = \left( \frac{\partial}{\partial x} ((E + p)u^2) + \left( \frac{c^2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2}u^2 \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p u \frac{\partial u}{\partial x} \right)^n. \quad (5)$$

Также дифференциально-разностные уравнения можно записать единообразно в форме законов сохранения:

$$\frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\tau_n} + \frac{\partial \mathbf{W}^n(\mathbf{r})}{\partial x} = 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r} = (\rho, I, E)$ .

Далее в поправках Лакса–Вендроффа выделим те слагаемые, в которые входят производные от плотности, импульса и полной энергии газа:

$$L W_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + \varphi, \quad (7)$$

$$L W_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x} + 2\rho (u^2 - c^2) \frac{\partial u}{\partial x} + 3u\varphi, \quad (8)$$

$$L W_E = (u^2 + s_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{\gamma - 1} \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{2} m^2 - \frac{(\gamma - 1)^2 m}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} m^2} \right] \rho \frac{\partial u^2}{\partial x} + s_m \frac{u^2}{2} \varphi, \quad (9)$$

Здесь переменная  $\varphi$  с учетом зависимости  $p = p(\rho, S)$  выражается через производную от энтропии  $S$  следующим образом:

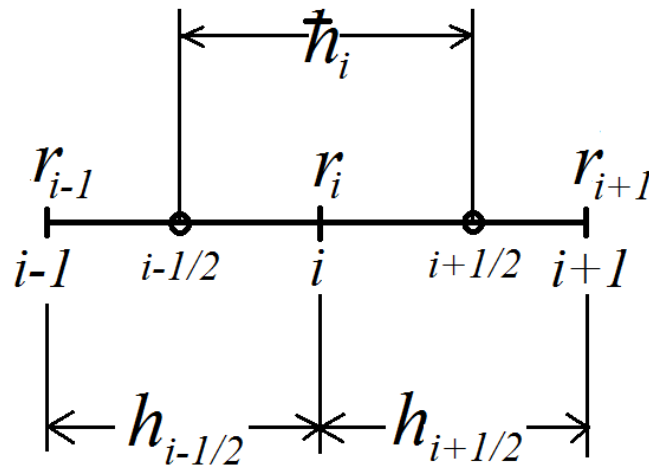
$$\varphi = \frac{\partial p}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = \left( \frac{\partial p}{\partial S} \right)_\rho \frac{\partial S}{\partial x},$$

где  $c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$  – скорость звука,

$$s_m = \frac{1 + \frac{5}{2}(\gamma - 1)M^2}{1 + \frac{1}{2}(\gamma - 1)M^2}, \quad M = \frac{u}{c}, \quad 1 \leq s_m \leq 5.$$

### 3. РАЗНОСТНАЯ СЕТКА ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. АППРОКСИМАЦИЯ

В расчетной области  $L_1 \leq x \leq L_2$  введем неравномерную, вообще говоря, разностную сетку  $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$  узлов по пространственной переменной  $x$ :  $x_1 = L_1 < x_2 < \dots < x_N = L_2$  и сетку  $\bar{\Omega}'_h = \Omega'_h \cup \Gamma'_h$  потоковых узлов  $\bar{x}_{1/2} = L_1$ ,  $\bar{x}_{i+1/2} = 0.5(x_i + x_{i+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ,  $\bar{x}_{N+1/2} = L_2$ . Граничными узлами являются точки  $x_1, x_N \in \Gamma_h$ ,  $\bar{x}_{1/2}, \bar{x}_{N+1/2} \in \Gamma'_h$ .



Фиг. 1. Шаблон аппроксимации потоков в разностных уравнениях балансов массы, импульса и энергии.

Обозначим шаги расчетных сеток  $\bar{\Omega}_h$  и  $\bar{\Omega}'_h$  соответственно  $\{h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i, i = \overline{1, N-1} \text{ и } h_i = 0.5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2}), i = \overline{2, N-1}, h_1 = 0.5h_{3/2}, h_N = 0.5h_{N-1/2}\}$ .

К узлам исходной разностной сетки  $x_i$  будем относить искомые функции  $\rho_i, u_i, I_i = \rho_i u_i, p_i, E_i$ . К узлам потоковой сетки  $\bar{x}_{i+1/2}$  отнесем разностные аппроксимации производных, например,

$$\rho_{x_{i+1/2}} = \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{h_{i+1/2}}, \quad u_{x_{i+1/2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}} \text{ и т.д.,}$$

а также средние величины

$$\bar{\rho}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i), \quad \bar{u}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i) \text{ и т.д.}$$

На границе области  $\bar{\rho}_{1/2} \equiv \rho_1, \bar{u}_{1/2} \equiv u_1, \bar{\rho}_{N+1/2} \equiv \rho_N, \bar{u}_{N+1/2} \equiv u_N$  и т.д.

К потоковым узлам будем относить сеточные аналоги потоков  $W_{i+1/2}^r, i = \overline{1, N}, r = \rho, I, E$ .

Шаблон аппроксимации с расположением узлов основной и потоковой сеток приводится на фиг. 1.

Разностные производные величин, заданных в потоковых узлах, определяются следующим образом:

$$W_{\bar{x}_i}^r = \frac{W_{i+1/2}^r - W_{i-1/2}^r}{h_i}, \quad i = \overline{1, N},$$

где  $r = \rho, I, E$ .

Конструкция искусственной вязкости строится с использованием поправок Лакса–Вендроффа (2), (4), (5). Для наших целей достаточно взять только слагаемые поправок, в которые входят сомножителями производные от плотности, импульса и энергии, т.е.

$$LW_\rho = (u^2 + c^2) \frac{\partial \rho}{\partial x}, \quad LW_I = (u^2 + 3c^2) \frac{\partial I}{\partial x}, \quad LW_E = (u^2 + s_m c^2) \frac{\partial E}{\partial x}. \quad (10)$$

Поправки в этом “усеченном” виде позволяют получить выражение для искусственной вязкости в предельном случае малых возмущений, распространяющихся на фоне однородного течения газа. В акустическом приближении можно ограничиться поправками (10), при этом пренебрегая другими слагаемыми, входящими в уравнения (7)–(9), как величинами второго порядка малости.

Потоки в уравнениях баланса массы, импульса и энергии аппроксимируем в форме, записанной с использованием следующих индексных обозначений:

$$\begin{aligned} W_{\rho i+1/2} &= (\bar{\rho} \bar{u})_{i+1/2} - \frac{\tau}{2} (LW_\rho)_{i+1/2}, \quad (LW_\rho)_{i+1/2} = (\rho u^2 + p)_{xi+1/2}, \\ W_{I i+1/2} &= (\bar{\rho} \bar{u})_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} \bar{p}_{i+1/2} - \frac{\tau}{2} (LW_I)_{i+1/2}, \quad (LW_I)_{i+1/2} = (I u^2)_{xi+1/2} + 3 \bar{u}_{i+1/2} p_{xi+1/2} + \gamma \bar{p}_{i+1/2} \bar{u}_{xi+1/2}, \\ (LW_E)_{i+1/2} &= ((E + p) u^2)_{xi+1/2} + \left( \frac{\bar{c}_{i+1/2}^2}{\gamma - 1} + \frac{3}{2} (\bar{u}_{i+1/2})^2 \right) p_{xi+1/2} + \gamma \bar{p}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} u_{xi+1/2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$W_{Ei+1/2} = (\overline{\rho u})_{i+1/2} \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+1/2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{p}_{i+1/2} \bar{u}_{i+1/2} - \frac{\tau}{2} (LW_E)_{i+1/2},$$

$$\text{где } \left\langle \frac{u^2}{2} \right\rangle_{i+1/2} = \frac{u_{i+1/2} u_i}{2}, \quad \bar{c}_{i+1/2}^2 \equiv \gamma \frac{\bar{p}_{i+1/2}}{\bar{\rho}_{i+1/2}}.$$

В граничных узлах  $\bar{x}_{1/2} = L_1$  и  $\bar{x}_{N+1/2} = L_2$  поправки Лакса–Вендроффа будем считать равными нулю, т.е.  $LW_{1/2}^r = LW_{N-1/2}^r = 0$ , где  $r = \rho, I, E$ .

В итоге разностная схема, аппроксимирующая систему уравнений (6), может быть записана в известной балансной форме (см. [8], [10]), в которой потоки вычисляются согласно (11):

$$\frac{\mathbf{r}_i^{n+1} - \mathbf{r}_i^n}{\tau_n} + \frac{\mathbf{W}_{i+1/2}^n - \mathbf{W}_{i-1/2}^n}{h_i} = 0.$$

#### 4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ВЕЛИЧИНЫ АДАПТИВНОЙ ИСКУССТВЕННОЙ ВЯЗКОСТИ

Вводимая в разностные уравнения искусственная вязкость, очевидно, должна быть по возможности минимальной, необходимой для подавления нефизичных осцилляций решения. Известно, что осцилляции сеточной природы не возникают, если разностная схема удовлетворяет условиям принципа максимума (см. [10]). Найдем ограничения на коэффициенты разностной схемы, при которых данные условия выполнены. Из них будут получены ограничения для коэффициента искусственной вязкости  $(Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)}$  и  $(Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)}$ .

Проведем необходимые выкладки для уравнения неразрывности. Разностный аналог уравнения неразрывности с учетом искусственной диссипации представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \frac{1}{h_i} \left( \bar{u}_{i+1/2} \frac{\rho_{i+1}^n + \rho_i^n}{2} - \bar{u}_{i-1/2} \frac{\rho_i^n + \rho_{i-1}^n}{2} \right) - \\ & - \frac{\tau}{2h_i} \left[ \frac{\rho_{i+1}^n (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) - \rho_i^n (u_i^2 + c_i^2)}{h_{i+1/2}} - \frac{\rho_i^n (u_i^2 + c_i^2) - \rho_{i-1}^n (u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2)}{h_{i-1/2}} \right] = \\ & = \frac{1}{h_i} \left( q_{i+1/2} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_i^n}{h_{i+1/2}} - q_{i-1/2} \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h_{i-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь  $q_{i+1/2}$  — коэффициент искусственной вязкости,  $c_i^2 = \frac{p_i}{\rho_i}$ .

Преобразуем формулу (12) следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho_i^{n+1} &= \rho_i^n - \frac{\tau}{2h_i} (\bar{u}_{i+1/2} \rho_{i+1}^n + (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) \rho_i^n - \bar{u}_{i-1/2} \rho_{i-1}^n) + \\ & - \frac{\tau}{2h_i} \left[ \frac{u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2}{h_{i+1/2}} \rho_{i+1}^n - (u_i^2 + c_i^2) \left( \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) \rho_i^n \right] + \\ & + \frac{u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2}{h_{i-1/2}} \rho_{i-1}^n + \frac{\tau}{h_i} \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \rho_{i+1}^n - \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} - \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \rho_i^n + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \rho_{i-1}^n \right). \end{aligned} \quad (13)$$

В итоге расчетная формула для  $\rho_i^{n+1}$  приобретает вид

$$\rho_i^{n+1} = A_i \rho_{i+1}^n + B_i \rho_i^n + C_i \rho_{i-1}^n, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left( -\bar{u}_{i+1/2} + \frac{\tau}{h_{i+1/2}} (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) + 2 \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \right), \\ B_i &= 1 - \frac{\tau}{h_i} \left[ \frac{1}{2} (\bar{u}_{i+1/2} - \bar{u}_{i-1/2}) + \frac{\tau}{2} (u_i^2 + c_i^2) \left( \frac{1}{h_{i+1/2}} + \frac{1}{h_{i-1/2}} \right) + \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) \right], \\ C_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left( \bar{u}_{i-1/2} + \frac{\tau}{h_{i-1/2}} (u_{i-1}^2 + c_{i-1}^2) + 2 \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Решение системы уравнений (12) будет подчиняться принципу максимума в случае выполнения следующих условий (см. [10]):  $A_i \geq 0$ ,  $B_i \geq 0$ ,  $C_i \geq 0$  и  $A_i + B_i + C_i \leq 1$ .

Условия  $A_i \geq 0$  приводят, в соответствии с выражениями (15), к неравенствам

$$q_{i+1/2} \geq \frac{h_{i+1/2}}{2} \left( \bar{u}_{i+1/2} - \frac{\tau}{h_{i+1/2}} (u_{i+1}^2 + c_{i+1}^2) \right),$$

откуда следует оценка коэффициента вязкости

$$q_{i+1/2} \geq (Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i+1/2}}{2} \left[ |u_{i+1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i+1/2}} \left( u_{i+1}^2 + \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}} \right) \right]. \quad (16)$$

Аналогично из условия  $C_i \geq 0$  следует оценка

$$q_{i-1/2} \geq (Q_{i-1/2})_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i-1/2}}{2} \left[ |u_{i-1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i-1/2}} \left( u_{i-1}^2 + \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right) \right]. \quad (17)$$

Заменим в уравнении (16)  $u_{i+1}^2$  и в уравнении (17)  $u_{i-1}^2$  на меньшие (или такие же) величины  $\bar{u}_{i+1/2}^2 = \min(u_{i+1}^2, u_i^2)$ ;  $\bar{u}_{i-1/2}^2 = \min(u_i^2, u_{i-1}^2)$ .

Заменим также в уравнениях (16) и (17) отношения  $\frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}, \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}}$  на меньшие (или равные им) величины

$$\bar{c}_{i+1/2}^2 = \min \left( \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}, \frac{p_i}{\rho_i} \right), \quad \bar{c}_{i-1/2}^2 = \min \left( \frac{p_i}{\rho_i}, \frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}} \right).$$

Потребуем, чтобы во всех ячейках расчетной сетки выполнялись более сильные условия, чем в уравнениях (16)–(17):

$$q_{i+1/2} \geq (Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)} = \frac{h_{i+1/2}}{2} \left[ |u_{i+1/2}| - \frac{\Delta t}{h_{i+1/2}} \left( \bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2 \right) \right]. \quad (18)$$

Очевидно, при выполнении условия

$$\Delta t < \frac{h_{i+1/2} |u_{i+1/2}|}{\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2} \quad (19)$$

величина  $(Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)}$  будет положительной. Найдем условия для выполнения неравенств  $B_i \geq 0$ . Для этого перепишем второе из равенств (15) в виде

$$\frac{\Delta t}{h_i} \left( \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} \right) = 1 - \frac{\Delta t}{h_i} \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{\Delta t}{h_i} \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{(\Delta t)^2}{2 h_i h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \frac{(\Delta t)^2}{2 h_i h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right).$$

Отсюда следует, что условия  $B_i \geq 0$  выполнены при выполнении неравенства

$$\begin{aligned} \frac{q_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{q_{i-1/2}}{h_{i-1/2}} &\leq \frac{(Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)}}{h_{i+1/2}} + \frac{(Q_{i-1/2})_{\max}^{(\rho)}}{h_{i-1/2}} = \frac{h_i}{\Delta t} - \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2 h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \\ &- \frac{\Delta t}{2 h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) = \frac{h_{i+1/2}}{2 \Delta t} + \frac{h_{i-1/2}}{2 \Delta t} - \frac{u_{i+1/2}}{2} + \frac{u_{i-1/2}}{2} - \frac{\Delta t}{2 h_{i+1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right) - \frac{\Delta t}{2 h_{i-1/2}} \left( u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь учтено, что  $h_i = \frac{1}{2} (h_{i+1/2} + h_{i-1/2})$ .

Будем требовать выполнение более сильного неравенства, чем (20). Заменим

$$\frac{u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}}{h_{i+1/2}} \quad \text{и} \quad \frac{u_i^2 + \frac{p_i}{\rho_i}}{h_{i-1/2}}$$

соответственно на большие (или равные) величины

$$\frac{\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2}{h_{i+1/2}} \quad \text{и} \quad \frac{\bar{u}_{i-1/2}^2 + \bar{c}_{i-1/2}^2}{h_{i-1/2}},$$

где

$$\bar{u}_{i+1/2}^2 = \max(u_i^2, u_{i+1}^2), \quad \bar{c}_{i+1/2}^2 = \max\left(\frac{p_i}{\rho_i}, \frac{p_{i+1}}{\rho_{i+1}}\right), \quad \bar{u}_{i-1/2}^2 = \max(u_i^2, u_{i-1}^2), \quad \bar{c}_{i-1/2}^2 = \max\left(\frac{p_{i-1}}{\rho_{i-1}}, \frac{p_i}{\rho_i}\right).$$

Отсюда вытекает ограничение на величину искусственной диссипации в следующем виде:

$$q_{i+1/2} \leq (Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)} = \frac{0.5 h_{i+1/2}^2}{\Delta t} - \frac{|u_{i+1/2}|}{2} h_{i+1/2} - \frac{\Delta t}{2} (\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2). \quad (21)$$

Условие (21) должно выполняться для всех ячеек расчетной сетки.

Данное условие означает, что

$$\frac{h_{i+1/2}^2}{\Delta t} - |u_{i+1/2}| h_{i+1/2} - \Delta t (\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2) > 0, \quad \text{или} \quad \Delta t < \frac{h_{i+1/2} |u_{i+1/2}|}{\bar{u}_{i+1/2}^2 + \bar{c}_{i+1/2}^2}. \quad (22)$$

Ограничим шаг по времени  $\Delta t$  сильнее, чем следует из (22):

$$\frac{h_{i+1/2}^2}{\Delta t} - 2 |u_{i+1/2}| h_{i+1/2} > 0,$$

или

$$\Delta t < \frac{h_{i+1/2}}{2 |u_{i+1/2}|}. \quad (23)$$

Условие (22) гарантирует выполнение неравенства  $B_i \geq 0$ .

Если  $\bar{c}_{i+1/2}^2 > \bar{u}_{i+1/2}^2$ , то для шага  $\Delta t$  необходимо выполнение ограничения (22), в противном случае  $\Delta t$  ограничивается неравенством (23).

При проведении расчетов величина искусственной вязкости должна определяться с учетом неравенств (18) и (21):

$$(Q_{i+1/2})_{\min}^{(\rho)} \leq q_{i+1/2} \leq (Q_{i+1/2})_{\max}^{(\rho)}. \quad (24)$$

## 5. РАСЧЕТЫ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ

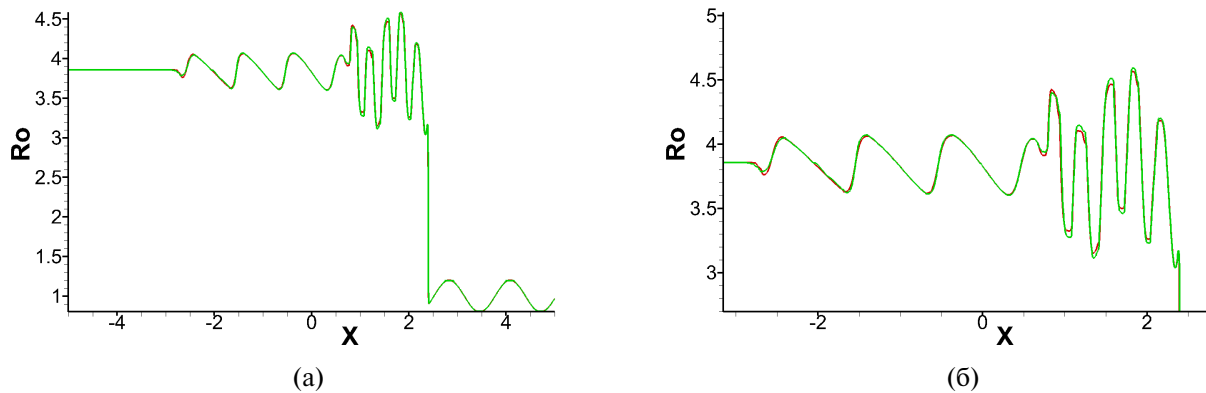
Для практического выяснения возможностей предложенного модифицированного метода АИВ были выполнены расчеты трех тестовых задач. Данные расчеты продемонстрировали возможность использования неравномерных сеток с достаточно большой разницей размеров соседних ячеек в расчетах течений, как с сильными, так и со слабыми разрывами, а также в случаях, когда начальные распределения газодинамических величин немонокотны.

В проведенных расчетах на обеих границах расчетной области задавались постоянные значения искомых функций, равные значениям в начальный момент времени. Тем самым расчеты были ограничены во времени выходом на границы области моделируемых волновых процессов.

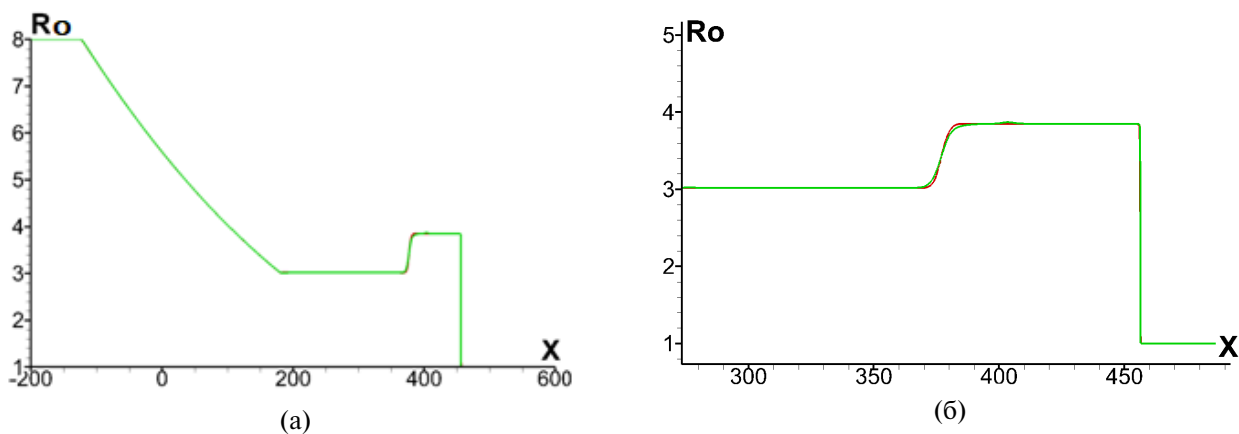
В качестве первого теста была выбрана задача Шу–Ошера о взаимодействии сильного разрыва с гладкой, волнообразной маломасштабной структурой. Постановка задачи приведена в [11]. Ударная волна налетает на область покоящегося газа, в которой плотность газа возмущена по синусоиде. Течение газа рассчитывается в области  $-5 \leq x \leq 5$ , содержащей точку разрыва с координатой  $x = -4$ . Начальные значения плотности, скорости и давления на участке  $-5 \leq x \leq -4$  постоянны и имеют следующие значения:  $\rho = 3.857143$ ,  $u = 2.629369$ ,  $P = 10.33333$ . В остальной расчетной области начальные распределения имеют вид  $\rho = 1 + 0.2 \sin(5x)$ ,  $u = 0$ ,  $P = 1$ . Расчет выполнялся в интервале времени  $0 < T \leq 1.8$ . При прохождении ударной волны с числом Маха  $M = 3$  через участок изначально возмущенного распределения плотности возникают осцилляции плотности в виде набора волн, длины которых отличаются от длины волны первоначального возмущения.

При тестировании метода АИВ с постоянным шагом по пространству расчеты проводились на сетке с числом ячеек 2000. Для модифицированного метода АИВ с переменным шагом расчетная сетка имела то же количество узлов, при этом со сгущением в области формирования осцилляций за ударной волной с перепадом величины ячеек в 2 раза.

Проведенные расчеты показали повышение точности решения на неравномерной сетке. При этом увеличивается число шагов по времени, что связано с уменьшением шага по времени, так как для обеспечения устойчивости разностной схемы требуется выполнение условия Куранта. Заметим, что для получения той же точности в исследуемой области на равномерной сетке необходимо количество узлов почти в 2 раза больше, соответственно, время расчета увеличится практически в 2 раза. Результаты решения задачи (распределение плотности) на равномерной и неравномерной сетках представлены на фиг. 2. Расчеты на равномерной сетке изображены красным цветом, а на неравномерной сетке — зеленым цветом. На неравномерной сетке сгущение осуществлялось в области  $-3 < x < 2.5$ , измельчение шага было в 2 раза.



Фиг. 2. Задача 1: (а) — решение во всей расчетной области; (б) — увеличенное изображение решения в области изменения частоты возмущения плотности.



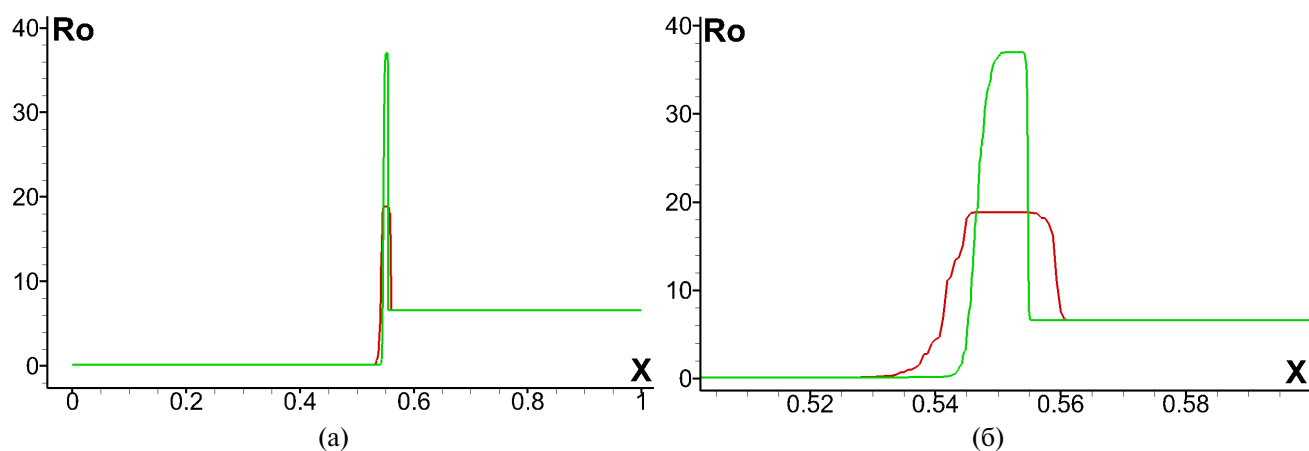
Фиг. 3. Задача 2: (а) — решение во всей расчетной области; (б) — увеличенное изображение решения в области контактного разрыва и ударной волны.

В качестве второго теста была выбрана задача о распаде сильного разрыва при весьма существенных перепадах плотности и давления, что приводит к возникновению сильной ударной волны (задача Сода, см. [11], [12]). В начальный момент времени перепад плотности составлял 8 безразмерных единиц, а давления 320 единиц. В начальный момент газ покоится во всей расчетной области. Разрыв плотности и давления в начальный момент находился в точке  $x = 150$ . В данном случае важно правильно рассчитать положение разрывов и подавить осцилляции численной природы в областях постоянства параметров потока. Использование неравномерной сетки приводит к уточнению результатов расчета. В данном случае их отклонение от точного решения не превышает 1–2 %. Результаты расчетов задачи Сода (распределение плотности) представлены на фиг. 3: на неравномерной сетке — красным цветом, а на равномерной сетке — зеленым цветом. Сгущение сетки (в 2 раза) осуществлялось в двух областях: 1)  $140 < x < 160$ , 2)  $250 < x < 600$ .

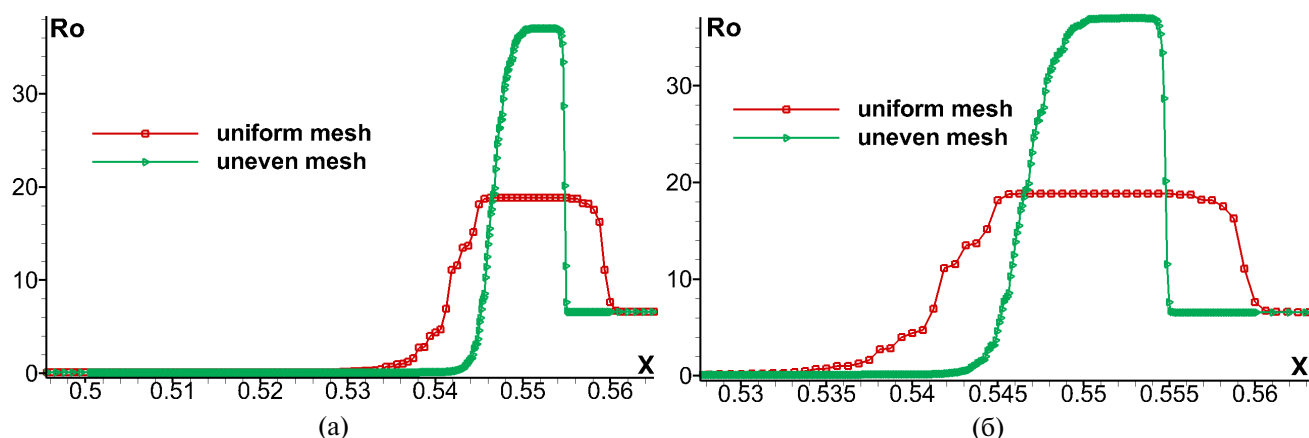
В качестве третьего теста была выбрана задача Римана о возникновении “пика плотности” (test peak), описание которой можно найти в [12]. Задача представляет интерес тем, что ее решение описывает ударную волну и контактный разрыв с весьма большим перепадом плотности (около 300). Как отмечено в [12] и других работах, при решении задачи в такой постановке немонотонность разностной схемы может вызвать неустойчивость счета. Также в этой публикации отмечено, что, поскольку профиль плотности характеризуется узким “пиком”, расчеты по многим численным методам повышенной точности не позволяют достичь референсного значения амплитуды пика плотности  $\|\rho_{\text{ref}}(x)\|_c = 38.6$ .

В двух вариантах решения задачи “test peak” были использованы равномерная и неравномерная сетки, содержавшие одинаковое количество ячеек — 1600. Согласно описанию теста из [12], расчеты выполнялись до момента времени  $t = 0.0039$ . Особенность тестового решения такова, что область пика в нем отделяет ударную волну от контактного разрыва. В этом случае для расчета течения с высоким разрешением структуры необходима точная регулировка уровня численной диссипации. Для повышения точности расчета по схеме с АИВ было





**Фиг. 4.** Задача 3: (а) — решение во всей расчетной области; (б) — увеличенное изображение решения в области контактного разрыва и ударной волны.



**Фиг. 5.** Задача 3: (а) — изображение фрагмента решения, точками отмечены положения узлов расчетной сетки; (б) — увеличенное изображение решения в области контактного разрыва и ударной волны.

существенно увеличено количество расчетных точек в области формирования пика распределения. В варианте расчета на неравномерной сетке уменьшение пространственного шага в области  $0.5 \leq x \leq 0.56$  в 10 раз позволило повысить значение амплитуды плотности почти в 2 раза. Получены следующие числовые данные. Расчет на равномерной сетке дал значение плотности в максимуме  $\rho_1 = 19.10$ . Относительное отклонение плотности, вычисленное в сеточной норме  $C \|\Delta\|_c = \|(\rho_{\text{ref}}(x) - \rho(x))/\rho_{\text{ref}}(x)\|_c$  в варианте равномерной сетки оказалось весьма значительным:  $\|\Delta_1\|_c \approx 0.51$ . В варианте расчета на неравномерной сетке со сгущением в области резкого увеличения градиента плотности получено значение пиковой плотности  $\rho_2 = 37.13$ , при этом относительное отклонение существенно уменьшилось:  $\|\Delta_2\|_c \approx 0.04$ . Таким образом, для данного теста переменный пространственный шаг является принципиально важным требованием, которое позволяет качественно улучшить результат расчета при фиксированном числе разностных ячеек.

Результаты расчетов задачи о распространении сильной ударной волны представлены на фиг. 4: в варианте равномерной сетки они выделены красным цветом, в варианте неравномерной — зеленым цветом. Шаг разностной сетки измельчен в 10 раз в области  $0.5 \leq x \leq 0.56$ .

На фиг. 5 показано распределение узлов разностной сетки в области больших градиентов. Узлы равномерной разностной сетки отображаются квадратами, а неравномерной разностной сетки — треугольниками.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная нами модификация метода АИВ продемонстрировала при выполнении вычислительных экспериментов достаточно хорошую точность при использовании неравномерных расчетных сеток. Для сеток, которые не удовлетворяют условию квазиравномерности, метод позволяет сохранить качественные и количе-

ственные характеристики структур в рассчитываемом течении. Число Маха при этом может меняться в весьма широких пределах. Вычислительные эксперименты, приведенные в настоящей работе, показали, что при выполнении условия Куранта адаптивная вязкость позволяет производить вычисления с сохранением свойств монотонности и устойчивости разностных решений при весьма большой разнице размеров соседних расчетных ячеек. Так, например, один из тестов рассчитан на сетке, в которой размеры соседних ячеек отличаются на порядок величины.

Предложенный в настоящей работе численный метод достаточно прост в реализации, при этом он позволяет создавать экономичные алгоритмы расчетов течений при наличии локальных областей больших градиентов газодинамических величин. Адаптивная искусственная вязкость может использоваться в более сложных компьютерных моделях течений сжимаемых сред. Так, например, для расчетов высокоскоростных течений плазмы в астрофизических условиях возникает необходимость рассчитывать отдельно динамику ионов и нейтральных частиц (см. [13]). В такой модели движения частично ионизованной среды адаптивная вязкость может непосредственно использоваться для расчета балансов массы, импульса и энергии нейтральной и ионизованной компонент среды.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов И.В., Фрязинов И.В.* Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015. 200 с.
2. *Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005. 224 с.
3. *Калиткин Н.Н., Кузнецов И.О., Панченко С.Л.* Метод квазиравномерных сеток в бесконечной области // ДАН. 2000. Т. 374. № 5. С. 598–601.
4. *Дарьин Н.А., Мажукин В.И., Самарский А.А.* Конечно-разностный метод решения одномерных уравнений газовой динамики на адаптивных сетках // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 5. С. 1078–1081.
5. *Berger M.J., Olinger J.* Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations // J. Comput. Phys. 1984. V. 53. № 3. P. 484–512. doi 10.1016/0021-9991(84)90073-1.
6. *Berger M.J., Colella P.* Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics // J. Comput. Phys. 1989. V. 82. № 1. P. 64–84. doi:10.1016/0021-9991(89)90035-1.
7. *Василевский В.Ф., Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П.* Квазимонотонные разностные схемы повышенного порядка точности на адаптивных сетках нерегулярной структуры // Препринт ИПМ № 124. Москва, 1990. 31 с.
8. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
9. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
10. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1971. 553 с.
11. *Shu C., Osher S.* Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes II // J. Comput. Phys. 1989. V. 83. P. 32–78.
12. *Liska R., Wendroff B.* Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // SIAM J. Sci. Comput. 2003. V. 25. № 3. P. 31–84. DOI: 10.1137/S1064827502402120
13. *Шарова Ю.С., Глазырин С.И., Гасилов В.А.* Исследование влияния фоновой нейтральной компоненты на динамику оболочки в остатках сверхновых // Письма в Астрон. журн. 2021. Т. 47. № 11. С. 773–781. DOI: 10.31857/S032001082111005X

# DEVELOPMENT OF THE METHOD OF ADAPTIVE ARTIFICIAL VISCOSITY FOR FLUID DYNAMICS COMPUTATIONS ON NONUNIFORM DIFFERENCE GRIDS

A. Yu. Krukovsky<sup>a</sup>, I. V. Popov<sup>a,\*</sup>, V. A. Gasilov<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: piv2964@mail.ru*

Received 5 July, 2024

Revised 27 July, 2024

Accepted 23 August, 2024

**Abstract.** The method of adaptive artificial viscosity is generalized to construct difference schemes for fluid dynamics that ensure high resolution of the structure of flows both on uniform and nonuniform grids. Difference schemes approximating the one-dimensional system of fluid dynamics equations are considered. Bounds on the magnitude of adaptive viscosity obtained in this paper take into account the nonuniformity of the distribution of gas-dynamic quantities in the computational domain and the nonuniformity of the difference grid. The constructed schemes with adaptive artificial viscosity are homogeneous and conservative. These schemes are evaluated on model problems the solutions to which describe various smooth gas-dynamic structures, as well as strong and weak discontinuities. The possibility of obtaining highly accurate solutions on grids with significant difference of geometric size of adjacent difference cells is demonstrated.

**Keywords:** fluid dynamics, adaptive artificial viscosity, homogeneous conservative difference scheme, computational experiment.