ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2378–2389

УДК 519.642

ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СЕТОЧНОГО ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА[1)]

© 2024 г. И.Э. Степанова[1,*], И.И. Колотов[2], А.В. Щепетилов[2], А.Г. Ягола[2], А.Н. Левашов[2]

[1] 123242 Москва, ул. Б.Грузинская, 10, стр. 1, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Россия
[2] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, Россия
*e-mail: tet@ifz.ru

Поступила в редакцию 10.07.2024 г.
Переработанный вариант 10.07.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

В работе рассматривается проблема однозначного определения фундаментального решения сеточного аналога волнового уравнения, а также уравнения теплопроводности в рамках теории дискретного потенциала. Сеточные фундаментальные решения конечно-разностных аналогов уравнений в частных производных позволяют решать прямые и обратные задачи по восстановлению источников волн и тепла в различных средах по разнородной и разноточной информации о соответствующих физических полях. В статье рассматриваются постановки с условиями Дирихле в трехмерном и четырехмерном декартовых пространствах. Библ. 16.

Ключевые слова: однозначное определение, фундаментальное решение, дискретный тепловой потенциал, дискретный волновой потенциал.

DOI: 10.31857/S0044466924120114, **EDN**: KBPMXT

ВВЕДЕНИЕ

Спутниковое зондирование Земли и объектов в пределах Солнечной системы бросило целый ряд вызовов исследователям. В первую очередь, возникла проблема адекватной интерпретации больших и сверхбольших массивов меняющихся со временем (в том числе – “осциллирующих”) данных. Во-вторых, актуальным остается вопрос о целесообразности записи и хранения тех или иных выборок: объемы памяти на соответствующих устройствах общирны, но не безграничны. Поэтому требуется определить еще на этапе получения информации, какая ее часть будет использоваться для решения задач интерпретационного и иного характера, а какая будет отброшена, поскольку фактически не влияет на качество решения поставленной задачи.

При применении аппроксимационного подхода к решению обратных линейных и нелинейных задач геофизики, геодезии и геоморфологии [1–4] практически все постановки по определению параметров геологической среды требуют решения больших и очень больших систем линейных (в некоторых случаях и нелинейных) алгебраических уравнений. Свойства матриц таких систем (СЛАУ) зависят от типа оператора, фигурирующего в постановке прямой задачи, заключающейся в вычислении компонент некоторого векторного поля при известных зависимостях от координат и времени плотностей распределения источников этого поля в среде. Для решения обратной задачи важное значение приобретает резольвента оператора, описывающего создаваемое источниками физическое поле (поле скоростей, давлений, температур и т.п.) – фактически, матрица, обратная к матрице оператора прямой задачи за вычетом единичной матрицы, умноженной на некоторое комплексное, в общем случае, число.

При интерпретации геофизических данных необходимо учитывать дискретный характер передаваемой информации, даже в случае спутниковых систем высокого разрешения, как это было отмечено уже в [2]. Гладкость функций, представляющих свойства реальных физических полей, имеет решающее значение при постановке задач (как прямых, так и обратных) в пространствах с непрерывно меняющимися координатами и временем. Однако a priori бывает, как правило, не известно, каков характер зависимости плотности источников от пространственных координат и насколько резко эта плотность может варьироваться с течением времени.

[1)] Работа выполнена в рамках госзадания ИФЗ РАН.

Поэтому основные принципы теории дискретного гравитационного и магнитного потенциалов, предложенные В.Н. Страховым в начале 1990-х годов и развитые далее в работах [1, 3], могут, на наш взгляд, быть распространены на постановки прямых и обратных задач для уравнений с частными производными гиперболического и параболического типов. Вместе с теорией дискретного потенциала можно применять следующий метод линейных интегральных представлений (см. [4–6]); такой подход позволит обеспечить лучшую корреляцию между математическими моделями и геофизическими реалиями.

1. ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНОГО ПОТЕНЦИАЛА В СЛУЧАЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В [1] описываются основные принципы теории теории дискретного гравитационного потенциала. Роль вектора с координатами в декартовом пространстве $\mathbb{R}^n : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, "играет" его сеточный аналог. Общее число сеток равно 2^n. Из этих сеток одна считается основной, и в узлах этой сетки определены значения сеточного гравитационного потенциала $V_S(x^{(S)})$, где $x^{(S)}$ имеет следующий вид:

$$x^{(S)} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad x_k^{(S)} = mh_k, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad h_k = \mathrm{const},$$
$$h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)^{\mathrm{T}}.$$

В узлах вспомогательных, или "неосновных", сеток вычисляются значения высших производных потенциала. Если $\mathbf{e}_k$ — единичный орт вдоль k-й оси, то первая производная гравитационного потенциала запишется в виде

$$\frac{\partial V_S(x^{(S)})}{\partial x_k^{(S)}} \approx \frac{V_S(x^{(S)} + h_k e_k) - V_S(x^{(S)})}{h_k}. \tag{1}$$

Как показано в [1], значения производной по k-й оси относятся к узлам $x^{(S,k)}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, вспомогательной сетки:

$$x^{(S,k)} = x^{(S)} + \frac{h_k}{2} e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Аналогично, можно записать следующие выражения для вторых производных сеточного потенциала:

$$\frac{\partial^2 V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)} \partial x_q^{(S)}} = \frac{1}{h_q} \left[\frac{\partial V_S(x^{(S)} + h_p e_p)}{\partial x_p^{(S)}} - \frac{\partial V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)}} \right], \tag{2}$$

Значения $\frac{\partial^2 V_S(x^{(S)})}{\partial x_p^{(S)} \partial x_q^{(S)}}$ при $p \neq q$ относятся к узлам третьей дополнительной сетки: $x^{(S,3)} = x^{(S)} + \frac{h_p e_p}{2} + \frac{h_q e_q}{2}$; если же $p = q$, то разностные аналоги вторых производных вычисляются в узлах основной сети.

В настоящей работе, в отличие от [1], будем полагать, что одна из декартовых сеточных координат представляет собой время. Для удобства записи положим, что мы работаем в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$. Первый сомножитель в декартовом произведении пространств соответствует пространственным координатам, а второй – времени. Тогда вид сеточных дифференциальных операторов практически не изменится, но нужно будет учитывать, что одна из координат $n+1$-мерного пространства – выделенная.

Аналоги операторов для уравнения теплопроводности и волнового уравнения в сеточном пространстве могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} &\Delta_x \left\{V_S(x^{(S)}\right\} a^2 = \nabla_t \left\{V_S(x^{(S)}\right\}; \quad x^{(S)} \in R^{n+1}; \\ &\Delta_x \left\{V_S(x^{(S)}\right\} a^2 = \Delta_t \left\{V_S(x^{(S)}\right\}; \quad x^{(S)} \in R^{n+1}. \end{aligned} \tag{3}$$

В (3) Δ_x — выбранный конечно-разностный аналог оператора Лапласа по пространственным переменным, ∇_t — конечно-разностная аппроксимация первой производной по времени, Δ_t -конечно-разностный аналог оператора второй производной по времени. В дальнейшем будем обозначать дифференциальные операторы в частных производных через

$$\begin{aligned} &L^{(h)} \left\{V_S(x^{(S)})\right\} \equiv a^2 \Delta_x \left\{V_S(x^{(S)})\right\} - \nabla_t \left\{V_S(x^{(S)})\right\}; \\ &L^{(W)} \left\{V_S(x^{(S)})\right\} \equiv a^2 \Delta_x \left\{V_S(x^{(S)})\right\} - \Delta_t \left\{V_S(x^{(S)})\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

В (4) верхняя строка соответствует уравнению теплопроводности, а вторая – волновому уравнению.

Примем, что шаги по пространственным координатам будут обозначаться как h_p, $p = 1, \ldots, N$, а шаг по времени обозначим через τ, пусть a^2 — некоторый параметр, фигурирующий в континуальных уравнениях теплопроводности или волновом – он имеет смысл коэффициента теплопроводности, диффузии или квадрата скорости распространения сигнала.

Как мы уже отмечали в [2], в теории дискретного потенциала важнейшей методологической установкой считается формулировка вариационной задачи, в которой наряду с условиями (3) рассматривается дополнительное требование:

$$\left| L_2^{(w,h)} \left\{ V_S(x^{(S)}) \right\} \right|^2_{E(D_S)} + \alpha \Phi \left(V_S(x^{(S)}), u_S(x^{(S)}) \right) = \min_{V_S(x^{(S)}), x^{(S)} \in \mathrm{Int} D_S}, \tag{5}$$

где $\alpha \geqslant 0$ — некоторый параметр (параметр регуляризации [7]); D_S — заданная сеточная область (в четырехмерном пространстве !); $x^{(S)} \in D_S$; $E(D_S)$ — евклидова норма в сеточной области D_S; $\Phi(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ — неотрицательный функционал на векторах одинаковой размерности $\mathbf{t}$ и $\mathbf{z}$. Через $u_S(x^{(S)})$ в (5) обозначен известный благодаря наблюдениям сигнал (меняющийся по гармоническому закону или температурное нестационарное поле); $L_2^{(w,h)}$ — это аппроксимация дифференциального оператора (в [2] — оператора Лапласа) на другом шаблоне, отличная от $L^{(w,h)} = L_1^{(w,h)}$. Вариационную задачу (3)–(5) можно решать одним из методов, описанных, например, в [8]. Но в наших предыдущих работах (см. [4–6]) мы показали, что при решении больших плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) целесообразно применять специальные методы, которые позволяют эффективно устранять влияние помехи в правой части и матрице.

Система уравнений (3) не является, очевидно, замкнутой: она не позволяет определять сеточные потенциалы однозначно во всем пространстве (даже в некоторой ограниченной четырехмерной сеточной области ее решение будет неединственным). Вопросы однозначной разрешимости СЛАУ имеют принципиальное значение для адекватной реальности интерпретации геофизических данных [9–11]. Чем больше неопределенность в выборе эквивалентного по внешнему полю распределения масс, тем больше несоответствие между выбранной исследователем математической моделью геологической среды и ее “прототипом”, если можно так выразиться. Если априорная информация об объекте, порождающем поле, отсутствует, то выводы о локализации и геометрии источника можно назвать лишь умозрительными: источник сигнала будет представлять собой в таком случае некий “черный ящик”. Поэтому, прежде чем переходить к формулировке краевых задач для выделения единственного сеточного аналога волнового или теплового потенциала, необходимо рассмотреть принципиально важный для дальнейшего вопрос нахождения фундаментального решения разностного аналога оператора $L^{(w)}$ или $L^{(h)}$.

Дискретными аналогами волнового и теплового потенциалов, а также фундаментальных решений волнового уравнения и уравнения теплопроводности служат следующие выражения:

$$V_i^{(S)}(x^{(s)}) = \sum_{\xi^{(S)} \in J^{(S)}} m_S \left(\xi^{(S)} \right) \Omega_{n,i}^{(S)}(\xi^{(S)} - x^{(s)}), \quad i = 1, 2; \tag{6}$$

$$\begin{aligned} a^2 \Delta_x \left(\Omega_{n,1}^{(S)}(x^{(s)}) \right) - \nabla_t \left(\Omega_{n,1}^{(S)}(x^{(s)}) \right) &= -\frac{C_n}{H^{n-2}} e \left(x^{(S)} \right), \\ a^2 \Delta_x \left(\Omega_{n,2}^{(S)}(x^{(s)}) \right) - \Delta_{tt} \left(\Omega_{n,2}^{(S)}(x^{(s)}) \right) &= -\frac{C_n}{H^{n-2}} e \left(x^{(S)} \right); \end{aligned} \tag{7}$$

$$e(x^{(S)}) = \begin{cases} 1, & x^{(S)} = 0, \\ 0, & |x^{(S)}| > 0. \end{cases} \tag{8}$$

В (6) J_S есть совокупность векторов координат $\xi^{(S)}$ тех узлов сетки, в которых имеются ненулевые сеточные источники волн или тепла, обозначенные условно через $m_S \left(\xi^{(S)} \right)$; иначе говоря, J_S есть сеточный носитель источников поля. Функция $\Omega_{n,1}^{(S)}(x^{(s)})$ есть сеточный аналог фундаментального решения волнового уравнения в континуальной теории, $\Omega_{n,2}^{(S)}(x^{(s)})$ — сеточный аналог фундаментального решения уравнения теплопроводности, Δ_x — выбранный, как и в (3), конечно-разностный аналог оператора Лапласа. Ясно, что $\Omega_{n,i}^{(S)}(x^{(s)})$, $i = 1, 2$, играют роль сеточных фундаментальных решений в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_t$. Сам индекс n у фундаментального решения волнового уравнения или уравнения теплопроводности соответствует размерности координатного пространства. Определенную в (8) правую часть уравнения, которому удовлетворяет сеточное фундаментальное решение, можно трактовать либо как тепло, выделившееся в начале координат в начальный момент времени (в случае уравнения теплопроводности), либо источник волн, также испустивший импульс при $t = 0$.

Условиями (6)—(8) сеточное фундаментальное решение уравнений (волнового и теплопроводности) ни в одной из размерностей однозначно не определяется. В [1] В.Н. Страхов выдвинул гипотезу о том, что имеет место единственность решения задачи по определению сеточного фундаментального решения уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$, близкого по евклидовой норме к потенциалу призмы, заданной в области

$$|\bar{r}| \leqslant \frac{h}{2},\ \bar{r} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}, \quad |\bar{r}| \equiv r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Можно отметить, что уравнениям (7), (8) удовлетворяют, например, следующие сеточные функции трех переменных и времени:

$$\begin{aligned} \Omega_{3,1}^{(0)}(x^{(S)}) &= \frac{2\pi}{3H} \cdot \left\{ \left(x_1^{(S)}\right)^2 + \left(x_2^{(S)}\right)^2 + \left(x_3^{(S)}\right)^2 \right\} + Ax_1^{(S)} + Bx_2^{(S)} + Cx_3^{(S)} + D + \frac{8\pi t}{Ha^2}, \\ \Omega_{3,2}^{(0)}(x^{(S)}) &= \frac{2\pi}{3H} \cdot \left\{ \left(x_1^{(S)}\right)^2 + \left(x_2^{(S)}\right)^2 + \left(x_3^{(S)}\right)^2 \right\} + Ax_1^{(S)} + Bx_2^{(S)} + Cx_3^{(S)} + D + Et + \frac{8\pi t^2}{Ha^2}, \end{aligned} \tag{9}$$

где A, B, C, D, E – произвольные вещественные постоянные. Вместо линейной функции сеточных переменных можно взять любой гармонический полином, который удовлетворяет сеточному аналогу уравнения Лапласа (к примеру, $2(x_1^{(S)})^2 + 2(x_2^{(S)})^2 - 4(x_3^{(S)})^2$). Таким образом, об однозначной разрешимости задачи по определению сеточного фундаментального волнового уравнения или уравнения теплопроводности речь может идти только при наложении дополнительных ограничений на функцию $\Omega_{3,i}^{(S)}(x^{(S)})$, $i = 1, 2$. Далее, сеточное фундаментальное решение мы будем искать в некоторой ограниченной области сеточного трехмерного пространства. В качестве такой области может выступать как прямоугольный параллелепипед (в случае декартовой системы координат), так и шар (если рассматривать сеточные аналоги уравнений в частных производных в сферической системе координат).

2. СЕТОЧНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Оператор Лапласа в (7) будем считать заданным на шаблоне “крест”(см. [13]). Тогда для трехмерного сеточного пространства будем иметь (не ограничивая общности, будем считать, что a^2=1) :

$$\Lambda^+(\Omega_{3,1}^{(S)}(x^{(S),j+1})) - \frac{\Omega_{3,1}^{(S)}(x^{(S),j+1}) - \Omega_{3,1}^{(S)}(x^{(S),j})}{\tau} = -\frac{4\pi}{H} e_S(x^{(S),j});$$

$$x^{(S),j} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}; x_{n+1} = j\tau\right), \quad x^{(S),j+1} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}; x_{n+1} = (j+1)\tau\right), \quad j = 0, \ldots, J-1.$$

$$\Lambda^+(\Omega_3^{(S)}(x^{(S),j})) = -3\left(\sum_{p=1}^{3} C_p\right)\Omega_3^{(S)}\left(x^{(S),j}\right) + \sum_{p=1}^{3}\left\{\Omega_3^{(S)}(x^{(S),j} - h_p e_p) + \Omega_3^{(S)}(x^{(S),j} + h_p e_p)\right\}, \quad C_p = \frac{H^3}{h_1 h_2 h_3},$$

$$H = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \quad x^{(S),j} = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}, t = j\tau\right), \quad x_p^{(S)} = kh_p, \quad -K \leqslant k \leqslant +K; \quad h_p = \mathrm{const}, \quad p = 1, 2, 3;$$

$$\left|x_p^{(S)}\right| \leqslant d_p = Kh_p, \quad p = 1, 2, 3; \quad j = 0, \ldots, J-1; \quad J\tau = T. \tag{10}$$

Индекс j в (10) соответствует дискретному времени. Мы полагаем, что сеточное фундаментальное решение уравнения теплопроводности существует на интервале: $x_4 \doteq t \in (0, J\tau) = (0, T)$. Конечно-разностную производную по времени в (10) можно также задавать различными способами. В настоящей статье мы не будем акцентировать внимание на порядке точности аппроксимации производных по координатам и времени при переходе от уравнения теплопроводности и волнового уравнения к их дифференциально-разностным аналогам. Отметим следующий важный момент: конечно-разностные аналоги дифференциальных операторов должны быть такими, чтобы имела место устойчивость по начальным данным [13]. Ниже мы покажем на примере волнового уравнения, каким соотношениям должно удовлетворять сеточное фундаментальное решение волнового уравнения, чтобы одновременно учитывались критерии применимости метода матричной прогонки и устойчивости по начальным данным.

Как утверждается в [1], введение условия

$$\lim_{|x^{(S)})| \to \infty} \left|\Omega_n^{(S)}(x^{(S)})\right| = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 3$$

не устраняет проблему неединственности решения сеточного аналога фундаментального решения уравнения Лапласа. Такой же вывод можно сделать и относительно сеточных фундаментальных решений для уравнения теплопроводности и волнового уравнения.

Действительно, соображения симметрии показывают, что имеют место равенства :

$$\Omega_{3,k}^{(S)}(x^{(S)}) \equiv \Omega_{3,k}^{(S)}\left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}, x_4^{(S)}\right) = \Omega_{3,k}^{(S)}\left(\left|x_1^{(S)}\right|, \left|x_2^{(S)}\right|, \left|x_3^{(S)}\right|, x_4^{(S)}\right) = \Omega_{3,k}^{(S)}\left(\left|x_{i_1}^{(S)}\right|, \left|x_{i_2}^{(S)}\right|, \left|x_{i_3}^{(S)}\right|, x_4^{(S)}\right),$$
$$(i_1, i_2, i_3) \in S_3, \quad k = 1, 2,$$

где S_3 — группа перестановок трех индексов.

Следовательно, достаточно найти значения $\Omega_{3,k}^{(S)}(x^{(S)})$, $k = 1, 2$, в области

$$S_{+++}^4 = \left\{x^{(S)} : x_1^{(S)} \geqslant 0, x_2^{(S)} \geqslant 0, x_3^{(S)} \geqslant 0, x_1^{(S)} \leqslant x_2^{(S)} \leqslant x_3^{(S)}, 0 \leqslant x_4^{(S)} \leqslant T\right\},$$

т.е. в части первого координатного октанта. Кроме того, для волнового уравнения фундаментальное решение симметрично и по четвертой координате (времени): от знака этой координаты решение не зависит, но мы будем рассматривать решения только при положительных временах.

При определении значений сеточного фундаментального решения в узлах области S_{+++}^4 можно поставить условие минимальности отклонения сеточного решения от его континуального аналога:

$$F\left[\Omega_{3,k}^{(S)}\left(x^{(S)}\right)\right] = \sum_{x^{(S)} \in S_{+++}^4} \left(\frac{\Omega_{3,k}^{(S)}\left(x^{(S)}\right) - \Omega_{3,kc}\left(x^{(S)}\right)}{\Omega_{3,kc}\left(x^{(S)}\right)}\right)^2 = \min, \quad k = 1, 2, \tag{11}$$

где $\Omega_{3,kc}\left(x^{(S)}\right)$ — значения континуального фундаментального решения уравнения теплопроводности (значение индекса $k = 1$) и волнового уравнения (значение индекса $k = 2$) в точках сеточной области.

Таким образом, одним из вариантов "устранения" неопределенности при нахождении сеточного фундаментального решения уравнений в частных производных параболического и гиперболического типов является минимизация функционала (11) при условиях, аналогичных (10); такого рода вариационные постановки исследовались нами неоднократно при применении метода линейных интегральных представлений к решению обратных линейных задач геофизики [4–6].

В настоящей работе мы будем рассматривать постановки задач для определения сеточных фундаментальных решений уравнения теплопроводности и волнового уравнения на семействе расширяющихся компактов: четырехмерное сеточное пространство ,т.е. неограниченное множество точек:

$$x^{(S)} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}, x_{n+1}^{(S)}\right)^{\mathrm{T}}, \quad x_k^{(S)} = mh_k; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$
$$h_k = \text{const}, \quad x_{n+1}^{(S)} \in (0, T),$$

заменяется ансамблем, или семейством, расширяющихся компактов, представляющих собой прямоугольные параллелепипеды $\left|x_p^{(S)}\right| \leqslant d_p = K_n h_p$, $p = 1, 2, 3$; здесь d_p, K_n и h_p, $p = 1, 2, 3$, — некоторые положительные константы, причем $K_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Четвертая координата (время), по-прежнему, принимает значения из фиксированного интервала $(0, T)$.

Рассмотрим уравнение (10) в прямом произведении некоторого прямоугольного параллелепипеда на интервал $(0, T)$: $K_{n_q,t} = K_{n_q} \times (0, T)$. Для того чтобы корректно поставить задачу по определению $\Omega(x^{(S)})$ в указанной области, нужно задать граничные и начальные условия. Будем считать, что на гранях параллелепипеда K_{n_q} с номером n_q, принадлежащего описанному выше семейству расширяющихся компактов, значения фундаментального решения равны нулю (континуальным аналогом дискретной постановки такого рода является задача Дирихле для уравнения теплопроводности):

$$\begin{aligned} &\Omega_{3,1}^{(S)}(x^{(S)}) = 0, \quad x^{(S)} \in \Gamma K_{n_q}; \\ &\Omega_{3,1}^{(S)}(x^{(S)}) = \Omega_{3,10}^{(S)}(\bar{x}^{(S)}), \quad x_4^{(S)} = 0, \quad \bar{x}^{(S)} = (x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}). \end{aligned} \tag{12}$$

В качестве $\Omega_{3,10}^{(S)}(\bar{x}^{(S)})$ можно взять сеточное фундаментальное решение уравнения Лапласа в соответствующем трехмерном параллелепипеде, как это было описано в [2].

Вариационная задача (10)–(12) может быть решена с помощью метода матричной прогонки, если для конечно-разностного аналога уравнения теплопроводности рассмотреть неявную схему. Матрицы систем линейных алгебраических уравнений имеют при этом в каждом слое по времени (т.е. при каждом значении

$x_4^{(S)} = j\tau$, $0 = 1, \ldots, J-1$) трехдиагональный или блочно-трехдиагональный вид (если постановка рассматривается в трехмерном сеточном пространстве), а векторы неизвестных $\mathbf{Y}_k^{(j)}$ и правых частей $\mathbf{\Phi}_k^{(j)}$ – блочный вид:

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{B}_{j,k+1}\mathbf{Y}_{k+1}^{(j)} + \mathbf{A}_{j,k}\mathbf{Y}_k^{(j)} - \mathbf{B}_{j,k-1}\mathbf{Y}_{k-1}^{(j)} = -\mathbf{F}_k^{(j)}, j = 1, \ldots, J-1; k = 1, \ldots, N_3 - 1;\\
&\mathbf{Y}_0^{(j)} = \mathbf{F}_0^{(j)}; \mathbf{Y}_{N_3}^{(j)} = \mathbf{F}_{N_3}^{(j)};\\
&\mathbf{A}_{j,k} = \begin{bmatrix} A_{11} & B_{12} & \ldots 0 \\ B_{21} & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & A_{N_3N_3} \end{bmatrix},\ A_{ll} = \begin{bmatrix} a & b\ldots & 0 \\ b & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_k^{(j)} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1^{(k,j)} \\ \mathbf{y}_2^{(k,j)} \\ \ldots \\ \mathbf{y}_{N_2}^{(k,j)} \end{pmatrix},\\
&a = 2\cdot(1+\alpha_1+\alpha_2) + \frac{1}{\tau},\ \alpha_1 = \frac{h_3^2}{h_1^2}; \alpha_2 = \frac{h_3^2}{h_2^2}; b = -\alpha_1; c = -\alpha_2; \mathbf{y}_l^{(k,j)} = \left(y_{1,l}^{(k,j)}, y_{2,l}^{(k,j)} \ldots, y_{N_1,l}^{(k,j)}\right)^{\mathrm{T}},\\
&1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1;\ \mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3);\\
&\mathbf{F}_k^{(j)} = -\frac{\mathbf{Y}_k^{(j-1)}}{\tau} + \mathbf{\Phi}_k^{(j)}, j = 1, \ldots, J-1;\\
&B_{12} = B_{21}, B_{il} = \begin{bmatrix} c & 0\ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & c \end{bmatrix}, \quad l = i \pm 1; \quad i = 1, \ldots, N_1 - 1, \quad l = 1, \ldots, N_2 - 1.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В (13) блочные матрицы не зависят от дискретного времени в нашем случае, поэтому индекс “j” у них можно опустить. Но сами векторы неизвестных $\mathbf{Y}_k^{(j)}$ от времени, конечно, зависят. Индекс “j” в (13) соответствует значению времени $x_4^{(S)} = j\tau$, $j = 1, \ldots, J-1$.

Необходимо сделать важное замечание: соотношение (10) – это конечно-разностный аналог уравнения теплопроводности, заданный в неограниченной сеточной области, фактически – в прямом произведении всего трехмерного сеточного пространства на конечный интервал времени. Для однозначной разрешимости такого рода уравнений необходимо задать граничные и начальные условия. Поэтому нужно более подробно описать свойства сеточных областей, в которых мы в дальнейшем будем рассматривать краевые задачи для конечно-разностных аналогов уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\omega_3 = (ih_1, lh_2, kh_3), \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1;\\
&\omega = (ih_1, lh_2), \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1;\\
&\gamma_3 = (0, lh_2, kh_3) \cup (N_1, lh_2, kh_3) \cup (ih_1, 0, kh_3) \cup (ih_1, N_2, kh_3) \cup (ih_1, lh_2, 0) \cup (ih_1, lh_2, N_3),\\
&1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1;\\
&\gamma = (0, lh_2) \cup (N_1, lh_2) \cup (ih_1, 0) \cup (ih_1, N_2), \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Таким образом, мы задали равномерные сетки в трехмерном и двумерном пространствах (ω_3, ω), а также обозначили границы соответствующих областей. В (14) мы намеренно не использовали индекс j при нумерации узлов по второй декартовой координате: этот индекс у нас “зарезервирован” для времени.

Дифференциально-разностному оператору в (10) соответствует при решении краевых задач схема матричной прогонки [13] следующего вида (чтобы не усложнять запись формул, мы опустили индекс “j”, соответствующий конкретному моменту дискретного времени):

$$
\begin{aligned}
&-\mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k\mathbf{Y}_k + \mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{F}_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1,\\
&\mathbf{CY} = (\Lambda\mathbf{y}_1, \Lambda\mathbf{y}_2, \ldots, \Lambda\mathbf{y}_{N_2-1}), \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_{N_2-1}),\\
&\mathbf{y}_j = (y_{1,l}, y_{2,l}, \ldots, y_{N_1-1,l}), \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1,\\
&\Lambda\mathbf{y}_l = (\Lambda_1 y_{1,l}, \Lambda_1 y_{2,l}, \ldots, \Lambda_1 y_{N_1-1,l}),\\
&\Lambda_1 y_{i,l} = \left(2 + \frac{1}{\tau}\right) y_{i,l} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i,l} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i,l}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1; \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

В (15) через $\mathbf{Y}_k$ обозначен блочный вектор значений сеточной функции в слое, соответствующем значению третьей координаты $x_3^{(S)} = kh_3$, $1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1$. Правые части $\mathbf{F}_k$ при изменении индекса $1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1$ — это сумма значений сеточной функции $\frac{4\pi}{H} e_S(x^{(S)})$ в соответствующих точках и значений деленной на шаг по времени вектор-функции решения, вычисленной на предыдущем по времени шаге (см. (13)); константа C_3^2 определяется в (10) (точнее говоря, это – квадрат C_3). К уравнениям (15) необходимо добавить граничные условия с тем, чтобы возникла постановка краевой задачи. Подчеркнем еще раз, что мы используем неявную схему для конечно-разностного аналога уравнения теплопроводности: в этом случае значения сеточного аналога фундаментального решения уравнения теплопроводности вычисляются последовательно для каждого значения времени с помощью метода матричной прогонки в трехмерном сеточном пространстве координат. Как показано в [14], неявная схема для уравнения теплопроводности устойчива по начальным данным при любом соотношении $\gamma = \tau/H$.

Рассмотрим граничные условия I рода:

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{F}_0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \mathbf{F}_{N_3}. \tag{16}$$

Постановка (15), (16) – это частный случай более общей задачи: найти векторы $\mathbf{Y}_k$, $0 \leqslant k \leqslant N_3$, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{aligned}
&-\mathbf{A}_k\mathbf{Y}_{k-1} + \mathbf{C}_k\mathbf{Y}_k + \mathbf{B}_k\mathbf{Y}_{k+1} = \mathbf{F}_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1,\\
&C_0\mathbf{Y}_0 - \mathbf{B_0}\mathbf{Y_1} = \mathbf{F}_0, \quad k = 0,\\
&-\mathbf{A_{N_3}}\mathbf{Y}_{N_3-1} + \mathbf{C_{N_3}}\mathbf{Y_{N_3}} = \mathbf{F}_{N_3}, \quad k = N_3,
\end{aligned} \tag{17}$$

где $\mathbf{A}_k, \mathbf{B}_k, \mathbf{C}_k$ — блочные матрицы; $\mathbf{C}_k$ — блочная квадратная матрица $N_2 \times N_2$, каждый блок которых имеет размер $N_1 \times N_1$; $\mathbf{A}_k$ — блочная прямоугольная матрица размера $N_2 - 1 \times N_2$, блоки которой имеют размер $N_1 \times N_1$; $\mathbf{B}_k$ — блочная прямоугольная матрица $N_2 + 1 \times N_2$, с блоками размера $N_1 \times N_1$; $\mathbf{Y}_k$ — блочный вектор размера N_2 с блоками длины N_1.

Формулы матричной прогонки имеют вид:

$$\begin{gathered}
\alpha_{k+1} = (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k\alpha_{k-1})^{-1}\mathbf{B}_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N_3 - 1, \quad \alpha_1 = \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{B}_0;\\
\beta_{k+1} = (\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k\alpha_{k-1})^{-1}(\mathbf{F}_k + \mathbf{A}_k\beta_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N_3, \quad \beta_1 = \mathbf{C}_0^{-1}\mathbf{F}_0;\\
\mathbf{Y}_k = \alpha_{k+1}\mathbf{Y}_{k+1} + \beta_{k+1}, \quad k = N_3 - 1, N_3 - 2, \ldots, 0, \quad \mathbf{Y}_{N_3} = \beta_{N_3+1},
\end{gathered} \tag{18}$$

причем алгоритм (18) корректен, если матрицы $(\mathbf{C}_k - \mathbf{A}_k\alpha_{k-1})^{-1}$ не вырождены для $k = 1, 2, \ldots, N_3$. В [13] показано, что если $\mathbf{C}_k = \mathbf{C}, A_{N_3} = B_0 = 0, C_0 = C_{N_3} = E, B_k = A_k = E$, $1 \leqslant k \leqslant N_3$, а квадратная матрица $\mathbf{C}_k$ задана в (13), то условия корректности алгоритма (18) принимают вид

$$\left\|\mathbf{C}^{-1}\right\| = \max_m \left|\lambda_m(\mathbf{C}^{-1})\right| = \frac{1}{\min\limits_m |\lambda_m(\mathbf{C})|} \leqslant 0.5. \tag{19}$$

В (19) максимум и минимум берется по собственным значениям матрицы $\mathbf{C}^{-1}$ и $\mathbf{C}$ соответственно. Из определения матрицы $\mathbf{C}$ можно получить, что при замене $\lambda_m = 2 + \frac{1}{\tau} + C_3^2\lambda^{(1)}_{m_1} + C_3^2\lambda^{(2)}_{m_2}$, $m = (m_1, m_2)$, задача по поиску собственных значений λ_l для оператора

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1 y_{i,l} = \left(2 + \frac{1}{\tau}\right) y_{i,l} - C_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1; i,l} - C_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2; i,l} = \lambda_m y_{i,l}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1; \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1,\\
&y_{k,0} = y_{k,N_2} = y_{0,l} = y_{N_1,l} = 0,
\end{aligned} \tag{20}$$

сводится к следующей задаче на собственные значения [13]:

$$\begin{gathered}
\Lambda y(x) + \lambda_l y(x) = 0,\ x = (x_1, x_2) \in \omega, \quad \Lambda = \Lambda_x + \Lambda_y,\\
y(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \gamma;\\
y_{il} = y(x_{1,i}, x_{2,l}); \quad x_{1,i} = ih_1, x_{2,l} = lh_2;\\
\Lambda_x \mu^{(1)}_{m_1} + \lambda^{(1)}_{m_1}\mu^{(1)}_{l_1} = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1,\\
\Lambda_y \mu^{(2)}_{m_2} + \lambda^{(2)}_{l_2}\mu^{(2)}_{m_2} = 0, \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1,\\
\mu^{(1)}_{m_1}(0) = \mu^{(1)}_{m_1}(N_1) = 0 = \mu^{(2)}_{m_2}(0) = \mu^{(2)}_{m_2}(N_2),\\
\lambda^{(\alpha)}_{m_\alpha} = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\left(\frac{m_\alpha\pi}{2N_\alpha}\right) = \frac{4}{h_\alpha^2}\sin^2\left(\frac{m_\alpha\pi h_\alpha}{2d_\alpha}\right), \quad m_\alpha = 1, 2, \ldots, N_\alpha - 1,\\
\mu^{(1)}_{m_1}(i) = \sqrt{\frac{2}{d_1}}\sin\left(\frac{m_1\pi i}{N_1}\right), \quad m_1 = 1, \ldots, N_1 - 1;
\end{gathered} \tag{21}$$

$$\mu_{m_2}^{(2)}(j) = \sqrt{\frac{2}{d_2}} \sin\left(\frac{m_2 \pi j}{N_2}\right), \quad m_2 = 1, \ldots, N_2 - 1;$$
$$y_{il} = \mu_m(i,l) = \mu_{m_1}^{(1)}(i) \cdot \mu_{m_2}^{(2)}(l),$$
$$\Lambda_x y_{il} = \frac{1}{h_1^2}\left[y_{i+1,l} - 2y_{il} + y_{i-1,l}\right], \quad \Lambda_y y_{il} = \frac{1}{h_2^2}\left[y_{i,l+1} - 2y_{il} + y_{i,l-1}\right].$$

Таким образом, собственное значение равно

$$\lambda_m = 2 + \frac{1}{\tau} + C_3^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda_{m_\alpha}^{(\alpha)}. \tag{22}$$

В (19) через $y(x)$ обозначена сеточная функция двух аргументов, определенная на двумерной сетке $x = (x_1, x_2) \in \omega$ (см. (14)). При этом в каждом слое $x_3 = kh_3$, $1 \leqslant k \leqslant N_3 - 1$, и при каждом значении времени $x_4 = j\tau$, $1 \leqslant j \leqslant J - 1$, рассматривается "своя" задача на собственные значения конечно-разностного оператора вида (20). Из выражения (22) для собственных значений краевой задачи (20) становится ясно, что $\lambda_l > 2$, поэтому алгоритм матричной прогонки для задачи (10)–(12) определен корректно, и мы можем констатировать, что верна следующая

Теорема 1. *Фундаментальное решение сеточного аналога уравнения теплопроводности в трехмерном случае определяется условиями* (10)–(12) *однозначно.*

Важно отметить, что корректность алгоритма матричной прогонки означает, что существует только одно решение задачи (10)–(12), которое определяется с помощью указанного алгоритма.

3. СЕТОЧНОЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Перейдем теперь ко второму уравнению в (7), описывающему сеточное фундаментальное решение волнового уравнения. Запишем конечно-разностный аналог для оператора $L^{(w)}$ на шаблоне "крест" следующим образом:

$$\Delta_{t\bar{t}}\left(\Omega_{3,2}\left(x^{(S)}\right)\right) - \Delta_{x\bar{x}}\left(\Omega_{3,2}\left(x^{(S)}\right)\right) = -\frac{4\pi e_S(x^{(S)})}{H^{n-2}};$$
$$H = \left(\prod_{k=1}^{3} h_k\right)^{\frac{1}{3}}, \quad e_S(x^{(S)}) = \begin{cases} 1, & x^{(S)} = 0, \\ 0, & \left|x^{(S)}\right| > 0, \end{cases}$$
$$\Delta_{t\bar{t}}\Omega_{3,2}^{(S)}(x^{(S),j}) = \frac{\Omega_{3,2}^{(S)}(x^{(S),j+1}) - 2\Omega_{3,2}^{(S)}(x^{(S),j}) + \Omega_{3,2}^{(S)}(x^{(S),j-1})}{\tau^2};$$
$$\Delta_{x\bar{x}}\Omega_{3,2}^{(S)}(x^{(S),j}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\Omega_{3,2}^{(S)}\left(x_{k+1}^{(S),j}\right) - 2\Omega_{3,2}^{(S)}\left(x_{k}^{(S),j}\right) + \Omega_{3,2}^{(S)}\left(x_{k-1}^{(S),j}\right)}{h_k^2};$$
$$x^{(S),j} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}; x_{n+1} = j\tau\right),$$
$$x^{(S),j+1} = \left(x_1^{(S)}, x_2^{(S)}, \ldots, x_n^{(S)}; x_{n+1} = (j+1)\tau\right), \quad j = 1, \ldots, J-1;$$

$$H = \sqrt[3]{h_1 h_2 h_3}, \quad x^{(S),j} = \left(x_1^{(s)}, x_2^{(S)}, x_3^{(S)}, t = j\tau\right), \quad x_p^{(S)} = kh_p, \quad -K \leqslant k \leqslant +K; \quad h_p = \mathrm{const}, \quad p = 1,2,3;$$
$$\left|x_p^{(S)}\right| \leqslant d_p = Kh_p, \quad p = 1,2,3; \quad j = 1, \ldots, J-1; \quad J\tau = T. \tag{23}$$

Если применить неявную схему к волновому уравнению, то мы получим, как и в предыдущем разделе, некоторую краевую задачу для разностного аналога оператора Лапласа в трехмерном координатном пространстве. Вместо

$$\mathbf{F}_k^{(j)} = -\frac{\mathbf{Y}_k^{(j-1)}}{\tau} + \mathbf{\Phi}_k^{(j)}, \quad j = 1, \ldots, J-1,$$

т.е. правых частей в методе матричной прогонки (13) – теперь будут фигурировать следующие выражения:

$$\mathbf{F}_k^{(j)} = \frac{\mathbf{Y}_k^{(j-1)}}{\tau^2} + \mathbf{\Phi}_k^{(j)} - \frac{2\mathbf{Y}_k^{(j)}}{\tau^2}, \quad j = 1, \ldots, J-1. \tag{24}$$

Помимо значений сеточного аналога фундаментального решения волнового уравнения в начальный момент времени, нам нужно будет знать также значения его производной по времени при $t = 0$. Тогда выражения (12) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S)}) = 0, \quad x^{(S)} \in \Gamma K_{n_q};\\
&\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S)}) = \Omega^{(S)}_{3,20}(\bar{x}^{(S)}), \quad x^{(S)}_4 = 0, \quad \bar{x}^{(S)} = (x^{(S)}_1, x^{(S)}_2, x^{(S)}_3);\\
&\nabla_t \left(\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S)})\right) = \Omega^{(S)}_{3,21}(\bar{x}^{(S)}), \quad x^{(S)}_4 = 0, \quad \bar{x}^{(S)} = (x^{(S)}_1, x^{(S)}_2, x^{(S)}_3).
\end{aligned} \tag{25}$$

Как и в предыдущем разделе, начальные данные определим как значения сеточного фундаментального решения уравнения Лапласа в некотором параллелепипеде, а в качестве производной по времени в начальный момент времени можно взять градиент сеточного фундаментального решения уравнения Лапласа (поскольку можно считать, что дифференцирование по времени эквивалентно дифференцированию по координатам в пространстве, если двигаться вдоль характеристик волнового уравнения; однако данный вопрос требует более глубокого изучения). Формулы (20) примут вид:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1 y_{i,l} = \left(2 + \frac{h_3^2}{\tau^2}\right) y_{i,l} - h_3^2 y_{\bar{x}_1 x_1;i,l} - h_3^2 y_{\bar{x}_2 x_2;i,l} = \lambda_m y_{i,l}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1; \quad 1 \leqslant l \leqslant N_2 - 1,\\
&y_{k,0} = y_{k,N_2} = y_{0,l} = y_{N_1,l} = 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

Оценить собственные значения оператора в (25) можно так же, как это было нами описано ранее. А именно, мы придем к выводу, что собственные значения оператора Λ_1 будут равны:

$$\lambda_m = 2 + \frac{h_3^2}{\tau^2} + h_3^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^{2} \lambda^{(\alpha)}_{m_\alpha}. \tag{27}$$

Если еще учесть, что неявная схема для волнового уравнения устойчива при условии [14]:

$$\tau^2 \leqslant \frac{3}{\sum\limits_{p=1}^{3} \dfrac{1}{h_p^2}}, \tag{28}$$

то мы получим, что метод матричной прогонки позволяет найти единственное решение задачи (23)–(25), устойчивое по начальным данным в случае, когда (28) имеет место.

Таким образом, нами доказана

Теорема 2. *Сеточное фундаментальное решение волнового уравнения в трехмерном координатном сеточном пространстве определяется однозначно с помощью метода матричной прогонки при условии, что применяется неявная схема по времени.*

Если теперь рассмотреть двухпараметрическое (σ_1, σ_2 — некоторые вещественные числа) семейство конечно-разностных аппроксимаций волнового уравнения

$$\Delta_{t\bar{t}}\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S),j}) = \sigma_1 \Delta_{x\bar{x}}\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S),j+1}) + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)\Delta_{x\bar{x}}\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S),j}) + \sigma_2 \Delta_{x\bar{x}}\Omega^{(S)}_{3,2}(x^{(S),j-1}) - \frac{4\pi e_S(x^{(S)})}{H^{n-2}}; \tag{29}$$

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2, \ \frac{\tau^2}{\sum\limits_{p=1}^{3} \frac{1}{h_p^2}} \leqslant 1, \tag{30}$$

то мы придем к выводу, что справедлива

Теорема 3. *Сеточное фундаментальное решение волнового уравнения в трехмерном координатном сеточном пространстве определяется однозначно с помощью метода матричной прогонки при условии, что применяется схема* (29) *с параметрами* σ_1, σ_2, *удовлетворяющими соотношениям* (30).

4. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ СЕТОЧНЫХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ВОЛНОВОГО НА СЕМЕЙСТВЕ РАСШИРЯЮЩИХСЯ КОМПАКТОВ

Из свойств конечно-разностных аналогов операторов в уравнении теплопроводности и волновом уравнении следует, что функционал (11) выпуклый и непрерывный. Мы видим также, что дискретные аналоги дифференциальных операторов, определенные в (10) и (23), а также в (29) – это линейные операторы, действующие на пространстве сеточных функций в декартовой системе координат.

В [15] доказывается, что *для выпуклого, замкнутого и ограниченного множества G множество $G^* = \{\varphi^* \in G : J(\varphi^*) = \mu\} \neq \varnothing$ выпукло, замкнуто и ограничено.* Здесь $J(\varphi^*)$ — выпуклый и непрерывный функционал на некотором гильбертовом пространстве, φ^* — элемент этого пространства. В качестве гильбертова пространства мы выберем пространство сеточных функций Ξ со скалярным произведением, определенным по формуле:

$$\begin{gathered}(u,v) = \sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=1}^{N_1-1}\sum_{l=1}^{N_2-1}\sum_{m=1}^{N_3-1} u(k,l,m;j)v(k,l,m;j)h_1h_2h_3\tau + \\ +0.5h_1h_2\tau\left[\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=1}^{N_1-1}\sum_{l=1}^{N_2-1}\{u(k,l,0;j)v(k,l,0;j)+u(k,l,N_3;j)v(k,l,N_3;j)\}\right]+ \\ +0.5h_1h_3\tau\left[\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{k=1}^{N_1-1}\sum_{m=1}^{N_3-1}\{u(k,0,m;j)v(k,0,m;j)+u(k,N_2,m;j)v(k,N_2,m;j)\}\right]+ \\ +0.5h_2h_3\tau\left[\sum_{j=1}^{J-1}\sum_{m=1}^{N_3-1}\sum_{l=1}^{N_2-1}\{u(0,l,m;j)v(0,l,m;j)+u(N_1,l,m;j)v(N_1,l,m;j)\}\right]+ \\ +0.5h_1h_2h_3\left[\sum_{k=1}^{N_1-1}\sum_{l=1}^{N_2-1}\sum_{m=1}^{N_3-1}\{u(k,l,m;0)v(k,l,m;0)+u(k,l,m;J)v(k,l,m;J)\}\right].\end{gathered} \tag{31}$$

При рассмотрении всех постановок задач в предыдущих разделах предполагалось, что сеточные функции $u(k,l,m;j), v(k,l,m;j) \in \Xi$.

Замечание. Введенное в (31) скалярное произведение соответствует сеточным краевым задачам с условиями Дирихле.

Определим некоторые вспомогательные множества

$$\begin{gathered}G_R = G \cap K_R, \quad F_R = \left\{f \in \Phi, f = L^{(h,w)}\varphi,\ \varphi \in G_R\right\}, \\ \text{где} \quad K_R = \{\varphi \in \Phi:\ \|\varphi\| \leqslant R\}, \quad S_R = \{\varphi \in \Phi:\ \|\varphi\| = R\}, \quad \varphi \in \Xi.\end{gathered} \tag{32}$$

В (32) через $L^{(h,w)}$обозначены конечно-разностные аналоги дифференциальных операторов в уравнении теплопроводности и волновом уравнении соответственно (см. (3), (7) или (10), (23), (29)). Как было показано в работе [15], из того, что $K_{R'} \subseteq K_{R''}$ при $\bar{R} \leqslant R' \leqslant R'' \leqslant \bar{\bar{R}}$ следует справедливость включения $G_{R'} \subseteq G_{R''}$, $F_{R'} \subseteq F_{R''}$.

Теорема 2, доказанная в [15], утверждает, что при $\forall R \quad F_R$ выпукло, слабо замкнуто и ограничено. Это значит, что при $\forall R \geqslant \bar{R}$ существует единственный $f_R^* \in F_R$ такой, что

$$\|f_R^* - f\|_{\Xi'} = \inf_{f \in F_R} \left\|f - \bar{f}\right\|_{\Xi'}. \tag{33}$$

Через Ξ' мы обозначили сеточное пространство функций, определенных во внутренних узлах исходной сетки (поскольку шаблон “крест” для оператора Лапласа предполагает вычисление значений функций именно в таких узлах). Сами сеточные функции зависят от четырех сеточных координат. Назовем f^* и f_R^* *метрическими проекциями* f соответственно на множества F и F_R. Очевидно,

$$\begin{gathered}\mu = \inf_{\varphi \in G} J(\varphi) = \inf_{f \in F} \left\|f - \bar{f}\right\|^2_{\Xi'} = \left\|f^* - \bar{f}\right\|^2_{\Xi'}, \\ \mu(R) = \inf_{\varphi \in G_R} J(\varphi) = \inf_{f \in F_R} \left\|f - \bar{f}\right\|^2_{\Xi'} = \left\|f_R^* - \bar{f}\right\|^2_{\Xi'}.\end{gathered} \tag{34}$$

Так как $J(\varphi)$ — непрерывный и выпуклый функционал, G_R — выпукло, замкнуто и ограничено, F_R — выпукло, слабо замкнуто и ограничено, G и F – подмножества гильбертовых пространств, (см. соответствующие теоремы и леммы в [15]), то $\mu(R)$ — непрерывная функция при $R \in [\bar{R}, \bar{\bar{R}}]$.

$J(\varphi)$ достигает своей точной нижней грани на G_R в единственной точке, такой что $\|\varphi_R^*\| = R$. Через R мы обозначили расстояние от начала координат до точки в пространстве сеточных фундаментальных решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Если через $J(\varphi)$ обозначить функционал качества (11), отражающий близость сеточного фундаментального решения к классическому, континуальному, то можно сделать вывод о том, что справедлива

Теорема 4. *На семействе расширяющихся компактов* K_{R_n}, $R_n \to \infty$, *существует единственное решение задачи* (11), (12) *как в случае сеточного фундаментального решения уравнения теплопроводности, так и в случае волнового уравнения.*

Устойчивое приближенное решение задачи (11), (12) может быть получено только при помощи регуляризирующих алгоритмов, обеспечивающих высокую точность искомых сеточных фундаментальных решений уравнения теплопроводности и волнового уравнения [16]. Отметим также, что к условиям (11), (12) в рамках теории дискретного потенциала следует добавить требование достижения минимума функционала (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В статье исследованы условия однозначной разрешимости системы линейных алгебраических уравнений, к которой редуцируется проблема поиска сеточных аналогов фундаментальных решений уравнения теплопроводности и волнового уравнения. Рассмотрены различные варианты представления дискретных фундаментальных решений в некоторых ограниченных областях четырехмерного сеточного пространства.

2. В работе описывается алгоритм построения сеточных фундаментальных решений на семействе расширяющихся компактов в сеточном четырехмерном пространстве, который позволяет находить значения дискретных теплового и волнового потенциалов и их производных в любой точке неограниченного сеточного пространства, что важно для приложений в области математической физики и математической геофизики [16].

Авторы выражают глубокую благодарность А.С. Леонову за полезные замечания и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страхов В.Н., Степанова И.Э., Гричук Л.В.* Теория дискретного гравитационного потенциала и ее использование в гравиметрии // В сб.: “Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей”. Труды междунар. конференции. Воронеж: Воронежский государственный университет. 1996. С. 49–71.

2. *Stepanova I.E., Kolotov I.I.* Solution of the interpretation tomography problem in geophysics under the linear integral representation method and theories of discrete gravity and magnetic potentials // Doklady. Earth Sciences. 2024. № 1. P. 1–9.

3. *Арсанукаев З.З.* Вычисление пространственных элементов аномальных полей с использованием методов теории дискретных гравитационных полей// Физ. Земли. 2004. № 11. С. 47–69.

4. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (локальный вариант) // Физ. Земли. 2002. № 2. С. 3–19.

5. *Страхов В.Н., Степанова И.Э.* Метод S-аппроксимаций и его использование при решении задач гравиметрии (региональный вариант) // Физ. Земли. 2002. № 7. С. 3–12.

6. *Stepanova I.E., Kerimov I.A., Yagola A.G.* Approximation approach in various modifications of the method of linear integral representations // Izvestiya. Physics of the Solid Earth. 2019. Vol. 55. No. 2. P. 218–231.

7. *Раевский Д.Н., Степанова И.Э.* О решении обратных задач гравиметрии с помощью модифицированного метода S-аппроксимаций // Физ. Земли. 2015. № 2. С. 44–54. гравиметрической и магнитометрической съемок // Физ. Земли. 2009. № 4. С. 17–30.

8. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

9. *Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А.* Курс вариационного исчисления. М.Л.: Гостоптехиздат. 1950. 296 с.

10. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Shchepetilov A.V., Yagola A.G.* On the uniqueness of solution to systems of linear algebraic equations to which the inverse problems of gravimetry and magnetometry are reduced: a regional variant // Comput. Math. and Math. Phys. 2023. V. 63. № 9. P. 1588–1599.

11. *Kolotov I.I., Lukyanenko D.V., Stepanova I.E., Yagola A.G.* On the uniqueness of solutions to systems of linear algebraic equations resulting from the reduction of linear inverse problems of gravimetry and magnetometry: a local case // Comput. Math. and Math. Phys. 2023. V. 63. № 8. P. 1452–1465.

12. *Леонов А.С.* Метод минимальной псевдообратной матрицы// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 8. С. 1123–1138.

13. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука,1978. 592 с.

14. *Самарский А.А., Гулин А. В.* Численные методы. М.: Наука, 1989. 431 с.

15. *Гавурин М.К., Фабровская Ю.Б.* Об одном итеративном методе разыскания суммы квадратов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966. Т. 6. № 6. С. 1094–1097.

16. *Leonov A.S.* Extraoptimal A Posteriori Estimates of the Solution Accuracy in the Ill-Posed Problems of the Continuation of Potential Geophysical Fields, Izvestiya, Physics of the Solid Earth. 2011. Vol. 47. No. 6. P. 531–540.

ON THE UNAMBIGUITY OF DETERMINING THE GRID FUNDAMENTAL SOLUTION OF THE THERMAL CONDUCTIVITY EQUATION AND THE WAVE EQUATION WITHIN THE FRAMEWORK OF THE THEORY OF DISCRETE POTENTIAL

I. E. Stepanova[a,]*, I. I. Kolotov[b], A. V. Shchepetilov[b], A. G. Yagola [b], A. N. Levashov [b]

[a] 123242 Moscow, B.Gruzinskaya str.,10, bldg. 1, O.Yu. Schmidt Institute of Earth Physics of the Russian Academy of Sciences, Russia
[b] 119992 Moscow, Leninskie Gory, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia
**e-mail: tet@ifz.ru*

Received: 10.07.2024
Revised: 10.07.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. The paper considers the problem of unambiguously determining the fundamental solution of the grid analogue of the wave equation, as well as the equation of thermal conductivity within the framework of the theory of discrete potential. Grid-based fundamental solutions of finite-difference analogues of equations in partial derivatives allow solving direct and inverse problems of restoring wave and heat sources in various media from heterogeneous and different-flow information about the corresponding physical fields. The article considers statements with Dirichlet conditions in three-dimensional and four-dimensional Cartesian spaces.

Keywords: unambiguous definition, fundamental solution, discrete thermal potential, discrete wave potential.