ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2355–2370

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ПОСТРОЕНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1)]

Е. П. Кубышкин[1,*]

[1] *150000 Ярославль, ул. Советская, 14, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, матем. ф-т, Россия*
**e-mail: kubysh.e@yandex.ru*

Поступила в редакцию 28.11.2023 г.
Переработанный вариант 29.07.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

Построен метод усреднения для двухкомпонентных распределенных кинетических систем с малой диффузией в ограниченной одномерной области с условиями непроницаемости на границе. Построены преобразования рассматриваемой распределенной системы, позволяющие выделить одну “быструю” и счетное число “медленных” переменных. Доказаны теоремы о соответствии стационарных и периодических решений, а также инвариантных торов усредненных уравнений “медленных” переменных соответственно пространственно неоднородным периодическим решениям и инвариантным торам исходных уравнений аналогичного характера устойчивости. Предложены алгоритмы построения периодических решений (циклов) и инвариантных торов исходных уравнений в виде разложения по степеням малого параметра, обеспечивающих построение асимптотических формул указанных автоколебательных объектов. Сформулированы условия сходимости соответствующих разложений. Библ. 20.

Ключевые слова: метод усреднения, распределенные кинетические системы, системы уравнений реакция–диффузия, пространственно неоднородные решения, теория бифуркаций.

DOI: 10.31857/S0044466924120094, **EDN**: KBTCFG

1. ВВЕДЕНИЕ

Распределенные кинетические системы (системы уравнений реакция–диффузия) находят широкое применение в химической кинетике, синергетике, астрофизике, биологии, нелинейной оптике, теории фазовых переходов и многих других областях естествознания. Исследованию таких систем посвящена обширная литература. Основной вопрос, который интересует авторов – это изучение условий и механизмов возникновения пространственно неоднородных решений и построение для них аналитических и асимптотических формул. Интересны как стационарные решения, особенно имеющие узкие области быстрого изменения и получившие название контрастные структуры, так и изменяющиеся по времени – движущиеся фронты, периодические, квазипериодические и хаотические решения. Важным вопросом является задача исследования устойчивости таких решений. Отметим кратко некоторые работы. Теории контрастных структур посвящены работы [1]–[4], в которых сформулированы условия существования контрастных структур и разработана совокупность методов асимптотического построения таких решений для различных классов обыкновенных уравнений и уравнений в частных производных. В работах имеется обширная библиография по указанной проблематике. Начало исследованию условий и механизмов возникновения автоколебательных пространственно неоднородных решений в системах с малой диффузией было положено в работе [5]. В дальнейшем идеи этой работы получили развитие в работах [6]–[10]. Основная идея этих работ связана с построением специальных начально-краевых задач для уравнений в частных производных, не содержащих малых параметров, автоколебательные решения которых в определенном смысле описывают автоколебательные решения исходной задачи. Такие начально-краевые задачи получили название квазинормальных форм, а соответствующий подход – метод квазинормальных форм. Этот подход подробно изложен в монографии [11]. Иной подход к построению пространственно неоднородных

[1)]Работа выполнена в рамках реализации программы развития регионального научно-образовательного математического центра (ЯрГУ) при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (Соглашение о предоставлении из федерального бюджета субсидии № 075-02-2024-1442).

периодических решений предложен в работе [12]. Мощным аппаратом исследования колебательных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений является метод усреднения Крылова–Боголюбова (см. [13]). Этот метод получил развитие для других классов уравнений, в том числе, и для некоторых классов уравнений в частных производных. Метод позволяет строить колебательные решения, бифурцирующие из стационарных решений при изменении параметров уравнений. При этом удается в явном виде получать аналитические или асимптотические формулы решений. Основная сложность этого метода – выделение "быстрых" и "медленных" переменных. Это часто связано с физической постановкой задачи, математической моделью которой являются исследуемые уравнения. Другой сложностью метода усреднения является доказательство теорем соответствия между стационарными решениями усредненных уравнений медленных переменных и исследуемых уравнений. Эта проблема для обыкновенных дифференциальных уравнений в полном объеме была решена в монографии [14].

В настоящей работе построен метод усреднения для двухкомпонентных распределенных кинетических систем с малой диффузией в ограниченной одномерной области с условиями непроницаемости на границе. Построены преобразования, позволяющие выделить одну "быструю" и счетное число "медленных" переменных. Доказаны теоремы о соответствии стационарных и периодических решений, а также инвариантных торов усредненных уравнений "медленных" переменных соответственно пространственно неоднородным периодическим решениям и инвариантным торам исходных уравнений аналогичного характера устойчивости. Предложены алгоритмы построения периодических решений (циклов) и инвариантных торов исходных уравнений в виде разложения по степеням малого параметра, обеспечивающих построение асимптотических формул указанных автоколебательных объектов. Сформулированы условия сходимости соответствующих разложений. Предложенный метод позволяет исследовать автоколебательные решения, бифуцирующие при изменении параметров из однородных состояний равновесия распределенных кинетических систем с малой диффузией. Используемые при построении метода усреднения идеи были успешно апробированы при исследовании автоколебательных решений дифференциально-разностных уравнений с малым параметром при производной (см. [15]–[17]).

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается начально-краевая задача

$$u_t = \varepsilon D u_{xx} + A(\varepsilon)u + F(u;\varepsilon), \tag{2.1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, \;\; u(x,0) = u_0(x), \tag{2.2}$$

где $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)),\; 0 \leqslant x \leqslant 0,\; t \geqslant 0,\; 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ – малый параметр, $D = \operatorname{diag}\{d_1, d_2\}$, матрица второго порядка $A(\varepsilon)$ гладко зависит от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и имеет собственные значения вида

$$\lambda(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) \pm i\sigma(\varepsilon),\; i = \sqrt{-1},\; \gamma(0) = 0,\; \gamma'(0) = \gamma_1 > 0,\; \sigma(0) = \sigma_0 > 0, \tag{2.3}$$

нелинейная вектор-функция $F(u;\varepsilon), ||F(u;\varepsilon)|| = o(||u||)$ гладко зависит от u и ε при $||u|| < R_0$, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (принадлежит классу $C^k, k \geqslant 5$). Здесь $||.||$ норма в $\mathbb{R}^2$.

В дальнейшем $H = L_2(0,1)$ – пространство комплекснозначных определенных на $[0,1]$ функций $u(x)$, для которых $||u(x)||_H = (u(x),u(x))_H^{1/2} < \infty$, $(u(x),v(x))_H = \int_0^1 u(x)\bar{v}(x)dx$, H^2 – пространство определенных на $[0,1]$ комплекснозначных функций $u(x)$, полученное замыканием множества функций $\{u(x) : u(x) \in C^2(0,1)\bigcap C^1[0,1], u'(0) = u'(1) = 0)\}$ в норме $||u(x)||_{H^2} = (u(x),u(x))_{H^2}^{1/2} < \infty$, $(u(x),v(x))_{H^2} = (u(x),v(x))_H + (u''(x),v''(x))_H$, где $C^1[0,1]$ и $C^2(0,1)$ – пространства комплекснозначных непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ и дважды непрерывно дифференцируемых на $(0,1)$ функций, нормы в которых определены стандартным способом.

Начально-краевая задача (2.1), (2.2) для любой вещественнозначной начальной функции $u_0(x) = (u_{01}(x), u_{02}(x)) \in S(R_0) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) :\; u_1(x), u_2(x) \in H^2, (||u_1(x)||_{H^2}^2 + ||u_2(x)||_{H^2}^2)^{1/2} < R_0\}$ при $t > 0$ однозначно разрешима, пока $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t)) \in S(R_0)$. При этом решение $u(x,t)$ непрерывно по совокупности переменных, дифференцируемо по t и при каждом t $u_1(x,t), u_2(x,t) \in H^2$ (см., например, [18]).

Ниже исследуются условия бифуркации из нулевого состояния равновесия начально-краевой задачи (2.1), (2.2) при изменении ее параметров пространственно-неоднородных периодических решений и инвариантных торов, принадлежащих $S(R_0)$, исследуется их устойчивость. Предложена методика построения асимптотических и аналитических формул для указанных автоколебательных решений.

3. НОРМАЛИЗУЮЩЕЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (2.1), (2.2)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{v} = A(\varepsilon)v + F(v;\varepsilon) \tag{3.1}$$

относительно вектор-функции $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, в которой матрица $A(\varepsilon)$ и нелинейная вектор-функция $F(v;\varepsilon)$ определены в (2.1). Считая $||v(t)|| < R_0$, выполним в (3.1) нормализующую замену

$$v(t) = v(w,\bar{w};\varepsilon) = e(\varepsilon)w + \bar{e}(\varepsilon)\bar{w} + v_{20}(\varepsilon)w^2 + v_{11}(\varepsilon)w\bar{w} + v_{02}(\varepsilon)\bar{w}^2 +$$

$$+ v_{30}(\varepsilon)w^3 + v_{21}(\varepsilon)w^2\bar{w} + v_{21}(\varepsilon)w\bar{w}^2 + v_{03}(\varepsilon)\bar{w}^3,\ \ v_{pq}(\varepsilon) = \bar{v}_{qp}(\varepsilon), \tag{3.2}$$

приводящую (3.1) к системе дифференциальных уравнений

$$\dot{w} = \lambda(\varepsilon)w + a(\varepsilon)w^2\bar{w} + W(w,\bar{w};\varepsilon) \equiv W^*(w,\bar{w};\varepsilon),\ |W(w,\bar{w};\varepsilon)| = o(|w|^3), \tag{3.3}$$

относительно комплекснозначных функций $w(t)$ и $\bar{w}(t)$. Уравнение для $\bar{w}(t)$ является комплексно сопряженным с (3.3). В (3.2) $A(\varepsilon)e(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)e(\varepsilon), ||e(\varepsilon)|| = 1$, гладко зависящие от ε двумерные векторы $v_{pq}(\varepsilon)$, а также $a(\varepsilon)$ и функция $W(w,\bar{w};\varepsilon)$ подлежат определению. Здесь и в дальнейшем $||.||$ – норма в $\mathbb{C}^2$. Условие принадлежности траекторий (3.3) в силу замены (3.2) системе уравнений (3.1) определяет тождество

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v(w,\bar{w};\varepsilon)}{\partial w}W^*(w,\bar{w};\varepsilon) + \frac{\partial v(w,\bar{w};\varepsilon)}{\partial \bar{w}}\bar{W}^*(w,\bar{w};\varepsilon) \equiv A(\varepsilon)v(w,\bar{w};\varepsilon) + F(v(w,\bar{w};\varepsilon);\varepsilon), \tag{3.4}$$

которое должно выполнятся при всех w и $\bar{w}$. При первых степенях w и $\bar{w}$ тождество (3.4) выполняется в силу выбора $e(\varepsilon)$ и $\bar{e}(\varepsilon)$. Записав $F(v;\varepsilon)$ в окрестности $v = 0$ в виде $F((v;\varepsilon) = F_2(v;\varepsilon) + F_3(v;\varepsilon) + F_*(v;\varepsilon)$, где $F_2(.), F_3(.), F_*(.)$ – соответственно квадратичные, кубические слагаемые и остаточный в форме Лагранжа, приравняем в тождестве (3.4) слева и справа коэффициенты при одинаковых квадратичных и кубических степенях w и $\bar{w}$. В результате получим рекуррентную последовательность линейных неоднородных алгебраических уравнений для определения $v_{pq}(\varepsilon)$, которые однозначно разрешимы всегда, за исключением уравнения для определения $v_{21}(\varepsilon)$ ($v_{12}(\varepsilon) = \bar{v}_{21}(\varepsilon)$), которое имеет вид

$$B(\varepsilon)v_{21}(\varepsilon) \equiv ((2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))I - A(\varepsilon))v_{21}(\varepsilon) = -e(\varepsilon)a(\varepsilon) + f_{21}(\varepsilon) = f^*_{21}(\varepsilon), \tag{3.5}$$

где I – единичная матрица, $f_{21}(\varepsilon)$ – известный вектор. Матрица $B(0)$, как легко заметить, имеет однократное нулевое собственное значение. Обозначим через $\gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_2(\varepsilon)$ $(\gamma_1(0) = 0, \gamma_2(0) = -i2\sigma_0)$ собственные значения матрицы $B(\varepsilon)$, а соответствующие собственные векторы – $e_1(\varepsilon)$ и $e_2(\varepsilon)$ $(||e_j(\varepsilon)|| = 1, j = 1,2)$. Обозначим $h(\varepsilon)$ и $h_1(\varepsilon)$, $h_2(\varepsilon)$ соответственно собственные векторы сопряженных матриц

$$A^*(\varepsilon)h(\varepsilon) = \bar{\lambda}(\varepsilon)h(\varepsilon)\ (e(\varepsilon),h(\varepsilon)) = 1, (\bar{e}(\varepsilon),h(\varepsilon)) = 0, \tag{3.6}$$

$$B^*(\varepsilon)h_j(\varepsilon) = \bar{\gamma}_j(\varepsilon)h_j(\varepsilon)\ (e_j(\varepsilon),h_j(\varepsilon)) = 1\ (j = 1,2),\ \ (e_1(\varepsilon),h_2(\varepsilon)) = 0, (e_2(\varepsilon),h_1(\varepsilon)) = 0.$$

Здесь (.,.) скалярное произведение в $\mathbb{C}^2$. Отметим, что $e(0) = e_1(0), h(0) = h_1(0)$. С учетом этого из условия разрешимости системы уравнений (3.5)

$$(f^*_{21}(\varepsilon),h_1(\varepsilon)) = (-e(\varepsilon)a(\varepsilon) + f_{21}(\varepsilon),h_1(\varepsilon)) = 0$$

однозначно определяется $a(\varepsilon)$, а из (3.5) – единственное решение, которые соответственно имеют вид

$$a(\varepsilon) = (f_{21}(\varepsilon),h_1(\varepsilon))/((e(\varepsilon),h_1(\varepsilon)),\ v_{21}(\varepsilon) = (f^*_{21}(\varepsilon),h_2(\varepsilon))/\gamma_2(\varepsilon)e_2(\varepsilon).$$

Обозначим $G(w,\bar{w};\varepsilon)$ совокупность слагаемых в правой части тождества (3.4), имеющих порядок малости по $w,\bar{w}$ (при $|w| \to 0$) выше третьего. Представим

$$G(w,\bar{w};\varepsilon) = W(w,\bar{w};\varepsilon)e(\varepsilon) + \bar{W}(w,\bar{w};\varepsilon)\bar{e}(\varepsilon),\ W(w,\bar{w};\varepsilon) = (G(w,\bar{w};\varepsilon),h(\varepsilon)).$$

Таким образом, нелинейное преобразование (3.2) и система дифференциальных уравнений (3.3) определяются однозначно.

Считая теперь преобразование (3.2) построенным, положим в нем $w = w(x,t) \in H^2$, $||w(x,t)||_{H^2} < R_0$ при каждом $t \geqslant 0$ и непрерывно диференцируемой по t в норме H^2, выполним в уравнении (2.1) замену переменных $u(x,t) = v(w(x,t), \bar{w}(x,t); \varepsilon)$. В результате получим тождество

$$u_t = \frac{\partial v(w,\bar{w};\varepsilon)}{\partial w} W^{**}(w,\bar{w},w_x,\bar{w}_x,w_{xx},\bar{w}_{xx};\varepsilon) + \frac{\partial v(w,\bar{w};\varepsilon)}{\partial \bar{w}} \bar{W}^{**}(w,\bar{w},w_x,\bar{w}_x,w_{xx},\bar{w}_{xx};\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv A(\varepsilon)v(w,\bar{w};\varepsilon) + F(v(w,\bar{w};\varepsilon);\varepsilon)$$

относительно $w(x,t)$ и $\bar{w}(x,t)$ при $||w(x,t)||_{H^2} < R_0$, если $w(x,t), \bar{w}(x,t)$ являются решениями системы уравнений

$$w_t = \varepsilon(D(v_w(w,\bar{w};\varepsilon)w_{xx} + v_{\bar{w}}(w,\bar{w};\varepsilon)\bar{w}_{xx} + v_{ww}(w,\bar{w};\varepsilon)w_x^2 + 2v_{w\bar{w}}(w,\bar{w};\varepsilon)w_x\bar{w}_x +$$
$$+ v_{\bar{w}\bar{w}}(w,\bar{w};\varepsilon)\bar{w}_x^2), h(\varepsilon)) + \lambda(\varepsilon)w + a(\varepsilon)w^2\bar{w} + W(w,\bar{w};\varepsilon) \equiv W^{**}(w,\bar{w},w_x,\bar{w}_x,w_{xx},\bar{w}_{xx};\varepsilon), \tag{3.7}$$

в которой уравнение для $\bar{w}(x,t)$ будет комплексно сопряженным с (3.7). Фазовым пространством (3.7) является пространство $H \times H$, областью определения правой части – пространство $H^2 \times H^2$.

4. АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (2.1), (2.2)

Изучение возможных бифуркаций периодических решений и инвариантных торов из нулевого решения начально-краевой задачи (2.1), (2.2), соглано результатам предыдущего раздела, достаточно рассмотреть для системы уравнений (3.7). Нормируем в (3.7) $w(x,t) \to \varepsilon^{1/2}w(x,t)$ и выделим в явном виде слагаемые, перед которыми стоит множитель нулевого и первого порядков по ε, объединив все остальные в единую функцию. В результате будем иметь квазилинейное операторное уравнение

$$w_t = \lambda(\varepsilon)w + \varepsilon((De(\varepsilon),h(\varepsilon))w_{xx} + (D\bar{e}(\varepsilon),h(\varepsilon))\bar{w}_{xx} + a(\varepsilon)w^2\bar{w}) +$$
$$+\varepsilon^{3/2}((D(v_0(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})w_{xx} + \bar{v}_0(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})\bar{w}_{xx} + v_1(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})w_x^2 + v_{11}(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})w_x\bar{w}_x +$$
$$+ \bar{v}_1(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})\bar{w}_x^2), h(\varepsilon)) + W(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})) \;\; (W(0,0;\varepsilon^{1/2}) \equiv 0) \tag{4.1}$$

в пространстве $H \times H$ для определения $w(x,t)$ с областью определения правой части $H^2 \times H^2$. Функции $v_*(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})$, $W(w,\bar{w};\varepsilon^{1/2})$ легко строятся по (3.2) и (3.7).

Функции $g_0(x) = 1, g_k(x) = 2^{1/2}\cos(\pi kx), k = 1,2,\dots$, образуют ортонормированный базис в H и ортогональный в H^2. Введем пространства l_2 и $l_2^p, p = 2,4,\dots$, последовательностей вида $z = (z_0, z_1, \dots),\ z_n \in \mathbb{C}$, удовлетворяющих соответственно условиям $||z||_{l_2} = (z,z)_{l_2}^{1/2} < \infty$, $(z_1,z_2)_{l_2} = \sum_{k=0}^{\infty} z_{1k}\bar{z}_{2k}$ и $||z||_{l_2^p} = ((z,z)_{l_2} + \sum_{k=1}^{\infty} k^{2p}|z_k|^2)^{1/2} < \infty$. Если $||z||_{l_2^p} < \infty$ при всех $p = 1,2,\dots$, соответствующее пространство обозначим l_2^∞. Обозначим через $s(r_0) = \{z \in l_2 : ||z||_{l_2} < r_0\}$, $s_1(r_0) = \{z \in l_2^2 : ||z||_{l_2^2} < r_0\}$. Представим $w(x,t) \in H^2$ в виде:

$$w(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} z_k(t)g_k(x), \;\; z(t) = (z_0(t), z_1(t), \dots) \in l_2^2, \tag{4.2}$$

подставим в (4.1) и спроектируем на $g_k(x), k = 0,1,\dots$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в l_2

$$\dot{z}_k = \lambda(\varepsilon)z_k - \varepsilon(\pi^2k^2((De(\varepsilon),h(\varepsilon))z_k + (D\bar{e}(\varepsilon),h(\varepsilon))\bar{z}_k) - a(\varepsilon)\sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_k} \alpha_{k_1k_2k_3}z_{k_1}z_{k_2}\bar{z}_{k_3}) +$$
$$+ \varepsilon^{3/2}Z_j(z,\bar{z};\varepsilon^{1/2}) \; (z_{-k_j} = \bar{z}_{k_j}, Z_j(0,0;\varepsilon^{1/2}) \equiv 0), \tag{4.3}$$

где $\Omega_k = \{(k_1,k_2,k_3) : k_j \geqslant 0, j = 1,2,3, \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3 = \pm k\}$; $\alpha_{k_1k_2k_3} = 1$, если $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, либо один $k_j > 0$, $\alpha_{k_1k_2k_3} = 2^{-1/2}$, если один $k_j = 0$, $\alpha_{k_1k_2k_3} = 2^{-1}$, если $k_1,k_2,k_3 > 0$; $Z(z,\bar{z};\varepsilon^{1/2}) = (Z_0(z,\bar{z};\varepsilon^{1/2}), Z_1(z,\bar{z};\varepsilon^{1/2}), \dots)$ нелинейный оператор, действующий из $s_1(r_0) \times s_1(r_0) \times [0, \varepsilon_0^{1/2}]$ в $s(r_0)$ и гладко зависящий от своих переменных.

Представим

$$(De(\varepsilon),h(\varepsilon)) = \alpha_1(\varepsilon) + i\beta_1(\varepsilon), (D\bar{e}(\varepsilon),h(\varepsilon)) = \alpha_2(\varepsilon) + i\beta_2(\varepsilon), \gamma(\varepsilon) = \varepsilon\gamma_1(\varepsilon), \sigma(\varepsilon) = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1(\varepsilon). \tag{4.4}$$

При этом

$$\alpha_1(0) + i\beta_1(0) = \frac{d_1+d_2}{2} + i\frac{(d_2-d_1)a_{11}(0)}{2\sigma_0},\ \alpha_2(0) + i\beta_2(0), = \frac{d_1-d_2}{2} + i\frac{(d_2-d_1)a_{11}(0)}{2\sigma_0},$$

в чем несложно убедиться непосредственно ($a_{11}(0)$ элемент матрицы $A(0)$). Введем в рассмотрение полярные координаты, положив $z_k = \rho_k e^{i\tau_k}$ $(\rho_k \geqslant 0, -\infty < \tau_k < \infty, \rho = (\rho_0, \rho_1, \dots), \rho \in l_2^2, \tau = (\tau_0, \tau_1, \dots)$. Система уравнений (4.3) в силу структуры правой части позволяет ввести одну “быструю” переменную и счетное число “медленных” переменных. Выберем в качестве “быстрой” переменной τ_0, а в качестве “медленных” переменных $\rho_0, q_k = z_k e^{-i\tau_0} = \rho_k e^{i(\tau_k - \tau_0)} = \rho_k e^{i\theta_k}, k = 1, 2, \dots$. Обозначим $q = (q_0, q_1, \dots), q_0 = \rho_0$. Из первого уравнения (4.3) выразим

$$\dot{\tau}_0 = \sigma(\varepsilon) - (\varepsilon \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_0} \alpha_{k_1k_2k_3} i(a(\varepsilon)q_{k_1}q_{k_2}\bar{q}_{k_3} - \bar{a}(\varepsilon)\bar{q}_{k_1}\bar{q}_{k_2}q_{k_3})/2+$$

$$+ \varepsilon^{3/2} i(Z_0(e^{i\tau_0}q, e^{-i\tau_0}\bar{q}; \varepsilon^{1/2})e^{-i\tau_0} - \bar{Z}_0(e^{-i\tau_0}\bar{q}, e^{i\tau_0}q; \varepsilon^{1/2})e^{i\tau_0})/2)/q_0, \tag{4.5}$$

$$\dot{q}_0 = \varepsilon(\gamma(\varepsilon)q_0 + \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_0} \alpha_{k_1k_2k_3}(a(\varepsilon)q_{k_1}q_{k_2}\bar{q}_{k_3} + \bar{a}(\varepsilon)\bar{q}_{k_1}\bar{q}_{k_2}q_{k_3})/2)+$$

$$+ \varepsilon^{3/2}(Z_0(e^{i\tau_0}q, e^{-i\tau_0}\bar{q}; \varepsilon^{1/2})e^{-i\tau_0} + \bar{Z}_0(e^{-i\tau_0}\bar{q}, e^{i\tau_0}q; \varepsilon^{1/2})e^{i\tau_0})/2, \tag{4.6}$$

$$\dot{q}_k = \varepsilon(\gamma(\varepsilon)q_k - \pi^2k^2((\alpha_1(\varepsilon) + i\beta_1(\varepsilon))q_k + (\alpha_2(\varepsilon) + i\beta_2(\varepsilon))e^{-i2\tau_0}\bar{q}_k)+$$

$$+a(\varepsilon) \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_k} \alpha_{k_1k_2k_3}q_{k_1}q_{k_2}\bar{q}_{k_3} - q_k/q_0 \sum_{(k_1,k_2,k_3)\in\Omega_0} \alpha_{k_1k_2k_3}(a(\varepsilon)q_{k_1}q_{k_2}\bar{q}_{k_3} - \bar{a}(\varepsilon)\bar{q}_{k_1}\bar{q}_{k_2}q_{k_3})/2)+$$

$$+ \varepsilon^{3/2}(Z_k(e^{i\tau_0}q, e^{-i\tau_0}\bar{q}; \varepsilon^{1/2})e^{-i\tau_0} - q_k/q_0(Z_0(e^{i\tau_0}q, e^{-i\tau_0}\bar{q}; \varepsilon^{1/2})e^{-i\tau_0} - \bar{Z}_0(e^{-i\tau_0}\bar{q}, e^{i\tau_0}q; \varepsilon^{1/2})e^{i\tau_0})/2), \tag{4.7}$$

$k = 1, 2, \dots$. Правые части уравнений (4.6), (4.7) пропорциональны ε, т.е. это уравнения “медленных” переменных. Отметим также, что переменная q_0 всегда положительна, она может быть равна нулю лишь при условии, что $q_k = 0, k = 1, 2, \dots$.

Перейдем в системе уравнений (4.6)-(4.7) к “новому времени” $\tau = \tau_0$ согласно (4.5) и запишем ее в операторной форме в виде

$$\frac{d}{d\tau}q = \varepsilon Q(\tau, q; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon Q^\circ(\tau, q; \varepsilon) + \varepsilon^{3/2}Q^*(\tau, q; \varepsilon^{1/2}), \tag{4.8}$$

где гладко зависящие от своих переменных операторы $Q^\circ(.) = (Q_0^\circ(.), Q_1^\circ(.), \dots)$ и $Q^*(.) = (Q_0^*(.), Q_1^*(.), Q_2^*(.), \dots)$ 2π-периодические по τ, действуют из $s_1(r_0) \in s(r_0)$ и определены правыми частями (4.6), (4.7). При этом первый определяется слагаемыми, стоящими в скобках при ε, деленными согласно (4.5) на $\sigma(\varepsilon)$, а второй содержит все остальные слагаемые. Отметим, что множество $q^\circ = (q_0, 0, 0, \dots), q_0 > 0$, инвариантно для решений (4.8) и для всех $k > 0$ $Q_k^\circ(\tau, q^\circ; \varepsilon) \equiv Q_k^*(\tau, q^\circ; \varepsilon) \equiv 0$. Поведение решений на q° определяется уравнением

$$\dot{q}_0 = \varepsilon(\gamma(\varepsilon) + Re\, a(\varepsilon)q_0^2 + \varepsilon^{1/2}R^*(q_0; \varepsilon^{1/2}))q_0/\sigma(\varepsilon) \equiv \varepsilon Q(\tau, q^\circ; \varepsilon^{1/2})\ (R^*(q_0; \varepsilon^{1/2}) = o(q_0^2)).$$

Представим

$$Q(\tau, q; \varepsilon^{1/2}) = Q_0(q; \varepsilon^{1/2}) + Q_1(\tau, q; \varepsilon^{1/2}),\ Q_0(q; \varepsilon^{1/2}) = M(Q(\tau, q; \varepsilon^{1/2})) = (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} Q(\tau, q; \varepsilon^{1/2})d\tau \tag{4.9}$$

и рассмотрим систему “усредненных” уравнений

$$\frac{dq}{d\tau} = \varepsilon Q_0(q; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon Q_0^\circ(q; \varepsilon) + \varepsilon^{3/2}Q_0^*(q; \varepsilon^{1/2}). \tag{4.10}$$

Пусть $q_*(\varepsilon^{1/2}) = q_{*0} + \varepsilon^{1/2}q_{*1}(\varepsilon^{1/2})$ – решение следующего операторного уравнения в l_2:

$$Q_0(q; \varepsilon^{1/2}) = Q_0^\circ(q; \varepsilon) + \varepsilon^{1/2}Q_0^*(q; \varepsilon^{1/2}) = 0, \tag{4.11}$$

которое согласно структуре оператора $Q_0(q; \varepsilon^{1/2})$, определяемой (4.7), принадлежит l_2^4. Представим $Q_0(q; \varepsilon^{1/2})$ в окрестности точки $q_*(\varepsilon^{1/2}) \in l_2^2$ рядом Тейлора (см. [19])

$$Q_0(q_*(\varepsilon^{1/2}) + q; \varepsilon^{1/2}) = L(\varepsilon^{1/2})q + Q_{02}(q; \varepsilon^{1/2})\ (||Q_{02}(q; \varepsilon^{1/2})||_{l_2} = O(||q||_{l_2^2})^2), \tag{4.12}$$

где линейный оператор $L(\varepsilon^{1/2}) : l_2^2 \to l_2$ может быть определен через бесконечную матрицу

$$L(\varepsilon^{1/2}) = \{\frac{\partial Q_{0k}(q; \varepsilon^{1/2})}{\partial q_j}\}\ (k, j = 0, 1, \dots), \tag{4.13}$$

вычисленную в точке $q = q_*(\varepsilon^{1/2})$.

Пусть $\lambda_j(\varepsilon^{1/2})$ $(L(\varepsilon^{1/2})p_k(\varepsilon^{1/2}) = \lambda_j(\varepsilon^{1/2})p_k(\varepsilon^{1/2}))$ – собственные значения линейной части оператора (4.12). Оператор $L(\varepsilon^{1/2})$ имеет счетное число собственных значений, которые могут быть пронумерованы в порядке возрастания их модулей, и в любой ограниченной области комплексной плоскости может быть лишь конечное число собственных значений конечной кратности. Предельной может быть лишь точка бесконечность и при этом $\lim_{j\to\infty} \operatorname{Re} \lambda_j(\varepsilon^{1/2}) = -\infty$. Это следует из свойств дифференциального уравнения

$$\frac{dq}{d\tau} = L(\varepsilon^{1/2})q \tag{4.14}$$

в l_2, которое согласно (4.6), (4.7) и (4.13) является абстрактно параболическим (см. [20]).

Предположим, что оператор $L(0)$ имеет $m \geqslant 0$ собственных значений, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, и не имеет собственных значений, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости. В силу сказанного выше, это свойство собственных значений будет выполнено также при малых $\varepsilon^{1/2}$. Покажем, что в этом случае уравнение (4.8) имеет в окрестности состояния равновесия $q_*(\varepsilon^{1/2})$ 2π-периодическое решение, характер устойчивости которого определяется устойчивостью состояния равновесия.

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C(2\pi), C^1(2\pi), C^2(2\pi)$ соответственно непрерывных, непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых 2π-периодических функций $f(\tau)(-\infty < < \tau < \infty)$ со значениями в l_2, определив нормы $||f||_{C(2\pi)} = \sup_\tau ||f(\tau)||_{l_2}$, $||f||_{C^1(2\pi)} = ||f||_{C(2\pi)} + ||f'||_{C(2\pi)}$, $||f||_{C^2(2\pi)} = ||f||_{C(2\pi)} + ||f''||_{C(2\pi)}$. Через $C^\circ(2\pi), C^{\circ 1}(2\pi), C^{\circ 2}(2\pi)$ соответственно обозначим подпространства $C(2\pi), C^1(2\pi), C^2(2\pi)$ функций $f(\tau)$, удовлетворяющих условию $M(f(\tau)) = 0$.

2π-Периодическое решение уравнения (4.8) будем строить в виде

$$q_\circ(\tau, \varepsilon^{1/2}) = q_*(\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon q_1(\tau, \varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^2 q_2(\tau), \tag{4.15}$$

в котором $q_1(\tau, \varepsilon^{1/2})$ – решение уравнения

$$\frac{dq_1}{d\tau} = Q_1(\tau, q_*(\varepsilon^{1/2}); \varepsilon^{1/2}) = Q_1^\circ(\tau, q_*(\varepsilon^{1/2}); \varepsilon) + \varepsilon^{1/2} Q_1^*(\tau, q_*(\varepsilon^{1/2}); \varepsilon^{1/2}),$$

имеющее согласно (4.6)–(4.7) вид

$$q_1(\tau, \varepsilon^{1/2}) = (i\alpha_2(\varepsilon) - \beta_2(\varepsilon))e^{-2i\tau}p(\varepsilon^{1/2})/(2\sigma(\varepsilon)) + \varepsilon^{1/2}p_1^*(\tau; \varepsilon^{1/2}) + c,$$

$$p(\varepsilon^{1/2}) = (p_0(\varepsilon^{1/2}), p_1(\varepsilon^{1/2}), \dots),\ p_k(\varepsilon^{1/2}) = \pi^2 k^2 \bar{q}_{*k}(\varepsilon^{1/2}),$$

где функция $p_1^*(\tau; \varepsilon^{1/2}) \in C^{\circ 2}(2\pi)$ получена интегрированием $Q_1^*(\tau, q_*(\varepsilon^{1/2}); \varepsilon^{1/2})$, $c \in l_2^2$ – произвольный вектор, а функция $q_2(\tau) \in C^2(2\pi)$ подлежит определению.

Подставим (4.15) в уравнение (4.8) и приравняем слагаемые, имеющие порядок по ε второй и выше. В результате с учетом (4.11), (4.12) получим уравнение вида

$$\dot{q}_2(\tau) = L(\varepsilon^{1/2})c + P(\tau, c, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2}), \tag{4.16}$$

где 2π-периодический по τ и гладкий по совокупности переменным нелинейный оператор $P(\tau, c, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2})$ удовлетворяет условию $M(P(\tau, c, 0; 0)) = 0$.

Уравнение

$$\dot{q}_2(\tau) = f(\tau),\ f(\tau) \in C^{\circ 1}(2\pi), q_2(\tau) \in C^{\circ 2}(2\pi) \tag{4.17}$$

имеет единственное решение $q_2(\tau) = Jf(\tau)$, где J – линейный вполне непрерывный оператор. Из нелинейного уравнения в пространстве l_2^2

$$c + L^{-1}(\varepsilon^{1/2})M(P(\tau, c, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2})) = 0$$

с учетом условия $M(P(\tau, c, 0; 0)) = 0$ на основании теоремы о неявной функции в банаховом пространстве (см. [19]) находим решение (оператор-функцию) $c = c(\tau, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2})$, которое подставим в правую часть (4.16). В результате получим операторное уравнение

$$q_2(\tau) = J(L(\varepsilon^{1/2})c(\tau, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2}) + P(\tau, c(\tau, q_2(\tau); \varepsilon^{1/2}), q_2(\tau); \varepsilon^{1/2})) \tag{4.18}$$

в пространстве $C^{\circ 2}(2\pi)$ для определения $q_2(\tau)$. Осталось вновь применить к (4.18) теорему о неявной функции (см. [19]), на основании которой находим $q_2(\tau; \varepsilon^{1/2})$. Подставив теперь $q_2(\tau; \varepsilon^{1/2})$ в (4.15), получим 2π-периодическое решение $q_\circ(\tau; \varepsilon^{1/2})$ уравнения (4.8).

Линеаризуем теперь на $q_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2})$ уравнение (4.8). С учетом вида (4.8) и (4.12) будем иметь линейное уравнение

$$\frac{dq}{d\tau} = \varepsilon(L(\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{1/2}L_1(\tau;\varepsilon^{1/2}))q \tag{4.19}$$

в пространстве l_2, где $L_1(\tau;\varepsilon^{1/2}) : l_2^2 \to l_2$ есть 2π-периодический по τ, гладко зависящий от $\varepsilon^{1/2}$ линейный оператор. В силу сделанных предположений относительно собственных значений оператора $L(\varepsilon^{1/2})$, поведение решений уравнения (4.19) при $t \to \infty$ определяется поведением решений уравнения (4.14). Отсюда фазовое пространство уравнения (4.19) имеет m-мерное подпространство решений, нормы которых неограниченно возрастают при $t \to \infty$. Таким образом, в случае $m = 0$ периодическое решение $q_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2})$ уравнения (4.8) асимптотически орбитально устойчиво.

Подставим $q_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2})$ в (4.5). В результате получим уравнение

$$\dot\tau = \sigma(\varepsilon) + \varepsilon\sigma_1(\varepsilon) + \varepsilon^{3/2}\sigma_*(\tau;\varepsilon^{1/2}), \tag{4.20}$$

для определения $\tau(t)$, в котором $\sigma_1(\varepsilon)$ и $\sigma_*(\tau;\varepsilon^{1/2})$ – гладко зависящие от $\varepsilon^{1/2}$ функции, вторая – 2π-периодическая функция по τ. Общее решение уравнения (4.20) имеет вид

$$\tau(\sigma_\circ(\varepsilon^{1/2})t + c;\varepsilon^{1/2}) = \sigma_\circ(\varepsilon^{1/2})t + c + \varepsilon^{3/2}\tau_*(\sigma_\circ(\varepsilon)t + c;\varepsilon^{1/2}),$$

$$\tau_*(t + 2\pi;\varepsilon^{1/2}) \equiv \tau_*(t;\varepsilon^{1/2}),\ M(\tau_*(t;\varepsilon^{1/2})) = 0,\ \sigma_\circ(\varepsilon^{1/2}) = \sigma(\varepsilon) + \varepsilon\sigma_1(\varepsilon) + O(\varepsilon^{3/2}),$$

c – произвольная постоянная.

Подставим теперь $z_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2}) = q_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2})e^{i\tau}$ (оставив обозначение τ для переменной τ_0) в (4.2), а также полученное $w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2})$ с учетом выполненной нормировки в (3.2). В результате получим периодическое решение уравнения (2.1), представимое в виде

$$u_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2}) = v(\varepsilon^{1/2}w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2}), \varepsilon^{1/2}\bar w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2});\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{1/2}(e(\varepsilon)w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2}) + \bar e(\varepsilon)\bar w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2})) + \varepsilon u_*(x,\tau;\varepsilon^{1/2}), \tag{4.21}$$

в котором $u_*(x,\tau;\varepsilon^{1/2})$ – гладко зависящая от своих переменных и 2π-периодическая функция по τ вектор-функция, $\tau = \tau(\sigma_\circ(\varepsilon^{1/2})t + c;\varepsilon^{1/2})$ – общее решение уравнения (4.20).

Изложенное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система уравнений* (4.10) *имеет состояние равновесия* $q_*(\varepsilon^{1/2})$, *а линейный оператор* $L(0)$, *построенный согласно* (4.13), *на этом решении имеет* $m \geqslant 0$ *собственных значений, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, и не имеет собственных значений, лежащих на ее мнимой оси. Тогда уравнение* (4.8) *имеет* 2π-*периодическое решение* $q_\circ(\tau;\varepsilon^{1/2})$ *вида* (4.15), *принадлежащее окрестности состояния равновесия, устойчивость которого определяется устойчивостью состояния равновесия. Этому периодическому решению в начально-краевой задаче* (2.1), (2.2) *соответствует* $2\pi/\sigma_\circ(\varepsilon^{1/2})$-*периодическое решение вида* (4.21), *устойчивость которого определяется устойчивостью состояния равновесия* $q_*(\varepsilon^{1/2})$. *Это периодическое решение (цикл) имеет в своей окрестности фазового пространства* m-*мерное многообразие решений, нормы которых неограниченно возрастают. В случае* $m = 0$ *периодическое решение* (4.21) *асимптотически орбитально устойчиво.*

Пусть уравнение (4.10) имеет периодическое решение $q_*(\varepsilon\tau;\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon\tau = \omega$, $q_*(\omega;\varepsilon^{1/2}) = q_*(\omega + T;\varepsilon^{1/2})$, которое в силу структуры $Q_0(q;\varepsilon^{1/2})$ принадлежит l_2^4. Представим $Q_0(q;\varepsilon^{1/2})$ в окрестности точки $q_*(\omega,\varepsilon^{1/2})$ рядом Тейлора (см. [19])

$$Q_0(q_*(\omega;\varepsilon^{1/2}) + q;\varepsilon^{1/2}) = L(\omega;\varepsilon^{1/2})q + Q_{02}(\omega,q;\varepsilon^{1/2})\ (||Q_{02}(\omega,q;\varepsilon^{1/2})||_{l_2} = O(||q||_{l_2^2})^2), \tag{4.22}$$

где линейный оператор $L(\omega;\varepsilon^{1/2})$ $(L(\omega;\varepsilon^{1/2}) \equiv L(\omega + T;\varepsilon^{1/2})) : l_2^2 \to l_2$ может быть определен через бесконечную матрицу (4.13), вычисленную в точке $q = q_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$.

Рассмотрим в пространстве l_2 линейное уравнение

$$\frac{dq}{d\omega} = L(\omega;\varepsilon^{1/2})q. \tag{4.23}$$

В силу структуры уравнения (4.8) ((4.5)–(4.7)), уравнение (4.23) является абстрактно параболическим (см. [20]). Обозначим через $U(T;\varepsilon^{1/2}) : l_2^2 \to l_2^2$ оператор монодромии уравнения (4.23), который является вполне непрерывным. Функция $\dot q_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$ является, как следует из (4.13), (4.22), T-периодическим решением (4.23), поэтому одно собственное значение оператора монодромии (мультипликатор) равно единице.

Предположим, что оператор $U(T;0)$ имеет только однократный единичный мультипликатор, модуль которого равен единице. Заметим, что в силу отмеченных свойств уравнения (4.23) число мультипликаторов оператора $U(T;\varepsilon^{1/2})$, модуль которых больше единицы, конечно. Покажем, что в этом случае уравнение (4.8) имеет в окрестности T-периодического решения $q_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$ инвариантный тор $\mathbb{T}^2$, характер устойчивости которого определяется устойчивостью решений уравнения (4.23).

Введем в рассмотрение банаховы пространства $C(2\pi,T), C^1(2\pi,T), C^2(2\pi,T)$ соответственно непрерывных, непрерывно дифференцируемых и дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(\tau,\omega)(-\infty < \tau,\omega < \infty)$ со значениями в l_2, 2π и T-периодических по τ и ω соответственно, определив нормы $||f||_{C(2\pi,T)} = \sup_{\tau,\omega}||f(\tau,\omega)||_{l_2}$, $||f||_{C^1(2\pi,T)} = ||f||_{C(2\pi,T)} + ||f_\tau||_{C(2\pi,T)} + ||f_\omega||_{C(2\pi,T)}$, $||f||_{C^2(2\pi,T)} = ||f||_{C(2\pi,T)} + ||f_{\tau\tau}||_{C(2\pi,T)} + ||f_{\tau\omega}||_{C(2\pi,T)} + ||f_{\omega\omega}||_{C(2\pi,T)}$. Через $C^\circ(2\pi,T), C^{\circ 1}(2\pi,T), C^{\circ 2}(2\pi,T)$ соответственно обозначим подпространства $C(2\pi,T)$, $C^1(2\pi,T), C^2(2\pi,T)$ функций $f(\tau,\omega)$, удовлетворяющих условию $M(f(\tau,\omega)) = 0$ (здесь и в дальнейшем среднее (4.9) берется по переменной τ).

Инвариантный тор $\mathbb{T}^2$ уравнения (4.8) будем строить в виде разложения

$$q_{\circ\circ}(\tau,\omega,\varepsilon^{1/2}) = q_*(\omega,\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon q_1(\tau,\omega,\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^2 q_2(\tau,\omega) \tag{4.24}$$

одновременно с уравнением траекторий на нем

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon(1+\varepsilon\Omega(\varepsilon^{1/2})). \tag{4.25}$$

При этом функции $q_2(\tau,\omega) \in C^{\circ 2}(2\pi,T)$ и $\Omega(\varepsilon^{1/2})$ подлежат определению, а $q_1(\tau,\omega,\varepsilon^{1/2})$ есть общее решение уравнения

$$\frac{dq_1}{d\tau} = Q_1(\tau, q_*(\omega;\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2}) = Q_1^\circ(\tau, q_*(\omega;\varepsilon^{1/2});\varepsilon) + \varepsilon^{1/2}Q_1^*(\tau, q_*(\omega;\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2}),$$

в котором ω рассматривается как параметр. Согласно (4.6), (4.7) имеем

$$q_1(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) = (i\alpha_2(\varepsilon) - \beta_2(\varepsilon))e^{-2i\tau}p(\omega;\varepsilon^{1/2})/(2\sigma(\varepsilon)) + \varepsilon^{1/2}p_1^*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) + c(\omega),$$

$$p(\omega;\varepsilon^{1/2}) = (p_0(\omega;\varepsilon^{1/2}), p_1(\omega;\varepsilon^{1/2}),\dots),\ p_k(\omega;\varepsilon^{1/2}) = \pi^2k^2\bar{q}_{*k}(\omega;\varepsilon^{1/2}),$$

где функция $p_1^*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ $(M(p_1^*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}))=0)$ получена интегрированием по τ функции $Q_1^*(\tau,q_*(\omega;\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2})$, $c(\omega) \in l_2^2$ – произвольная непрерывно дифференцируемая T-периодическая функция, которая будет определена далее.

Подставим (4.24) в уравнение (4.8) и приравняем слагаемые, имеющие порядок по ε второй и выше (слагаемые первого порядка сократятся). В результате с учетом (4.17), (4.25) получим уравнение вида

$$\begin{aligned} q_{2\tau}(\tau,\omega) = -\dot{q}_*(\omega,\varepsilon^{1/2})\Omega(\varepsilon^{1/2}) - \dot{c}(\omega) - \varepsilon q_{2\omega}(\tau,\omega) + L(\omega;\varepsilon^{1/2})(c(\omega) + \varepsilon q_2(\tau,\omega)) + \\ + F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2}), \end{aligned} \tag{4.26}$$

где нелинейный оператор

$$F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2}),$$

$$F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);0) \equiv F(\tau,\omega,0,0,0;\varepsilon^{1/2}) \equiv f(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) \tag{4.27}$$

вобрал в себя все слагаемые, не приведенные в явном виде.

Для однозначной разрешимости (4.26) относительно $q_2(\tau,\omega) \in C^{\circ 2}(2\pi,T)$ (ω рассматриваем как параметр) необходимо и достаточно согласно (4.17), чтобы

$$\begin{aligned} -\dot{q}_*(\omega,\varepsilon^{1/2})\Omega(\varepsilon^{1/2}) - \dot{c}(\omega) - \varepsilon q_{2\omega}(\tau,\omega) + L(\omega;\varepsilon^{1/2})(c(\omega) + \varepsilon q_2(\tau,\omega)) + \\ + F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2}) \in C^{\circ 1}(2\pi,T). \end{aligned} \tag{4.28}$$

Рассмотрим в пространстве l_2 линейное уравнение

$$\frac{dq}{d\omega} = L(\omega;\varepsilon^{1/2})q + f(\omega), \tag{4.29}$$

где $f(\omega) \in C^1(T)$ – пространство непрерывно дифференцируемых T-периодических на $-\infty < \omega < \infty$ функций со значениями в l_2, норма в котором определена стандартным способом. Отметим некоторые свойства его решений (см. [20]). Введем в рассмотрение сопряженный с $L(\omega;\varepsilon^{1/2})$ оператор $L^*(\omega;\varepsilon^{1/2})$: $(L(\omega;\varepsilon^{1/2})q_1,q_2)_{l_2} = (q_1, L^*(\omega;\varepsilon^{1/2})q_2)_{l_2}$, $q_1,q_2 \in l_2^2, -\infty < \omega < \infty$, и сопряженное с (4.23) уравнение

$$\frac{dp}{d\omega} = -L^*(\omega;\varepsilon^{1/2})p. \tag{4.30}$$

Отметим, что $L^*(\omega;\varepsilon^{1/2})$ может быть определен через сопряженную с (4.13) матрицу. Уравнение (4.30) имеет единственное T-периодическое решение $p_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$, которое может быть выбрано, удовлетворяющим условию

$$(\dot{q}_*(\omega;\varepsilon^{1/2}), p_*(\omega;\varepsilon^{1/2}))_{l_2} = 1,\ -\infty < \omega < \infty. \tag{4.31}$$

Условие

$$\int_0^T (f(\omega), p_*(\omega;\varepsilon^{1/2}))_{l_2} d\omega = 0 \tag{4.32}$$

является необходимым и достаточным для существования T-периодического решения уравнения (4.29) $q_p(\omega;\varepsilon^{1/2}) \in C^2(T)$ – пространству дважды непрерывно дифференцируемых T-периодических на $-\infty < \omega < \infty$ функций со значениями в l_2. При этом условие

$$\int_0^T (q_p(\omega;\varepsilon^{1/2}), p_*(\omega;\varepsilon^{1/2}))_{l_2} d\omega = 0$$

обеспечивает его единственственность и представление в виде

$$q_p(\omega;\varepsilon^{1/2}) = G(\varepsilon^{1/2}) f(\omega), \tag{4.33}$$

где $G(\varepsilon^{1/2}) : C^{\circ 1}(T) \to C^{\circ 2}(T)$ – гладко зависящий от $\varepsilon^{1/2}$ линейный вполне непрерывный оператор, определенный в $C^1(T)$ на функциях, удовлетворяющих (4.32), и действующий в $C^2(T)$ в подпространство функций, также удовлетворяющих (4.32).

Рассмотрим определяемое выражением (4.28) условие

$$-\dot{q}_*(\omega,\varepsilon^{1/2})\Omega(\varepsilon^{1/2}) - \dot{c}(\omega) - \varepsilon q_{2\omega}(\tau,\omega) + L(\omega;\varepsilon^{1/2})(c(\omega) + \varepsilon q_2(\tau,\omega)) +$$
$$+ M(F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2})) = 0 \tag{4.34}$$

как дифференциальное уравнение вида (4.29) относительно $\dot{c}(\omega) + \varepsilon q_{2\omega}(\tau,\omega)$ (τ рассматриваем как параметр). Условие (4.32) в этом случае примет вид

$$\Omega(\varepsilon^{1/2}) - T^{-1}\int_0^T (M(F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2})), p_*(\omega;\varepsilon^{1/2}))_{l_2}) d\omega = 0, \tag{4.35}$$

из которого с учетом условия (4.27) на основании теоремы о неявной функции в банаховом пространстве (см. [19]) однозначно определим гладко зависящую от своих переменных оператор-функцию $\Omega(\varepsilon^{1/2}) = \Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega);\varepsilon^{1/2})$ $(\Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega);0) \equiv \Omega_0(\omega))$. Выбрав таким образом $\Omega(\varepsilon^{1/2})$, обеспечим выполнение условия (4.32), что на основании (4.33) дает нелинейное операторное уравнение

$$c(\omega) + \varepsilon q_2(\tau,\omega) = G(\varepsilon^{1/2})(-\dot{q}_*(\omega,\varepsilon^{1/2})\Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega);\varepsilon^{1/2})) +$$
$$+ M(F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega);\varepsilon^{1/2}),c(\omega);\varepsilon^{1/2})) \tag{4.36}$$

для определения $c(\omega)$, из которого на основании теоремы о неявной функции (см. [19]) в банаховом пространстве $C^1(T)$ с учетом условия (4.27) находим однозначное решение (оператор-функцию) $c(\omega) = c(\omega,q_2(\tau,\omega);\varepsilon^{1/2})$, $(c(\omega,q_2(\tau,\omega);0) \equiv c(\omega,0;\varepsilon^{1/2}) \equiv c_0(\omega))$, гладко зависящее от $q_2(.)$ при $||q_2(.)||_{C(2\pi,T)} < q_0$ и малых $\varepsilon^{1/2}$.

Отсюда на основании (4.17), (4.26), (4.34) получим нелинейное операторное уравнение

$$q_2(\tau,\omega) = J(F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega,q_2(\tau,\omega);\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2}),c(\omega,q_2(\tau,\omega);\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2}) -$$
$$- M(F(\tau,\omega,q_2(\tau,\omega),\Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega,q_2(\tau,\omega);\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2}),c(\omega,q_2(\tau,\omega));\varepsilon^{1/2});\varepsilon^{1/2})), \tag{4.37}$$

в пространстве $C^{\circ 1}(2\pi,T)$ для определения $q_2(\tau,\omega)$. Используя теорему о неявной функции (см. [19]) в банаховом пространстве $C^{\circ 1}(2\pi,T)$ с учетом свойств (4.27), находим однозначное решение $q_2(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) \in C^{\circ 2}(2\pi,T)$, гладко зависящее $\varepsilon^{1/2}$.

Подставив теперь $q_2(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ в (4.24), а также в $\Omega(\varepsilon^{1/2}) = \Omega(q_2(\tau,\omega),c(\omega,q_2(\tau,\omega));\varepsilon^{1/2})$ и $c(\omega,q_2(\tau,\omega))$ получим выражение $q_{\circ\circ}(\tau,\omega,\varepsilon^{1/2})$ для инвариантного тора $\mathbb{T}^2$ уравнения (4.8) и уравнение (4.25) траекторий на нем.

Линеаризуем теперь на $q_{\circ\circ}(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ уравнение (4.8) с учетом (4.25). В результате будем иметь линейное уравнение

$$\frac{dq}{d\tau} = \varepsilon(L(\varepsilon\tau;\varepsilon^{1/2}) + \varepsilon^{1/2}L_1(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}))q, \tag{4.38}$$

в пространстве l_2, где $L_1(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) : l_2^2 \to l_2$ — гладко зависящий от своих переменных 2π-периодический по τ и T-периодический по ω оператор. В силу сделанных предположений относительно собственных значений оператора монодромии $U(T;\varepsilon^{1/2})$ уравнения (4.23) поведение решений уравнения (4.38) при $t \to \infty$ определяется поведением решений уравнения (4.23). Отметим, что один характеристический показатель уравнения (4.38) равен нулю. При этом фазовое пространство уравнения (4.38) имеет m-мерное подпространство решений, нормы которых неограниченно возрастают при $t \to \infty$. Таким образом, в случае $m = 0$ инвариантный тор $q_{\circ\circ}(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ асимптотически орбитально устойчив.

Подставим теперь $q_{\circ\circ}(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ и $z_\circ(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) = q_{\circ\circ}(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})e^{i\tau}$ соответственно в (4.5) (оставив обозначение τ за переменной τ_0) и в (4.2), а также полученную функцию $w_\circ(x,\tau;\varepsilon^{1/2})$ с учетом выполненной нормировки, в выражение (3.2). В результате получим уравнение

$$\dot{\tau} = \sigma(\varepsilon) + \varepsilon\sigma_*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}), \tag{4.39}$$

где $\sigma_*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ — гладко зависящая от $\tau,\omega,\varepsilon^{1/2}$, 2π-периодическая по τ и T-периодическая по ω функция, а также инвариантный тор $\mathbb{T}^2$ начально-краевой задачи (2.1), представимый в виде

$$u_{\circ\circ}(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) = v(\varepsilon^{1/2}w_\circ(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}),\varepsilon^{1/2}\bar{w}_\circ(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2});\varepsilon) =$$

$$= \varepsilon^{1/2}(e(\varepsilon)w_\circ(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}) + \bar{e}(\varepsilon)\bar{w}_\circ(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})) + \varepsilon u_*(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2}), \tag{4.40}$$

в котором $u_*(x,\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ — гладко зависящая от своих переменных 2π-периодическая функция по τ и T-периодическая по ω функция.

Перейдем теперь в уравнении (4.25) к времени t в соответствии с (4.39). В результате имеем уравнение

$$\dot{\omega} = \varepsilon(\sigma(\varepsilon) + \varepsilon\Omega_*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})), \tag{4.41}$$

где $\Omega_*(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ — гладко зависящая от $\varepsilon^{1/2}$ и 2π-периодическая по τ функции и T-периодическая по ω функция. Уравнения (4.39), (4.41) являются уравнениями траекторий на инвариантном торе (4.40).

Сказанное сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *система уравнений* (4.10) *имеет периодическое решение* $q_*(\varepsilon\tau;\varepsilon^{1/2})$ *периода* T $(q_*(\omega;\varepsilon^{1/2}) \equiv q_*(\omega+T;\varepsilon^{1/2}))$*, а оператор монодромии* $U(T;0)$ $(U(T;\varepsilon^{1/2}))$ *уравнения* (4.23) *имеет однократный мультипликатор равный единице, не имеет других мультипликаторов по модулю равных единице и имеет* $m \geqslant 0$ *мультипликаторов по модулю больше единицы. Тогда уравнение* (4.8) *имеет инвариантный тор* $\mathbb{T}^2$ $q_{\circ\circ}(\tau,\omega;\varepsilon^{1/2})$ *вида* (4.24)*, устойчивость которого определяется устойчивостью периодического решения* $q_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$*. Этому инвариантному тору в начально-краевой задаче* (2.1), (2.2) *соответствует инвариантный тор* $\mathbb{T}^2$ *вида* (4.40)*, устойчивость которого также определяется устойчивостью периодического решения* $q_*(\omega;\varepsilon^{1/2})$*. Уравнения траекторий на инвариантном торе* (4.40) *имеют вид* (4.39)*,* (4.41)*. Инвариантный тор* (4.40) *имеет в своей окрестности фазового пространства* m*-мерное многообразие решений, нормы которых неограниченно возрастают. В случае* $m = 0$ *инвариантный тор* (4.40) *асимптотически орбитально устойчив.*

Предположим теперь, что система уравнений (4.10) имеет инвариантный тор $\mathbb{T}^k$ $(k > 1)$ вида

$$q_*(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2}) \equiv q_*(\omega_1+2\pi,\ldots,\omega_k+2\pi;\varepsilon^{1/2}),\;\; \dot{\omega}_j = \varepsilon\Omega_j(\varepsilon^{1/2}),\; \Omega_j(0) \neq 0,\; j = 1,\ldots,k.$$

который в силу структуры $Q_0(q;\varepsilon^{1/2})$ принадлежит l_2^4. Представим оператор $Q_0(q;\varepsilon^{1/2})$ в окрестности точки $q_*(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2})$ рядом Тейлора [4]

$$Q_0(q_*(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2}) + q;\varepsilon^{1/2}) = L(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2})q + Q_{02}(\omega_1,\ldots,\omega_k,q;\varepsilon^{1/2}),$$

$$(||Q_{02}(\omega_1,\ldots,\omega_k,q;\varepsilon^{1/2})||_{l_2} = O(||q||_{l_2^2})^2),$$

где линейный оператор $L(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2}) : l_2^2 \to l_2$ 2π-периодический по ω_j и может быть определен через бесконечную матрицу (4.13), вычисленную в точке $q = q_*(\omega_1,\ldots,\omega_k;\varepsilon^{1/2})$.

Рассмотрим в пространстве l_2 уравнение

$$\frac{dq}{d\tau} = L(\omega_1,\ldots,\omega_k;0)q,\;\; \frac{d\omega_j}{d\tau} = \Omega_j(0). \tag{4.42}$$

Уравнение (4.42) является абстрактно параболическим (см. [20]) и имеет k решений вида $q_{*\omega_j}(\omega_1,\ldots,\omega_k;0)$, $j = 1,\ldots,k$, характеристические показатели которых равны нулю.

Справедлива следующая теорема, доказательство которой аналогично доказательсву теоремы 2.

Теорема 3. *Предположим, что уравнение* (4.42) *имеет ровно k нулевых и m положительных характеристических показателей. Остальные характеристические показатели отрицательные. Тогда уравнение* (4.8) *имеет инвариантный тор $\mathbb{T}^{k+1}$ $q_{\circ k}(\tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})$, устойчивость которого определяется устойчивостью решений уравнения* (4.42). *Этому инвариантному тору в начально-краевой задаче* (2.1), (2.2) *соответствует инвариантный тор $\mathbb{T}^{k+1}$ вида*

$$u_{\circ k}(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}) = v(\varepsilon^{1/2} w_\circ(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}), \varepsilon^{1/2} \bar{w}_\circ(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}); \varepsilon) =$$
$$= \varepsilon^{1/2}(e(\varepsilon) w_\circ(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}) + \bar{e}(\varepsilon) \bar{w}_\circ(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})) + \varepsilon u_*(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}), \quad (4.43)$$

в котором $w_\circ(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}), u_*(x, \tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})$ — гладко зависящие от своих переменных 2π-периодические по τ и ω_j функции. Уравнения траекторий на инвариантных торах имеют вид

$$\dot{\tau} = \sigma(\varepsilon) + \varepsilon \sigma_*(\tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2}), \quad (4.44)$$

$$\dot{\omega}_j = \varepsilon(\Omega_j(\varepsilon^{1/2})\sigma(\varepsilon) + \varepsilon \Omega_{*j}(\tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})), \ j = 1, \ldots, k, \quad (4.45)$$

где $\sigma_*(\tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})$ и $\Omega_{*j}(\tau, \omega_1, \ldots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})$ — гладко зависящие от своих переменных функции, 2π-периодические по τ и ω_j. Инвариантный тор (4.43) *имеет в своей окрестности фазового пространства m-мерное многообразие решений, нормы которых неограниченно возрастают. В случае $m = 0$ инвариантный тор* (4.43) *асимптотически орбитально устойчив.*

Отметим следующее. Предположим, что матрица $A(\varepsilon)$ и функция $F(u; \varepsilon)$ в (2.1) аналитически зависят от ε и u при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и $||u|| < R_0$. В связи с этим будут аналитически зависить от своих переменных и параметра ε преобразование (3.2) и правая часть уравнения (3.3). Следствием этого является аналитическая зависимость правых частей уравнений (4.8) от фазовых переменных и параметра $\mu = \varepsilon^{1/2}$ при $|\mu| < \mu_0$, а также операторных уравнений (4.18) и (4.37). Теорема о неявной функции для аналитических операторных уравнений с аналитической зависимостью от входящих параметров (см. [19]) позволяет утверждать, что периодическое решение (4.21), инвариантный торы (4.40), (4.43), правые части уравнений (4.39), (4.41) и (4.44), (4.45) траекторий на торах разлагаются в сходящиеся ряды по $\varepsilon^{1/2}$.

5. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Предположим, что матрица $A(\varepsilon)$ и функция $F(u; \varepsilon)$ в (2.1) являются бесконечно дифференцируемыми соответственно по ε и u при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, и $||u|| < R_0$. В этом случае периодическое решение (4.21), инвариантный тор (4.40) и правые части уравнений траекторий на инвариантном торе (4.39) и (4.41) являются бесконечно дифференцируемыми функциями $x, \tau, \omega, \mu = \varepsilon^{1/2}$ (см. [18]). При этом

$$\frac{\partial^k u_\circ(x, \tau; \varepsilon^{1/2})}{\partial x^k}\Big|_{x=0, x=1} = \frac{\partial^k u_{\circ\circ}(x, \tau; \varepsilon^{1/2})}{\partial x^k}\Big|_{x=0, x=1} = 0, \ k = 1, 3, \ldots. \quad (5.1)$$

Рассмотрим сначала алгоритм построения периодического решения $u_\circ(x, \tau; \varepsilon^{1/2})$, определяемого выражениями (4.20), (4.21). Пусть $q_*(0) = q_* = (q_{*0}, q_{*1}, \ldots)$ главная часть состояния равновесия уравнения (4.10), т.е.

$$Q_0^\circ(q_*; 0) = 0, \quad (5.2)$$

для которого оператор (4.12) удовлетворяет условиям теоремы 1. Обозначим

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{*k} g_k(x). \quad (5.3)$$

Функция (5.3) является бесконечно дифференцируемой и удовлетворяет условиям (5.1) (принадлежит классу $C_\circ^\infty$). Запишем уравнение (2.1) в виде

$$u_t = \varepsilon D u_{xx} + (A(0) + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots) u + F_2(u, u; \varepsilon) + F_3(u, u, u; \varepsilon) + \cdots, \quad (5.4)$$

где $A_1 = A'(0), A_2 = A''(0)$, $F_2(.)F_3(.)$ соответственно квадратичные и кубические слагаемые, записанные в симметризованном виде, здесь и в дальнейшем точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по соответствующим переменным.

Будем строить периодическое решение $u_\circ(.)$ в виде разложения по $\varepsilon^{1/2}$:

$$u_\circ(x, \tau; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}(e_0(u_0(x) + \varepsilon u_3(x) + \cdots) e^{i\tau} + \bar{e}_0(\bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_3(x) + \cdots) e^{-i\tau}) +$$

$$+\varepsilon(e_{20}u_{20}(x)e^{2i\tau}+e_{11}u_{11}(x)+\bar e_{20}\bar u_{20}(x)e^{-2i\tau})+$$
$$+\varepsilon^{3/2}(e_{30}u_{30}(x)e^{3i\tau}+e_{21}u_{21}(x)e^{i\tau}+\bar e_{21}\bar u_{21}(x)e^{-i\tau}+\bar e_{30}\bar u_{30}(x)e^{-3i\tau})+\cdots, \tag{5.5}$$

$$\dot\tau=\sigma_0+\varepsilon\sigma_{*1}+\varepsilon^2\sigma_{*2}+\cdots, \tag{5.6}$$

в котором $e_0=e(0)$ ($e(\varepsilon)$ определен в (3.2)), векторы $e_{jk}\in\mathbb{C}^2$, функции $u_j(x),u_{jk}(x)\in C_\circ^\infty$ и σ_{*j} подлежат определению.

Подставим (5.5), (5.6) в (5.4) и приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε с учетом соответствующих гармоник по τ. В результате получим рекуррентную последовательность операторных уравнений в пространстве $H\times H$ определенного вида. При $\varepsilon^{1/2}$ равенства будут выполнены в силу (3.2). При ε будем иметь уравнения

$$(2i\sigma_0I-A(0))e_{20}u_{20}(x)=F_2(e_0,e_0;0)u_0(x)^2,\ \ -A(0)e_{11}u_{11}(x)=2F_2(e_0,\bar e_0;0)|u_0(x)|^2,$$

из которых однозначно определяем $e_{20}u_{20}(x)=e_{20}u_0(x)^2, e_{11}u_{11}(x)=e_{11}|u_0(x)|^2$. Здесь I – единичная матрица. При $\varepsilon^{3/2}$ получим уравнение для определения $e_{30}u_{30}(x)$

$$(3i\sigma_0I-A(0))e_{30}u_{30}(x)=(2F_2(e_{20},e_0;0)+F_3(e_0,e_0,e_0))u_0(x)^3,$$

из которого однозначно определим $e_{30}u_{30}(x)=e_{30}u_0(x)^3$, и уравнение для определения $e_{21}u_{21}(x)$

$$(i\sigma_0I-A(0))e_{21}u_{21}(x)=(A_1-i\sigma_{*1}I)e_0u_0(x)+De_0u_{0xx}(x)+(2F_2(e_{20},\bar e_0;0)+$$
$$+2F_2(e_{11},e_0;0)+3F_3(e_0,e_0,\bar e_0;0))|u_0(x)|^2u_0(x)=\Phi_3(x)=e_0\phi_{31}(x)+\bar e_0\phi_{32}(x), \tag{5.7}$$

правая часть которого представлена в виде разложения по векторам $e_0,\bar e_0$. При этом $\phi_{31}(x)=(\Phi_3(x),h_0), \phi_{32}(x)=(\Phi_3(x),\bar h_0)$, где вектор $h_0=h(0)$, $h(\varepsilon)$ определен в (3.6). Так как $(i\sigma_0I-A(0))e_0g_k(x)=0, k=0,1,\ldots$, то уравнение (5.7) будет разрешимо в $H\times H$ лишь при условии

$$(\phi_{31}(x),g_k(x))_H=((A_1-i\sigma_{*1}I)e_0u_0(x)+De_0u_{0xx}(x)+(2F_2(e_{20},\bar e_0;0)+$$
$$+2F_2(e_{11},e_0;0)+3F_3(e_0,e_0,\bar e_0;0))|u_0(x)|^2u_0(x),h_0g_k(x))_H=0,\ k=0,1\ldots. \tag{5.8}$$

В первом уравнении (5.8) (при $k=0$) приравняем нулю мнимую часть и выразим из полученного равенства σ_{*1}. Подставим полученное выражение σ_{*1} в оставшиеся уравнения системы (5.8). В результате получим, что несложно заметить, операторное уравнение (5.2) в пространстве l_2 относительно q_*. Таким образом, уравнение (5.7) разрешимо, а его общее решение с учетом (5.5) имеет вид

$$e_{21}u_{21}(x)+e_0u_3(x)=\bar e_0\phi_{32}(x)/(2i\sigma_0)+e_0\sum_{k=0}^{\infty}q_{3k}g_k(x),$$

где $q_3=(q_{30},q_{31},\ldots)\in l_2^\infty$ – произвольный вектор, который будет определен в дальнейшем.

Отметим, что изначально вектор q_* в (5.3) можно рассматривать как неопределенный параметр и, дойдя до уравнения (5.8), его определить как решение уравнения $Q_0^\circ(q;0)=0$. Затем уже определить функции $u_{20}(x),u_{11}(x),u_{30}(x)$.

Приравняв теперь коэффициенты при ε^2, получим уравнения для определения соответствующих слагаемых, решения которых находятся однозначно. Дополняющие (5.5) слагаемые будут иметь вид

$$\varepsilon^2(e_{40}u_{40}(x)e^{4i\tau}+(e_{31}u_{31}(x)+2e_{20}u_0(x)u_3(x))e^{2i\tau}+e_{22}u_{22}(x)+e_{11}(u_0(x)\bar u_3(x)+\bar u_0(x)u_3(x))+\cdots),$$

в которых векторы e_{40},e_{31},e_{22} и функции $u_{40}(x),u_{31}(x),u_{22}(x)\in C_\circ^\infty$ однозначно определяются, а точками обозначены комплексно сопряженные к первым двум слагаемые. Здесь выделены слагаемые, содержащие функцию $u_3(x)$. Приравняв теперь коэффициенты при $\varepsilon^{5/2}$, однозначно определим $e_{50}u_{50}(x)$ при $e^{5i\tau}$, $e_{41}u_{41}(x)$ при $e^{3i\tau}(u_{50}(x),u_{41}(x)\in C_\circ^\infty)$. Сложность возникнет при определении вектора $e_{32}u_{32}(x)$ при $e^{i\tau}$, для определения которого получим уравнение

$$(i\sigma_0I-A(0))e_{32}u_{32}(x)=-i\sigma_{*2}e_0u_0(x)+(A_1-i\sigma_{*1}I)e_0u_3(x)+De_0u_{3xx}(x)+$$
$$+(2F_2(e_{20},\bar e_0;0)+2F_2(e_{11},e_0;0)+3F_3(e_0,e_0,\bar e_0;0))(u_0(x)^2\bar u_3(x)+$$
$$+2|u_0(x)|^2u_3(x))+f_{32}(x)=\Phi_5(x)=e_0\phi_{51}(x)+\bar e_0\phi_{52}(x), \tag{5.9}$$

где $f_{32}(x)$ – определенная вектор-функция, координаты которой принадлежат $C_\circ^\infty$, $\phi_{51}(x) = (\Phi_5(x), h_0), \phi_{52}(x) = (\Phi_5(x), \bar{h}_0)$, выражение для σ_{*1} определено на предыдущем шаге. Так как $(i\sigma_0 I - A(0))e(0)g_k(x) = 0, k = 0, 1, \ldots$, уравнение (5.9) будет разрешимо в $H \times H$ лишь при условии

$$(\phi_{51}(x), g_k(x))_H = (-i\sigma_{*2}e_0u_0(x) + (A_1 - i\sigma_{*1}I)e_0u_3(x) + De_0u_{3xx}(x) + (2F_2(e_{20}, \bar{e}_0; 0)+$$

$$+ 2F_2(e_{11}, e_0; 0) + 3F_3(e_0, e_0, \bar{e}_0; 0))(u_0(x)^2\bar{u}_3(x) + 2|u_0(x)|^2u_3(x) + f_{32}(x), h_0g_k(x))_H = 0, \tag{5.10}$$

$k = 0, 1 \ldots$ В первом уравнении системы (5.10) (при $k = 0$) приравняем нулю мнимую часть, выразим из полученного равенства σ_{*2} и подставим полученное выражение σ_{*2} в оставшиеся уравнения системы (5.10). В результате получим линейное операторное уравнение в пространстве l_2 вида

$$L(0)q_3 = f_{32}^*, \tag{5.11}$$

в котором координаты вектора $f_{32}^* \in l_2$ определяются величинами $(f_{32}(x), h_0g_k(x))_H, k = 0, 1, \ldots$, с учетом выражения для σ_{*2}. При сделанных предположениях относительно свойств оператора $L(0)$ (теорема 1) уравнение (5.11) имеет единственное решение $q_3 = L^{-1}(0)f_{32}^* \in l_2^\infty$. Выбрав таким образом q_3, получим разрешимость уравнения (5.9), а его общее решение с учетом (5.5) будет иметь вид

$$e_{32}u_{32}(x) + e_0u_5(x) = \bar{e}_0\phi_{52}(x)/(2i\sigma_0) + e_0\sum_{k=0}^{\infty} q_{5k}g_k(x), \tag{5.12}$$

где $q_5 = (q_{50}, q_{51}, \ldots) \in l_2^\infty$ – произвольный вектор, который будет определен из уравнений, полученных при $\varepsilon^{7/2}$. Этот процесс можно продолжать до бесконечности, на каждом последующем шаге будем иметь уравнение вида (5.9), а соответствующее общее решение вида (5.12).

Рассмотрим теперь алгоритм построения инвариантного тора $\mathbb{T}^2$ $u_{\circ\circ}(x, \tau, \omega; \varepsilon^{1/2})$ вида (4.40) и уравнений траекторий на нем (4.39), (4.41). Пусть $q_*(\omega; 0) = q_*(\omega) = (q_{*0}(\omega), q_{*1}(\omega), \ldots)$ – главная часть T-периодического решения $q_*(\omega; \varepsilon^{1/2})$ уравнения (4.10), т.е.

$$\frac{dq_*}{d\omega} = Q_0(q_*(\omega); 0), \tag{5.13}$$

для которого оператор монодромии $U(T; 0)$ $(U(T; \varepsilon^{1/2}))$ уравнения (4.23), построенного на этом решении, удовлетворяет условиям теоремы 2. Обозначим

$$u_0(x, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} q_{*k}(\omega)g_k(x). \tag{5.14}$$

Функция (5.3) является бесконечно дифференцируемой по совокупности переменных и удовлетворяет условиям (5.1) (принадлежит классу $C_{\circ\circ}^\infty$).

Будем строить инвариантный тор $u_{\circ\circ}(x, \tau, \omega; \varepsilon^{1/2})$ и уравнения траекторий на нем в виде разложений по $\varepsilon^{1/2}$ в следующей форме:

$$u_{\circ\circ}(x, \tau, \omega; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}(e_0(u_0(x, \omega) + \varepsilon u_3(x, \omega) + \cdots)e^{i\tau} + \bar{e}_0(\bar{u}_0(x, \omega) + \varepsilon\bar{u}_3(x, \omega) + \cdots)e^{-i\tau})+$$

$$+\varepsilon(e_{20}u_{20}(x, \omega)e^{2i\tau} + e_{11}u_{11}(x, \omega) + \bar{e}_{20}\bar{u}_{20}(x, \omega)e^{-2i\tau})+$$

$$+ \varepsilon^{3/2}(e_{30}u_{30}(x, \omega)e^{3i\tau} + e_{21}u_{21}(x, \omega)e^{i\tau} + \bar{e}_{21}\bar{u}_{21}(x, \omega)e^{-i\tau} + \bar{e}_{30}\bar{u}_{30}(x, \omega)e^{-3i\tau}) + \cdots, \tag{5.15}$$

$$\dot{\tau} = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_{*1}(\omega) + \varepsilon^2\sigma_{*2}(\omega) + \cdots,$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \varepsilon(1 + \varepsilon\Omega_1 + \varepsilon^2\Omega_2 + \cdots), \tag{5.16}$$

гле $e_0 = e(0)$ $(e(\varepsilon)$ определен в (3.2)), а векторы $e_{jk} \in \mathbb{C}^2$, функции $u_j(x, \omega), u_{jk}(x, \omega) \in C_{\circ\circ}^\infty$, $\sigma_{*j}(\omega)$ и величины Ω_j подлежат определению.

Подставим (5.15) с учетом (5.16) в (5.4) и приравняем слева и справа коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получим рекуррентную последовательность операторных уравнений в пространстве $H \times H$ определенного вида. При $\varepsilon^{1/2}$ равенства будут выполнены в силу (3.2). При ε будем иметь уравнения в пространстве $H \times H$

$$(2i\sigma_0I - A(0))e_{20}u_{20}(x, \omega) = F_2(e_0, e_0; 0)u_0(x, \omega)^2, \quad -A(0)e_{11}u_{11}(x, \omega) = 2F_2(e_0, \bar{e}_0; 0)|u_0(x, \omega)|^2,$$

из которых однозначно определяем $e_{20}u_{20}(x,\omega) = e_{20}u_0(x,\omega)^2$, $e_{11}u_{11}(x,\omega) = e_{11}|u_0(x,\omega)|^2$. При $\varepsilon^{3/2}$ получим уравнение для определения $e_{30}u_{30}(x,\omega)$

$$(3i\sigma_0 I - A(0))e_{30}u_{30}(x,\omega) = (2F_2(e_{20}, e_0; 0) + F_3(e_0, e_0, e_0))u_0(x,\omega)^3,$$

из которого однозначно определим $e_{30}u_{30}(x,\omega) = e_{30}u_0(x,\omega)^3$, и уравнение для определения $e_{21}u_{21}(x)$

$$\begin{gathered}(i\sigma_0 I - A(0))e_{21}u_{21}(x,\omega) = -e_0u_{0\omega}(x,\omega)\sigma_0 + (A_1 - i\sigma_{*1}(\omega)I)e_0u_0(x,\omega) + De_0u_{0xx}(x,\omega)+\\ +(2F_2(e_{20},\bar{e}_0;0) + 2F_2(e_{11}, e_0; 0) + 3F_3(e_0, e_0, \bar{e}_0; 0))|u_0(x,\omega)|^2u_0(x,\omega) =\\ = \Phi_3(x,\omega) = e_0\phi_{31}(x,\omega) + \bar{e}_0\phi_{32}(x,\omega),\end{gathered} \tag{5.17}$$

правая часть которого представлена в виде разложения по векторам $e_0, \bar{e}_0$. При этом $\phi_{31}(x,\omega) = (\Phi_3(x,\omega), h_0), \phi_{32}(x,\omega) = (\Phi_3(x,\omega), \bar{h}_0)$. Так как $(i\sigma_0 I - A(0))e_0g_k(x) = 0, k = 0, 1, \cdots$, то уравнение (5.17) будет разрешимо в $H \times H$ (здесь и в дальнейшем ω рассматривается как параметр) лишь при условии

$$\begin{gathered}(\phi_{31}(x,\omega), g_k(x))_H = (-e_0u_{0\omega}(x,\omega)\sigma_0 + (A_1 - i\sigma_{*1}(\omega)I)e_0u_0(x,\omega) + De_0u_{0xx}(x,\omega)+\\ + (2F_2(e_{20},\bar{e}_0;0) + 2F_2(e_{11}, e_0; 0) + 3F_3(e_0, e_0, \bar{e}_0; 0))|u_0(x,\omega)|^2u_0(x,\omega), h_0g_k(x))_H = 0,\ k = 0, 1\cdots.\end{gathered} \tag{5.18}$$

В первом уравнении (5.18) (при $k = 0$) приравняем нулю мнимую часть и выразим из полученного равенства $\sigma_{*1}(\omega)$. Так как $q_{*0}(\omega) \in \mathbb{R}$, то $\sigma_{*1}(\omega)$ не зависит от $\dot{q}_*(\omega)$. Подставим полученное выражение $\sigma_{*1}(\omega)$ в оставшиеся уравнения системы (5.18). В результате получим уравнение (5.13) в пространстве l_2. Таким образом, уравнение (5.17) в силу (5.14) разрешимо, а его общее решение с учетом (5.15) имеет вид

$$e_{21}u_{21}(x,\omega) + e_0u_3(x,\omega) = \bar{e}_0\phi_{32}(x,\omega)/(2i\sigma_0) + e_0\sum_{k=0}^{\infty} q_{3k}(\omega)g_k(x),$$

где $q_3(\omega) = (q_{30}(\omega), q_{31}(\omega), \cdots) \in l_2^\infty$ – произвольный бесконечно дифференцируемый по ω T- периодический вектор, который будет определен в дальнейшем.

Отметим, что здесь также изначально можно рассматривать вектор $q_*(\omega)$ в (5.14) как неопределенный параметр и, дойдя до уравнения (5.18), его определить как решение уравнения $dq_*(\omega)/d\omega = Q_0(q_*(\omega); 0)$, получаемого из (5.18) выделением выражения $\sigma_{*1}(\omega)$, а затем уже определить функции $u_{20}(x,\omega), u_{11}(x,\omega), u_{30}(x,\omega)$.

Приравняв теперь коэффициенты при ε^2, получим уравнения для определения соответствующих слагаемых, решения которых находятся однозначно. В результате дополняющее (5.15) слагаемое будет иметь вид

$$\begin{gathered}\varepsilon^2(e_{40}u_{40}(x,\omega)e^{4i\tau} + (e_{31}u_{31}(x,\omega) + 2e_{20}u_0(x,\omega)u_3(x,\omega))e^{2i\tau} + e_{22}u_{22}(x,\omega)+\\ +e_{11}(u_0(x,\omega)\bar{u}_3(x,\omega) + \bar{u}_0(x,\omega)u_3(x,\omega)) + \cdots),\end{gathered}$$

в котором векторы e_{40}, e_{31}, e_{22} и функции $u_{40}(x,\omega), u_{31}(x,\omega), u_{22}(x,\omega) \in C_{\circ\circ}^\infty$ однозначно определяются, точками обозначены комплексно сопряженные к первым двум слагаемые. Здесь выделены слагаемые, содержащие функцию $u_3(x,\omega)$. Приравняв теперь коэффициенты при $\varepsilon^{5/2}$, однозначно определим $e_{50}u_{50}(x,\omega)$ при $e^{5i\tau}$, $e_{41}u_{41}(x,\omega)$ при $e^{3i\tau}(u_{50}(x,\omega), u_{41}(x,\omega) \in C_{\circ\circ}^\infty)$. Сложность возникнет при определении вектора $e_{32}u_{32}(x,\omega)$ при $e^{i\tau}$, для которого получим уравнение

$$\begin{gathered}(i\sigma_0 I - A(0))e_{32}u_{32}(x,\omega) = -e_0u_{0\omega}(x,\omega)\sigma_0\Omega_1 - e_0u_{3\omega}(x,\omega)\sigma_0 + (A_2 - i\sigma_{*2}(\omega)I)e_0u_0(x,\omega)+\\ +(A_1 - i\sigma_{*1}(\omega)I)e_0u_3(x,\omega) + De_0u_{3xx}(x,\omega) + (2F_2(e_{20},\bar{e}_0;0) + 2F_2(e_{11}, e_0; 0) + 3F_3(e_0, e_0, \bar{e}_0; 0))\times\\ \times (u_0(x,\omega)^2\bar{u}_3(x,\omega) + 2|u_0(x,\omega)|^2u_3(x,\omega)) + f_{32}(x,\omega) = \Phi_5(x,\omega) = e_0\phi_{51}(x,\omega) + \bar{e}_0\phi_{52}(x,\omega),\end{gathered} \tag{5.19}$$

где $f_{32}(x,\omega)$ – определенная вектор-функция, координаты которой принадлежат $\in C_{\circ\circ}^\infty$, $\phi_{51}(x,\omega) = (\Phi_5(x,\omega), h_0), \phi_{52}(x,\omega) = (\Phi_5(x,\omega), \bar{h}_0)$, выражение для $\sigma_{*1}(\omega)$ определено на предыдущем шаге. Так как $(i\sigma_0 I - A(0))e(0)g_k(x) = 0, k = 0, 1, \ldots$, то уравнение (5.19) будет разрешимо в $H \times H$ лишь при условии

$$\begin{gathered}(\phi_{51}(x,\omega), g_k(x))_H = (-e_0u_{0\omega}(x,\omega)\sigma_0\Omega_1 - e_0u_{3\omega}(x,\omega)\sigma_0 + (A_2 - i\sigma_{*2}(\omega)I)e_0u_0(x,\omega)+\\ +(A_1 - i\sigma_{*1}(\omega)I)e_0u_3(x,\omega) + De_0u_{3xx}(x,\omega) + (2F_2(e_{20},\bar{e}_0;0) + 2F_2(e_{11}, e_0; 0)+\\ + 3F_3(e_0, e_0, \bar{e}_0; 0))(u_0(x,\omega)^2\bar{u}_3(x,\omega) + 2|u_0(x,\omega)|^2u_3(x,\omega)) + f_{32}(x,\omega), h_0g_k(x))_H = 0,\end{gathered} \tag{5.20}$$

$k = 0, 1 \dots$. В первом уравнении системы (5.20) (при $k = 0$) приравняем нулю мнимую часть, выразим из полученного равенства $\sigma_{*2}(\omega)$ и подставим полученное выражение $\sigma_{*2}(\omega)$ в оставшиеся уравнения системы (5.20). Отметим, что $\sigma_{*2}(\omega)$ не зависит от $\dot{q}_*(\omega)$. В результате получим линейное дифференциальное уравнение вида (4.29) в пространстве l_2

$$\frac{dq_3(\omega)}{d\omega} = L(\omega; 0)q_3(\omega) - \dot{q}_*(\omega)\sigma_0\Omega_1 + f^*_{32}(\omega), \tag{5.21}$$

в котором координаты вектора $f^*_{32}(\omega) \in l_2^\infty$ определяются величинами $(f_{32}(x, \omega), h_0 g_k(x))_H, k = 0, 1, \dots$, с учетом выражения для $\sigma_{*2}(\omega)$. При сделанных предположениях относительно свойств уравнения (4.23) (оператора $L(\omega; 0)$) уравнение (5.21) имеет T-периодическое решение только при условии (4.32), которое в нашем случае с учетом равенства (4.31) примет вид

$$\Omega_1 = (\sigma_0 T)^{-1} \int_0^T (f^*_{32}(\omega), p_*(\omega; 0))_{l_2} d\omega. \tag{5.22}$$

Выбрав Ω_1 в соответствии с (5.22), определим T-периодическое решение $q_3(\omega)$ уравнения (5.21), удовлетворяющее условию

$$\int_0^T (q_3(\omega), p_*(\omega; 0))_{l_2} d\omega = 0,$$

которое обеспечивает его единственственность и согласно (4.33) представление в виде

$$q_3(\omega) = G(0)(-\dot{q}_*(\omega)\Omega_1 + f^*_{32}(\omega)), \tag{5.23}$$

где $G(0) : C^{\circ 1}(T) \to C^{\circ 2}(T)$ – линейный вполне непрерывный оператор. Выбрав таким образом $q_3(\omega)$, получим разрешимость уравнения (5.19), а его общее решение с учетом (5.15) будет иметь вид

$$e_{32}u_{32}(x, \omega) + e_0 u_5(x, \omega) = \bar{e}_0 \phi_{52}(x, \omega)/(2i\sigma_0) + e_0 \sum_{k=0}^{\infty} q_{5k}(\omega) g_k(x), \tag{5.24}$$

где $q_5(\omega) = (q_{50}(\omega), q_{51}(\omega), \dots) \in l_2^\infty$ – произвольный бесконечно дифференцируемый по ω T- периодический вектор, который будет определен из уравнений, полученных при $\varepsilon^{7/2}$. Этот процесс можно продолжать до бесконечности, на каждом последующем шаге будем иметь уравнения вида (5.20), (5.21), а соответствующие их решения будут иметь вид (5.23), (5.24).

Алгоритм построения инвариантного тора $\mathbb{T}^{k+1}$ $u_{\circ k}(x, \tau, \omega_1, \dots, \omega_k; \varepsilon^{1/2})$ вида (4.43) и уравнений траекторий на нем (4.44), (4.45) аналогичен приведенному. Для него также выполнены условия (5.1).

В случае аналитической зависимости матрицы $A(\varepsilon)$ и функции $F(u; \varepsilon)$ в (2.1) от ε и u при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ и $||u|| < R_0$ ряды в представлениях (5.5), (5.6) и (5.15), (5.16), а также в соответствующих разложениях для (4.43) и (4.44), (4.45) будут сходящимися при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б, Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1997. № 7. С. 4–31.
2. *Васильева А.Б, Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Тр. матем. ин.та им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 268. С. 268–283.
3. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н., Шнайдер К.Р.* Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. 2002. Т. 109. С. 5–242.
4. *Нефедов Н.Н.* Развитие методов асимптотического анализа переходных слоев в уравнениях реакции–диффузии–адвекции: теория и применение // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2074–2094.
5. *Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Матем. сб. 1986. Т. 130. № 4. С. 172.
6. *Кащенко С.А.* О квазинормальных формах для параболических уравнений с малой диффузией // Докл. АН СССР. 1988. Т. 299. № 5. С. 1049–1052.
7. *Кащенко С.А.* Пространственные особенности высокомодовых бифуркаций двухкомпонентных систем с малой диффузией // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 5. № 2. С. 262–270.
8. *Кащенко С.А.* Простейшие критические случаи в динамике нелинейных систем с малой диффузией // Тр. ММО. 2018. Т. 79. № 1. С. 97–115.

9. *Колесов Ю.С.* Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
10. *Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А.* О проблеме возникновения автоволн в параболических системах с малой диффузией // Матем. сб. 2007. Т. 198. № 11. С. 67–106.
11. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005. 432 с.
12. *Нефедов Н.Н.* Периодические контрастные структуры в задаче реакция–диффузия с быстрой реакцией и малой диффузией // Матем. заметки. 2022. Т. 112. № 4. С. 601–612.
13. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Из-во АН УССР, 1937. 352 с.
14. *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. 230 с.
15. *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation // Rus. J. Nonlin. Dyn. 201. V. 14. № 3. P. 301–324.
16. *Кубышкин Е.П., Морякова А.Р.* Особенности бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки–Гласса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 8. С. 1340–1357.
17. *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Analysis of special cases in the study of bifurcations of periodic solutions of the ikeda equation // Rus. J. Nonlin. Dyn. 2020. V. 16. № 3. P. 437–451.
18. *Соболевский П.Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Тр. ММО. 1961. Т. 10. С. 297–350.
19. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
20. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

THE AVERAGING METHOD IN THE PROBLEM OF CONSTRUCTING SELF-OSCILLATORY SOLUTIONS OF DISTRIBUTED KINETIC SYSTEMS

E. P. Kubyshkin*

150000 Yaroslavl, Sovetskaya str., 14, P.G.Demidov Yaroslavl State University, Faculty of Mathematics, Russia
**e-mail: kubysh.e@yandex.ru*

Received: 28.11.2023
Revised: 29.07.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. An averaging method is constructed for two-component distributed kinetic systems with low diffusion in a limited one-dimensional region with impermeability conditions at the boundary. Transformations of the considered distributed system are constructed, which make it possible to allocate one “fast” and a countable number of “slow” variables. Theorems on the correspondence of stationary and periodic solutions, as well as invariant tori of averaged equations of “slow” variables, respectively, to spatially inhomogeneous periodic solutions and invariant tori of initial equations of a similar stability character are proved. Algorithms for constructing periodic solutions (cycles) and invariant tori of the initial equations in the form of a power expansion of a small parameter are proposed, providing the construction of asymptotic formulas for these self-oscillating objects. The conditions for convergence of the corresponding expansions are formulated.

Keywords: averaging method, distributed kinetic systems, reaction-diffusion equation systems, spatially inhomogeneous solutions, bifurcation theory.