ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2312–2331

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 517.9

МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ[1)]

© 2024 г. М. И. Сумин[1,*]

[1]392000 Тамбов, ул. Интернациональная, 33, ТГУ им. Г.Р. Державина, Россия
**e-mail: m.sumin@mail.ru*

Поступила в редакцию 08.07.2024 г.
Переработанный вариант 08.07.2024 г.
Принята к публикации 23.08.2024 г.

Рассматривается регуляризация принципа Лагранжа (ПЛ) в недифференциальной форме в нелинейной (невыпуклой) задаче на условный экстремум с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве. Множество ее допустимых элементов принадлежит полному метрическому пространству, существование решения задачи априори не предполагается. Ограничение-равенство содержит аддитивно входящий в него параметр, что обеспечивает возможность применения для исследования задачи "нелинейного варианта" метода возмущений. Основное предназначение регуляризованного ПЛ — устойчивое генерирование обобщенных минимизирующих последовательностей (ОМП) в рассматриваемой нелинейной задаче. Его можно трактовать как ОМП-образующий (регуляризирующий) оператор, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных задачи субминималь (минималь) ее отвечающего этому набору регулярного модифицированного функционала Лагранжа (МФЛ), двойственная переменная в котором генерируется в соответствии с процедурой стабилизации по Тихонову двойственной задачи. Конструкция МФЛ полностью определяется видом "нелинейных" субдифференциалов полунепрерывной снизу и, вообще говоря, невыпуклой функции значений как функции параметра задачи. В качестве таких субдифференциалов используются хорошо известные в негладком (нелинейном) анализе проксимальный субградиент и субдифференциал Фреше. Регуляризованный ПЛ "преодолевает" свойства некорректности классического аналога и может трактоваться как регуляризирующий алгоритм, составляя тем самым теоретическую основу для создания устойчивых методов практического решения нелинейных задач на условный экстремум. Библ. 32.

Ключевые слова: нелинейная задача на условный экстремум, операторное ограничение-равенство, правило множителей Лагранжа в недифференциальной форме, регуляризация, метод возмущений, функция значений, проксимальный субградиент, субдифференциал Фреше, модифицированная двойственная задача, обобщенная минимизирующая последовательность, регуляризирующий алгоритм.

DOI: 10.31857/S0044466924120076, **EDN**: KBZJNN

ВВЕДЕНИЕ

Опубликованное в 1788 г. классическое правило множителей Лагранжа (см. [1]), которое по сложившейся традиции называют также принципом Лагранжа (ПЛ), можно трактовать как сформулированный классиком результат, являющийся естественным итогом многолетних усилий ведущих математиков того времени, искавших ответ на естественный вопрос о том, как решать задачи на максимум и минимум, возникающие в самых различных ситуациях, связанных с человеческой деятельностью, в том числе, и сугубо практического характера (см. [2]–[4]). За прошедшие два с лишним столетия теория ПЛ получила фундаментальное развитие и стала основой таких важнейших современных математических дисциплин, как теория экстремальных задач, теория оптимального управления (см. [2]–[4]). ПЛ лежит также в основе современных численных методов в теории условной оптимизации и стало быть имеет непосредственное отношение к практическому решению самых различных оптимизационных задач (см. [5]). Вместе с тем, при решении большого числа важных задач условной оптимизации, возникающих, в частности, при исследовании проблем современного естествознания, непосредственное применение этого классического результата сталкивается с трудностями принципиального характера,

---

[1)] Результаты исследований автора, представленные в разд. 1, 3, получены при финансовой поддержке РНФ № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/; результаты исследований, представленные в разд. 2, получены при финансовой поддержке Минобрнауки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

вызванными хорошо известными свойствами некорректности таких задач (см. [5]), а также связанными с ними свойствами некорректности самого ПЛ (см. [6]–[9]). Мы говорим здесь о непосредственном применении ПЛ, если в нашем распоряжении имеется тот или иной алгоритм (оператор), который позволяет выделять удовлетворяющие ему допустимые элементы из всей совокупности составляющих ПЛ соотношений.

Кратко проиллюстрируем сказанное относительно свойств некорректности ПЛ на примере “простейшей” задачи на условный экстремум с операторным (т.е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом) ограничением-равенством в гильбертовом пространстве

$$(P) \qquad \|z\|^2 \to \inf, \ \ Az = h, \ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $A : Z \to H$ — линейный ограниченный оператор, $h \in H$ — заданный элемент, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, Z, H — гильбертовы пространства. Применительно к задаче (P) выделим в данном контексте три основные позиции, связанные с такими свойствами некорректности ПЛ, как невыполнимость и неустойчивость (см. [6]–[9]). Напомним, что о невыполнимости правила множителей мы говорим тогда, когда изестно, что это классическое правило в той или иной задаче на условный экстремум не может быть записано. В свою очередь, неустойчивость классического правила мы понимаем в том смысле, что неустойчиво по отношению к возмущению исходных данных экстремальной задачи ведут себя допустимые элементы, удовлетворяющие всем составляющим правило множителей соотношениям.

1. Когда можно записать соотношения ПЛ, выполнимость ПЛ. Известные подходы к выводу ПЛ (см. [2], [4]) требуют замкнутости образа оператора A. При этом, как отмечено в [2, разд. 3.2.4, с. 260], невыполнение условия замкнутости может приводить к тому, что ПЛ вовсе невозможно записать (см. также соответствующие примеры в [6]–[8]). Это условие не выполняется, например, в случае вполне непрерывного оператора A (см. [10, с. 225, теорема 1]), что является естественным для задач оптимизации, связанных с дифференциальными уравнениями (оптимальное управление, обратные задачи). Подход к выводу ПЛ для задачи (P) с помощью метода возмущений (см., например, [2, разд. 3.3.2]), использующий включение этой задачи в семейство аналогичных задач, зависящих от параметра $p \in H$, вида

$$(P_p) \qquad \|z\|^2 \to \inf, \ \ Az = h + p, \ \ z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

предполагает жесткую связь соотношений ПЛ с субдифффеpенциальными свойствами функции значений этой задачи. Именно, как показано в [6, теорема 2.1], [11, теорема 1.1], этот подход позволяет формально получить невырожденный (регулярный или нерегулярный) ПЛ в задаче $(P) = (P_0)$ тогда и только тогда, когда имеет место хотя бы одно из двух соотношений, $\partial\beta(0) \neq \emptyset$ или $\partial^\infty\beta(0) \neq \{0\}$, где $\partial\beta(0)$ и $\partial^\infty\beta(0)$ — субдифференциал и сингулярный (асимптотический) субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) в нуле выпуклой полунепрерывной снизу функции значений $\beta(p) \equiv \min\limits_{z\in\mathcal{D},\, Az=h+p} \|z\|^2$, $p \in H$. Однако, к сожалению, проверка выполнимости нужных субдифференциальных свойств функции значений сама по себе является сложной математической задачей.

2. Когда неизвестно, можно ли записать соотношения ПЛ или нет, возможная невыполнимость ПЛ. Применительно к задаче (P) классический ПЛ для гладких задач с равенствами из книги [2, с. 253, 254] (см. также [4, с. 12, следствие 1]) в случае $\mathcal{D} = Z$, когда Z, H — гильбертовы пространства, формулируется как следствие выполнимости определенного набора соответствующих условий. Если же указанные условия не выполняются, то и о выполнимости ПЛ соответствующие утверждения [2, с. 253, 254], [4, с. 12, следствие 1] никакой информации не несут. Хорошо известен пример невыполнимости ПЛ в [2, разд. 3.2.4], примеры невыполнимости ПЛ применительно к задаче (P) можно найти в [6]–[9].

3. Неустойчивость ПЛ. Наконец, если задача (P) такова, что в ней все же “можно записать” ПЛ, то “практическое” использование классического результата (например, при нахождении приближений к решению задачи) неизбежно наталкивается на проблему его неустойчивости по отношению к возмущению ее исходных данных (см. [6]–[9]).

Приведенный выше анализ примера (P), анализ других подобных примеров [6]–[9] дают основание рассматривать классический ПЛ как математический объект с присущими ему от природы свойствами некорректности. Такая аргументация, подобная той, которая принята в теории некорректных задач [12], явилась причиной, в соответствии с которой в [6], [7] (см. также [8]) было предложено регуляризовать ПЛ в недифференциальной форме, взяв за основу связанный двойственностью подход к регуляризации (см. [13]–[15]). В этом случае центральная роль в задачах на условный экстремум естественным образом переходит (подробности см. в [6]–[9]) от классического понятия оптимального элемента к понятию обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) (см. определение в разд. 1). В математическом программировании такие последовательности часто называют оптимальными обобщенными планами [16], в оптимальном управлении — минимизирующими приближенными решениями (см. [17]). В [6], [7], [9], [18] такой подход был реализован применительно к выпуклой задаче на условный экстремум с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств (в [9] рассматривалась непосредственно задача (P)). Здесь и ниже под операторным понимается ограничение, задаваемое оператором с бесконечномерным образом. Ограничения задач в [6], [7], [9], [18] содержат аддитивно входящие в них параметры, что позволило в указанных работах воспользоваться так называемым методом возмущений [2, разд. 3.3.2]. Регуляризованные ПЛ в недифференциальной форме (см. [6], [7], [9], [18]): 1) формулируются как теоремы существования ОМП в исходной задаче, состоящих из минималей регулярных функционалов Лагранжа, двойственные переменные для которых генерируются в соответствии с выбранной процедурой регуляризации двойственных задач; 2) обобщают правило множителей, приводят к нему “в пределе” и сохраняют общую структуру классического аналога; 3) являются условиями обычной оптимальности, но выраженными в секвенциальной форме в терминах регулярных функционалов Лагранжа; 4) “преодолевают” свойства некорректности своего классического аналога и представляют собой универсальные ОМП-образующие (регуляризирующие) алгоритмы в смысле [19], [20] для решения задач на условный экстремум; 5) характеризуются жесткой связью свойств сходимости (по основной и двойственной переменным) с субдифференциальными (в смысле выпуклого анализа) свойствами их функций значений как функций параметров задач.

Настоящая работа, продолжающая линию работ [6], [7], [9], [18], непосредственно опирается на “нелинейную” версию основанной на двойственности регуляризации [15] (см. также [14]). Присутствие словосочетания “регуляризация принципа Лагранжа” в навании статьи связано с тем, что, в отличие от [15], регуляризация классического правила ниже проводится не только в случае регулярности (случай **А)**, см. п. 2.6) нелинейной (невыпуклой) задачи, но и в случае, когда такая регулярность отсутствует (случай **Б)**, см. п. 2.6). Здесь и ниже, как и в [15], регулярность понимается в смысле существования в задаче обобщенного вектора Куна–Таккера (см. п. 2.6). В работе показывается, как регуляризация ПЛ в недифференциальной форме может быть организована для нелинейной (невыпуклой) задачи на условный экстремум с допустимым множеством из полного метрического пространства и с операторным ограничением-равенством в гильбертовом пространстве. Рассматриваемая ниже задача так же, как и в [6], [7], [9], [18], содержит аддитивно входящий в ограничение-равенство бесконечномерный параметр, что, во-первых, объясняет наличие словосочетания “метод возмущений” в названии статьи и, во-вторых, предопределяет существенную опору при регуляризации ПЛ на “нелинейный вариант” метода возмущений и конструкции современного негладкого анализа (см. [21]–[24]). В отличие от случая выпуклой задачи (см. [6], [7], [9], [18]), в котором центральная роль принадлежит субдифференциалам (в смысле выпуклого анализа) выпуклой полунепрерывной снизу функции значений, ниже эту роль в нелинейной (вообще говоря, невыпуклой) задаче играют уже субдифференциалы в смысле негладкого (нелинейного) анализа ее нелинейной (вообще говоря, невыпуклой) полунепрерывной снизу функции значений. В качестве указанных “нелинейных” субдифференциалов выступают так называемые проксимальный субградиент (см. [21]–[23]) и субдифференциал Фреше (см. [21], [24], см. разд. 2.1). Важнейшее значение при этом имеет тот факт, что как проксимальный субградиент, так и субдифференциал Фреше “имеют смысл” в точках плотного множества в эффективном множестве функции значений нелинейной задачи (так называемая плотность обобщенной субдифференцируемости, см. п. 2.2). Это, в свою очередь, влечет выполнимость характеристического свойства рассматриваемой нелинейной параметрической задачи, в соответствии с которым можно утверждать, что регулярность задачи на условный экстремум “реализуется достаточно часто”, а именно, множество всех соответствующих регулярным задачам значений параметра всюду плотно в эффективном множестве ее функции значений (см. п. 2.6). Условия обычной оптимальности в недифференциальной форме для рассматриваемой ниже задачи в двух случаях ее регулярности (проксимальный субградиент непуст (см. [11, теорема 2.1]), субдифференциал Фреше непуст (см. [11, теорема 2.2])), т.е. существования соответствующего обобщенного вектора Куна–Таккера можно найти в [11]. Работа призвана, в частности, показать, что большая часть перечисленных в [6], [7], [9], [18] характеристических свойств регуляризованного ПЛ в случае выпуклых задач (см. предыдущий абзац) сохраняется и в задачах нелинейных.

Итак, основные усилия в работе направлены на получение регуляризованного ПЛ в недифференциальной форме в нелинейной (невыпуклой) задаче на условный экстремум. Его главное предназначение — устойчивое генерирование ОМП из субминималей (минималей) ее функции Лагранжа, а точнее, ее модифицированной функции Лагранжа (МФЛ), взятой при значениях двойственной переменной, вырабатываемых соответствующей процедурой регуляризации двойственной задачи. Естественность используемых ниже конструкций МФЛ в нелинейной задаче достаточно подробно обсуждается в п. 2.3. Указанное генерирование обеспечивается в нелинейной задаче в общей ситуации, если только ее функция значений конечна в соответствующей этой задаче точке, т.е. вне зависимости от свойств ее “нелинейной” субдифференцируемости в этой точке. Оператор, ставящий в соответствие набору возмущенных исходных данных указанные субминимали (минимали) мы называем ОМП-образующим (см. определение 1.1), так как последовательно взятые соответствующие им значения целевого функционала и задающего ограничение оператора, при стремлении возмущения задачи к нулю, обеспечивают приближение к ее нижней грани (сходимость по функции) и выполнение в пределе операторного равенства (сходимость “по ограничениям”). В некоторых частных случаях такая одновременная “сходимость по функции и по ограничениям” влечет и сходимость по аргументу к решению задачи (см. замечания 3.1, 3.2). Здесь существенным является то, что вид используемых в этих случаях МФЛ полностью определяется видом используемых соответствующих “нелинейных” субдифференциалов полунепрерывной снизу функции значений задачи — проксимального субградиента и субдифференциала Фреше (см. разд. 2.3). Следует отметить, что различные конструкции МФЛ хорошо известны в научной литературе (см., например, книги [25]–[27] и их библиографию). Однако, в отличие от [25]–[27], ниже в статье эти конструкции полностью определяются соответствующими конструкциями “нелинейных” субдифференциалов полунепрерывной снизу функции значений нелинейной задачи в бесконечномерном гильбертовом пространстве (подробности см. в п. 2.3).

Конструированием ОМП из субминималей (минималей) МФЛ излагаемая ниже регуляризация ПЛ в нелинейной задаче на условный экстремум существенно отличается от регуляризации по Тихонову нелинейных задач условной оптимизации [5, гл. 9], при которой минимизирующая последовательность в нелинейной задаче с конечным числом функциональных ограничений типа равенства и неравенстваа строится из субминималей (минималей) соответствующих функционалов Тихонова. Одновременно, в отличие от регуляризации по Тихонову задач условной оптимизации [5, гл. 9], где регуляризация происходит по функции (задачи первого типа [5, гл. 9]) или по аргументу (задачи второго типа [5, гл. 9]), здесь регуляризация идет одновременно по функции и “по ограничениям”, что обеспечивает во многих частных случаях регуляризацию и по аргументу. Существование решения рассматриваемой ниже нелинейной задачи априори не предполагается. Однако в случае его существования (см. замечания 1.1, 3.1) конструируемая ОМП, в зависимости от свойств задачи, в том или ином смысле может к нему сходиться (см. замечание 3.2). Получаемый ниже регуляризованный ПЛ естественно трактовать как теоретическую базу для создания устойчивых методов практического решения нелинейных задач условной оптимизации. Эффективность его практической реализации напрямую определяется “качеством минимизации” МФЛ, которое, в свою очередь, существенно связано, как это обычно бывает в “нелинейных ситуациях”, со спецификой конкретной практической задачи. Заметим, наконец, что регуляризация ПЛ в регулярном случае была рассмотрена ранее применительно к нелинейной задаче оптимального управления в работе [28]. В свою очередь, в [29] аналогичные вопросы были рассмотрены для регулярной нелинейной задачи условной оптимизации с операторным ограничением-равенством и конечным числом функциональных ограничений-неравенств.

Статья состоит из введения и трех основных разделов, первый из которых посвящен постановке нелинейной (невыпуклой) задачи условной оптимизации в полном метрическом пространстве и фомулировке необходимых результатов и понятий, в частности, центрального для всей работы понтия ОМП-образующего оператора. Во втором разделе приводятся основные вспомогательные факты, связанные с “нелинейными” субдифференциалами полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве. Далее здесь показывается как эти субдифференциалы “порождают” естественным образом соответствующие им МФЛ и, как следствие, связанную с ними модифицированную двойственную задачу. Наконец, третий раздел посвящен регуляризации ПЛ в рассматриваемой нелинейной задаче в случае, когда регуляризация двойственной к ней задачи, являющейся с точностью до знака целевого функционала выпуклой задачей минимизации общего вида (т.е. без ограничений типа равенства и неравенства, см., например, задачу (3) в [5, гл. 9, §2]), организуется в соответствии с привычной схемой стабилизации по Тихонову (см., например, [5, гл. 9, §4]). Здесь же обсуждается связь основанной на двойственности регуляризации с классическим методом Тихонова, а также указывается на ее обусловленное опорой на теорию двойственности существенное отличие от последнего.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим параметрическую (т.е. зависящую от параметра) нелинейную (невыпуклую) задачу минимизации

$$(P_p) \qquad f(z) \to \inf, \quad g(z) = p, \quad z \in \mathcal{D} \subset Z,$$

где $f : \mathcal{D} \to R^1$ – непрерывный функционал, $g : \mathcal{D} \to H$ – непрерывный оператор с компактной в H областью значений $g(\mathcal{D}) \equiv \{y = g(z) \in H : z \in \mathcal{D}\}$, $\mathcal{D} \subset Z$ — замкнутое ограниченное множество в полном метрическом пространстве Z с метрикой ρ, H — гильбертово пространство, $p \in H$ — параметр. Здесь и ниже компактность множества понимается в том смысле, что из каждой бесконечной последовательности его элементов можно извлечь сходящуюся подпоследовательность (см., например, [10, разд. 19.3]) (во многих случаях в подобной ситуации используется термин предкомпактность). Будем также считать, что

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le L\rho(z_1, z_2),\ \ \|g(z_1) - g(z_2)\| \le L\rho(z_1, z_2)\ \forall\, z_1,\, z_2 \in \mathcal{D}, \tag{1.1}$$

где $L > 0$ не зависит от $z_1,\, z_2 \in \mathcal{D}$.

Пусть F – множество всевозможных наборов исходных данных $\mathsf{f} \equiv \{f,\, g\}$, каждый из которых состоит из непрерывного на $\mathcal{D}$ функционала f, непрерывного оператора g с компактной в H областью значений $g(\mathcal{D})$ и с указанными выше свойствами (1.1) с независящей от набора постоянной L. Определим наборы невозмущенных $\mathsf{f}^0 \in \mathsf{F}$ и возмущенных $\mathsf{f}^\delta \in \mathsf{F}$ исходных данных соответственно: $\mathsf{f}^0 \equiv \{f^0,\, g^0\}$ и $\mathsf{f}^\delta \equiv \{f^\delta,\, g^\delta\}$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$, – некоторое число. Будем считать, что выполняются следующие оценки:

$$|f^\delta(z)|,\, |g^\delta(z)| \le N,\ \ |f^\delta(z) - f^0(z)| \le K\delta,\ \ \|g^\delta(z) - g^0(z)\| \le K\delta\ \ \forall\, z \in \mathcal{D}, \tag{1.2}$$

где $N > 0,\ K > 0$ — некоторые не зависящие от δ постоянные.

Обозначим задачу (P_p), функционал f, оператор g, соответствующие набору исходных данных f^δ, $\delta \in [0, \delta_0]$, через (P_p^δ), f^δ, g^δ соответственно. Обозначим также $\mathcal{D}_p^{\delta,\epsilon} \equiv \{z \in \mathcal{D} : \|g^\delta(z) - p\| \le \epsilon\}$, $\epsilon \ge 0$, $\mathcal{D}_p^{0,0} \equiv \mathcal{D}_p^0$. Определим обобщенную функцию значений (S-функцию) $\beta : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ задачи (P_p^0)

$$\beta(p) \equiv \lim_{\epsilon \to +0} \beta_\epsilon(p),\ \ \beta_\epsilon(p) \equiv \inf_{z \in \mathcal{D}_p^{0,\epsilon}} f^0(z), \qquad \beta_\epsilon(p) \equiv +\infty,\ \text{если}\ \mathcal{D}_p^{0,\epsilon} = \emptyset.$$

Очевидно, в общей ситуации $\beta(p) \le \beta_0(p)$, где $\beta_0(p) \equiv \inf\limits_{z \in \mathcal{D}_p^0} f^0(z)$ — классическое значение задачи (P_p^0). Справедлива следующая важная для дальнейших построений лемма.

Лемма 1.1. *Функция значений* $\beta : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ *является полунепрерывной снизу.*

Лемма доказывается точно так же, как и в случае выпуклой задачи в [11, лемма 1.2].

Определим обобщенную минимизирующую последовательность (ОМП) в задаче (P_p^0) как последовательность элементов $z^i \in \mathcal{D},\ i = 1, 2, \ldots$, такую, что $f^0(z^i) \le \beta(p) + \delta^i$, $z^i \in \mathcal{D}_p^{0,\epsilon^i}$ для некоторых последовательностей сходящихся к нулю неотрицательных чисел δ^i, ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$. Можно утверждать, что ввиду ограниченности $\mathcal{D}$ величина $\beta(p)$ конечна тогда и только тогда, когда в задаче (P_p^0) существует "допустимая" последовательность $z^i \in \mathcal{D}_p^{0,\epsilon^i}$, $i = 1, 2, \ldots$, где ϵ^i, $i = 1, 2, \ldots$, — некоторая последовательность сходящихся к нулю неотрицательных чисел.

С учетом приближенного задания исходных данных мы имеем вместо задачи (P_p^0) семейство зависящих от характеризующей ошибку их задания величины δ задач

$$(P_p^\delta) \qquad\qquad f^\delta(z) \to \inf,\ \ g^\delta(z) = p,\ \ z \in \mathcal{D}.$$

Верхний индекс δ в исходных данных задачи (P_p^δ) означает, что они либо заданы точно ($\delta = 0$), либо являются возмущенными ($\delta > 0$), т.е. задаются с ошибкой, величину которой и характеризует параметр $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое фиксированное число.

Определим ОМП-образующий оператор (см. [28], [29]) (определение ОМП-образующего оператора для выпуклых задач см. в [19], [20]), обсуждение взаимосвязи этого понятия с классическим понятием регуляризирующего оператора [12] в случае задачи частного вида (P) см. в [9].

Определение 1.1. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от δ^k, $k = 1, 2, \ldots$, вообще говоря, многозначный оператор $R_p(\cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных f^{δ^k}, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^k$, множество $R_p(\mathsf{f}^{\delta^k}, \delta^k) \equiv \mathcal{W}_p^{\delta^k} \subset \mathcal{D}$, называется *ОМП-образующим* в задаче (P_p^0), если любая последовательность $z^{\delta^k} \in \mathcal{W}_p^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \ldots$, есть ОМП в этой задаче.

Замечание 1.1. Обсуждение условий, при которых задача (P_p^0) разрешима см. ниже в замечании 3.1. В свою очередь, в замечании 3.2 можно найти обсуждение условий, при которых конструируемые ниже ОМП обладают свойствами слабой или сильной сходимости к решениям задачи (P_p^0) в случае гильбертова пространства Z.

2. СУБДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫХ СНИЗУ ФУНКЦИЙ, МФЛ И ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

При получении основных результатов центральную роль будут играть конструкции МФЛ. Эти конструкции естественным образом порождаются соответствущими конструкциями обобщенных субдифференциалов полунепрерывной снизу функции значений рассматриваемой оптимизационной задачи. Обобщенные субдифференциалы являются в последние десятилетия предметом интенсивного изучения в негладком анализе (см. [21]–[24]). Ниже нам понадобятся два важнейших в негладком анализе понятия нормалей к замкнутым множествам и соответствующие понятия субдифференциалов (субградиентов) полунепрерывных снизу функций в банаховых пространствах.

2.1. Субдифференциалы полунепрерывных снизу функций

Первым из используемых ниже двух понятий субдифференциалов является понятие проксимального субградиента полунепрерывной снизу функции (см., например, [21]–[23]) в гильбертовом пространстве. Напомним кратко необходимые факты, связанные с этим понятием. Для этого сначала напомним понятие проксимальной нормали (см., например, [22, гл. 4, 5], [23, гл. 1, разд. 1, 2]).

Определение 2.1. (а) Пусть H — гильбертово пространство, $S \subset H$ — замкнутое множество, $\bar{s} \in S$. Вектор $\zeta \in H$ называется *проксимальной нормалью* к множеству S в точке $\bar{s} \in S$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$\langle \zeta, s - \bar{s} \rangle \le M \| s - \bar{s} \|^2 \ \ \forall\, s \in S.$$

Множество всех таких векторов ζ, представляющее собой конус, обозначается через $\hat{N}_S(\bar{s})$ и называется *проксимальным нормальным конусом*.

(б) Пусть $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ называется *проксимальным субградиентом* функции f в точке $\bar{x}$, если $(\zeta, -1) \in \hat{N}_{\mathrm{epi}\ f}(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Множество всех таких векторов ζ обозначается через $\partial^P f(\bar{x})$ и называется проксимальным субградиентом f в точке $\bar{x}$.

Замечание 2.1. Можно показать, что ζ есть проксимальная нормаль к S в $\bar{s}$ тогда и только тогда, когда $\bar{s}$ есть ближайшая в S точка к некоторой точке вида $\bar{s} + t\zeta,\ t > 0$.

Напомним, наконец, критерий того, что данный вектор является проксимальным субградиентом полунепрерывной снизу функции в заданной точке (см., например, [22, утверждение 4А.3]).

Лемма 2.1. *Пусть H – гильбертово пространство, $f : H \to R^1 \cup \{+\infty\}$ – полунепрерывная снизу функция и $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Вектор $\zeta \in H$ является проксимальным субградиентом функции f в точке $\bar{x}$, т.е. $\zeta \in \partial^P f(x)$, тогда и только тогда, когда существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что*

$$\langle \zeta, x - \bar{x} \rangle \le f(x) - f(\bar{x}) + R\|x - \bar{x}\|^2 \ \ \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}) \equiv \{x' \in H : \|x' - \bar{x}\| < \delta\}$$

или

$$f(\bar{x}) - \langle \zeta, \bar{x} \rangle \le f(x) - \langle \zeta, x \rangle + R\|x - \bar{x}\|^2 \ \ \forall\, x \in S_\delta(\bar{x}).$$

Напомним далее понятие нормали Фреше к замкнутому множеству в банаховом пространстве, а также соответствующее понятие субдифференциала Фреше полунепрерывной снизу функции [21, 24]. Следующие два определения, а также замечание могут быть найдены в [24, разд. 1.1.1, 1.3.2].

Определение 2.2. Пусть Ω – непустое множество банахова пространства X. Пусть $x \in cl\,\Omega$ и $u \overset{\Omega}{\to} x$ означает, что $u \to x$ с $u \in \Omega$. Тогда непустое множество

$$\hat{N}(x; \Omega) \equiv \{x^* \in X^* : \limsup_{u \overset{\Omega}{\to} x} \frac{\langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \le 0\},$$

являющееся конусом, называется *нормальным конусом Фреше* к Ω в точке x. При $x \notin cl\,\Omega$ полагается $\hat{N}(x; \Omega) = \emptyset$.

Определение 2.3. Пусть $f : X \to R^1 \cup \{+\infty\}$ – полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве X, $\bar{x} \in \operatorname{dom} f$. Множество

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) \equiv \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, f(\bar{x})); \mathrm{epi}\ f)\},$$

называется *субдифференциалом Фреше* функции f в точке $\bar{x}$. При этом полагается $\hat{\partial} f(\bar{x}) = \emptyset$ в случае $x \notin \operatorname{dom} f$.

Справедливо следующее

Замечание 2.2. Субдифференциал $\hat{\partial} f(\bar{x})$ может быть записан в виде

$$\hat{\partial} f(\bar{x}) = \{x^* \in X^* : \liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\|u - x\|} \ge 0\}.$$

Справедлива также следующая [24, утверждение 1.84] лемма.

Лемма 2.2. *Пусть $f : X \to R^1 \cup \{+\infty\}$ — полунепрерывная снизу функция, определенная на банаховом пространстве X, $x \in \operatorname{dom} f$. Тогда $x^* \in \hat{\partial} f(x)$ в том и только в том случае, если для любого $\epsilon > 0$ существует окрестность X_ϵ точки x такая, что*

$$f(x') - f(x) - \langle x^*, x' - x \rangle + \epsilon \|x' - x\| \ge 0 \ \ \forall\, x' \in X_\epsilon$$

или

$$f(x) - \langle x^*, x\rangle \le f(x') - \langle x^*, x'\rangle + \epsilon\|x' - x\| \ \ \forall\, x' \in X_\epsilon.$$

2.2. Плотность обобщенной субдифференцируемости

Важнейшим свойством полунепрерывных снизу функций $f:\ X \to R^1 \cup \{+\infty\}$ является то, что как множество $\partial^P f(x)$ в случае гильбертова пространства X, так и множество $\hat{\partial} f(x)$ в случае пространства X из достаточно обширного класса банаховых пространств (подробности см., например, в [21]–[24]) не пусто для плотного в $\mathrm{dom}\, f$ множества точек x. В настоящей работе в качестве пространства X выступает гильбертово пространство H, для которого указанные выше свойства заведомо справедливы (см., например, [23, теорема 3.1], [24, следствие 2.29]).

2.3. Субдифференциалы функции значений и порождаемые ими модифицированные функции Лагранжа

Как показано в [14], [15], [30], для задачи (P_p) с полунепрерывной снизу функцией значений $\beta\ :\ H \to R^1\cup\{+\infty\}$ являются естественными две конструкции МФЛ в зависимости от субдифференциальных свойств β в фиксированной индивидуальной точке p.

2.3.1. Первая МФЛ. В соответствии с п. 2.2 множество $\{p \in \mathrm{dom}\,\beta:\ \partial^P\beta(p) \ne \emptyset\}$ всюду плотно в $\mathrm{dom}\,\beta$. Если точка $p \in \mathrm{dom}\,\beta$ такова, что $\partial^P\beta(p) \ne \emptyset$ и $\zeta \in \partial^P\beta(p)$, то для задачи (P_p) естественной является конструкция МФЛ вида

$$L^2_{p,c}(z,\zeta) \equiv f(z) - \langle\zeta, g(z) - p\rangle + c\|g(z) - p\|^2, \ \ z \in \mathcal{D},$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$, зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \partial^P\beta(p)$, которому естественно и удобно придать смысл коэффициента штрафа. Покажем это, используя условие компактности образа $g(\mathcal{D})$.

Действительно, в этом случае из леммы 2.1 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ (зависящие от точки p и элемента ζ) такие, что

$$\beta(p) - \langle\zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + R\|p' - p\|^2 \ \ \forall\, p' \in S_\delta(p). \tag{2.1}$$

Так как в силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ эффективное множество $\mathrm{dom}\,\beta$ ограничено и функция β ограничена на множестве $\mathrm{dom}\,\beta$, то в силу неравенства (2.1) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p,\zeta) > 0$

$$\beta(p) - \langle\zeta, p\rangle \le \beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + c\|p' - p\|^2 \ \ \forall\, p' \in H \tag{2.2}$$

или

$$\beta(p) - \langle\zeta, p\rangle < \beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\|^2 \ \ \forall\, p' \in H, \ \ p' \ne p, \qquad \hat{c} > c,$$

откуда в силу строгого неравенства $\hat{c} > c$, полунепрерывности снизу функции значений β и ограниченности множества $\mathrm{dom}\,\beta$ следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p') - \langle\zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\|^2 \to \inf, \ \ p' \in H,$$

является лишь любая последовательность $p^k,\ k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке p такая, что $\beta(p^k) \to \beta(p),\ k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда следует, что в задаче минимизации МФЛ

$$L^2_{p,\hat{c}}(z,\zeta) \equiv f(z) - \langle\zeta, g(z) - p\rangle + \hat{c}\|g(z) - p\|^2 \to \inf, \ \ z \in \mathcal{D}, \tag{2.3}$$

минимизирующей является лишь последовательность $z^k,\ k = 1, 2, \ldots$, такая, что $f(z^k) \to \beta(p),\ \ g(z^k) \to p$, $k \to \infty$, и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{z\in\mathcal{D}}(f(z) - \langle\zeta, g(z) - p\rangle + \hat{c}\|g(z) - p\|^2) = \beta(p). \tag{2.4}$$

Покажем это. Пусть $\bar{z}^k,\ k = 1, 2, \ldots,$ — минимизирующая последовательность в задаче минимизации (2.3). Тогда благодаря ограниченности $\mathcal{D}$, ограниченности значений функции f и компактности области значений оператора g без ограничения общности считаем, что $f(\bar{z}^k) \to \bar{f},\ g(\bar{z}^k) \to \bar{p},\ k \to \infty$, где $\bar{f} \in R^1,\ \bar{p} \in H$ — некоторые элементы. Тогда рассмотрим два возможных случая.

Во-первых, если $\bar{p} = p$, но $\bar{f} \ne \beta(p)$, то в силу последних предельных соотношений, с учетом определения величины $\beta(p)$, можем записать

$$f(\bar{z}^k) + \langle -\zeta, g(\bar{z}^k) - p\rangle + \hat{c}\|g(\bar{z}^k) - p\|^2 \to \bar{f} > \beta(p).$$

Во-вторых, если же $p \neq \bar{p}$, то в силу тех же предельных соотношений, определения обобщенной нижней грани $\beta(\bar{p})$ и соотношений (2.2), можем записать одновременно $\bar{f} \geq \beta(\bar{p})$,

$$f(\bar{z}^k) + \langle -\zeta, g(\bar{z}^k) - p\rangle + \hat{c}\|g(\bar{z}^k) - p\|^2 \to \bar{f} + \langle -\zeta, \bar{p} - p\rangle + \hat{c}\|\bar{p} - p\|^2 \geq$$

$$\geq \beta(\bar{p}) + \langle -\zeta, \bar{p} - p\rangle + \hat{c}\|\bar{p} - p\|^2 > \beta(p).$$

Полученные в обоих случаях строгие неравенства вступают в противоречие с предположением о том, что последовательность $\bar{z}^k$, $k = 1, 2, \ldots$, — минимизирующая, так как для последовательности z^k, $k = 1, 2, \ldots$, указанного выше вида ($f(z^k) \to \beta(p)$, $g(z^k) \to p$, $k \to \infty$) мы можем записать

$$f(z^k) + \langle -\zeta, g(z^k) - p\rangle + \hat{c}\|g(z^k) - p\|^2 \to \beta(p).$$

Далее, можно утверждать, что если для некоторых $\zeta \in H$, $\hat{c} > 0$ выполняется равенство (2.4), то выполняется и неравенство (2.2) при $c = \hat{c}$, а следовательно, и неравенство (2.1) при $R = \hat{c}$ и любом $\delta > 0$, т.е. $\zeta \in \partial^P \beta(p)$. Для того чтобы это показать, перепишем равенство (2.4) в виде

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \leq f(z) - \langle \zeta, g(z)\rangle + \hat{c}\|g(z) - p\|^2 \ \forall\, z \in \mathcal{D}. \tag{2.5}$$

Пусть $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\bar{p} \in \operatorname{dom}\beta$ – такие произвольные последовательность и точка, что $f(\bar{z}^k) \to \to \beta(\bar{p})$, $g(\bar{z}^k) \to \bar{p}$, $k \to \infty$. Тогда с учетом неравенства (2.5) получаем

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \leq \beta(\bar{p}) - \langle \zeta, \bar{p}\rangle + \hat{c}\|\bar{p} - p\|^2,$$

т.е., действительно, неравенство (2.2) выполняется.

Более того, как показано в [30], если коэффициент штрафа $c = c(\zeta)$ можно взять независимым от $\zeta \in \partial^P \beta(p)$, то этот коэффициент можно считать столь большим, что в задаче минимизации МФЛ

$$L^2_{p,c}(z, \zeta) \equiv f(z) - \langle \zeta, g(z) - p\rangle + c\|g(z) - p\|^2 \to \inf, \ \ z \in \mathcal{D},$$

равенство

$$\inf_{z \in \mathcal{D}} (f(z) - \langle \zeta, g(z) - p\rangle + c\|g(z) - p\|^2) = \beta(p)$$

выполняется лишь при всех $\zeta \in \partial^P \beta(p)$, и минимизирующей в ней является лишь последовательность z^k, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $f(z^k) \to \beta(p)$, $g(z^k) \to p$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность.

2.3.2. Вторая МФЛ. В соответствии с п. 2.2 множество $\{p \in \operatorname{dom}\beta : \hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset\}$ всюду плотно в $\operatorname{dom}\beta$. Если точка $p \in \operatorname{dom}\beta$ такова, что $\hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset$ и $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, то для задачи ($P_p$) естественной является конструкция МФЛ вида

$$L^1_{p,c}(z, \zeta) \equiv f(z) - \langle \zeta, g(z) - p\rangle + c\|g(z) - p\|, \ \ z \in \mathcal{D},$$

с некоторым достаточно большим коэффициентом $c > 0$, зависящим, вообще говоря, от $\zeta \in \hat{\partial}\beta(p)$, который, как и в предыдущем случае, будем называть коэффициентом штрафа. Рассуждения, аналогичные тем, что и при получении первой МФЛ, опять же с опорой на условие компактности образа $g(\mathcal{D})$, можно провести и в случае использования понятия субдифференциала Фреше. В этом случае из леммы 2.2 следует, что существуют постоянные $R > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \leq \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + R\|p' - p\| \ \ \forall\, p' \in S_\delta(p). \tag{2.6}$$

Так как в силу ограниченности множества $\mathcal{D}$ эффективное множество $\operatorname{dom}\beta$ ограничено и функция β ограничена на множестве $\operatorname{dom}\beta$, то в силу неравенства (2.6) можем записать для некоторой постоянной $c = c(p, \zeta) > 0$

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle \leq \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + c\|p' - p\| \ \ \forall\, p' \in H$$

или

$$\beta(p) - \langle \zeta, p\rangle < \beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\| \ \ \forall\, p' \in H, \ \ p' \neq p, \qquad \hat{c} > c,$$

откуда в силу полунепрерывности снизу функции значений β и ограниченности множества $\operatorname{dom}\beta$ следует, что минимизирующей последовательностью в задаче минимизации

$$\beta(p') - \langle \zeta, p'\rangle + \hat{c}\|p' - p\| \to \inf, \ \ p' \in H,$$

является лишь любая последовательность $p^k,\ k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к точке p такая, что $\beta(p^k) \to \beta(p),\ k \to \infty$, и никакая другая последовательность. Отсюда, как и в случае первой МФЛ, следует, что в задаче минимизации второй МФЛ

$$L^1_{p,\hat{c}}(z, \zeta) \equiv f(z) - \langle \zeta, g(z) - p\rangle + \hat{c}\|g(z) - p\| \to \inf,\ \ z \in \mathcal{D}, \tag{2.7}$$

минимизирующей является лишь последовательность $z^k,\ k = 1, 2, \ldots$, такая, что $f(z^k) \to \beta(p),\ \ g(z^k) \to p$, $k \to \infty$ и никакая другая последовательность. При этом справедливо равенство

$$\inf_{z\in\mathcal{D}}(f(z) - \langle \zeta, g(z) - p\rangle + \hat{c}\|g(z) - p\|) = \beta(p).$$

2.3.3. Комбинированная МФЛ. Далее определим, с учетом конструкций МФЛ в (2.3), (2.7) (см. также [25]–[27]), комбинированную (смешанную) МФЛ задачи (P^δ_p) (см. [14], [15], [30])

$$L^\delta_{p,c}(z, \lambda) \equiv \frac{1}{2}L^{\delta,1}_{p,2c}(z, \lambda) + \frac{1}{2}L^{\delta,2}_{p,2c}(z, \lambda) \equiv$$

$$\equiv f^\delta(z) + \langle \lambda, g^\delta(z) - p\rangle + c\psi(\|g^\delta(z) - p\|), z \in \mathcal{D},\ \lambda \in H,\ c \geq 0,$$

где функция $\psi :\ R^1_+ \to R^1_+$ определяется формулой

$$\psi(t) \equiv l_1 t + l_2 t^2,\ t \in R^1_+,$$

в которой весовые множители $l_1,\ l_2 \in \{0, 1\}$ — фиксированные числа. Функции ψ удобно придать смысл функции штрафа.

2.4. Модифицированная двойственная задача

Определим, в свою очередь, и модифицированную двойственную задачу

$$V^\delta_{p,c}(\lambda) \to \sup,\ \ \lambda \in H,\quad V^\delta_{p,c}(\lambda) \equiv \inf_{z\in\mathcal{D}} L^\delta_{p,c}(z, \lambda).$$

Условия на исходные данные задачи (P^0_p) таковы, что вогнутая функция $V^\delta_{p,c}(\lambda),\ \lambda \in H$ при $\delta \in [0, \delta_0]$ является определенной (конечной) при любом $c \in R^1$ для любой точки $\lambda \in H$ и ограниченной на любом множестве вида $\{\lambda \in H\ :\ \|\lambda\| < C\}$, а значит, и локально липшицевой (см. [31, определение 2.3]) на $\operatorname{dom} V^\delta_{p,c} = H$ (см. [31, теорема 2.1, следствие 2.3]). Кроме того, справедлива оценка

$$|V^\delta_{p,c}(\lambda) - V^0_{p,c}(\lambda)| \leq C\delta(1 + \|\lambda\| + |c|)\ \ \forall\lambda \in H,\ c \geq 0, \tag{2.8}$$

где $C > 0$ — независящая от δ постоянная. Для ее доказательства предположим без ограничения общности рассуждений, что $V^\delta_{p,c}(\lambda) \geq V^0_{p,c}(\lambda)$. Тогда можем записать следующую цепочку равенств и неравенств:

$$|V^\delta_{p,c}(\lambda) - V^0_{p,c}(\lambda)| = V^\delta_{p,c}(\lambda) - V^0_{p,c}(\lambda) =$$

$$= V^\delta_{p,c}(\lambda) - \inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0_{p,c}(z, \lambda) - L^\delta_{p,c}(z, \lambda) + L^\delta_{p,c}(z, \lambda)) \leq$$

$$\leq V^\delta_{p,c}(\lambda) - V^\delta_{p,c}(\lambda) - \inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0_{p,c}(z, \lambda) - L^\delta_{p,c}(z, \lambda)) =$$

$$= -\inf_{z\in\mathcal{D}}(L^0_{p,c}(z, \lambda) - L^\delta_{p,c}(z, \lambda)) \leq \sup_{z\in\mathcal{D}}|L^\delta_{p,c}(z, \lambda) - L^0_{p,c}(z, \lambda)|,$$

очевидным следствием которой, с учетом оценок (1.2), и является доказываемая оценка (2.8).

2.5. Супердифференциал функции цели модифицированной двойственной задачи

Ниже важное значение для нас будет иметь лемма, в которой устанавливается выражение для супердифференциала $\partial V^\delta_{p,c}$ вогнутой функции значений $V^\delta_{p,c}$ при условии компактности образа оператора $g^\delta\ :\ \mathcal{D} \to H$. Здесь под супердифференциалом вогнутой функции $V^\delta_{p,c}$, как и ранее, понимается субдифференциал (в смысле выпуклого анализа) с обратным знаком выпуклой функции $-V^\delta_{p,c}$. Утверждение этой формулируемой ниже леммы является следствием утверждения, доказательство которого см. в [13, лемма 2]. Строго говоря, лемма 2 в [13] доказывается в случае гильбертова пространства Z, однако это доказательство практически дословно повторяется в рассматриваемом здесь случае, когда Z — полное метрическое пространство.

Лемма 2.3. *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа)* $\partial V^{\delta}_{p,c}(\lambda)$, $\delta \in [0, \delta_0]$, *вогнутой функции* $V^{\delta}_{p,c}$ *в точке* $\lambda \in H$ *при любом* $c \in R^1$ *выражается формулой*

$$\partial V^{\delta}_{p,c}(\lambda) = \partial_C V^{\delta}_{p,c}(\lambda) = \operatorname{cl}\operatorname{conv}\{\lim_{i\to\infty}(g^{\delta}(z^i) - p) : \tag{2.9}$$

$$z^i \in \mathcal{D},\ \ L^{\delta}_{p,c}(z^i, \lambda) \to \inf_{z\in\mathcal{D}} L^{\delta}_{p,c}(z, \lambda),\ \ i \to \infty\} \equiv \operatorname{cl}\operatorname{conv} Q^{\delta}_{p,c}(\lambda),$$

где $\partial_C V^{\delta}_{p,c}(\lambda)$ *— обобщенный градиент Кларка функции* $V^{\delta}_{p,c}$ *в точке* λ, $\operatorname{cl}\operatorname{conv} A$ *— замыкание выпуклой оболочки множества* A.

2.6. Обобщенный вектор Куна—Таккера

Введем также соответствующее понятие обобщенного вектора Куна—Таккера задачи (P^0_p) Возможны две и только две ситуации для исходной задачи (P^0_p):

А) в задаче существует обобщенный вектор Куна—Таккера, т.е. вектор $\lambda \in H$, для которого $\beta(p) \leq \leq \inf_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z, \lambda)$ для некоторого $c > 0$;

Б) в задаче не существует обобщенного вектора Куна—Таккера в указанном смысле.

В соответствии со сказанным в пп. 2.2, 2.3 можно утверждать, что:

I. Множество тех $p \in \operatorname{dom}\beta$, для которых задача (P^0_p) обладает обобщенным вектором Куна—Таккера, является всюду плотным в $\operatorname{dom}\beta$.

II. Обобщенный вектор Куна—Таккера в задаче (P^0_p) заведомо существует тогда, когда имеет место, по крайней мере, одно из следующих двух условий: 1. $\partial^P\beta(p) \neq \emptyset$; 2. $\hat{\partial}\beta(p) \neq \emptyset$. При этом в случае существования обобщенного вектора Куна—Таккера λ в задаче (P^0_p), когда штрафной множитель $l_1 = 0$, выполняется и включение $\lambda \in \partial^P\beta(p)$.

Существование вектора Куна—Таккера в указанном обобщенном смысле эквивалентно тому, что при некотором $c > 0$ целевая функция $V^0_{p,c}(\lambda),\ \lambda \in H$, модифицированной двойственной задачи

$$V^0_{p,c}(\lambda) \to \sup,\ \ \lambda \in H,$$

достигает значения $\beta(p)$ в некоторой точке $\lambda^0 \in H$. Действительно, пусть, с одной стороны, λ^0 — вектор Куна—Таккера в указанном смысле. Для любой ОМП $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, задачи (P^0_p) можем записать очевидное предельное соотношение

$$L^0_{p,c}(z^i, \lambda) \to \beta(p),\ \ i \to \infty\quad \forall\lambda \in H.$$

Отсюда имеем очевидное неравенство $V^0_{p,c}(\lambda) \leq \beta(p)\ \forall\lambda \in H$. Поэтому, так как

$$\beta(p) \leq \inf_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z, \lambda^0) \leq L^0_{p,c}(z^i, \lambda^0),$$

то

$$\beta(p) = \inf_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z, \lambda^0) = V^0_{p,c}(\lambda^0).$$

Так как, к тому же, $V^0_{p,c}(\lambda) \leq \beta(p)\ \forall\lambda \in H$, то получаем

$$\sup_{\lambda\in H} V^0_{p,c}(\lambda) = V^0_{p,c}(\lambda^0) = \beta(p).$$

С другой стороны, если $V^0_{p,c}$ достигает равного $\beta(p)$ максимума в точке $\lambda^0 \in H$, т.е.

$$\sup_{\lambda\in H} V^0_{p,c}(\lambda) = V^0_{p,c}(\lambda^0) = \beta(p) = \inf_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z, \lambda^0),$$

то, очевидно, λ^0 – обобщенный вектор Куна–Таккера.

3. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ПЛ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

В основе регуляризации ПЛ в нелинейной задаче (P^0_p) лежит процедура основанной на двойственности регуляризации [15] (см. также [14]).

3.1. Двойственная регуляризация в нелинейной задаче на условный экстремум

Лемма 2.3 дает возможность организовать поиск максимума в задаче максимизации при каждом $c > 0$ сильно вогнутого функционала $R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \equiv V^{\delta}_{p,c}(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2, \lambda \in H, \delta \geq 0, \alpha > 0$. На этом пути с целью конструирования ОМП в исходной задаче (P^0_p) будем рассматривать при некотором достаточно большом $c > 0$ задачу

$$R^{\delta,\alpha}_{p,c}(\lambda) \to \max, \quad \lambda \in \Lambda_c \equiv \{\lambda \in H : \|\lambda\| \leq c\}. \tag{3.1}$$

Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha}_{p,c}$ единственную в Λ_c точку, дающую на Λ_c максимум функционалу $R^{\delta,\alpha}_{p,c}$ (она, очевидно, существует). Покажем, что при условии согласования

$$\frac{\delta}{\alpha(\delta)} \to 0, \ \alpha(\delta) \to 0, \ \delta \to 0, \tag{3.2}$$

стабилизация (регуляризация) по Тихонову (3.1) процесса поиска максимума в модифицированной двойственной задаче

$$V^0_{p,c}(\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in \Lambda_c, \tag{3.3}$$

конструктивно порождает ОМП $z^i \in \mathcal{D}, \ i = 1, 2, \ldots$, в задаче (P^0_p), т.е. $f^0(z^i) \to \beta(p), \ \ z^i \in \mathcal{D}^{0,\epsilon^i}_p, \ \ \epsilon^i \to 0, i \to \infty$. При этом в случае **А)** величина c может быть взята равной любому фиксированному достаточно большому положительному числу. В случае же **Б)** штрафной коэффициент c необходимо стремить к $+\infty$ согласованно со стремлением к нулю δ.

3.1.1. Случай А). Итак, предполагаем, что задача (P^0_p) обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле и хотя бы один из весовых коэффициентов l_1, l_2 больше нуля. Будем опираться в этом случае на соответствующие результаты [15]. Рассматриваем задачу (3.1) при произвольном достаточно большом фиксированном $c > 0$. Замкнутое выпуклое множество всех точек λ, доставляющих равное $\beta(p)$ максимальное значение функции $V^0_{p,c}$ на H, обозначим через $K_{p,c}$. Пусть далее $c > 0$ столь велико, что $K_{p,c} \cap \Lambda_c \neq \emptyset$.

3.1.1.1. Точки максимума целевой функции модифицированной двойственной задачи и ОМП в исходной задаче условной минимизации. Как показано в [15, разд. 3, с. 958], имеет место следующее утверждение о связи точек максимума функции $V^0_{p,c}$, в которых принимается значение $\beta(p)$, с ОМП в исходной задаче (P^0_p).

Утверждение 3.1. *Пусть $\tilde{c} > c$. Если $\lambda \in K_{p,c}$, то для любой минимизирущей в задаче*

$$L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda) \to \inf, \ z \in \mathcal{D},$$

последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, справедливы предельные соотношения

$$L^0_{p,\tilde{c}}(z^i, \lambda) \to \beta(p) = \inf_{z \in \mathcal{D}} L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda), \ \ f^0(z^i) \to \beta(p), \ \ g^0(z^i) - p \to 0, \ i \to \infty, \tag{3.4}$$

что обеспечивает равенства (см. равенство (2.9))

$$\{0\} = Q^0_{p,\tilde{c}}(\lambda) = \partial V^0_{p,\tilde{c}}(\lambda),$$

и говорит о том, что каждая из указанных последовательностей $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, является ОМП в задаче (P^0_p).

Доказательство. Так как $\lambda \in K_{p,c} \subset H$, то можем записать $\beta(p) = \inf_{z \in \mathcal{D}} L^0_{p,c}(z, \lambda)$, а, следовательно, и $\beta(p) = \inf_{z \in \mathcal{D}} L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda)$, так как любая ОМП в задаче (P^0_p) является минимизирующей последовательностью как для функционала $L^0_{p,c}(z, \lambda), \ z \in \mathcal{D}$, так и для функционала $L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda), \ z \in \mathcal{D}$. Предположим, что существует такая последовательность

$$z^i \in \mathcal{D}, \ i = 1, 2, \ldots, \ L^0_{p,\tilde{c}}(z^i, \lambda) \to \inf_{z \in \mathcal{D}} L^0_{p,\tilde{c}}(z, \lambda) = \beta(p), \ i \to \infty,$$

что

$$\lim_{i \to \infty} (g^0(z^i) - p) = \tilde{g} \neq 0. \tag{3.5}$$

Но тогда можем записать

$$L^0_{p,\tilde{c}}(z^i, \lambda) = f^0(z^i) + \langle \lambda, g^0(z^i) - p \rangle + \tilde{c}\psi(\|g^0(z^i) - p\|) =$$

$$= f^0(z^i) + \langle \lambda, g^0(z^i) - p \rangle + c\psi(\|g^0(z^i) - p\|) + (\tilde{c} - c)\psi(\|g^0(z^i) - p\|) =$$

$$= L^0_{p,c}(z^i, \lambda) + (\tilde{c} - c)\psi(\|g^0(z^i) - p\|) \to \beta(p), \ i \to \infty,$$

откуда ввиду соотношений (3.5) получаем, что $\limsup\limits_{i\to\infty} L^0_{p,c}(z^i,\lambda) < \beta(p)$, что, в свою очередь, влечет строгое неравенство $\inf\limits_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z,\lambda) < \beta(p)$, которое противоречит равенству $\inf\limits_{z\in\mathcal{D}} L^0_{p,c}(z,\lambda) = V^0_{p,c}(\lambda) = \beta(p)$. Таким образом, первое утверждение доказано. Справедливость второго утверждения вытекает из уже доказанного первого с учетом определения множества $Q^0_{p,\tilde{c}}(\lambda)$ (см. выражение (2.9) для супердифференциала целевой функции модифицированной двойственной задачи).

3.1.1.2. Стабилизация по Тихонову модифицированной двойственной задачи. В силу оценки (2.8), условия согласования (3.2) и теоремы о сходимости метода стабилизации Тихонова (см., например, [5, гл. 9, § 4, теорема 2]) можно утверждать, что справедливо следующее.

Утверждение 3.2. *Если $K_{p,c}\cap\Lambda_c = \emptyset$, то*

$$\|\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_{p,c} - \lambda^0_{p,c}\| \to 0,\ \ \delta\to 0, \tag{3.6}$$

где $\lambda^0_{p,c}$ — минимальное по норме решение задачи (3.3). Если же $K_{p,c}\cap\Lambda_c \neq \emptyset$, то точка $\lambda^0_{p,c}$ в предельном соотношении (3.6) одновременно является и минимальной по норме точкой во множестве $K_{p,c}$.

3.1.1.3. Конструирование ОМП в исходной задаче условной минимизации. Итак, пусть $K_{p,c}\cap\Lambda_c \neq \emptyset$. Пусть далее $\delta^s,\ s = 1,2,\ldots,$ — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Рассмотрим в этом случае последовательность $z^{c,\delta^s,i}_\kappa,\ i = 1,2,\ldots,$ являющуюся минимизирующей для функционала $L^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c+\kappa}(z,\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c})$, $z\in\mathcal{D}$, $s = 1,2,\ldots,$ где $\kappa > 0$ – не зависящая от $s = 1,2,\ldots$ постоянная. Примем при этом обозначение $z^{c,\delta^s,i}_0 \equiv z^{c,\delta^s,i}$ при $\kappa = 0$. Тогда можем записать неравенства

$$\begin{gathered} f^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i}_\kappa) + \langle\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}, g^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i}_\kappa) - p\rangle + (c+\kappa)\psi(\|g^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i}_\kappa) - p\|) \le \\ \le V^{\delta^s}_{p,c+\kappa}(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}) + \epsilon^{c,\delta^s,i},\ \ i = 1,2,\ldots,\ \ \epsilon^{c,\delta^s,i}\to 0,\ \ i\to\infty,\ \ i = 1,2,\ldots. \end{gathered} \tag{3.7}$$

В силу ограниченности множества Λ_c и оценок (1.2), (2.8), а также выбора подпоследовательности $i(c,s)$, $s = 1,2,\ldots,$ последовательности $i = 1,2,\ldots$ такой, что $\epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)} \to 0,\ \ s\to\infty$, из (3.7) выводим, обозначив $z^{c,\delta^s,i(c,s)}_\kappa \equiv z^s_\kappa$, что

$$\begin{gathered} f^0(z^s_\kappa) + \langle\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}, g^0(z^s_\kappa) - p\rangle + (c+\kappa)\psi(\|g^0(z^s_\kappa) - p\|) \le \\ \le V^0_{p,c+\kappa}(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}) + \epsilon^{c,\delta^s,i(c,s)} + \gamma^s,\ \ s = 1,2,\ldots, \end{gathered}$$

где $\gamma^s \to 0,\ s\to\infty$. В свою очередь, из этой оценки в силу предельного соотношения (3.6) и непрерывности функционала $V^0_{p,c+\kappa}$ (см. п. 2.4), получаем

$$\begin{gathered} f^0(z^s_\kappa) + \langle\lambda^0_{p,c}, g^0(z^s_\kappa) - p\rangle + (c+\kappa)\psi(\|g^0(z^s_\kappa) - p\|) \le \\ \le V^0_{p,c+\kappa}(\lambda^0_{p,c}) + \widetilde{\gamma}^s,\ \ s = 1,2,\ldots,\ \ \widetilde{\gamma}^s \to 0,\ \ s\to\infty. \end{gathered}$$

Последнее неравенство говорит о том, что последовательность $z^s_\kappa \equiv z^{c,\delta^s,i(c,s)}_\kappa$, $s = 1,2,\ldots,$ является минимизирующей в задаче

$$L^0_{p,c+\kappa}(z,\lambda^0_{p,c}) \to \inf,\ \ z\in\mathcal{D}.$$

Но такой последовательностью в силу включения $\lambda^0_{p,c}\in K_{p,c}$, строгого неравенства $\kappa > 0$ и утверждения 3.1 может быть лишь последовательность с указанными свойствами (3.4) при $\tilde{c} = c+\kappa$. Таким образом, сконструированная выше последовательность элементов $z^s_\kappa \equiv z^{c,\delta^s,i(c,s)}_\kappa$, $s = 1,2,\ldots,$ будет представлять собой ОМП в задаче (P^0_p).

Итак, в общей ситуации для построения ОМП в задаче (P^0_p) в случае **A)** требуется в регуляризованном процессе максимизации модифицированной двойственной задачи решать задачу минимизации МФЛ при двух значениях штрафного коэффициента c: c и $c+\kappa$. В то же время, как показано в [15], [30], во многих важных частных случаях, когда известна дополнительная информация о субдифференциальных свойствах функции значений β в конкретной точке $p\in\operatorname{dom}\beta$, ОМП в задаче (P^0_p) будет построенная выше последовательность $z^s_\kappa \equiv z^{c,\delta^s,i(c,s)}_\kappa$, $s = 1,2,\ldots,$ при $\kappa = 0$: $z^s_0 \equiv z^s,\ \ s = 1,2,\ldots$. В частности, такими важными частными случаями являются следующие (подробности см. в [15], [30]).

1. Для любого $\zeta\in\partial^P\beta(p)$ неравенство

$$\beta(p) - \langle\zeta,p\rangle \le \beta(p') - \langle\zeta,p'\rangle + l\|p'-p\|^2\ \ \forall p'\in H$$

выполняется с некоторым независящим от ζ штрафным коэффициентом $l = l(p)$. Последнее выполняется, например, тогда, когда множество $\partial^P\beta(p)$ является одноточечным, что, в силу включения $\partial^P\beta(p)\subset\hat{\partial}\beta(p)$, имеет место, в частности, тогда, когда $\partial^P\beta(p)\neq\emptyset$ и одноточечным является множество $\hat{\partial}\beta(p)$.

2. Проксимальный субградиент $\partial^P \beta(p)$ содержит минимальный по норме элемент. Это будет заведомо так, если, например, $\partial^P \beta(p)$ замкнутое множество.

3.1.1.4. Теорема сходимости процедуры двойственной регуляризация для решения исходной нелинейной задачи на условный экстремум в случае A). Подытоживая сказанное выше, можно утверждать, что для процесса построения ОМП в задаче (P_p^0) важнейшее значение имеет точность решения задачи минимизации МФЛ $L_{p,c}^{\delta}(z, \lambda_{p,c}^{\delta,\alpha(\delta)})$, $z \in \mathcal{D}$ при каждом $\delta > 0$. Если при практическом решении задачи (P_p^0) такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, то в ней конструктивно указывается ОМП. Таким образом, следуя [13], [15], [30], можем сформулировать следующую теорему сходимости метода двойственной регуляризации в нелинейной задаче (P_p^0) (см. [15, теорема 3.1]). Обозначим с этой целью через $Z_p^{c,\kappa,\gamma,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{D}$, $\kappa \geq 0$, множество всех элементов $z^\gamma \in \mathcal{D}$, удовлетворяющих неравенству $L_{p,c+\kappa}^{\delta}(z^\gamma, \lambda) \leq L_{p,c+\kappa}^{\delta}(z, \lambda) + \gamma \ \forall z \in \mathcal{D}$, т.е. множество всех γ-оптимальных элементов в задаче минимизации МФЛ

$$L_{p,c+\kappa}^{\delta}(z, \lambda) \to \inf, \ z \in \mathcal{D}. \tag{3.8}$$

Примем также обозначение $Z_p^{c,0,\gamma,\delta}[\lambda] \equiv Z_p^{c,\gamma,\delta}[\lambda]$.

Теорема 3.1. *Пусть δ^s, $s = 1, 2, \ldots$, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Тогда, если задача (P_p^0) обладает вектором Куна—Таккера в указанном выше обобщенном смысле (случай* ***A)****) или, другими словами, точка $p \in \operatorname{dom}\beta$ принадлежит плотному в $\operatorname{dom}\beta$ множеству всех точек, для которых эта параметрическая задача обладает вектором Куна—Таккера, то в предположении положительности хотя бы одного из двух штрафных коэффициентов l_1, l_2 найдется достаточно большое $c > 0$ такое, что оператор $R_p(\cdot, \cdot, \delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество*

$$R_p(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, \delta^s) \equiv Z_p^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}] \subset \mathcal{D},$$

где $\epsilon^s \to 0$, $s \to \infty$ и выполняется условие согласования $\delta^s/\alpha(\delta^s) \to 0$, $s \to \infty$, является ОМП-образующим в задаче (P_p^0). Одновременно выполняются предельные соотношения

$$\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)} \to \lambda_{p,c}^0, \quad V_{p,c}^0(\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}) \to \beta(p), \quad s \to \infty,$$

где $\lambda_{p,c}^0$ — минимальный по норме во множестве Λ_c вектор Куна—Таккера задачи (P_p^0). Если же функция значений β обладает в точке p некоторыми дополнительными субдифференциальными свойствами в указанном выше смысле ***1, 2*** *(см. п. 3.1.1.3), то величину κ можно считать равной нулю. В случае разрешимости задачи минимизации (3.8) можно считать, что $\epsilon^s = 0$, $s = 1, 2, \ldots$.*

Замечание 3.1. Разрешимость задачи минимизации (3.8) имеет место во многих важных конкретных ситуациях. Опишем одну из таких ситуаций, возникающих в естественнонаучных приложениях, связанных с нелинейными некорректными задачами (см., например, [28], [32, гл. 1, §4]). Пусть Z — гильбертово пространство, функционал $f^\delta : \mathcal{D} \to R^1$ слабо полунепрерывен снизу (в качестве такого функционала можно взять, например, $f^\delta(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$), оператор $g^\delta : \mathcal{D} \to H$ переводит слабо сходящиеся к элементу z^0 последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, в сходящиеся сильно к $g^\delta(z^0)$ элементы последовательности $g^\delta(z^i)$, $i = 1, 2, \ldots$ ("полная непрерывность" оператора g^δ), $\mathcal{D} \subset Z$ — ограниченное, выпуклое и замкнутое множество. Тогда можно утверждать, что задача минимизации МФЛ (3.8) разрешима и, стало быть, в этом случае можно считать, что $\epsilon^s = 0$, $s = 1, 2, \ldots$, в рамках теоремы 3.1. Можно заметить также, что при сделанных предположениях разрешимой является и сама исходная задача нелинейного программирования (P_p^0). Можно привести и другие группы условий на исходные данные задачи (P_p^δ), при которых имеет место разрешимость задачи (3.8).

Замечание 3.2. Важно заметить, что в зависимости от свойств исходных данных задачи (P_p^0) конструируемые ОМП обладают соответствующими свойствами сходимости. Проиллюстрируем сказанное на примере из замечания 3.1. Во-первых, в условиях этого примера все слабые предельные точки каждой ОМП в задаче (P_p^0) являются ее решениями. Это доказывается посредством стандартных рассуждений, основанных на свойствах слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества в гильбертовом пространстве, слабой полунепрерывности снизу функционала f^0 и "полной непрерывности" оператора g^0. Если же, во-вторых, в дополнение к описанным в примере из замечания 3.1 условиям функционал $f^0 : \mathcal{D} \to R^1$ является еще сильно выпуклым и субдифференцируемым (в смысле выпуклого анализа), как, например, функционал $f^0(\cdot) \equiv \|\cdot\|^2$, то все указанные выше слабые предельные точки — решения задачи (P_p^0) — являются предельными точками в исходной сильной топологии гильбертова пространства Z: из слабой сходимости последовательности $z^i \in \mathcal{D}$, $i = 1, 2, \ldots$, к элементу $z^0 \in \mathcal{D}$ и числовой сходимости $f^0(z^i) \to f^0(z^0) = \beta(p)$, $i \to \infty$, следует сходимость по норме $z^i \to z^0$, $i \to \infty$. Последнее можно утверждать в силу хорошо известного характеристического свойства субдифференцируемых сильно выпуклых функционалов в гильбертовом пространстве.

3.1.2. Случай Б). Пусть теперь задача (P^0_p) при условии $\beta(p) < +\infty$ не обладает вектором Куна–Таккера в указанном обобщенном смысле (случай **А)**) или, другими словами, функция $V^0_{p,c}$ ни при каком $c > 0$ не имеет точки максимума на H, в которой принимает значение $\beta(p)$. Тем не менее, предельное соотношение $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c} \to \lambda^0_{p,c}$, $s \to \infty$, где $\lambda^0_{p,c}$ — минимальное по норме решение задачи (3.3), имеет место в силу утверждения 3.2 при каждом фиксированном $c > 0$ также и в этом случае (см. (3.6), когда $K_{p,c} \cap \Lambda_c = \emptyset$). Будем, однако, теперь стремить δ к нулю согласованно со стремлением штрафного коэффициента c к $+\infty$. В этом случае метод двойственной регуляризации сопрягается (объединяется), по сути дела, с методом штрафов, так как слагаемое $c\psi(\|g^\delta(z) - p\|)$ в МФЛ имеет вид именно штрафного слагаемого с коэффициентом штрафа c. В дальнейших построениях в случае **Б)** считаем, что (при $\beta(p) < +\infty$) оба весовых множителя l_1, l_2 в штрафной функции ψ положительны, т.е. $l_1 = l_2 = 1$, и выполняется условие согласования

$$c^s\delta^s \to 0,\;\; c^s \to \infty,\;\; \delta^s \to 0,\;\; s \to \infty. \tag{3.9}$$

Одновременно, мы будем далее предполагать, что в МФЛ с коэффициентом штрафа c^s двойственная переменная λ, как и в задаче (3.1), удовлетворяет неравенству $\|\lambda\| \le c^s$.

3.1.2.1. Конструирование ОМП в исходной нелинейной задаче условной минимизации. Итак, рассматриваем по аналогии с соотношениями (3.7) при $c = c^s$, $\kappa = 0$ последовательность $z^{c^s,\delta^s,i}$, $i = 1, 2, \ldots$, являющуюся минимизирующей для функционала $L^{\delta^s}_{p,c^s}(z, \lambda^s)$, $z \in \mathcal{D}$ с $\lambda^s \in \Lambda_{c^s}$. Тогда подобно (3.7) можем записать

$$f^{\delta^s}(z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}) + \langle \lambda^s, g^{\delta^s}(z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}) - p\rangle + c^s\psi(\|g^{\delta^s}(z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}) - p\|) \le \tag{3.10}$$
$$\le V^{\delta^s}_{p,c^s}(\lambda^s) + \epsilon^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)},\;\; s \to \infty.$$

При этом номер $i(c^s, s)$ выбираем так, что $\epsilon^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)} \le \gamma^s$, $s \to \infty$, где γ^s, $s = 1, 2, \ldots,$ — некоторая произвольным образом заданная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел.

Подчеркнем, что в качестве последовательности $\lambda^s \in H$, $s = 1, 2, \ldots,$ в (3.10) годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\| \le c^s$. Например, в целях согласования процессов построения ОМП в случаях **А)** и **Б)**, можно воспользоваться "двойственными точками" $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}$ с достаточно большими c и в случае **Б)**. В качестве другого возможного варианта можно взять последовательность, все элементы которой совпадают с некоторым заданным фиксированным элементом $\lambda \in H$. В частности, ниже отдельно рассмотрим случай $\lambda^s = 0$, $s = 1, 2, \ldots,$ при котором можно положить $l_1 = 0$.

Обозначим $z^s \equiv z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}$. В силу ограниченности $\mathcal{D}$, оценки $\|\lambda^s\| \le c^s$, условия согласования (3.9) и оценок (1.2), (2.8) из (3.10) следует

$$f^0(z^s) + \langle \lambda^s, g^0(z^s) - p\rangle + c^s\psi(\|g^0(z^s) - p\|) \le V^0_{p,c^s}(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s,\;\; s \to \infty, \tag{3.11}$$

где

$$\widetilde{\gamma}^s \equiv |f^{\delta^s}(z^s) - f^0(z^s| + |\langle \lambda^s, g^{\delta^s}(z^s) - g^0(z^s)\rangle| +$$
$$+ c^s|\psi(\|g^{\delta^s}(z^s) - p\|) - \psi(\|g^0(z^s) - p\|)| + |V^{\delta^s}_{p,c^s}(\lambda^s) - V^0_{p,c^s}(\lambda^s)| \to 0,\;\; s \to \infty.$$

Тогда, во-первых, из неравенства (3.11) в силу неравенств ($\|\lambda^s\| \le c^s$)

$$\langle \lambda^s, g^0(z^s) - p\rangle + c^s\psi(\|g^0(z^s) - p\|) \ge 0,\;\; V^0_{p,c^s}(\lambda^s) \le \beta(p)$$

следует, что

$$f^0(z^s) \le \beta(p) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s. \tag{3.12}$$

Во-вторых, из того же неравенства (3.11), так как $\|\lambda^s\| \le c^s$, одновременно следует, что

$$f^0(z^s) + c^s l_2\|g^0(z^s) - p\|^2 \le V^0_{p,c^s}(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s \tag{3.13}$$

или ($l_2 = 1$)

$$l_2\|g^0(z^s) - p\|^2 \le (V^0_{p,c^s}(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - f^0(z^s))/c^s. \tag{3.14}$$

Поэтому из (3.12), (3.14) получаем для последовательности $z^s \equiv z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}$, $s = 1, 2, \ldots,$ соотношения

$$f^0(z^s) \to \beta(p), \quad z^s \in \mathcal{D}^{0,\zeta^s},\;\; \zeta^s \to 0,\;\; s \to \infty \tag{3.15}$$

с

$$\zeta^s = \sqrt{(V^0_{p,c^s}(\lambda^s) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - f^0(z^s))/c^s},$$

говорящие о том, что построенная выше последовательность $z^s,\ s=1,2,\dots$, является ОМП в задаче (P_p^0). Одновременно, из (3.13) получаем, так как $V^0_{p,c^s}(\lambda)\le\beta(p)\,\forall\,\lambda\in H$ и $f^0(z^s)\ge\beta(p)-\chi^s$ (см. (3.15)),

$$\begin{aligned}c^s l_2\|g^0(z^s)-p\|^2\le V^0_{p,c^s}(\lambda^s)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s-f^0(z^s)\le \\ \le\beta(p)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s-\beta(p)+\chi^s=\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s+\chi^s\to0,\ s\to\infty,\end{aligned}\tag{3.16}$$

где $\chi^s,\ s=1,2,\dots$, — некоторая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Отсюда, с учетом (3.15), следует, что $V^0_{p,c^s}(\lambda^s)\to\beta(p),\ \ s\to\infty$. И, наконец, последнее предельное соотношение, оценка (3.11), предельное соотношение в (3.15), а также оценка (3.16) приводят и к предельному соотношению

$$\langle\lambda^s,g^0(z^s)-p\rangle+c^s l_1\|g^0(z^s)-p\|\to0,\ \ s\to\infty.$$

3.1.2.2. Случай конечного коэффициента c, ненулевые "зазоры" по функции и "по ограничениям". Полученные предельные соотношения и оценки (3.12), (3.14), (3.15) говорят о том, что построенная последовательность $z^s,\ s=1,2,\dots$, является ОМП в задаче (P_p^0). При этом $c^s\to\infty,\ s\to\infty$ и выполняется условие согласования (3.9). Можно однако не стремить c к бесконечности, взять произвольным достаточно большим и заменить предельные соотношения и оценки (3.12), (3.14), (3.15) соответствующими оценками, говорящими о том, что конструируемые элементы z^s "близки" по функции к $\beta(p)$ и удовлетворяют ограничению-равенству с некоторыми ненулевыми зазорами, которые стремятся к нулю при неограниченном увеличении коэффициента c. Действительно, пусть $c>0$ фиксировано. В соответствии с утверждением 3.2 зафиксируем элемент $\lambda^0_{p,c}$ — минимальное по норме решение задачи (3.3), к которому, согласно этому утверждению, стремятся точки $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}$ при $s\to\infty$. Теперь возьмем в качестве точек λ^s в проведенных выше рассуждениях точки $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}$, $\|\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c}\|\le c$, с достаточно большими номерами s. Тогда, во-первых, $V^0_{p,c}(\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c})=V^0_{p,c}(\lambda^s)\to V^0_{p,c}(\lambda^0_{p,c})\ge\beta(p)-\tilde{\chi}(c),\ s\to\infty$, с $\tilde{\chi}(c)\ge0,\ \tilde{\chi}(c)\to0,\ c\to\infty$. И, во-вторых, вместо (3.10) можем записать

$$\begin{aligned}f^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i(c,s)})+\langle\lambda^s,g^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i(c,s)})-p\rangle+c\psi(\|g^{\delta^s}(z^{c,\delta^s,i(c,s)})-p\|)\le \\ \le V^{\delta^s}_{p,c}(\lambda^s)+\gamma^s,\ \ \gamma^s\to0,\ s\to\infty.\end{aligned}$$

Рассуждая далее точно так же, как при получении предельных соотношений и оценок (3.12), (3.14), (3.15), получаем, введя предварительно обозначение $\tilde{z}^s\equiv z^{c,\delta^s,i(c,s)}$

$$f^0(\tilde{z}^s)\le\beta(p)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s,$$

$$l_2\|g^0(\tilde{z}^s)-p\|^2\le(V^0_{p,c}(\lambda^s)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s-f^0(\tilde{z}^s))/c$$

и, как следствие,

$$\tilde{z}^s\in\mathcal{D}^{0,\zeta^s},\ \ \zeta^s=\sqrt{(V^0_{p,c}(\lambda^s)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s-f^0(\tilde{z}^s))/c},$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma}^s\equiv|f^{\delta^s}(\tilde{z}^s)-f^0(\tilde{z}^s)|+|\langle\lambda^s,g^{\delta^s}(\tilde{z}^s)-g^0(\tilde{z}^s)\rangle|+ \\ +c|\psi(\|g^{\delta^s}(\tilde{z}^s)-p\|)-\psi(\|g^0(\tilde{z}^s)-p\|)|+|V^{\delta^s}_{p,c}(\lambda^s)-V^0_{p,c}(\lambda^s)|\to0,\ \ s\to\infty.\end{aligned}$$

Таким образом, выбирая коэффициент $c>0$ сколь угодно большим, мы можем конструировать элементы $z\in\mathcal{D}$ которые "сколь угодно близки" по функции к $\beta(p)$ и "сколь угодно точно" удовлетворяют ограничению-равенству.

3.1.2.3. Связь с методом регуляризации Тихонова, характеристическое свойство основанной на двойственности регуляризации. Рассмотрим теперь отдельно случай $\lambda^s=0,\ s=1,2,\dots$, в котором хотя бы одно из чисел l_1, l_2 отлично от нуля. Таким образом, имеем дело с минимизацией МФЛ

$$f^{\delta^s}(z)+\langle\lambda^s,g^{\delta^s}(z)-p\rangle+c^s\psi(\|g^{\delta^s}(z)-p\|),\ \ z\in\mathcal{D},\tag{3.17}$$

при $\lambda^s=0$.

Рассуждая точно так же, как и при получении предельных соотношений и оценок (3.12), (3.14), (3.15), можем записать в силу (3.10) при $\lambda^s=0$, ограниченности $\mathcal{D}$, условия согласования (3.9) и оценок (1.2), (2.8) с учетом обозначения $z^s\equiv z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)}$

$$f^0(z^s)+c^s\psi(\|g^0(z^s)-p\|)\le V^0_{p,c^s}(0)+\gamma^s+\widetilde{\gamma}^s,\ \ s\to\infty,\tag{3.18}$$

где

$$\widetilde{\gamma}^s \equiv |f^{\delta^s}(z^s) - f^0(z^s)| + c^s|\psi(\|g^{\delta^s}(z^s) - p\|) - \psi(\|g^0(z^s) - p\|)| + |V^{\delta^s}_{p,c^s}(0) - V^0_{p,c^s}(0)| \to 0,\ s \to \infty.$$

Тогда, во-первых, из неравенства (3.18) в силу неравенства $V^0_{p,c^s}(0) \leq \beta(p)$ следует, что

$$f^0(z^s) \leq \beta(p) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s. \tag{3.19}$$

Во-вторых, из того же неравенства (3.18) одновременно следует, что ($(l_1, l_2) \neq 0$)

$$\psi(\|g^0(z^s) - p\|) \leq (V^0_{p,c^s}(0) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - f^0(z^s))/c^s. \tag{3.20}$$

Поэтому из (3.19), (3.20) получаем для последовательности $z^s \equiv z^{c^s,\delta^s,i(c^s,s)},\ s = 1, 2, \ldots$, соотношения

$$f^0(z^s) \to \beta(p), \quad z^s \in \mathcal{D}^{0,\zeta^s},\ \zeta^s = \sqrt{\big(V^0_{p,c^s}(0) + \gamma^s + \widetilde{\gamma}^s - f^0(z^s)\big)/c^s} \to 0,\ s \to \infty,$$

говорящие о том, что построенная выше последовательность $z^s,\ s = 1, 2, \ldots$, также является ОМП в задаче (P^0_p). Попутно здесь заметим, что γ-оптимальные элементы в задаче минимизации при $\lambda^s = 0$ функционала (3.17) являются одновременно γ/c^s-оптимальными элементами в задаче минимизации функционала

$$\frac{1}{c^s} f^{\delta^s}(z) + \psi(\|g^{\delta^s}(z) - p\|),\ z \in \mathcal{D}. \tag{3.21}$$

Мы получили хорошо известную классическую конструкцию (см., например, [32, гл. 1, §4]) сглаживающего функционала (функционала Тихонова) в методе регуляризации Тихонова [5], [12], [32] с параметром регуляризации $1/c^s$, $\delta^s/(1/c^s) \to 0,\ s \to \infty$, в случае нелинейной задачи на условный экстремум (строго говоря, в [32, гл. 1, §4] рассматривается некорректная задача поиска так называемых Ω-нормальных решений нелинейного операторного уравнения).

Подчеркнем, наконец, принципиальное отличие процесса регуляризации в задаче (P^0_p) — процесса конструирования ОМП в этой задаче, основанного на минимизации МФЛ (3.17) ($\lambda^s \neq 0$) от аналогичного процесса минимизации функционала Тихонова (3.21) ($\lambda^s = 0$). В первом случае можно утверждать, что для плотного в $\mathrm{dom}\,\beta$ множества точек p как двойственная переменная λ, так и величина штрафного коэффициента c в указанном процессе остаются ограниченными сверху некоторой не зависящей от $s = 1, 2, \ldots$ положительной величиной (см. пп. 2.2, 2.3, 2.6, а также теорему 3.1). Такое характеристическое свойство регуляризации правила множителей является следствием опоры в этом случае на теорию возмущений, конструкции негладкого анализа и аппарат теории двойственности. Во втором же случае величину $c^s,\ s = 1, 2, \ldots$, необходимо всегда стремить к бесконечности. Теория решения нелинейных некорректных задач, в основе которой лежат различные конструкции сглаживающих функционалов (функционалов Тихонова) детально изложена в [32].

3.1.2.4. Теорема сходимости процедуры двойственной регуляризация для решения исходной нелинейной задачи условной минимизации в случае Б). Подытоживая сказанное, можно утверждать, что для процесса построения ОМП в задаче (P^0_p) наиважнейшее значение имеет “точность” решения задачи минимизации МФЛ $L^{\delta}_{p,c^s}(z, \lambda^s)$, $z \in \mathcal{D}$ при каждом $\delta > 0$. Если такая минимизация может быть проведена с любой наперед заданной точностью, то в задаче (P^0_p) конструктивно указывается ОМП. Таким образом, доказана следующая теорема сходимости по функции и “по ограничению” метода двойственной регуляризации в случае **Б)**, который в указанном случае приобретает вид варианта метода штрафов.

Теорема 3.2. *Пусть* $\delta^s,\ s = 1, 2, \ldots,$ *— произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел,* $c^s,\ s = 1, 2, \ldots,$ *— произвольная фиксированная сходящаяся к* $+\infty$ *последовательность чисел такая, что* $c^s\delta^s \to 0,\ s \to \infty$. *Пусть также процесс минимизации МФЛ* $L^{\delta^s}_{p,c}(z, \lambda)$, $z \in \mathcal{D}$, *при каждом* $\delta^s > 0$ *и любых* $c > 0$, $\lambda \in H$ *может проходить с любой наперед заданной точностью. Тогда:*

1. Если $\beta(p) < +\infty$, *но обобщенного вектора Куна–Таккера в задаче* (P^0_p) *не существует, то найдется последовательность двойственной переменной* λ^s, $\|\lambda^s\| \leq c^s,\ s = 1, 2, \ldots,$ *такая, что для последовательности* $z^s \in \mathcal{D}$, $s = 1, 2, \ldots,$ *элементы которой удовлетворяют при* $l_1 = l_2 = 1$ *соотношениям*

$$z^s \in Z^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}_p[\lambda^s] \subset \mathcal{D},\ \epsilon^s \to 0,\ s \to \infty, \tag{3.22}$$

справедливы предельные соотношения

$$g^{\delta^s}(z^s) - p \to 0,\ s \to \infty, \tag{3.23}$$

$$\langle \lambda^s, g^{\delta^s}(z^s) - p\rangle + c^s\psi(\|g^{\delta^s}(z^s) - p\|) \to 0,\ s \to \infty, \tag{3.24}$$

$$f^0(z^s) \to \beta(p),\ s \to \infty, \tag{3.25}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V^0_{p,c^s}(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty. \tag{3.26}$$

Элементы z^s в (3.22) произвольным образом выбираются из множеств $Z_p^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{D}$, а МФЛ $L^{\delta^s}_{p,c^s}(z,\lambda^s)$, $z \in \mathcal{D}$ берется при $l_1 = l_2 = 1$ (определение множества $Z_p^{c,\epsilon,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{D}$ см. в п. 3.1.1.4).

Другими словами, ОМП-образующим в этом случае является оператор $R_p(\cdot,\cdot,\delta^s)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s})$, удовлетворяющих оценкам (1.2) при $\delta = \delta^s$, множество $Z_p^{c^s,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \subset \mathcal{D}$ с $\epsilon^s \to 0,\ s \to \infty$.

***2.** В качестве последовательности $\lambda^s,\ s = 1,2,\ldots$, годится любая последовательность, элементы которой удовлетворяют неравенству $\|\lambda^s\| \le c^s$. Например, в качестве такой последовательности может быть взята последовательность элементов $\lambda^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c^k},\ s = 1,2,\ldots$, максимизирующих на множестве Λ_{c^k} сильно вогнутый функционал $R^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}_{p,c^k}$ (см. первое предложение утверждения 3.2) с достаточно большими номерами s при каждом фиксированном достаточно большом c^k, $c^k \to \infty,\ k \to \infty$.*

Взятые в совокупности, теоремы 3.1 и 3.2, представляют собою утверждение, которое можно трактовать как теорему сходимости метода двойственной регуляризации, учитывающую одновременно как случай **А)**, так и случай **Б)**.

3.2. Регуляризованные теорема Куна–Таккера и ПЛ в нелинейной задаче на условный экстремум

Теоремы 3.1, 3.2 сходимости процедуры двойственной регуляризации в случаях **А)** и **Б)** можно трактовать также, как необходимые условия существования ОМП в задаче (P_p^0) в этих случаях. Формулируемые ниже теоремы помимо указанных необходимых условий содержат так же и достаточные условия существования ОМП в рассматриваемой задаче. По этой причине ниже в данном разделе первую из этих теорем, “обслуживающую” регулярный случай **А)**, мы называем регуляризованной теоремой Куна–Таккера. Во второй же из них мы говорим о регуляризованном ПЛ в недифференциальной форме в нелинейной задаче на условный экстремум (P_p^0), имея ввиду, что формулировка теоремы “обслуживает” как случай **А)**, так и случай **Б)**.

3.2.1. Регуляризованная теорема Куна–Таккера в недифференциальной форме в нелинейной задаче на условный экстремум. Дополняя утверждение теоремы 3.1 “достаточной частью” мы приходим к теореме Куна-Таккера в секвенциальном регуляризованном недифференциальном модифицированном виде для нелинейной задачи (P_p^0). Ее характерным свойством является “устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных”. Это понимается в том смысле, что в утверждении теоремы указывается множество допустимых элементов в каждой возмущенной задаче, которое состоит из таких элементов, что при стремлении к нулю ошибки задания исходных данных $\delta^s,\ s = 1,2,\ldots$, они, взятые произвольным образом из указанного множества и последовательно при $\delta^s \to 0,\ s \to \infty$, составляют ОМП в исходной задаче. Следуя [13], [15], [30], можем сформулировать следующую теорему (см. доказательство теоремы 4.1 в [15]).

Теорема 3.3. *Пусть задача (P_p^0) обладает вектором Куна–Таккера в указанном выше обобщенном смысле, $\delta^s,\ s = 1,2,\ldots$, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, $(l_1,l_2) \ne 0$. Тогда:*

***1.** Найдутся достаточно большое $c > 0$ и ограниченная последовательность двойственной переменной $\lambda^s \in H$, $s = 1,2,\ldots$, такие, что для последовательности z^s, $s = 1,2,\ldots$, элементы которой при $\varkappa > 0$ удовлетворяют соотношениям (определение множества $Z_p^{c,\varkappa,\epsilon,\delta}[\lambda] \subset \mathcal{D}$ см. в п. 3.1.1.4)*

$$z^s \in Z_p^{c,\varkappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{D},\ \epsilon^s \to 0,\ s \to \infty, \tag{3.27}$$

справедливы предельные соотношения

$$f^0(z^s) \to \beta(p),\ V^0_{p,c}(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty, \tag{3.28}$$

$$g^0(z^s) - p \to 0,\ s \to \infty, \tag{3.29}$$

и, как следствие, предельное соотношение

$$V^0_{p,c+\varkappa}(\lambda^s) \to \beta(p), \quad s \to \infty. \tag{3.30}$$

Элементы z^s в (3.27) произвольным образом выбираются из множеств $Z_p^{c^s,\varkappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{D}$, а МФЛ $L^{\delta^s}_{p,c+\varkappa}(z,\lambda^s)$, $z \in \mathcal{D}$ берется при $(l_1,l_2) \ne 0$.

Другими словами, в этом случае оператор $R_p(\cdot,\cdot,\delta^s)$*, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* $(f^{\delta^s}, g^{\delta^s})$*, удовлетворяющих оценкам* (*1.2*) *при* $\delta=\delta^s$*, множество*

$$R_p(f^{\delta^s}, g^{\delta^s}, \delta^s) \equiv Z_p^{c,\kappa,\epsilon^s,\delta^s}[\lambda^s] \subset \mathcal{D},$$

где $\epsilon^s \to 0,\ s \to \infty$*, является ОМП-образующим в задаче* (P_p^0).

В качестве указанной выше последовательности $\lambda^s,\ s = 1,2,\ldots$*, может быть взята последовательность* $\lambda_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)},\ s=1,2,\ldots$*, из теоремы 3.1, элементы которой максимизируют на множестве* H *сильно вогнутый функционал* $R_{p,c}^{\delta^s,\alpha(\delta^s)}$ *при условии согласования* $\delta^s/\alpha(\delta^s) \to 0,\ s \to \infty$*. При этом* $\lambda^s \to \lambda_{p,c}^0$*,* $s \to \infty$*, где* $\lambda_{p,c}^0$ *— минимальный по норме во множестве* $K_{p,c}$ *обобщенный вектор Куна—Таккера задачи* (P_p^0)*. Наконец, если функция значений* β *обладает в точке* p *дополнительными субдифференциальными свойствами* ***1, 2*** *(см. п. 3.1.1.3), то величину* κ *можно считать равной нулю.*

2. *И наоборот, если при некотором достаточно большом* $c > 0$ *существует ограниченная последовательность двойственных переменных* $\lambda^s \in H,\ s=1,2,\ldots$*, такая что элементы последовательности* $z^s,\ s=1,2,\ldots$*, удовлетворяют при* $\kappa \geq 0$ *соотношениям (3.27) и предельному соотношению (3.29), то выполняется и первое предельное соотношение (3.28), т.е. последовательность* $z^s,\ s=1,2,\ldots$*, является ОМП в задаче* (P_p^0)*. При этом одновременно выполняется и предельное соотношение (3.30).*

3.2.2. Регуляризованный ПЛ в недифференциальной форме в нелинейной задаче на условный экстремум. В свою очередь, сформулированные в теоремах 3.1—3.3 утверждения можно трансформировать в следующий ПЛ в секвенциальном регуляризованном недифференциальном модифицированном виде, учитывающий как случай **А)**, так и случай **Б)**, для нелинейной задачи (P_p^0). Как и в предыдущей ситуации, связанной с теоремой 3.3, его характерным свойством является “устойчивость по отношению к ошибкам исходных данных”. Прежде чем формулировать указанный результат, напомним, что ввиду ограниченности множества $\mathcal{D}$ значение $\beta(p)$ задачи (P_p^0) конечно тогда и только тогда, когда в ней существует ОМП.

Теорема 3.4. *Пусть значение* $\beta(p)$ *задачи* (P_p^0) *конечно,* $\delta^s,\ s = 1,2,\ldots$*, — произвольная сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел,* $(l_1,l_2) \neq 0$*. Тогда справедливы следующие два утверждения.*

1. *Пусть задача* (P_p^0) *обладает вектором Куна—Таккера в указанном выше обобщенном смысле. Тогда справедливы все утверждения теоремы 3.3, которые в совокупности можно трактовать как регуляризованную теорему Куна—Таккера для нелинейной задачи на условный экстремум* (P_p^0)*.*

2. *Пусть в задаче* (P_p^0) *не существует обобщенного вектора Куна—Таккера в указанном выше обобщенном смысле,* $c^s,\ s = 1,2,\ldots$*, — произвольная фиксированная сходящаяся к* $+\infty$ *последовательности чисел такая, что* $c^s\delta^s \to 0,\ s \to \infty$*, оба штрафных коэффициента* l_1*,* l_2 *являются положительными. Тогда имеют место следующие два утверждения:*

2.1. *Справедливы все утверждения теоремы 3.2.*

2.2. *Если существует последовательность двойственной переменной* $\lambda^s,\ s = 1,2,\ldots$*, такая, что* $\|\lambda^s\| \leq c^s$*,* $s = 1,2,\ldots$*, и для последовательности* $z^s,\ s = 1,2,\ldots$*, элементы которой удовлетворяют включениям (3.22), выполняются предельные соотношения (3.23), (3.24), то выполняются и предельные соотношения (3.25), (3.26).*

Доказательство. Первое утверждение теоремы, представляющее собою ее “регулярную” часть, совпадает с утверждением теоремы 3.3. По этой причине доказываем второе утверждение, связанное с ее “нерегулярной” частью. При этом “необходимая” часть **2.1** “нерегулярной части” есть “непосредственное следствие” утверждений теоремы 3.2. Поэтому доказываем здесь лишь “достаточную” часть **2.2** второго утверждения теоремы.

Так как точка z^s удовлетворяет включениям (3.22), то можем записать

$$L_{p,c^s}^{\delta^s}(z^s,\lambda^s) \leq L_{p,c^s}^{\delta^s}(z,\lambda^s) + \epsilon^s \ \ \forall z \in \mathcal{D}.$$

Отсюда в силу предельных соотношений (3.23), (3.24), условий теоремы и ограниченности $\mathcal{D}$ получаем

$$f^0(z^s) \leq L_{p,c^s}^0(z,\lambda^s) + \widetilde{\epsilon}^s \ \forall z \in \mathcal{D},\ \widetilde{\epsilon}^s \to 0,\ \ s \to \infty. \tag{3.31}$$

Кроме того, так как выполняется предельное соотношение (3.23), то можно утверждать, что $\beta(p) < +\infty$ и в задаче (P_p^0) существуют ОМП. Так как мы можем подставить $z = \bar{z}^k,\ k = 1,2,\ldots$, в неравенство (3.31), где $\bar{z}^k,\ k = 1,2,\ldots$, любое ОМП в задаче (P_p^0), то получаем $f^0(z^s) \leq \beta(p) + \bar{\epsilon}^s$, $\bar{\epsilon}^s \to 0,\ s \to \infty$. Так как, к тому же, последовательность $z^s,\ s=1,2,\ldots$, в силу предельного соотношения (3.23) удовлетворяет “в пределе” ограничению-равенству, то выполняется и предельное соотношение (3.25), т.е. последовательность z^s, $s=1,2,\ldots$, является ОМП в задаче (P_p^0). Одновременное выполнение в этом случае и предельного соотношения (3.26) очевидно, так как наряду с предельным соотношением (3.24) в силу условий теоремы и ограниченности $\mathcal{D}$ выполняется и предельное соотношение

$$\langle\lambda^s, g^0(z^s) - p\rangle + c^s\psi(\|g^0(z^s) - p\|) \to 0,\ \ s \to \infty.$$

Замечание 3.3. Если в рамках теорем 3.3, 3.4 в задачах минимизации

$$L^{\delta^s}_{p,c+\kappa}(z,\lambda^s) \to \min,\ z \in \mathcal{D}, \quad L^{\delta^s}_{p,c^s}(z,\lambda^s) \to \min,\ z \in \mathcal{D}$$

минимальные значения достигаются, то в качестве элементов z^s, $s = 1, 2, \ldots$, минимизирующих последовательностей в указанных теоремах могут быть естественно взяты непосредственно точки минимума в этих задачах минимизации МФЛ. Обсуждение условий, при которых указанные задачи разрешимы см. в замечании 3.1. В свою очередь, в замечании 3.2 можно найти обсуждение условий, при которых конструируемые в теоремах 3.3, 3.4 ОМП обладают свойствами слабой или сильной сходимости к решениям задачи (P^0_p) в случае гильбертова пространства Z.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лагранж Ж.Л.* Аналитическая механика. В 2-х томах. 2-е изд. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 603+442 с.
2. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
3. *Тихомиров В.М.* Рассказы о максимумах и минимумах. М.: Наука, 1986. 192 с.
4. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // Успехи матем. наук. 2013. Т. 68. Вып. 3(411). С. 5–38.
5. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 1056 с.
6. *Сумин М.И.* Регуляризованная параметрическая теорема Куна-Таккера в гильбертовом пространстве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 51. № 9. С. 1594–1615.
7. *Сумин М.И.* Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 25–49.
8. *Сумин М.И.* Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах // Тр. Ин-та матем. и механ. УрО РАН. 2019. Т. 25. № 1. С. 279–296.
9. *Сумин М.И.* О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа // Вестн. российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. Вып. 137. С. 58–79.
10. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. Москва: Наука, 1980. 496 с.
11. *Сумин М.И.* Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа // Вестн. российских университетов. Математика. 2020. Т. 25. Вып. 131. С. 307–330.
12. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
13. *Сумин М.И.* Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 4. С. 602–625.
14. *Сумин М.И.* Регуляризованный двойственный метод решения нелинейной задачи математического программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 5. С. 796–816.
15. *Сумин М.И.* Устойчивая секвенциальная теорема Куна–Таккера в итерационной форме или регуляризованный алгоритм Удзавы в регулярной задаче нелинейного программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 6. С. 947–977. doi: 10.7868/S0044466915060137 .
16. *Гольштейн Е.Г.* Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
17. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977. 624 с.
18. *Сумин М.И.* Метод возмущений и регуляризация правила множителей Лагранжа в выпуклых задачах на условный экстремум // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30. № 2. С. 203–221.
19. *Сумин М.И.* О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26. № 2. С. 252–269. doi: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-252-269.
20. *Сумин М.И.* О регуляризации принципа Лагранжа и построении обобщенных минимизирующих последовательностей в выпуклых задачах условной оптимизации // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 3. С. 410–428.
21. *Borwein J.M., Strojwas H.M.* Proximal Analysis and Boundaries of Closed Sets in Banach Space, Part I: Theory // Can. J. Math. 1986. V.38. No.2. P.431-452; Part II: Applications // Can. J. Math. 1987. V. 39. No 2. P. 428–472.

22. *Loewen P.D.* Optimal control via nonsmooth analysis. CRM Proceedings and Lecture Notes. Vol. 2. Providence, RI: AMS, 1993. 153 p. DOI: https://doi.org/10.1090/crmp/002
23. *Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Stern R.J., Wolenski P.R.* Nonsmooth analysis and control theory. Graduate texts in mathematics. V. 178. New York: Springer-Verlag, 1998. 278 p. DOI: https://doi.org/10.1007/b97650
24. *Mordukhovich B.S.* Variational analysis and generalized differentiation, I: Basic Theory. Berlin: Springer, 2006. 579 p. DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1
25. *Бертсекас Д.* Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
26. *Мину М.* Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 488 с.
27. *Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В.* Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации. М.: Наука, 1989. 399 с.
28. *Сумин М.И.* Метод возмущений, субдифференциалы негладкого анализа и регуляризация правила множителей Лагранжа в нелинейном оптимальном управлении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 202–221.
29. *Сумин М.И.* О регуляризации недифференциальной теоремы Куна–Таккера в нелинейной задаче на условный экстремум // Вестн. российских университетов. Математика. 2022. Т. 27. Вып. 140. С. 351–374.
30. *Sumin M.I.* Parametric Dual Regularization in a Nonlinear Mathematical Programming // In book “Advances in Mathematics Research, Volume 11”. Chapter 5. New-York: Nova Sci. Publ. Inc. 2010. P. 103–134.
31. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
32. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука, 1995. 312 с.

THE PERTURBATION METHOD AND THE REGULARIZATION OF THE LAGRANGE PRINCIPLE IN NONLINEAR CONSTRAINED EXTREMUM PROBLEMS

M. I. Sumin*

392000 Tambov, Internationalnaya str., 33, G.R. Derzhavin TSU, Russia
**e-mail: m.sumin@mail.ru*

Received: 08.07.2024
Revised: 08.07.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. The regularization of the Lagrange principle (LP) in a non-differential form in a nonlinear (non-convex) constrained extremum problem with an operator constraint-equality in Hilbert space is considered. The set of its permissible elements belongs to a complete metric space, the existence of a solution to the problem is not assumed a priori. The equality constraint contains an additively included parameter, which makes it possible to apply the “nonlinear variant” of the perturbation method to study the problem. The main purpose of the regularized LP is the stable generation of generalized minimizing sequences (GMSs) in the nonlinear problem under consideration. It can be interpreted as a GMS-generating (regularizing) operator that matches each set of initial data of the problem with a subminimal (minimal) of its regular augmented Lagrangian corresponding to this set, the dual variable in which is generated in accordance with the Tikhonov stabilization procedure of the dual problem. The structure of the augmented Lagrangian is completely determined by the type of “nonlinear” subdifferentials of a value function that is below semicontinuous and, generally speaking, non-convex as a function of the problem parameter. The Frechet proximal subgradient and the subdifferential, well-known in non-smooth (nonlinear) analysis, are used as such subdifferentials. The regularized LP “overcomes” the properties of the ill-posedness of the classical analogue and can be interpreted as a regularizing algorithm, thereby forming the theoretical basis for creating stable methods for the practical solving nonlinear constrained extremum problems.

Keywords: nonlinear onstrained extremum problem, operator constraint equality, Lagrange multiplier rule in non-differential form, regularization, perturbation method, value function, proximal subgradient, Frechet subdifferential, modified dual problem, generalized minimizing sequence, regularizing algorithm.