ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2303–2311

УДК 517.38

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СОДЕРЖАЩИЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ

© 2024 г. Ш.С. Хубежты[1,2,3,*], Л.Ю. Плиева[1,2,3,]**

[1] *362025 Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Республика Северная Осетия – Алания*

[2] *362025 Владикавказ, ул. Ватутина, 53, Южный математический институт – филиал ВНЦ РАН, Республика Северная Осетия – Алания*

[3] *362002 Владикавказ, ул. Молодежная, 7, Финансовый университет при правительстве РФ, Владикавказский филиал, Республика Северная Осетия – Алания*

**e-mail: shalva57@rambler.ru*

***e-mail: plieva-21@mail.ru*

Поступила в редакцию 18.04.2024 г.

Переработанный вариант 18.04.2024 г.

Принята к публикации 23.08.2024 г.

Строятся квадратурные формулы для сингулярных интегралов на отрезке интегрирования [−1, 1] с определенными весовыми функциями $p(t)$. При построении используются значения функции и ее производных в нулях многочлена Чебышёва. Полученные формулы являются квадратурными формулами интерполяционного типа и имеют алгебраическую степень точности $2m-1$. Оценка погрешности приводится. Библ. 4.

Ключевые слова: сингулярные интегралы, квадратурная формула, узлы, производная функции, весовая функция, интерполяционный многочлен, остаточный член.

DOI: 10.31857/S0044466924120064 , **EDN**: KCAUSX

ВВЕДЕНИЕ

При решении сингулярных интегральных уравнений встречаются случаи, когда требуется найти не только значения функции, но и значения ее производных. Для численного решения таких уравнений естественно требуется использовать квадратурные формулы, содержащие эти два значения. С использованием этих данных еще и повышается степень точности вычисления.

Целью настоящей статьи является построение квадратурных формул для сингулярных интегралов со значениями функции и ее производными.

Итак, пусть заданы узлы $x_1, x_2, \ldots, x_m$, значения функции $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_m)$ и ее производных $\varphi'(x_1), \varphi'(x_2), \ldots, \varphi'(x_m)$. Задача ставиться следующим образом: построить квадратурную формулу вида

$$\int\limits_a^b p(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}dt \approx \sum_{i=1}^{m}\left(A_i(x)\varphi\left(x_i\right) + B_i(x)\varphi'\left(x_i\right)\right), \quad a < x < b. \tag{1}$$

Очевидно, что для таких квадратурных формул придется использовать интерполяционный многочлен Эрмита, построенный по заданным узлам $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и значениями $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_m)$, $\varphi'(x_1), \varphi'(x_2), \ldots, \varphi'(x_m)$.

Такой многочлен имеет вид [1, гл. 1, § 13]

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m}\frac{\omega^2(x)}{\omega'^2(x_i)(x-x_i)^2}\left[\varphi(x_i)\left(1 - \frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(x-x_i)\right) + \varphi'(x_i)(x-x_i)\right], \tag{2}$$

где

$$\omega(x) = \prod_{j=1}^{m}\left(x - x_j\right), \quad \omega'(x) = \sum_{i=1}^{m}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}\left(x - x_j\right), \quad \omega''(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{m}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,k}}^{m}\left(x - x_j\right).$$

Остаточный член интерполяционного многочлена (2) выражается формулой

$$R_m(\varphi, x) = \frac{\varphi^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\omega^2(x), \quad a \leqslant \xi \leqslant b. \tag{3}$$

Подставляя многочлен (2) вместо $\varphi(t)$ в сингулярный интеграл

$$\int_a^b p(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}dt,$$

получим

$$\int_a^b p(t)\frac{\varphi(t)}{t-x}dt \approx \int_a^b p(t)\frac{1}{t-x}\left\{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)}\right)^2 \left[\varphi(x_i)\left(1-\frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i)\right)+\varphi'(x_i)(t-x_i)\right]\right\}dt = \\ = \sum_{i=1}^m \left(A_i(x)\varphi(x_i) + B_i(x)\varphi'(x_i)\right), \tag{4}$$

где

$$A_i(x) = \int_a^b p(t)\frac{1}{t-x}\left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)}\right)^2\left(1-\frac{\omega''(x_i)}{\omega'(x_i)}(t-x_i)\right)dt, \tag{5}$$

$$B_i(x) = \int_a^b p(t)\frac{1}{t-x}\left(\frac{\omega(t)}{\omega'(x_i)(t-x_i)}\right)^2(t-x_i)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

В дальнейшем будем рассматривать отрезок $[a, b] = [-1, 1]$ и часто встречающиеся случаи весовой функции

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad p(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}, \quad p(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}. \tag{7}$$

Будем также использовать преобразование вида

$$\frac{1}{(t-x)(t-x_i)} = \frac{1}{x-x_i}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t-x_i}\right), \tag{8}$$

и равенство вида:

$$\int_{-1}^1 p(t)P_n(t)Q(t)dt = 0, \tag{9}$$

где $P_n(t), n = 0, 1, \ldots,$ ортогональные многочлены по весу $p(t)$, а $Q(t)$ произвольный многочлен степени меньше n.

1. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt$

Известно, что на отрезке $[-1, 1]$ при весовой функции $p(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, ортогональными многочленами являются многочлены Чебышёва I рода $T_m(t) = \cos(m \arccos t)$ $(m = 0, 1, \ldots)$, с корнями $x_k = \cos\frac{2k-1}{2m}\pi$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Также справедливы формулы [2, гл. 2, §3]

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}T_m(t)T_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } m = n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Вычислим теперь коэффициенты квадратурной формулы (1) по формулам (5) и (6). При вычислении этих коэффициентов мы будем пользоваться следующими формулами [2, гл. 7, §3], [2, гл. 2, §3], [3, гл. 2, § 2.10]

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)dt \approx \frac{\pi}{m}\sum_{k=1}^m f(x_k), \quad x_k = \cos\frac{2k-1}{2m}\pi, \tag{1.2}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_m(t) Q(t) dt = 0, \tag{1.3}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)}{t-x} dt = \pi U_{m-1}(x), \quad U_{m-1}(x) = \frac{\sin(m \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{1.4}$$

В этом случае

$$\omega(t) = \frac{1}{2^{m-1}} T_m(t). \tag{1.5}$$

Вычислим коэффициенты $B_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$B_i(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t-x} \left(\frac{T_m(t)}{T'_m(x_i)(t-x_i)} \right)^2 (t-x_i) dt =$$

$$= \frac{1}{(T'_m(x_i))^2 (x-x_i)} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t)}{t-x_i} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(T'_m(x_i))^2 (x-x_i)} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{(T_m(t)-T_m(x))T_m(t)}{t-x} dt + \right.$$

$$\left. + T_m(x) \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{(T_m(t)-T_m(x_i))T_m(t)}{t-x_i} dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(T'_m(x_i))^2 (x-x_i)} \left\{ 0 + \pi T_m(x) U_{m-1}(x) - 0 \right\} = \frac{\pi T_m(x) U_{m-1}(x)}{(T'_m(x_i))^2 (x-x_i)}.$$

Таким образом, имеем

$$B_i(x) = \frac{\pi T_m(x) U_{m-1}(x)}{(T'_m(x_i))^2 (x-x_i)}. \tag{1.6}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов $A_i(x)$:

$$A_i(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t-x} \left(\frac{T_m(t)}{T'_m(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \left(1 - \frac{T''_m(x_i)}{T'_m(x_i)} (t-x_i) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{(T'_m(x_i))^2} \left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t) dt}{(t-x)(t-x_i)^2} - \frac{T''_m(x_i)}{T'_m(x_i)} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t) dt}{(t-x)(t-x_i)} \right] =$$

$$= \frac{1}{(T'_m(x_i))^2} \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t)}{(t-x)(t-x_i)^2} dt - \frac{T''_m(x_i)}{T'_m(x_i)} B_i(x).$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m^2(t)}{(t-x)(t-x_i)^2} dt = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)}{(t-x)(t-x_i)} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x_i} dt =$$

$$= \frac{1}{x-x_i} \left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)(T_m(t)-T_m(x_i))}{(t-x)(t-x_i)} dt - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)(T_m(t)-T_m(x_i))}{(t-x_i)^2} dt \right] =$$

$$= \frac{1}{x-x_i} \left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)-T_m(x)}{t-x} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x_i} dt + T_m(x) \times \right.$$

$$\times \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{1}{t-x} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x_i} dt - \frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{T_m(x_k)}{x_k-x_i} \frac{T_m(x_k)-T_m(x_i)}{x_k-x_i} \Bigg] = \frac{1}{x-x_i} \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)-T_m(x)}{t-x} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x_i} dt + \frac{T_m(x)}{x-x_i} \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x} dt - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{T_m(t)-T_m(x_i)}{t-x_i} dt \right) - \frac{\pi}{m} (T_m'(x_i))^2 \right] = \frac{1}{x-x_i} \left[\frac{\pi}{m} \sum_{k=1}^{m} \frac{T_m(x_k)-T_m(x)}{x_k-x} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{T_m(x_k)-T_m(x_i)}{x_k-x_i} - \frac{\pi}{m} (T_m'(x_i))^2 + \frac{T_m(x)}{x-x_i} \Big[\pi U_{m-1}(x) - \pi U_{m-1}(x_i) \Big] \right] =$$

$$= \frac{1}{x-x_i} \left[\frac{\pi}{m} \left(\frac{T_m(x) T_m'(x_i)}{x-x_i} - (T_m'(x_i))^2 \right) + \frac{T_m(x)}{x-x_i} \Big[\pi U_{m-1}(x) - \pi U_{m-1}(x_i) \Big] \right] =$$

$$= \frac{\pi}{x-x_i} \left(-m U_{m-1}^2(x_i) + \frac{T_m(x) U_{m-1}(x)}{x-x_i} \right).$$

Окончательно получим

$$A_i(x) = \frac{\pi}{(x-x_i)(T_m'(x_i))^2} \left\{ -m U_{m-1}^2(x_i) + \frac{T_m(x) U_{m-1}(x)}{x-x_i} - \frac{T_m''(x_i)}{T_m'(x_i)} T_m(x) U_{m-1}(x) \right\}. \tag{1.7}$$

Для частного случая $m = 1$ получим

$$A_1(x) = 0, \quad B_1(x) = \pi,$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \pi \varphi'(0).$$

Для случая $m = 2$ имеем

$$A_1(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1-x^2); \quad A_2(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} (x^2-1);$$

$$B_1(x) = \frac{\pi}{2} \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} \right); \quad B_2(x) = \frac{\pi}{2} \left(x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right).$$

Квадратурная формула для случая $m = 2$ будет иметь вид

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx \frac{\pi}{\sqrt{2}} (1-x^2) \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}} (x^2-1) \varphi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$+ \frac{\pi}{2} \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\pi}{2} \left(x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \varphi'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

2. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt$

В случае весовой функции $p(t) = \sqrt{1-t^2}$ на отрезке $[-1, 1]$ ортогональными многочленами являются многочлены Чебышёва II рода $U_m(x) = \frac{\sin((m+1) \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. В этом случае коэффициенты квадратурной формулы (1) подставляя $\omega(t) = \frac{1}{2^m} U_m(t)$, вычисляются по формулам:

$$A_i(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \left(\frac{U_m(t)}{U_m'(x_i)(t-x_i)} \right)^2 \left(1 - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} (t-x_i) \right) dt, \tag{2.1}$$

$$B_i(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m^2(t)}{(U_m'(x_i))^2 (t-x_i)^2} (t-x_i) dt, \tag{2.2}$$

$$x_i = cos\frac{\pi i}{m+1}, \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2.3}$$

Для вычисления этих коэффициентов мы будем пользоваться формулами [2, гл.7, §3], [2, гл. 2, §3], [3, гл. 2, § 2.10]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f(t) dt \approx \frac{\pi}{m+1} \sum_{k=1}^{m} \left(1 - x_k^2\right) f\left(x_k\right), x_k = cos\frac{\pi k}{m+1}. \tag{2.4}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} U_m(t) Q(t) dt = 0, \tag{2.5}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t)}{t-x} dt = -\pi T_{m+1}(x). \tag{2.6}$$

Вычислим коэффициенты $B_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$:

$$\begin{gathered} B_i(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m^2(t)}{\left(U_m'\left(x_i\right)\right)^2 (t-x_i)} dt = \frac{1}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2 \left(x-x_i\right)} \times \\ \times \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m^2(t)}{t-x_i} dt \right) = \frac{1}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2 \left(x-x_i\right)} \times \\ \times \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x)}{t-x} U_m(t) dt + U_m(x) \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t)}{t-x} dt - \right. \\ \left. - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} U_m(t) dt \right) = \frac{1}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2 \left(x-x_i\right)} \times \\ \times \left(0 + U_m(x)\left(-\pi T_{m+1}(x)\right) - 0\right) = -\frac{\pi U_m(x) T_{m+1}(x)}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2 \left(x-x_i\right)}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Перейдем к вычислению коэффициентов $A_i(x)$:

$$\begin{gathered} A_i(x) = \frac{1}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2} \left(\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} \left(\frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} \right)^2 dt - \right. \\ \left. - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m(t) - U_m(x_i)}{t-x_i} U_m(t) dt \right) = \\ = \frac{1}{\left({U_m}'\left(x_i\right)\right)^2 \left(x-x_i\right)} \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} U_m(t) dt - \right. \\ \left. - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x_i} \frac{U_m(t) - U_m(x_i)}{t-x_i} U_m(t) dt \right) - \frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)} B_i(x). \end{gathered}$$

Рассмотрим отдельно выражение в скобках

$$\begin{gathered} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} U_m(t) dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{1}{t-x_i} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} U_m(t) dt = \\ = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m(x)}{t-x} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{t-x_i} dt + U_m(x) \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} \frac{U_m(t) - U_m\left(x_i\right)}{\left(t-x\right)\left(t-x_i\right)} dt - \end{gathered}$$

$$-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{1}{t-x_i}\frac{U_m(t)-U_m(x_i)}{t-x_i}U_m(t)dt=\frac{\pi}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\left(1-x_k^2\right)\frac{U_m(x_k)-U_m(x)}{x_k-x}\frac{U_m(x_k)-U_m(x_i)}{x_k-x_i}+$$
$$+\frac{U_m(x)}{x-x_i}\left(\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{U_m(t)}{t-x}dt-\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\frac{U_m(t)}{t-x_i}dt\right)-\frac{\pi}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\left(1-x_k^2\right)\left(\frac{U_m(x_k)-U_m(x_i)}{x_k-x_i}\right)^2=$$
$$=\frac{\pi}{m+1}\left(1-x_i^2\right)\frac{U_m(x)}{x-x_i}U_m'(x_i)+\frac{U_m(x)}{x-x_i}\left(-\pi T_{m+1}(x)+\pi T_{m+1}(x_i)\right)-\frac{\pi}{m+1}\left(1-x_i^2\right)\left(U_m'(x_i)\right)^2.$$

Окончательно для $A_i(x)$ с учетом равенства

$$\frac{1}{m+1}\left(1-x_i^2\right)U_m'(x_i)+T_{m+1}(x_i)=0 \tag{2.8}$$

получим

$$A_i(x)=\frac{\pi}{\left(U_m'(x_i)\right)^2(x-x_i)}\left(-\frac{\left(1-x_i^2\right)\left(U_m'(x_i)\right)^2}{m+1}-\frac{U_m(x)T_{m+1}(x)}{x-x_i}+\frac{U_m''(x_i)}{U_m'(x_i)}U_m(x)T_{m+1}\right). \tag{2.9}$$

Рассмотрим частные случаи, когда например $m=1$ и $m=2$.

При $m=1$

$$A_1(x)=-\pi x; B_1(x)=\frac{\pi}{2}-\pi x^2,$$
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx-\pi x\varphi(0)+\left(\frac{\pi}{2}-\pi x^2\right)\varphi'(0).$$

При $m=2$ имеем

$$A_1(x)=\frac{\pi}{4}\left(8x^4-10x^2-2x+2\right);\quad A_2(x)=\frac{\pi}{4}\left(-8x^4+10x^2-2x-2\right);$$
$$B_1(x)=-\pi\left(x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x\right);\quad B_2(x)=-\pi\left(x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x\right).$$
$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx\frac{\pi}{4}\left(8x^4-10x^2-2x+2\right)\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{4}\left(-8x^4+10x^2-2x-2\right)\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)-$$
$$-\pi\left(x^4+\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{8}x\right)\varphi'\left(\frac{1}{2}\right)-\pi\left(x^4-\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{8}x\right)\varphi'\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Эти формулы для функций $\varphi(t)=1$ и $\varphi(t)=t$ дают точные результаты.

3. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt$

Многочленами ортогональными по весу $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ на отрезке $[-1,1]$ являются многочлены $C_m(x)=$ $=\dfrac{\cos\left(\frac{2m+1}{2}\arccos x\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}$ с корнями $x_k=\cos\dfrac{2k-1}{2m+1}\pi$, $(k=1,2,\ldots,m)$.

В этом случае коэффициенты квадратурной формулы (1) $A_i(x)$ и $B_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ подставляя вычисляются по формулам

$$A_i(x)=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{1}{t-x}\left(\frac{C_m(t)}{C_m'(x_i)(t-x_i)}\right)^2\left(1-\frac{C_m''(x_i)}{C_m'(x_i)}(t-x_i)\right)dt, \tag{3.1}$$

$$B_i(x)=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{1}{t-x}\left(\frac{C_m(t)}{C_m'(x_i)(t-x_i)}\right)^2(t-x)dt. \tag{3.2}$$

Следуя предыдущим рассуждениям мы для вычисления коэффициентов (3.1) и (3.2) будем пользоваться формулами [3, гл. 2, § 2.10]

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)}{t-x} dt = \pi S_m(x), \quad x \in (-1;1)\,, \tag{3.3}$$

где

$$S_m(x) = \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{2}\arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}, \tag{3.4}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} f(t)dt \approx \frac{2\pi}{2m+1} \sum_{k=1}^{m} (1+x_k)\, f(x_k)\,, \quad x_k = \cos\frac{2k-1}{2m+1}\pi, \tag{3.5}$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} C_m(t)Q(t)dt = 0. \tag{3.6}$$

Вычислим коэффициенты $B_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$:

$$B_i(x) = \frac{1}{\left(C'_m(x_i)\right)^2} \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m^2(t)}{(t-x)(t-x_i)} dt = \frac{1}{\left(C'_m(x_i)\right)^2 (x-x_i)} \times$$

$$\times \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m^2(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m^2(t)}{t-x_i} dt \right) = \frac{1}{\left(C'_m(x_i)\right)^2 (x-x_i)} \times$$

$$\times \left(\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x)}{t-x} C_m(t)dt + C_m(x) \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)}{t-x} dt - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} C_m(t)dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\left(C'_m(x_i)\right)^2 (x-x_i)} \left(0 + \pi C_m(x) S_m(x) - 0\right) = \frac{\pi C_m(x) S_m(x)}{\left(C'_m(x_i)\right)^2 (x-x_i)}. \tag{3.7}$$

Коэффициенты $A_i(x)$ будут равны:

$$A_i(x) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{1}{t-x} \left(\frac{C_m(t)}{C'_m(x_i)(t-x_i)} \right)^2 dt - \frac{C''_m(x_i)}{C'_m(x_i)} B_i(x).$$

Рассмотрим отдельно интеграл

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{1}{t-x} \left(\frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} \right)^2 dt = \frac{1}{x-x_i} \left[\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} dt - \right.$$

$$\left. - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(\frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} \right)^2 dt \right] = \frac{1}{x-x_i} \left[\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} dt + \right.$$

$$\left. + C_m(x) \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} \frac{1}{t-x} dt - \frac{2\pi}{2m+1} \sum_{k=1}^{m} (1+x_k) \left(\frac{C_m(x_k)-C_m(x_i)}{x_k-x_i} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{x-x_i} \left[\frac{2\pi}{2m+1} \sum_{k=1}^{m} (1+x_i) \frac{C_m(x_k)-C_m(x)}{x_k-x} \frac{C_m(x_k)-C_m(x_i)}{x_k-x_i} + \frac{C_m(x)}{x-x_i} \left\{ \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x} dt - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_m(t)-C_m(x_i)}{t-x_i} dt \right\} - \frac{2\pi}{2m+1} (1+x_i) \left(C'_m(x_i)\right)^2 \right] = \frac{1}{x-x_i} \left[\frac{2\pi}{2m+1} (1+x_i)\, \frac{C_m(x)}{x-x_i} C'_m(x_i) + \right.$$

$$+\frac{C_m(x)}{x-x_i}\left(\pi S_m(x)-\pi S_m(x_i)-\frac{2\pi}{2m+1}(1+x_i)\left(C'_m(x_i)\right)^2\right)\Bigg]=$$
$$=\frac{\pi C_m(x)}{(x-x_i)^2}\left(\frac{2}{2m+1}(1+x_i)\,C'_m(x_i)+S_m(x)-S_m(x_i)\right).$$

Окончательно получим

$$A_i(x)=\frac{\pi}{\left(C'_m(x_i)\right)^2(x-x_i)}\left\{\frac{C_m(x)S_m(x)}{x-x_i}-\frac{2}{2m+1}(1+x_i)\left(C'_m(x_i)\right)^2-\frac{C''_m(x_i)}{C'_m(x_i)}C_m(x)S_m(x)\right\}. \tag{3.8}$$

При $m=1$ имеем

$$A_1(x)=\pi,\quad B_1(x)=\pi\left(x+\frac{1}{2}\right),$$
$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt\approx\pi\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\pi\left(x+\frac{1}{2}\right)\varphi'\left(\frac{1}{2}\right).$$

4. КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{\varphi(t)}{t-x}dt$

Многочленами ортогональными по весу $p(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$ на отрезке $[-1,1]$ являются многочлены $S_m(x)=$ $=\dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\arccos x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)}$ с корнями $x_k=\cos\dfrac{2\pi k}{2m+1}$, $(k=1,2,\ldots,m)$.

В этом случае коэффициенты квадратурной формулы (1) $A_i(x)$ и $B_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,m)$ подставляя $\omega(t)=$ $=\frac{S_m(t)}{2^m}$, вычисляются по формулам

$$A_i(x)=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{1}{t-x}\left(\frac{S_m(t)}{S'_m(x_i)(t-x_i)}\right)^2\left(1-\frac{S''_m(x_i)}{S'_m(x_i)}(t-x_i)\right)dt, \tag{4.1}$$

$$B_i(x)=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{1}{t-x}\left(\frac{S_m(t)}{S'_m(x_i)(t-x_i)}\right)^2(t-x_i)dt. \tag{4.2}$$

Пользуясь формулами [2, гл.7, §3], [3, гл. 2, § 2.10]

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}f(t)dt\approx\frac{2\pi}{2m+1}\sum_{k=1}^{m}(1-x_k)\,f(x_k),\quad x_k=\cos\frac{2\pi k}{2m+1}, \tag{4.3}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}S_m(t)Q(t)dt=0, \tag{4.4}$$

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\frac{S_m(t)}{t-x}dt=-\pi C_m(x),\quad x\in(-1;1), \tag{4.5}$$

получим следующие выражения для коэффициентов $A_i(x)$ и $B_i(x)$:

$$B_i(x)=\frac{\pi C_m(x)S_m(x)}{\left({S_m}'(x_i)\right)^2(x-x_i)}, \tag{4.6}$$

$$A_i(x)=\frac{\pi}{\left({S_m}'(x_i)\right)^2(x-x_i)}\left\{-\frac{C_m(x)S_m(x)}{x-x_i}-\frac{2}{2m+1}(1-x_i)\left({S_m}'(x_i)\right)^2+\frac{S''_m(x_i)}{S'_m(x_i)}C_m(x)S_m(x)\right\}. \tag{4.7}$$

При $m=1$ имеем

$$A_1(x)=-\pi,\quad B_1(x)=\pi\left(\frac{1}{2}-x\right),$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \frac{\varphi(t)}{t-x} dt \approx -\pi\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi\left(\frac{1}{2} - x\right)\varphi'\left(-\frac{1}{2}\right).$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построенные квадратурные формулы можно эффективно использовать для численного решения сингулярных интегральных уравнений методом квадратур.

Остаточный член построенных квадратурных формул выражается формулой

$$R_m(\varphi, x) = \int_{-1}^{1} \frac{p(t)}{t-x} \frac{\varphi^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \omega^2(t) dt, \quad \xi, x \in (-1; 1). \tag{5.1}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функции. М-Л, РТТН, 1954. 328 с.

2. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.

3. *Хубежты Ш. С.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011. 235 с.

4. *Лифанов И. К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус". 1995. – 520 с.

QUADRATURE FORMULAS FOR SINGULAR INTEGRALS CONTAINING THE VALUES OF A FUNCTION AND ITS DERIVATIVES

Sh. S. Khubezhty[a,b,c,*], **L. Yu. Plieva**[a,b,c,**]

[a] *362025 Vladikavkaz, 44-46 Vatutina St., K. L. Khetagurov North Ossetian State University, Republic of North Ossetia – Alania*

[b] *362025 Vladikavkaz, 53 Vatutina str., Southern Mathematical Institute, branch of Vladikavkaz Scientific Center, RAS, Republic of North Ossetia – Alania,*

[c] *362002 Vladikavkaz, Molodezhnaya str., 7, Financial University under the Government of the Russian Federation, Vladikavkaz branch, Republic of North Ossetia – Alania*

**e-mail: shalva57@rambler.ru*

***e-mail: plieva-21@mail.ru*

Received: 18.04.2024
Revised: 18.04.2024
Accepted: 23.08.2024

Abstract. Quadrature formulas for singular integrals on the integration interval $[-1, 1]$ with certain weight functions $p(t)$ are constructed. The values of the function and its derivatives in zeros of the Chebyshev polynomial are used in the construction. The resulting formulas are quadrature formulas of the interpolation type and have an algebraic degree of accuracy of $2m - 1$. The error estimate is given.

Keywords: singular integrals, quadrature formula, nodes, derivative of a function, weight function, interpolation polynomial, residual term.