ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 12, с. 2262–2269

УДК 512.643

НЕВЫРОЖДЕННАЯ МАТРИЦА С ХОРОШО ОБУСЛОВЛЕННЫМ КОКВАДРАТОМ: КАК ПРИВЕСТИ ЕЕ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ ПОСРЕДСТВОМ КОНГРУЭНЦИИ

© 2024 г. Х. Д. Икрамов[1,*], А. М. Назари[2,]**

[1] 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия
[2] Faculty of Mathematics, Arak University, Arak, Islamic Republic Iran
*e-mail: ikramov@cs.msu.su
**e-mail: a-nazari@araku.ac.ir

Поступила в редакцию 09.01.2024 г.
Переработанный вариант 18.04.2024 г.
Принята к публикации 31.05.2024 г.

Существуют эффективные программы для приведения диагонализуемой матрицы к диагональному виду посредством преобразования подобия. Юнитоидные матрицы являются аналогами диагонализуемых матриц в теории конгруэнтных преобразований. Однако, если исключить эрмитовы и, более общо, нормальные матрицы, то нет пользующихся общим признанием программ для приведения юнитоидной матрицы к диагональному виду посредством конгруэнций. Предложен алгоритм, способный выполнять эту задачу для специального класса юнитоидных матриц, а именно невырожденных матриц, коквадраты которых хорошо обусловлены в смысле полной проблемы собственных значений. Приведены примеры, иллюстрирующие работу этого алгоритма. Библ. 1.

Ключевые слова: *-конгруэнция, преобразование подобия, юнитоид, коквадрат, канонические углы, матрица с диагональным преобладанием, число обусловленности.

DOI: 10.31857/S0044466924120035, **EDN**: KCWHII

1. ВВЕДЕНИЕ

Квадратную комплексную матрицу A, имеющую базис из собственных векторов, называют диагонализуемой. Это означает, что для матрицы Q, составленной из собственных векторов матрицы A, произведение

$$B = Q^{-1}AQ \tag{1}$$

есть диагональная матрица. Переход от A к B называется преобразованием подобия.

В этой статье мы заинтересованы главным образом в матричных преобразованиях другого рода, а именно

$$A \to Q^*AQ. \tag{2}$$

Они называются преобразованиями эрмитовой конгруэнции (или *-конгруэнции). Мы будем называть их просто *конгруэнциями*.

Квадратную комплексную матрицу A, которая может быть приведена к диагональному виду посредством конгруэнции, называют юнитоидной матрицей или просто *юнитоидом*.

Предположим, что A — диагонализуемая матрица, хорошо обусловленная в смысле полной проблемы собственных значений. В этом случае ее собственные значения и собственные векторы могут быть эффективно и с хорошей точностью вычислены с помощью современного программного обеспечения. Ситуация с задачей приведения юнитоидной матрицы к диагональному виду совершенно иная. Насколько известно авторам, нет популярных программ, которые бы эффективно решали эту задачу. Единственным исключением является класс эрмитовых или, более общо, нормальных матриц.

Наша цель в этой статье — предложить алгоритм, способный решать эту задачу диагонализации для юнитоидных матриц одного специального класса. Описание этого класса дано в разд. 2. Наш алгоритм формулируется в разд. 4. Он основан на некоторой теории, излагаемой в разд. 3. Построение тестовых матриц для этого алгоритма обсуждается в разд. 5. В заключительном разд. 6 приведены результаты численных экспериментов, выполненных с алгоритмом.

Все сведения о преобразованиях конгруэнции, нужные для понимания данного текста, можно найти в параграфе 4.5 книги [1].

2. ХОРОШО ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ЮНИТОИДНЫЕ МАТРИЦЫ

Первое ограничение, которое мы накладываем на юнитоидную матрицу A, состоит в ее невырожденности. Это ограничение не является существенным. В самом деле, вырожденная юнитоидная матрица A может быть заменена невырожденной с помощью следующего простого алгоритма.

1. Найти базис $z_1, \dots, z_d$ общего ядра матриц A и A^*.
2. Построить невырожденную $n \times n$-матрицу P, в которой векторы $z_1, \dots, z_d$ являются последними d столбцами.
3. Выполнить конгруэнцию

$$A \to \tilde{A} = P^* AP.$$

Тогда $\tilde{A}$ — это блочно-диагональная матрица вида

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $r = n - d$ и A_r — невырожденная матрица порядка r. Последующее приведение к диагональному виду выполняется для матрицы A_r.

Невырожденной матрице A можно сопоставить матрицу

$$\mathcal{C}_A = A^{-*}A, \tag{3}$$

называемую *коквадратом* матрицы A. Коквадрат юнитоида A является диагонализуемой матрицей. Кроме того, все собственные значения матрицы $\mathcal{C}_A$ унимодулярны:

$$\text{Spectrum of}\, \mathcal{C}_A = \{e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \dots, e^{i\phi_n}\}. \tag{4}$$

Наше второе предположение относительно A заключается в том, что эти n чисел должны быть попарно различны. И это ограничение не является существенным; мы устраним его в наших последующих публикациях.

Третье ограничение, и на этот раз действительно важное: матрица $\mathcal{C}_A$ должна быть хорошо обусловлена в смысле полной проблемы собственных значений. Это означает прежде всего, что собственные значения в множестве (4) должны быть хорошо разделены. Как следствие, матрицу S, сформированную из собственных векторов коквадрата $\mathcal{C}_A$, можно выбрать так, чтобы ее число обусловленности

$$\text{cond}_2 S = \|S\|_2 \cdot \|S^{-1}\|_2 \tag{5}$$

имело умеренную величину.

Мы называем невырожденный юнитоид A *хорошо обусловленным*, если его коквадрат $\mathcal{C}_A$ удовлетворяет третьему ограничению.

3. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ И ЕЕ КОКВАДРАТА К (БЛОЧНО) ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Теорема 1. *Пусть A — невырожденная матрица с коквадратом $\mathcal{C}_A$. Если A подвергнута конгруэнции*

$$A \to \tilde{A} = X^* AX, \tag{6}$$

то ее коквадрат претерпевает преобразование подобия, задаваемое той же матрицей X.

Доказательство. Действительно, из (6) следует, что

$$A^{-1} \to \tilde{A}^{-1} = X^{-1}A^{-1}X^{-*} \quad \text{и} \quad \mathcal{C}_A = A^{-*}A \to \mathcal{C}_{\tilde{A}} = X^{-1}\mathcal{C}_A X.$$

Следствие 1. Пусть A — невырожденный юнитоид. Предположим, что матрица X в соотношении (6) выбрана так, чтобы

$$D \equiv \tilde{A} = X^* AX$$

была диагональной матрицей. Тогда:

а) $\mathcal{C}_D$ — диагональная матрица с унимодулярными диагональными элементами $e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \ldots, e^{i\phi_n}$;

б) эти числа $e^{i\phi_1}, e^{i\phi_2}, \ldots, e^{i\phi_n}$ суть собственные значения матрицы $\mathcal{C}_A$;

в) запишем диагональные элементы матрицы D в полярной (или показательной) форме:

$$d_{jj} = \rho_j e^{i\alpha_j}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \tag{7}$$

тогда

$$\phi_j = 2\alpha_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти утверждения являются непосредственными следствиями теоремы 1 и определения коквадрата. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются *каноническими углами* матрицы A. В действительности это канонические углы всякой матрицы, конгруэнтной матрице A.

Ситуация, исследованная в теореме 1, может быть обращена следующим образом.

Теорема 2. *Пусть A — невырожденная матрица с коквадратом $\mathcal{C}_A$. Если $\mathcal{C}_A$ подвергнут подобию*

$$\mathcal{C}_A \to \mathcal{C} = X^{-1}\mathcal{C}_A X, \tag{8}$$

то матрица $\mathcal{C}$ есть коквадрат матрицы $B = X^*AX$.

В самом деле,

$$\mathcal{C}_B = B^{-*}B = X^{-1}A^{-*}X^{-*}X^*AX = X^{-1}(A^{-*}A)X = X^{-1}\mathcal{C}_A X = \mathcal{C}.$$

Теорема 3. *Предположим, что матрица X в соотношении* (8) *выбрана так, чтобы*

$$\mathcal{C} = X^{-1}(A^{-*}A)X = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где F и G — квадратные матрицы порядков соответственно k и l ($k + l = n$). Пусть собственные значения блоков F и G удовлетворяют условиям

$$\overline{\lambda_r(F)}\lambda_s(G) \neq 1, \qquad r = 1, 2, \ldots, k, \ s = 1, 2, \ldots, l. \tag{10}$$

В этом случае конгруэнтное преобразование, задаваемое той же матрицей X, превращает A в прямую сумму

$$B = B_{11} \oplus B_{22},$$

а матрицы F и G в соотношении (8) *являются коквадратами соответственно блоков B_{11} и B_{22}.*

Доказательство. Перепишем соотношение (9) в виде

$$X^*AX = X^*A^*X \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Разобьем матрицу $B = X^*AX$ на блоки в соответствии с прямой суммой $F \oplus G$:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Из соотношения (11) вытекают следующие равенства для блоков B_{rs}:

$$B_{11} = B_{11}^*F, \qquad B_{22} = B_{22}^*G,$$

$$B_{12} = B_{21}^*G, \qquad B_{21} = B_{12}^*F.$$

Из двух последних равенств выводим

$$B_{12} - F^*B_{12}G = 0, \quad B_{21} - G^*B_{21}F = 0.$$

Тем самым блоки B_{12} и B_{21} являются решениями однородных матричных уравнений Стейна. Известно, что эти уравнения имеют только тривиальные решения $B_{12} = 0$ и $B_{21} = 0$, если собственные значения блоков F и G удовлетворяют условиям (10). Таким образом, мы имеем

$$B_{12} = 0, \ B_{21} = 0, \ F = B_{11}^{-*}B_{11}, \ G = B_{22}^{-*}B_{22},$$

что доказывает теорему.

Следствие 2. Пусть A — невырожденная матрица. Предположим, что ее коквадрат $\mathcal{C}_A$ имеет унимодулярный спектр (4), где числа $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ принадлежат промежутку $[0, \pi)$ и попарно различны. Тогда:

а) A есть юнитоид;

б) матрица X в соотношении (6) может быть выбрана так, чтобы

$$D = X^*AX$$

была диагональной матрицей. В действительности, X — та же матрица, которая диагонализует коквадрат $\mathcal{C}_A$ посредством подобия;

в) числа

$$\alpha_j = \phi_j/2, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

являются каноническими углами матрицы A;

г) определим матрицу (см. (7))

$$R = \operatorname{diag}\left(\sqrt{\rho_1}, \sqrt{\rho_2}, \ldots, \sqrt{\rho_n}\right).$$

Тогда дополнительная конгруэнция

$$D \to R^{-1}DR^{-1}$$

превращает D в диагональную матрицу

$$\Sigma = \operatorname{diag}\left(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_n}\right).$$

Опять-таки, эти утверждения следуют непосредственно из теоремы 3. Матрица Σ называется *канонической формой* матрицы A.

4. АЛГОРИТМ

Пусть A — невырожденный юнитоид, коквадрат которого удовлетворяет условиям, изложенным в разд. 2. А именно, матрица $\mathcal{C}_A$ имеет простой унимодулярный спектр и хорошо обусловлена в смысле полной проблемы собственных значений. Выполним следующие действия.

1. Вычислить матрицу P, приводящую $\mathcal{C}_A$ к диагональному виду Λ посредством подобия:

$$P^{-1}\mathcal{C}_A P = \Lambda. \tag{12}$$

Приближение к P хорошего качества может быть получено применением к $\mathcal{C}_A$ Matlab процедуры eig или Maple процедуры Eigenvectors.

2. Выполнить конгруэнцию

$$A \to D = P^*AP.$$

Теоретически D должна быть диагональной матрицей, такой, что аргументы ее диагональных элементов являются каноническими углами матрицы A. Однако из-за ошибок округления мы можем рассчитывать лишь на получение хорошего приближения к D.

В следующих двух разделах мы обсудим, насколько хороши приближения, вычисляемые нашим алгоритмом.

5. ТЕСТОВЫЕ МАТРИЦЫ

Мы предварим построение тестовой матрицы A построением ее коквадрата. Для заданного порядка n выберем в промежутке $[0, \pi)$ псевдослучайные числа $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$. Они определяют Λ, диагональную матрицу собственных значений коквадрата $\mathcal{C}_A$. Сам коквадрат определяется формулой (12), а именно

$$\mathcal{C}_A = P\Lambda P^{-1}. \tag{13}$$

Напомним, что P должна быть хорошо обусловленной матрицей. Чтобы удовлетворить это требование, построим P как матрицу с диагональным преобладанием. Кроме того, подчиним строчные множители преобладания

$$\alpha_j = \frac{\sum_{k \neq j} |p_{jk}|}{|p_{jj}|}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

общей верхней границе, скажем, 0.5 или 0.8. Вдобавок потребуем, чтобы диагональ матрицы P, рассматриваемая как самостоятельная матрица, тоже была хорошо обусловлена. Это означает, что отношение

$$\frac{\max_j |p_{jj}|}{\min_j |p_{jj}|}$$

должно иметь умеренную величину. Все эти предосторожности обеспечивают матрице P хорошую обусловленность.

Имея теперь кокватрат $\mathcal{C}_A$, построим саму матрицу A. Сначала сформируем диагональную матрицу

$$D = \text{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_n}),$$

где

$$\alpha_j = \phi_j/2, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Согласно теореме 2, матрица

$$A = P^{-*}DP^{-1}$$

имеет $\mathcal{C}_A$ своим кокватратом. Итак, мы получили входную пару $(A, \mathcal{C}_A)$ для нашего алгоритма.

В действительности, у нас есть некоторая свобода в выборе матрицы A. Любое число α_j в конструкции, описанной выше (см. (14)), может быть заменено противоположным числом $-\alpha_j$. Полученная таким образом матрица $\hat{A}$ также имеет $\mathcal{C}_A$ своим кокватратом.

Проиллюстрируем эту конструкцию небольшим примером. Положим $n = 5$ и определим Λ как диагональную матрицу с унимодулярными диагональными элементами $0.39555 - 0.91844i$, $0.82987 - 0.55796i$, $0.69822 + 0.71588i$, $0.8555 - 0.51780i$ и $-0.67367 - 0.73904i$. Эта матрица является кокватратом диагональной матрицы

$$D = \text{diag}(0.83533 - 0.54975\,i, 0.95652 - 0.29166\,i,$$

$$0.92147 + 0.38844\,i, -0.96320 + 0.26879\,i, 0.40394 - 0.91479\,i).$$

В качестве матрицы P возьмем матрицу

$$P = \begin{bmatrix} 0.52310 & 0.14009 & -0.023845 & -0.12072 & -0.14605 \\ -0.074516 & 0.36960 & -0.013413 & -0.056632 & -0.11475 \\ -0.11923 & -0.0029806 & 0.50522 & -0.026826 & 0.084948 \\ 0.064083 & 0.074516 & -0.032787 & 0.64232 & 0.040238 \\ 0.037258 & 0.014903 & 0.067064 & 0.049180 & 0.61401 \end{bmatrix}.$$

Это матрица со строгим диагональным преобладанием, имеющая спектральное число обусловленности 2.0151. Ее строчные множители преобладания равны приблизительно 0.82, 0.7, 0.46, 0.33, и 0.27.

Теперь построим нашу тестовую матрицу $A = P^{-*}DP^{-1}$ и ее кокватрат $\mathcal{C}_A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2.8503 - 1.6838\,i & -0.46875 + 0.47535\,i & 0.92323 + 0.25978\,i & 0.77833 - 0.33078\,i & 0.31452 - 0.10599\,i \\ -0.46875 + 0.47535\,i & 6.5125 - 2.1250\,i & -0.26455 - 0.14116\,i & 0.73500 - 0.17843\,i & 1.1075 - 0.28332\,i \\ 0.92323 + 0.25978\,i & -0.26455 - 0.14116\,i & 3.8312 + 1.5612\,i & 0.18418 + 0.13572\,i & -0.52631 + 0.16012\,i \\ 0.77833 - 0.33078\,i & 0.73500 - 0.17843\,i & 0.18418 + 0.13572\,i & -2.0899 + 0.55943\,i & 0.32784 + 0.072906\,i \\ 0.31452 - 0.10599\,i & 1.1075 - 0.28332\,i & -0.52631 + 0.16012\,i & 0.32784 + 0.072906\,i & 1.4123 - 2.5490\,i \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}_A = \begin{bmatrix} 0.39753 & 0.17072 & -0.055836 & -0.096375 & 0.30075 \\ 0.032796 & 0.80977 & -0.035576 & -0.021665 & 0.29139 \\ 0.081672 & -0.028780 & 0.72674 & 0.021300 & -0.18109 \\ -0.041380 & 0.014573 & 0.023539 & 0.85848 & -0.11078 \\ 0.10361 & -0.0058126 & 0.19805 & 0.14534 & -0.68703 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -0.90771 & 0.14475 & -0.077170 & -0.063877 & 0.0017931 \\ 0.037429 & -0.57369 & -0.038683 & -0.0029814 & 0.045353 \\ 0.35807 & -0.14298 & 0.75753 & 0.11993 & -0.15646 \\ -0.062564 & 0.018042 & -0.081500 & -0.53030 & -0.013913 \\ 0.029418 & -0.0077117 & 0.19960 & 0.031973 & -0.76319 \end{bmatrix} i.$$

К этой матричной паре A и $\mathcal{C}_A$ применим алгоритм, описанный в разд. 4. Сначала вычислим собственные векторы матрицы $\mathcal{C}_A$ с помощью Maple процедуры Eigenvectors. Из этих собственных векторов сформируем матрицу Q, играющую роль матрицы P из разд. 4:

$$Q = \begin{bmatrix} -0.046624 & -0.22527 & 0.95681 & -0.18334 & 0.34804 \\ -0.026226 & -0.17700 & -0.13630 & -0.086014 & 0.91824 \\ 0.98784 & 0.13102 & -0.21808 & -0.040743 & -0.0074052 \\ -0.064108 & 0.062064 & 0.11722 & 0.97558 & 0.18513 \\ 0.13113 & 0.94705 & 0.068149 & 0.074696 & 0.037026 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} -2.4286 \times 10^{-17} & 6.9389 \times 10^{-17} & 0.0 & -2.0691 \times 10^{-15} & -1.6653 \times 10^{-15} \\ 0.0 & -2.3592 \times 10^{-16} & 8.3267 \times 10^{-17} & -5.4395 \times 10^{-15} & 0.0 \\ 0.0 & 2.0817 \times 10^{-17} & 1.5266 \times 10^{-16} & -1.485 \times 10^{-16} & -1.5829 \times 10^{-16} \\ 4.1633 \times 10^{-17} & -2.0817 \times 10^{-17} & 3.4694 \times 10^{-17} & 0.0 & 8.7153 \times 10^{-15} \\ 1.3878 \times 10^{-17} & 0.0 & 3.2613 \times 10^{-16} & 8.0414 \times 10^{-17} & 7.8063 \times 10^{-16} \end{bmatrix} i.$$

Заметим, что порядок соответствующих собственных значений отличен от их порядка в исходной матрице Λ. Мы можем видеть это, рассматривая произведение $Q^{-1}\mathcal{C}_A Q$:

$$\begin{bmatrix} 0.69823 & -0.0000016227 & -0.0000020987 & 0.00000060427 & -0.0000002141 \\ -0.0000032202 & -0.67367 & -0.0000035373 & 0.0000045973 & -0.0000013728 \\ 0.00000026304 & 0.0000033418 & 0.39555 & -0.00000010912 & -0.0000023689 \\ -0.000000034412 & 0.0000027929 & 0.0000030551 & 0.85551 & 0.00000074351 \\ 0.00000063063 & -0.00000020583 & -0.0000022916 & 0.0000012487 & 0.82987 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0.71587 & -0.0000072692 & -0.0000064697 & 0.0000031102 & 0.0000014071 \\ 0.0000044353 & -0.73904 & -0.0000016337 & -0.000000624 & -0.0000006787 \\ 0.00000063385 & -0.0000010237 & -0.91844 & -0.0000026568 & 0.0000020208 \\ -0.00000055412 & 0.00000056946 & 0.0000017988 & -0.51779 & 0.0000017383 \\ 0.0000016017 & 0.00000010525 & 0.000000067107 & 0.00000038365 & -0.55796 \end{bmatrix} i.$$

Как и следовало ожидать, эта матрица почти диагональна: поскольку коквадрат $\mathcal{C}_A$ хорошо обусловлен, вычисленные собственные векторы являются хорошими приближениями к соответствующим собственным векторам.

Теперь вычислим произведение Q^*AQ:

$$\begin{bmatrix} 3.52292996754929 & -2.16493490 \times 10^{-15} & -1.28369537 \times 10^{-16} & -1.48839274 \times 10^{-15} & -2.55004351 \times 10^{-16} \\ -2.13717932 \times 10^{-15} & 0.960978339111032 & 1.26287869 \times 10^{-15} & 8.04911693 \times 10^{-16} & 1.76247905 \times 10^{-15} \\ 1.52655666 \times 10^{-16} & 4.99600361 \times 10^{-16} & 2.79472428991858 & 8.88178420 \times 10^{-16} & -1.545638612 \times 10^{-15} \\ -2.06085150 \times 10^{-15} & -2.77555756 \times 10^{-16} & 2.08166817 \times 10^{-17} & -2.22191653953022 & -8.95464258 \times 10^{-15} \\ 2.77555756 \times 10^{-17} & 2.22044604 \times 10^{-16} & 5.96744876 \times 10^{-16} & -1.87905247 \times 10^{-14} & 5.90405306809074 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 1.48507456561132 & -8.32667269\times10^{-17} & 6.41847686\times10^{-16} & -9.40220124\times10^{-16} & 9.16801357\times10^{-16} \\ -6.10622664\times10^{-16} & -2.17629180 & -6.10622664\times10^{-16} & 4.99600361\times10^{-16} & 9.43689571\times10^{-16} \\ -3.5388359\times10^{-16} & -3.6082248\times10^{-16} & -1.839265501 & 7.63278330\times10^{-17} & -1.63064007\times10^{-15} \\ -2.029626467\times10^{-16} & -4.16333634\times10^{-17} & -8.56953397\times10^{-16} & 0.620050292285994 & 1.92376497\times10^{-14} \\ -1.38777878\times10^{-17} & -1.99840144\times10^{-15} & 1.83880689\times10^{-15} & -9.67281810\times10^{-15} & -1.800257000 \end{bmatrix} i.$$

Как мы и надеялись, эта матрица почти диагональна. Однако ее диагональные элементы совсем не похожи на канонические углы матрицы A (другими словами, на диагональные элементы исходной матрицы D). Это объясняется тем обстоятельством, что диагональная форма юнитоида не единственна. Выполним дополнительную конгруэнцию с диагональной матрицей преобразования, сконструированной так, чтобы сделать диагональные элементы унимодулярными числами. В результате получим матрицу F, показанную ниже.

$$F = \begin{bmatrix} 0.92147 & -7.1784\times10^{-16} & -3.5893\times10^{-17} & -5.0119\times10^{-16} & -5.2493\times10^{-17} \\ -7.0866\times10^{-16} & 0.40394 & 4.4764\times10^{-16} & 3.4359\times10^{-16} & 4.5994\times10^{-16} \\ 4.2685\times10^{-17} & 1.7709\times10^{-16} & 0.83532 & 3.1971\times10^{-16} & -3.4012\times10^{-16} \\ -6.9397\times10^{-16} & -1.1848\times10^{-16} & 7.4933\times10^{-18} & -0.96320 & -2.3731\times10^{-15} \\ 5.7137\times10^{-18} & 5.7943\times10^{-17} & 1.3132\times10^{-16} & -4.9798\times10^{-15} & 0.95652 \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} 0.38845 & -2.761\times10^{-17} & 1.7947\times10^{-16} & -3.1660\times10^{-16} & 1.887300000\times10^{-16} \\ -2.0247\times10^{-16} & -0.91479 & -2.1644\times10^{-16} & 2.1326\times10^{-16} & 2.4626\times10^{-16} \\ -9.8948\times10^{-17} & -1.2789\times10^{-16} & -0.54976 & 2.7475\times10^{-17} & -3.5882\times10^{-16} \\ -6.8343\times10^{-17} & -1.7772\times10^{-17} & -3.0847\times10^{-16} & 0.26879 & 5.0983\times10^{-15} \\ -2.8568\times10^{-18} & -5.2150\times10^{-16} & 4.0464\times10^{-16} & -2.5634\times10^{-15} & -0.29167 \end{bmatrix} i.$$

С точностью до порядка расположения, диагональные элементы матрицы F те же, что у D.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Были построены тестовые матрицы порядков от 6 до 10 таким же образом, как это описано в разд. 5. К этим матрицам был применен алгоритм из разд. 4. Здесь мы представим полученные численные результаты.

Для каждого порядка n приводится следующая информация:

1) минимальное расстояние между диагональными элементами исходной матрицы Λ. Наряду с другими характеристиками, это важный показатель обусловленности коквадрата в смысле полной проблемы собственных значений;

2) диагональные элементы исходной матрицы D;

3) спектральное число обусловленности матрицы P и ее строчные множители преобладания;

4) диагональные элементы финальной матрицы A, полученной в результате конгруэнции $A \to Q^*AQ$ и дополнительной конгруэнции, превращающей диагональные элементы в унимодулярные числа; показан также модуль наибольшего внедиагонального элемента этой финальной матрицы.

Для $n = 6$ имеем $\min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \approx 0.18916$. Диагональные элементы матрицы $D = [-0.99798 + 0.063579\,i,$ $-0.19087 - 0.98162\,i,$ $-0.93968 - 0.34204\,i,$ $0.68897 + 0.72479\,i,$ $0.28285 + 0.95916\,i,$ $0.29373 - 0.95589\,i]$, $\mathrm{cond}_2 P = 2.5922$. Строчные множители преобладания матрицы $P = [0.92908,\ 0.44952,\ 0.54825,\ 0.59117,$ $0.43062,\ 0.41404]$. Диагональные элементы финальной матрицы $A = [-0.99798 + 0.063580\,i,\ -0.93969 -$ $- 0.34204\,i,\ 0.29373 - 0.95589\,i,\ 0.68895 + 0.72481\,i,\ -0.19087 - 0.98162\,i,\ 0.28284 + 0.95917\,i]$. Модуль наибольшего внедиагонального элемента матрицы $A = 1.4041 \times 10^{-15}$.

Если $n = 7$, то $\min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \approx 0.09006$. Диагональные элементы матрицы $D = [-0.33215 - 0.94323\,i,$ $0.46926 - 0.88306\,i,\ -0.85884 - 0.51225\,i,\ -0.60305 + 0.79771\,i,\ -0.99500 - 0.099839\,i,\ -0.64484 - 0.76432\,i,$ $-0.98950 - 0.14454\,i]$, $\mathrm{cond}_2 P = 4.6178$. Строчные множители преобладания матрицы $P = [0.97949,\ 0.62807,$ $0.62379,\ 0.57623,\ 0.53409,\ 0.42620,\ 0.44784]$. Диагональные элементы финальной матрицы $A = [0.46927 -$ $- 0.88306\,i,\ -0.60304 + 0.79771\,i,\ -0.33214 - 0.94323\,i,\ -0.64483 - 0.76433\,i,\ -0.85884 - 0.51225\,i,\ -0.98950 -$ $- 0.14454\,i,\ -0.99500 - 0.099841\,i]$. Модуль наибольшего внедиагонального элемента матрицы $A = 5.18095 \times$ $\times 10^{-15}$.

Если $n = 8$, то $\min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \approx 0.067026$. Диагональные элементы матрицы $D = [-0.018714 + 0.99982\,i,\ -0.58544 + 0.81072\,i,\ -0.94184 + 0.33607\,i,\ -0.99183 + 0.12754\,i,\ 0.14779 - 0.98902\,i,\ 0.90666 + 0.42187\,i,\ -0.89201 - 0.45201\,i,\ 0.69023 + 0.72359\,i]$, $\mathrm{cond}_2 P = 3.3993$. Строчные множители преобладания матрицы $P = [0.66038,\ 0.71515,\ 0.59585,\ 0.50718,\ 0.50214,\ 0.51355,\ 0.53183,\ 0.45631]$. Диагональные элементы финальной матрицы $A = [-0.018714 + 0.99982\,i,\ 0.14779 - 0.98902\,i,\ -0.58543 + 0.81072\,i,\ -0.94184 + 0.33606\,i,\ -0.99183 + 0.12754\,i,\ 0.69022 + 0.72360\,i,\ -0.89201 - 0.45201\,i,\ 0.90666 + 0.42186\,i]$. Модуль наибольшего внедиагонального элемента матрицы $A = 4.0844 \times 10^{-15}$.

В случае $n = 9$ $\min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \approx 0.21319$. Диагональные элементы матрицы $D = [0.67771 + 0.73533\,i,\ 0.46537 - 0.88512\,i,\ -0.56004 + 0.82847\,i,\ -0.70299 + 0.71120\,i,\ -0.15475 - 0.98795\,i,\ 0.96553 + 0.26030\,i,\ -0.75223 - 0.65890\,i,\ -0.96317 + 0.26891\,i,\ 0.88759 + 0.46063\,i]$, $\mathrm{cond}_2 P = 3.2703$. Строчные множители преобладания матрицы $P = [0.85205,\ 0.72679,\ 0.65264,\ 0.56769,\ 0.57712,\ 0.49667,\ 0.43503,\ 0.49889,\ 0.42197]$. Диагональные элементы финальной матрицы $A = [-0.15475 - 0.98795\,i,\ 0.46538 - 0.88511\,i,\ -0.56005 + 0.82846\,i,\ -0.70299 + 0.71120\,i,\ -0.96317 + 0.26891\,i,\ 0.96553 + 0.26030\,i,\ 0.88759 + 0.46064\,i,\ 0.67770 + 0.73534\,i,\ -0.75224 - 0.65889\,i]$. Модуль наибольшего внедиагонального элемента матрицы $A = 4.4627 \times 10^{-15}$.

При $n = 10$ $\min_{i,j} |\lambda_i - \lambda_j| \approx 0.08846$. Диагональные элементы матрицы $D = [0.77102\ -0.63681\,i,\ 0.33951 + 0.94060\,i,\ 0.72532 + 0.68841\,i,\ -0.29731 - 0.95478\,i,\ -0.95444 - 0.29840\,i,\ 0.91527 + 0.40283\,i,\ 0.98347 - 0.18105\,i,\ -0.99052 + 0.13737\,i,\ -0.23408 + 0.97222\,i,\ 0.98242 + 0.18670\,i]$, $\mathrm{cond}_2 P = 2.9738$. Строчные множители преобладания матрицы $P = [0.75692,\ 0.66424,\ 0.77500,\ 0.67708,\ 0.55788,\ 0.53128,\ 0.66019,\ 0.49208,\ 0.51295,\ 0.49142]$. Диагональные элементы финальной матрицы $A = [0.77101\ -0.63682\,i,\ -0.23408 + 0.97222\,i,\ 0.98348 - 0.18104\,i,\ -0.99052 + 0.13737\,i,\ 0.72533 + 0.68840\,i,\ 0.98242 + 0.18670\,i,\ -0.95444 - 0.29840\,i,\ 0.91527 + 0.40284\,i,\ 0.33950 + 0.94060\,i,\ -0.29731 - 0.95478\,i]$. Модуль наибольшего внедиагонального элемента матрицы $A = 5.527 \times 10^{-15}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

A NONSINGULAR MATRIX WITH A WELL-CONDITIONED COSQUARE: HOW TO BRING IT TO DIAGONAL FORM BY A CONGRUENCE TRANSFORMATION

Kh. D. Ikramov[a,*], **A. M. Nazari**[b,**]

[a] *119992 Moscow, Leninskie Gory, Moscow State University, CMC Faculty, Russia*
[b] *Faculty of Mathematics, Arak University, Arak, Islamic Republic Iran*
**e-mail: ikramov@cs.msu.su*
***e-mail: a-nazari@araku.ac.ir*

Received: 09.01.2024
Revised: 18.04.2024
Accepted: 31.05.2024

Abstract. There exist efficient programs for bringing a diagonalizable matrix to diagonal form by a similarity transformation. In theory of congruence transformations, unitoid matrices are analogs of diagonalizable matrices. However, excepting Hermitian and, more generally, normal matrices, there are no recognized programs for bringing a unitoid matrix to diagonal form by a congruence transfor- mation. We propose an algorithm that is able to perform this task for a special class of unitoid matrices, namely, nonsingular matrices whose cosquares are well-conditioned with respect to the complete eigenproblem. Examples are presented to illustrate the performance of the algorithm.

Keywords: *-congruence transformation, similarity transformation, unitoid, cosquare, canonical angles, diagonally dominant matrix, condition number.