

О НЕСТАНДАРТНОМ МЕТОДЕ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛИНЕАРИЗУЕМЫХ РЕШЕНИЙ В ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ТЕОРИИ ВОЛНОВОДОВ¹⁾

© 2024 г. Д. В. Валовик^{1,*}, А. А. Дюндяева, С. В. Тихов^{1,**}

¹440026 Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский гос. ун-т, Россия

*e-mail: dvalovik@mail.ru

**e-mail: tik.stanislav2015@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.04.2024 г.

Переработанный вариант 26.05.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Изучена задача о распространении электромагнитных волн в плоском диэлектрическом волноводе. Волновод заполнен нелинейной неоднородной средой; нелинейность характеризуется произвольной монотонной положительной непрерывно-дифференцируемой функцией со степенным ростом на бесконечности. Неоднородность среды характеризуется малыми (немонотонными) возмущениями линейной части диэлектрической проницаемости, а также коэффициента при нелинейном слагаемом. С математической точки зрения, эта задача эквивалентна нелинейной задаче на собственные значения для системы уравнений Максвелла со смешанными краевыми условиями. Для исследования задачи предложен метод возмущения, в котором в качестве невозмущенной задачи используется более простая нелинейная задача. Доказано существование как линеаризуемых, так и нелинеаризуемых решений. Библ. 26. Фиг. 16.

Ключевые слова: нелинейная задача типа Штурма–Лиувилля, метод возмущений, нелинеаризуемые решения, уравнения Максвелла, диэлектрический плоский волновод, нелинейная диэлектрическая проницаемость, нелинейный эффект Керра, неоднородная среда.

DOI: 10.31857/S0044466924100135, EDN: JYXPYU

1. ВВЕДЕНИЕ

Этот раздел состоит из двух комплементарных частей: в первой части обсуждаются некоторые физические аспекты, связанные с изучаемой задачей, а во второй части обсуждаются математические подходы к проблеме.

Процессы распространения монохроматических электромагнитных волн в плоских слоистых волноводах, заполненных нелинейной средой, активно исследуются в течение многих десятилетий как в России, так и за рубежом. В строгой постановке некоторые из задач, отвечающих указанным процессам, вероятно, впервые появились в работе [1]. Хороший обзор, в первую очередь, результатов, полученных к 1990 г. за рубежом, содержится в работе [2] (см. также и представленную там библиографию). Кроме указанных источников, также стоит упомянуть работы [3]–[6].

Среди различных нелинейных эффектов, возникающих в результате взаимодействия интенсивного электромагнитного излучения со средой, важное место занимают так называемые эффекты самовоздействия, которые характеризуются тем, что падающий свет оказывает влияние на оптические характеристики (диэлектрическую проницаемость или показатель преломления) среды. Самым известным (и наиболее часто используемым) нелинейным законом, описывающим эффекты самовоздействия, является закон Керра (кубическая нелинейность). Этот закон используется при изучении сред с инверсной симметрией, где нелинейные эффекты второго порядка не проявляются.

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 24-21-00028).

К настоящему времени теория распространения монохроматических поляризованных волн в нелинейных волноводах для случая произвольной нелинейности, отвечающей эффектам самовоздействия, в большой степени завершена. При этом предполагается, что линейная часть диэлектрической проницаемости является постоянной величиной (см. [7], [8]), т.е. в отсутствие нелинейных эффектов среда является однородной. С математической точки зрения такие физические задачи сводятся к нелинейным задачам на собственные значения для системы уравнений Максвелла с соответствующими краевыми условиями и, в случае открытых волноводов, условиям затухания поля на бесконечности. В дальнейшем был развит метод, позволяющий включить в рассмотрение и неоднородную линейную часть диэлектрической проницаемости (см. [9]–[11]). Однако основным недостатком развитого в работах [9]–[11] метода является то, что в качестве неоднородной части диэлектрической проницаемости может использоваться лишь монотонно возрастающая функция (поперечной координаты волновода).

В реальных волноведущих системах гораздо большее значение имеют неоднородности, которые характеризуются немонотонными функциями (см., например, [12]–[14]). В этом случае метод, развитый в работах [9]–[11], неприменим. Кроме того, для волноводов с нелинейным заполнением интерес представляет и такая ситуация, когда неоднородность является немонотонной, но малой по абсолютному значению функцией. С одной стороны, такая функция моделирует возмущение однородной среды, которое неизбежно возникает в любой реальной среде, которую можно приближенно считать однородной. С другой стороны, как показывают численные эксперименты в случае наличия нелинейности, такое “возмущение” линейной части диэлектрической проницаемости приводит к сильным изменениям дисперсионных кривых для “возмущенного” волновода (см. [15]). Работа [15] посвящена задаче о распространении монохроматических ТЕ-волн в плоском экранированном диэлектрическом слое, заполненном керровской средой (кубическая нелинейность) с “возмущенной” линейной частью диэлектрической проницаемости, и является, насколько известно авторам настоящей работы, первым результатом в этой области.

В настоящей работе исследуется задача о распространении монохроматических ТЕ-волн в плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной неоднородной средой. Выделим главные отличия данного исследования по сравнению с [15]. Во-первых, в настоящем исследовании рассматривается открытая волноведущая структура. Во-вторых, в качестве нелинейности рассматривается произвольная положительная монотонная функция от квадрата модуля амплитуды электрического поля, имеющая степенной рост на бесконечности. Такая нелинейность описывает в простейшем случае Керровский эффект, а также нелинейные эффекты высших порядков, имеющие место в средах с инверсной симметрией. Третьей важной особенностью настоящей работы является возмущение коэффициента нелинейности.

С математической точки зрения в работе исследуется задача на собственные значения для неавтономного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка с краевыми условиями третьего рода (в которые нелинейно входит спектральный параметр) и одним дополнительным локальным условием. Поскольку соответствующая линейная задача о распространении волн имеет дискретное множество решений (собственных значений), то естественно желание получить дискретные собственные значения и в нелинейной задаче. Это приводит к необходимости использования дополнительного условия (в данной постановке мы используем локальное краевое условие).

Одним из интересных эффектов в случае волноводов с нелинейным заполнением является наличие нелинеаризируемых решений у соответствующих математических задач (см. [7]–[11]). По этой причине какие-либо варианты методов возмущений, где в качестве невозмущенных задач используются линеаризованные постановки задач, не годятся для полного исследования описанных проблем. В то же время на настоящий момент нет строгой математической теории, которая позволяла бы учитывать немонотонные неоднородности в случае нелинейных волноведущих систем. Развитие предложенного в работах [9]–[11] подхода на немонотонные (неограниченные) нелинейности было бы существенным шагом в развитии аналитического аппарата теории нелинейных краевых задач.

В качестве метода исследования предлагается нестандартный метод возмущения, основанный на использовании решений более простой нелинейной задачи для нахождения решений основной задачи. Такой подход позволяет доказать разрешимость рассматриваемой задачи при достаточно малых значениях возмущающих параметров и при любом положительном фиксированном значении коэффициента нелинейности. Важным преимуществом предложенного метода по сравнению с классическим методом возмущения, использующим решения линейной задачи, является установление существования нелинеаризируемых решений задачи. Данный результат представляет интерес с физической точки зрения, поскольку такие нелинеаризируемые решения могут отвечать новым режимам распространения направленных ТЕ-поляризованных волн в описанной выше нелинейной волноведущей структуре. Кроме того, предложенный нестандартный метод возмущений может быть интересен и другим исследователям нелинейных задач, особенно в теории колебаний.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть монохроматическая ТЕ-поляризованная волна $(\mathbf{E}, \mathbf{H})e^{-i\omega t}$, где ω — круговая частота,

$$\mathbf{E} = (0, e_y(x), 0)e^{i\gamma z}, \quad \mathbf{H} = (h_x(x), 0, h_z(x))e^{i\gamma z}, \quad (2.1)$$

есть комплексные амплитуды (см. [16]), $\gamma \in \mathbb{R}$ — волновое число, распространяется в плоском слое $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$, расположенном между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$.

Волновод Σ заполнен неоднородной нелинейной средой, которая характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью вида

$$\varepsilon_l(x) = \varepsilon_1 + c_1\varepsilon_2(x) + (\alpha_1 + c_2\alpha_2(x))f(|\mathbf{E}|^2), \quad 0 \leq x \leq h,$$

где ε_1, α_1 — положительные постоянные, c_1, c_2 — вещественные параметры, $\varepsilon_2(x)$ — непрерывная, а $\alpha_2(x)$ — непрерывно дифференцируемая функции, определенные на отрезке $x \in [0, h]$, причем

$$\alpha_1 + c_2\alpha_2(x) \geq 0,$$

а $f(s)$ — монотонно возрастающая положительная функция, имеющая степенной рост на бесконечности, т.е. представима в виде

$$f(s) = s^{2q} + f_1(s), \quad q > 0,$$

где $f_1(s)$ — положительная непрерывная функция такая, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} f_1(s) \cdot s^{-2q} = 0. \quad (2.2)$$

Полупространства $x < 0$ и $x > h$ заполнены однородными изотропными линейными средами, которые характеризуются постоянными диэлектрическими проницаемостями ε_c и ε_s соответственно, причем $\varepsilon_c \leq \varepsilon_s$ (последнее условие не ограничивает общности рассмотрения).

Во всем пространстве $\mu = \mu_0$, где μ_0 — магнитная постоянная.

Комплексные амплитуды (2.1) удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где ε_0 — диэлектрическая постоянная и

$$\varepsilon_r = \begin{cases} \varepsilon_s, & x > h, \\ \varepsilon_l, & 0 \leq x \leq h, \\ \varepsilon_c, & x < 0, \end{cases}$$

условию непрерывности касательных компонент поля (в данном случае таковыми являются e_y и h_z) на границах $x = 0$, $x = h$, а также условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$. Кроме того, мы накладываем на одну из компонент поля дополнительное условие, а именно, требуем, чтобы касательная компонента электрического поля имела фиксированное значение на границе $x = 0$.

В сформулированной задаче искомыми являются значения параметра γ , которые отвечают распространяющимся в слое волнам (2.1). Такие γ называют постоянными распространения волновода. Знание полного набора постоянных распространения необходимо при проектировании волноводящих структур.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Подставив амплитуды (2.1) в систему (2.3), получаем

$$\begin{aligned} i\gamma h_x - h'_z &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_r e_y, \\ i\gamma e_y &= -i\omega\mu h_x, \\ e'_y &= i\omega\mu h_z. \end{aligned}$$

Выражая h_x и h'_z из второго и третьего уравнений, соответственно, и подставляя их в первое уравнение, получаем

$$e''_y = \omega^2\varepsilon_0\mu_0(\gamma^2 - \varepsilon_r)e_y.$$

Пусть $k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$. Выполняя в предыдущем уравнении нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = k_0 x$, $\tilde{\gamma} = k_0^{-1} \gamma$, $\tilde{h} = k_0 h$, вводя обозначение $e_y := u$ и опуская символ тильды, получаем

$$u'' = (\gamma^2 - \varepsilon_r)u. \quad (3.1)$$

В полупространствах $x < 0$ и $x > h$ уравнение (3.1), будучи линейным и однородным, решается элементарно. С учетом условий на бесконечности решения имеют вид

$$u(x) = \begin{cases} C_c e^{k_c x}, & x < 0, \\ C_s e^{-k_s(x-h)}, & x > h. \end{cases}$$

где $k_c = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} > 0$, $k_s = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} > 0$, а C_c, C_s есть произвольные постоянные. Из условий положительности подкоренных выражений в k_c, k_s и условия $\varepsilon_c \geq \varepsilon_s$ следует, что

$$\gamma^2 > \varepsilon_c. \quad (3.2)$$

Внутри слоя Σ уравнение (3.1) имеет вид

$$u'' = -(\varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2(x) - \gamma^2)u - (\alpha_1 + c_2 \alpha_2(x))f(u^2)u. \quad (3.3)$$

Из условий непрерывности касательных компонент поля следуют условия сопряжения для функции u вида

$$[u]|_{x=0} = 0, \quad [u]|_{x=h} = 0, \quad [u']|_{x=0} = 0, \quad [u']|_{x=h} = 0,$$

где $[u]|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} u(x) - \lim_{x \rightarrow x_0+0} u(x)$.

Используя найденные для полупространств решения и записанные выше условия сопряжения, получаем для функции $u(x)$ краевые условия вида

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot u(0) - u'(0) = 0, \quad (3.4)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot u(h) + u'(h) = 0. \quad (3.5)$$

Кроме того, мы требуем, чтобы касательная компонента электрического поля имела фиксированное значение на границе $x = 0$; отсюда следует, что функция u должна удовлетворять дополнительному условию вида

$$u(0) = A, \quad (3.6)$$

где A является фиксированной положительной величиной (это условие не ограничивает общности рассмотрения).

Поскольку уравнение (3.3) и условия (3.4), (3.5) зависят от γ^2 , то достаточно исследовать случай $\gamma > 0$.

Итак, с математической точки зрения задача о распространении волны эквивалентна задаче $\mathcal{P}$, которая заключается в нахождении таких $\gamma = \hat{\gamma} > 0$, удовлетворяющих неравенству (3.2), что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x; \gamma, c_1, c_2)$, удовлетворяющая уравнению (3.3) и условиям (3.4), (3.5) и (3.6). Искомые $\gamma = \hat{\gamma}$ будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции $u(x; \hat{\gamma}, c_1, c_2)$ — собственными функциями задачи $\mathcal{P}$.

Если в уравнении (3.3) положить $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, то получаем частный случай задачи $\mathcal{P}$, а именно, задачу $\mathcal{P}'$, которая состоит в нахождении таких $\gamma = \bar{\gamma}$, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$, удовлетворяющая уравнению

$$v'' = -(\varepsilon_1 - \gamma^2)v - \alpha_1 f(v^2)v \quad (3.7)$$

и краевым условиям

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot v(0) - v'(0) = 0, \quad v(0) = A > 0, \quad (3.8)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot v(h) + v'(h) = 0. \quad (3.9)$$

Искомые $\gamma = \bar{\gamma}$ будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции $v(x, \bar{\gamma})$ — собственными функциями задачи $\mathcal{P}'$ (см. [7]).

Задача $\mathcal{P}'$ будет использована в дальнейшем в качестве основного вспомогательного инструмента для аналитического исследования задачи $\mathcal{P}$.

Если в уравнении (3.3) положить $\alpha_1 + c_2\alpha_2(x) \equiv 0$, то задача $\mathcal{P}$ вырождается в линейную задачу $\mathcal{P}^0$ (где c_1 не обязательно равна нулю), которая заключается в нахождении таких $\gamma = \tilde{\gamma}$, что существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $w \equiv w(x, \tilde{\gamma}, c_1)$, не равная тождественно нулю, являющаяся решением уравнения

$$w'' = -(\varepsilon_1 + c_1\varepsilon_2(x) - \gamma^2)w, \quad (3.10)$$

и удовлетворяющая краевым условиям

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot w(0) - w'(0) = 0, \quad (3.11)$$

$$\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_c} \cdot w(h) + w'(h) = 0. \quad (3.12)$$

Искомые $\gamma = \tilde{\gamma}$ будем называть собственными значениями, а соответствующие им функции $w(x, \tilde{\gamma})$ — собственными функциями задачи $\mathcal{P}^0$.

Отметим, что условие (3.6), которое необходимо для определения дискретных собственных значений в задаче $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$, не является необходимым в линейной задаче и по этой причине опущено.

Задача $\mathcal{P}^0$ является классической в линейной волноводной теории (см. [14], [17]–[19]). Имеет место следующий результат.

Утверждение 1. *Задача $\mathcal{P}^0$ имеет конечное число собственных значений $\tilde{\gamma}$. Более того, если в уравнении (3.10) положить $c_1 = 0$, то все положительные собственные значения $\tilde{\gamma}$ задачи $\mathcal{P}^0$ принадлежат интервалу $(\sqrt{\varepsilon_s}, \sqrt{\varepsilon_1})$.*

Мы не приводим здесь доказательства данного утверждения, так как этот результат является частью классической теории Штурма–Лиувилля (см. [19], [20]).

Задача $\mathcal{P}^0$ может быть использована для развития стандартного метода возмущения для нахождения решений задачи $\mathcal{P}$. Действительно, пусть $\tilde{\gamma}'$ есть собственное значение задачи $\mathcal{P}^0$. Можно показать, что для достаточно малого $\alpha_1 + c_2\alpha_2(x)$ в некоторой окрестности $\tilde{\gamma}'$ существует, по крайней мере, одно собственное значение $\hat{\gamma}'$ задачи $\mathcal{P}$ и $\lim_{|\alpha_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}' = \tilde{\gamma}'$ [7]. Этот подход реализован в некоторых близких волноводных задачах (см. [21], [22]).

Очевидно, что такой подход позволяет найти только линеаризуемые собственные значения задачи $\mathcal{P}$. Однако задача $\mathcal{P}$ может иметь решения, не связанные с решениями задачи $\mathcal{P}^0$ (так называемые нелинеаризуемые нелинейные решения). Собственные значения, отвечающие таким решениям, не могут быть найдены с помощью обсуждаемого подхода. Действительно, как будет показано в разд. 4 этой статьи задача $\mathcal{P}'$ имеет бесконечно много нелинеаризуемых решений, т.е. таких решений, которые не связаны с собственными значениями задачи $\mathcal{P}^0$ при $c_1 = 0$. Естественно ожидать, что, по крайней мере, при малых c_1, c_2 задача $\mathcal{P}$ также имеет нелинеаризуемые решения. Такие решения могут быть найдены с помощью метода возмущения, использующего в качестве невозмущенной (нелинейную) задачу $\mathcal{P}'$.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА $\mathcal{P}'$

В данном разделе представлены некоторые известные результаты, касающиеся разрешимости задачи $\mathcal{P}'$ и свойств ее решений. Как уже было отмечено выше, эта задача исследована в [7], [8]; используя результаты, представленные в этих работах, мы легко получаем следующие факты.

Утверждение 2. *Задача Коши для уравнения (3.7) с условиями (3.8) глобально однозначно разрешима и ее решение $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$ непрерывно зависит от переменной $x \in [0, h]$ и параметра $\gamma \in (\sqrt{\varepsilon_c}, +\infty)$.*

Ясно, что решение $v \equiv v(x, \bar{\gamma})$ задачи Коши (3.7), (3.8) является собственной функцией задачи $\mathcal{P}'$, если оно удовлетворяет условию (3.9). Таким образом, имеем следующий вполне очевидный результат.

Утверждение 3. *Число $\gamma = \bar{\gamma}$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}'$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению*

$$\Phi(\gamma) \equiv \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_s} \cdot v(h, \gamma) + v'(h, \gamma) = 0, \quad (4.1)$$

где $v(x, \gamma)$ является решением задачи Коши (3.7), (3.8).

Функцию $\Phi(\gamma)$ назовем *характеристической функцией* задачи $\mathcal{P}'$.

В работе [7] получен следующий важный результат, устанавливающий разрешимость задачи $\mathcal{P}'$ и свойства ее решений.

Теорема 1. Задача $\mathcal{P}'$ имеет бесконечно много положительных собственных значений $\gamma = \bar{\gamma}$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме того, существует бесконечное число собственных значений $\gamma = \bar{\gamma}_k$, имеющих окрестности $\Gamma_k = (\bar{\gamma}_k - \delta_k, \bar{\gamma}_k + \delta_k)$, где $\delta_k > 0$ есть некоторая постоянная, на противоположных концах которых характеристическая функция φ задачи $\mathcal{P}'$, определенная в (4.1), принимает значения разных знаков, т.е. выполняется неравенство

$$\varphi(\bar{\gamma}_k - \delta_k) \cdot \varphi(\bar{\gamma}_k + \delta_k) < 0, \quad (4.2)$$

причем окрестность Γ_k не содержит других собственных значений задачи $\mathcal{P}'$, кроме $\bar{\gamma}_k$.

Отметим, что задача $\mathcal{P}'$ имеет бесконечно много нелинеаризуемых собственных значений. Такие решения отвечают новому режиму распространения электромагнитных волн, возникающему из-за наличия нелинейного слагаемого в диэлектрической проницаемости.

5. ЗАДАЧА $\mathcal{P}$

Начнем с утверждения о глобальной однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_c} \cdot A, \quad (5.1)$$

которые получаются из условий (3.4) и (3.6).

Утверждение 4. Задача Коши для уравнения (3.3) с условиями (5.1) однозначно глобально разрешима и ее решение $u \equiv u(x, \gamma, c_1, c_2)$ непрерывно зависит от переменной $x \in [0, h]$ и параметров $\gamma \in (\sqrt{\epsilon_c}, +\infty)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ при условии $\alpha_1 + c_2\alpha_2 > 0$.

Ясно, что решение $u(x, \gamma, c_1, c_2)$ задачи Коши (3.3), (5.1) является собственной функцией задачи $\mathcal{P}$, если оно удовлетворяет условию (3.5). Таким образом, имеем следующий результат.

Утверждение 5. Число $\gamma = \hat{\gamma}$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\psi(\gamma, c_1, c_2) \equiv \sqrt{\gamma^2 - \epsilon_c} \cdot u(h, \gamma, c_1, c_2) + u'(h, \gamma, c_1, c_2) = 0, \quad (5.2)$$

где $u(x, \gamma, c_1, c_2)$ является решением задачи Коши (3.3), (5.1).

Утверждение 5 доказывается аналогично тому, как доказано утверждение 5 в работе [15]. Функцию $\psi(\gamma, c_1, c_2)$ будем называть характеристической функцией задачи $\mathcal{P}$.

Все последующие результаты будут получены при некоторых ограничениях на параметры задачи. Будем считать, что $\gamma \in \Gamma^0$, $c_1 \in C_1^0$, $c_2 \in C_2^0$, где $\Gamma^0 := (\sqrt{\epsilon_s}, \gamma_0)$, $C_1^0 = (-c_1^0, c_1^0)$, $C_2^0 = (-c_2^0, c_2^0)$ и γ_0, c_1^0, c_2^0 есть некоторые фиксированные положительные числа и $\gamma_0 > \sqrt{\epsilon_s}$. Величина γ_0 выбирается произвольно, однако мы считаем, что γ_0 является достаточно большим, так чтобы интервал Γ_0 содержал собственные значения задачи $\mathcal{P}'$, являющиеся нелинеаризуемыми и удовлетворяющими свойству (4.2) (см. теорему 2). Числа c_1^0, c_2^0 должны быть выбраны в соответствии с теоремой 2.

Далее нам понадобится результат, устанавливающий связь между решениями задач Коши (3.3), (5.1) и (3.7), (3.8). Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 6. Пусть $u(x, \gamma, c_1, c_2)$ является решением задачи Коши для уравнения (3.3) с начальными условиями (5.1), а $v(x, \gamma)$ есть решение задачи Коши (3.7), (3.8). Тогда при $|c_1| + |c_2| \rightarrow +0$ верно, что

$$u(x, \gamma, c_1, c_2) \rightarrow v(x, \gamma) \quad (5.3)$$

равномерно по $x \in [0, h]$ и $\gamma \in \Gamma^0$.

Вычитая из обеих частей уравнения (5.2) характеристическую функцию задачи $\mathcal{P}'$, получаем

$$\psi(\gamma, c_1, c_2) - \varphi(\gamma) = -\varphi(\gamma). \quad (5.4)$$

Исследуя данное уравнение, получаем основной результат настоящей работы, устанавливающий разрешимость задачи $\mathcal{P}$.

Теорема 2. Пусть задача $\mathcal{P}'$ имеет n решений $\bar{\gamma}_k \in \Gamma^0$, где $k = \overline{1, n}$, удовлетворяющих свойству (4.2). Тогда существуют положительные числа c_1^0, c_2^0 такие, что для всех $c_1 \in C_1^0, c_2 \in C_2^0$ задача $\mathcal{P}$ имеет, по крайней мере, n решений $\hat{\gamma}_k$, причем каждое $\hat{\gamma}_k$ содержится в некоторой окрестности собственного значения $\bar{\gamma}_k$, и для каждого $k = \overline{1, n}$

$$\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k.$$

В связи с теоремой 2 необходимо дать следующие комментарии.

Теорема 2 утверждает существование n решений задачи $\mathcal{P}$, если задача $\mathcal{P}'$ имеет n решений в Γ^0 , и c_1^0, c_2^0 достаточно малы. Здесь целое число n может быть сколь угодно большим, но это влияет на верхние границы c_1^0, c_2^0 возможных значений c_1, c_2 ; а именно, чем больше n , тем меньше c_1^0, c_2^0 . Пытаясь перейти к пределу $n \rightarrow \infty$, мы получаем $c_1 \rightarrow 0, c_2 \rightarrow 0$; иными словами, в этом случае задача $\mathcal{P}$ вырождается в задачу $\mathcal{P}'$.

Если γ_0 достаточно велико, то, по крайней мере, некоторые из собственных значений $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$ являются нелинеаризуемыми. Назовем их «существенно нелинейными» собственными значениями. Это означает, что те собственные значения $\hat{\gamma}_k$, для которых $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$, где $\bar{\gamma}_k \in \Gamma$ является нелинеаризуемым собственным значением задачи $\mathcal{P}'$, также являются «существенно нелинейными».

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе представлены некоторые численные результаты. Во всех расчетах использовались следующие параметры: $f(|\mathbf{E}|^2) = |\mathbf{E}|^2$ (кроме фиг. 13–16, где $f(|\mathbf{E}|^2) = |\mathbf{E}|^2 + \alpha_1 |\mathbf{E}|^4$), $\alpha_1 = 6.4 \times 10^{-12} \text{ м}^2/\text{В}^2$ (за исключением линейного случая, где α_1 равно, как и c_2 , всегда нулю), $\epsilon_1 = 2.405$ и $A = 10^5 \text{ В/м}$ (см. [23]–[25]). Остальные параметры указаны в подписях к рисункам. Напомним, что A есть амплитуда касательной компоненты электрического поля на границе $x = 0$. Как известно, для обнаружения нелинейных эффектов величина амплитуды поля должна быть достаточно большой.

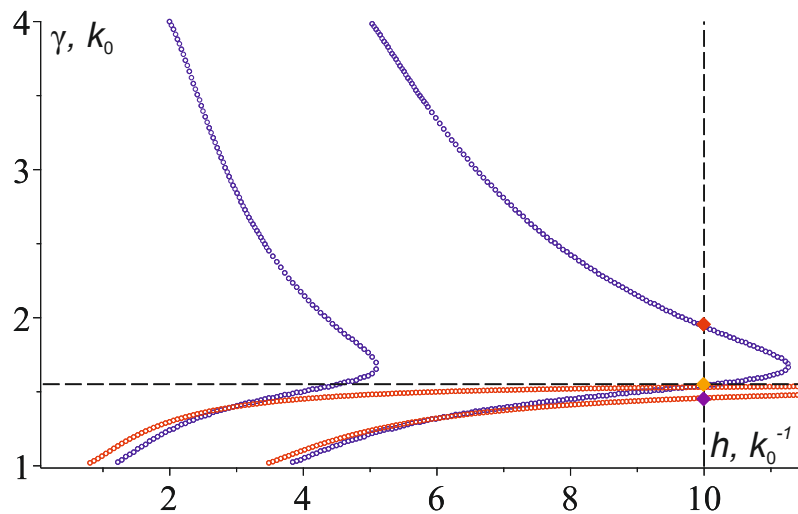
На фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 представлены дисперсионные кривые (ДК), характеризующие волноведущие свойства плоского диэлектрического слоя Σ в случаях, когда он заполнен линейной однородной (задача $\mathcal{P}_0$, где положено $c_1 = 0$), нелинейной однородной (задача $\mathcal{P}'$) и нелинейной неоднородной (задача $\mathcal{P}$) средами. Вообще говоря, дисперсионные кривые строятся как зависимость волнового числа γ либо от частоты ω волны, либо от толщины h волновода. Задачи $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ не содержат ω явно из-за нормировки на k_0 . Поэтому мы построили дисперсионные кривые в виде зависимости γ от h .

Отметим, что из-за уже упомянутой нормировки величины γ и h в представленных результатах являются безразмерными. «Реальные» значения волнового числа и толщины волновода есть, соответственно, $k_0 \gamma$ и $k_0^{-1} h$, где $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$.

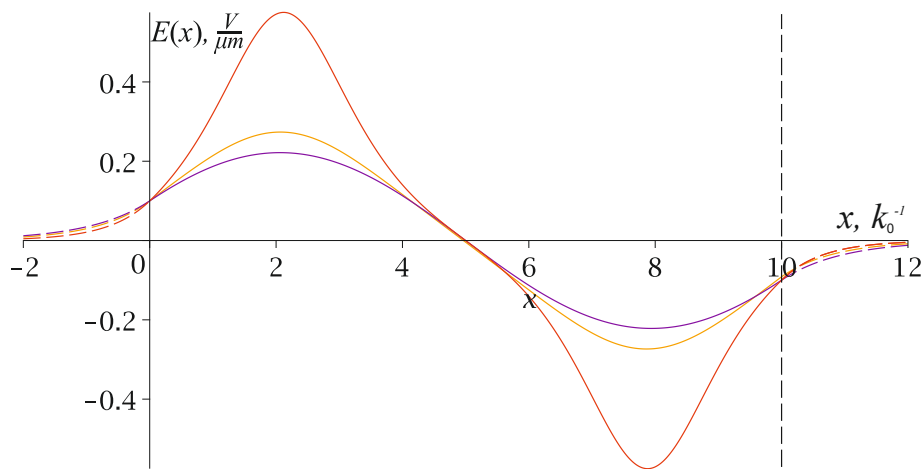
Вертикальная черная пунктирная линия $h = h^*$ на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 соответствует волноводу Σ толщиной $k_0^{-1} h^*$. Точки пересечения прямой $h = h^*$ с дисперсионными кривыми, обозначенные на указанных рисунках ромбами, являются, с одной стороны, собственными значениями одной из задач $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}', \mathcal{P}$, а, с другой стороны, принимая во внимание физический смысл задач $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}', \mathcal{P}$, являются постоянными распространения волновода Σ . В частности, фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 являются хорошей иллюстрацией к теореме 1, наглядно демонстрируя происхождение бесконечного числа решений (собственных значений) задачи $\mathcal{P}'$. Действительно, все синие дисперсионные кривые (хотя на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16 изображены лишь две синие ДК, на самом деле их бесконечно много) в области $\gamma > \sqrt{\epsilon_1}$ стремятся к прямой $h = 0$, откуда следует, что каждая из этих кривых непременно пересекает прямую $h = h^*$. Таким образом, существует бесконечно много точек пересечения синих ДК с прямой $h = h^*$, а, как уже отмечалось выше, все эти точки пересечения являются решениями задачи $\mathcal{P}'$ или постоянными распространения волновода Σ толщиной $h = h^*$.

На фиг. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 изображены собственные функции, соответствующие собственным значениям, отмеченным на фиг. 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. С физической точки зрения эти собственные функции связаны с (единственной) компонентой e_y электрического поля, а именно, $u(x; \gamma) = e_y(x; \gamma)$. Таким образом, фиг. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 демонстрируют распределение электрического поля направленных мод волновода Σ вдоль координатной оси Ox . Отметим, что в продольном направлении электромагнитная волна изменяется по гармоническому закону (см. формулу (2.1)).

В нелинейных случаях (задачи $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$) возможно, что несколько (разных) постоянных распространения принадлежат одной и той же дисперсионной кривой. Поэтому, чтобы различать такие постоянные распространения, будем использовать обозначения $\bar{\gamma}_{n,m}$ и $\hat{\gamma}_{n,m}$ для постоянных распространения задач $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}$ соответственно. В этих обозначениях $n = 1, 2, \dots$ есть номер дисперсионной кривой, а $m = 1, 2, \dots$ — номер постоянной распространения среди всех постоянных распространения, лежащих на одной дисперсионной кривой и расположенных в порядке возрастания.

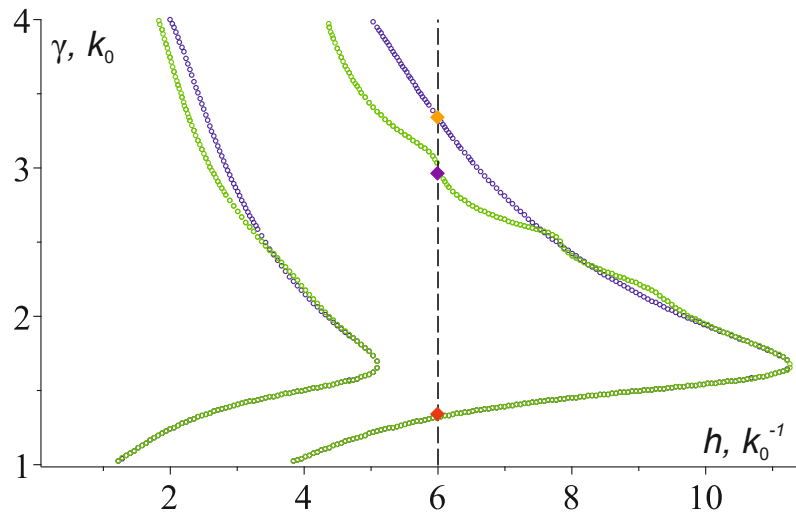


Фиг. 1. Дисперсионные кривые задач $\mathcal{P}'$ (синие кривые) и $\mathcal{P}^0$, где $c_1 = 0$ (красные кривые). Горизонтальная пунктирная линия есть асимптота для дисперсионных кривых задачи $\mathcal{P}^0$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\tilde{\gamma}_1 \approx \tilde{\gamma}_{2,1} \approx 1.566$ (оранжевый), $\tilde{\gamma}_2 \approx 1.448$ (фиолетовый) и $\tilde{\gamma}_{2,2} \approx 1.952$ (красный) волновода Σ толщиной $h = 10$.

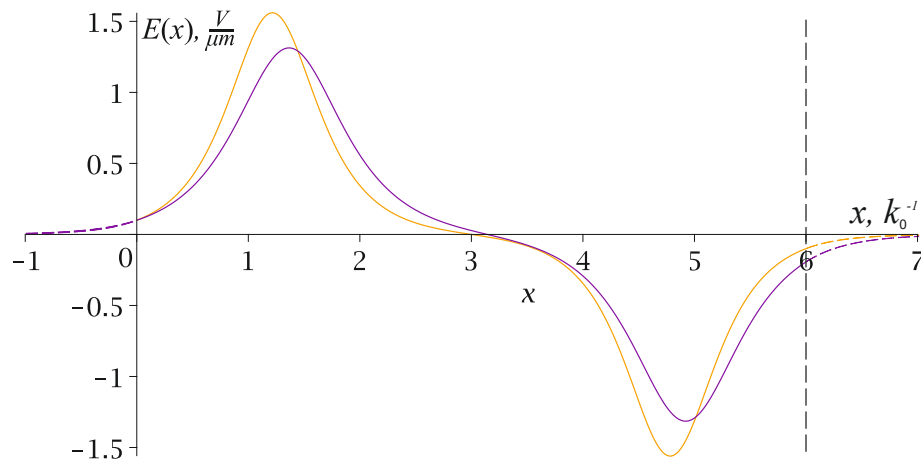


Фиг. 2. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\tilde{\gamma}_2$, $\tilde{\gamma}_{2,1}$ и $\tilde{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 1 соответственно фиолетовым, оранжевым и красным ромбами. Фиолетовая кривая есть $w(x; \tilde{\gamma}_2)$, оранжевая кривая есть $v(x; \tilde{\gamma}_{2,1})$ и красная кривая есть $v(x; \tilde{\gamma}_{2,2})$.

Представленные дисперсионные кривые и собственные функции задач $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}'$ наглядно демонстрируют идею развиваемого и применяемого в настоящей работе нестандартного метода возмущения для исследования задачи $\mathcal{P}$. Действительно, на фиг. 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 видно, что в окрестности всякого решения $\hat{\gamma}^*$ вспомогательной (нелинейной) задачи $\mathcal{P}'$ найдется, по крайней мере, одно собственное значение $\hat{\gamma}^*$ (постоянная распространения) основной (нелинейной неоднородной) задачи $\mathcal{P}$ при достаточно малых значениях возмущающих параметров c_1 и c_2 . Кроме того, можно показать, что $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}^* = \bar{\gamma}^*$ и $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} u(x; \hat{\gamma}^*) = v(x; \bar{\gamma}^*)$. Фигуры 15 и 16 призваны продемонстрировать ситуацию, когда обсуждаемый метод возмущений перестает работать. Так на фиг. 15 при $c_1 = 0.075$, $c_2 = 5 \times 10^{-14}$ как ДК задачи $\mathcal{P}'$ (вторая синяя кривая), так и ДК задачи $\mathcal{P}$ (вторая зеленая кривая) пересекают прямую $h = 5$ в двух точках $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \tilde{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$, $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.123$ и $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.302$, отмеченных соответственно красным, оранжевым и фиолетовым ромбами. На фиг. 16 при $c_1 = 0.1$, $c_2 = 5 \times 10^{-14}$ вторая ДК задачи $\mathcal{P}$ вместо стремления к прямой $h = 0$ уходит вправо и, таким образом, пересекает прямую $h = h^*$ лишь в точке $\hat{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$ (красный ромб). Другими словами, при выбранных значениях параметров c_1 , c_2 задача $\mathcal{P}$ не имеет решения вблизи собственного значения $\tilde{\gamma}_{2,2}$ задачи $\mathcal{P}'$ (фиолетовый ромб). Стоит подчеркнуть, это не означает, что задача $\mathcal{P}$ вовсе не имеет решений, кроме $\tilde{\gamma}_{2,1}$. Возможно, что при достаточно больших значениях параметра γ флуктуации в линейной части проницаемости и в коэффициенте нелинейности не оказывают существенного влияния на разрешимость задачи, и мы получим бесконечно много решений, как и в случае



Фиг. 3. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 2 \times 10^{-3}$, $c_2 = 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(5x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$ (красный), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.961$ (фиолетовый) и $\bar{\gamma}_{2,2} \approx 3.338$ (оранжевый) волновода Σ толщиной $h = 6$.



Фиг. 4. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\hat{\gamma}_{2,2}$ и $\bar{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 3 соответственно оранжевым и фиолетовым ромбами. Фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$.

вспомогательной задачи $\mathcal{P}'$. Однако это требует проведения более глубоких исследований. Насколько известно авторам настоящей статьи, такое исследование остается за пределами существующих математических методов.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

7.1. Доказательство утверждения 4

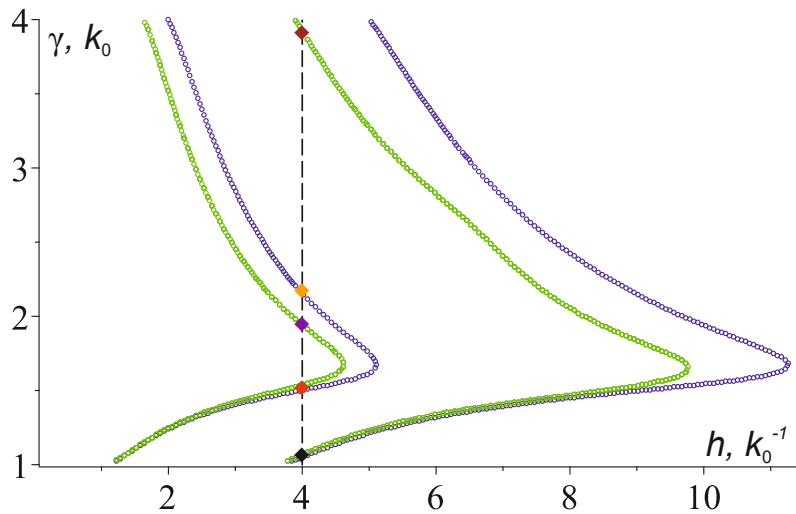
Для доказательства данного утверждения достаточно показать, что функции u и u' ограничены на всем отрезке $x \in [0, h]$. Действительно, пусть решение u задачи Коши (3.3), (5.1) существует при $x \in [0, x']$, где $0 < x' \leq h$. Тот факт, что такое x' непременно найдется, следует из классических результатов теории обыкновенных дифференциальных уравнений о локальном существовании решения задачи Коши (см. [26]). Если функции u и u' ограничены на всем отрезке $x \in [0, h]$ и, в частности, при $x \in [0, x']$, то решение указанной задачи Коши (3.3), (5.1) может быть непрерывно продолжено вправо с полуинтервала $[0, x']$ на весь отрезок $[0, h]$ и, таким образом, утверждение 4 доказано.

Вводя обозначения

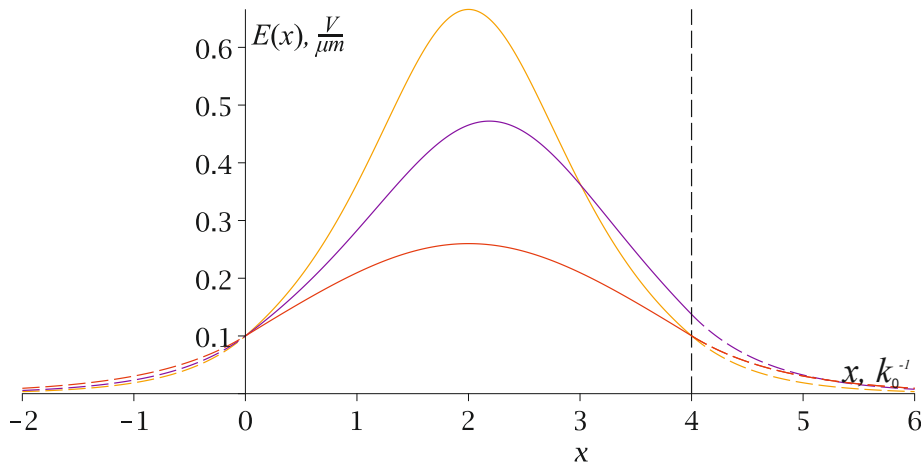
$$p(x) = \varepsilon_1 + c_1 \varepsilon_2(x) - \gamma^2, \quad q(x) = \alpha_1 + c_2 \alpha_2(x),$$

запишем уравнение (3.3) в виде

$$u'' + p(x)u + q(x)f(u^2)u = 0. \quad (7.1)$$



Фиг. 5. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 0.05$, $c_2 = 5 \times 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx 1.077$ (черный), $\hat{\gamma}_{1,1} \approx \bar{\gamma}_{1,1} \approx 1.515$ (красный), $\hat{\gamma}_{1,2} \approx 1.944$ (фиолетовый), $\bar{\gamma}_{1,2} \approx 2.156$ (оранжевый), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.908$ (коричневый) волновода Σ толщиной $h = 4$.



Фиг. 6. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\bar{\gamma}_{1,1}$ ($\approx \hat{\gamma}_{1,1}$), $\hat{\gamma}_{1,2}$ и $\bar{\gamma}_{1,2}$ отмеченным на фиг. 5 соответственно красным, фиолетовым и оранжевым ромбами. Красная кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{1,1})$, фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{1,1})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{1,2})$.

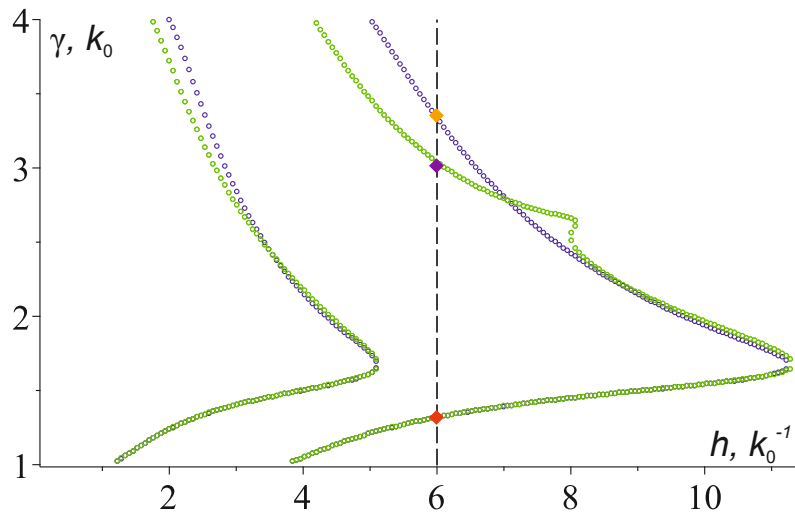
Заметим, что $q(t)$ есть неотрицательная функция. Умножая уравнение (7.1) на $2u'$ и затем интегрируя по x , находим

$$u'^2(x) - u'^2(0) + 2 \int_0^x p(t)u(t)u'(t)dt + 2 \int_0^x q(t)f(u^2(t))u(t)u'(t)dt = 0. \quad (7.2)$$

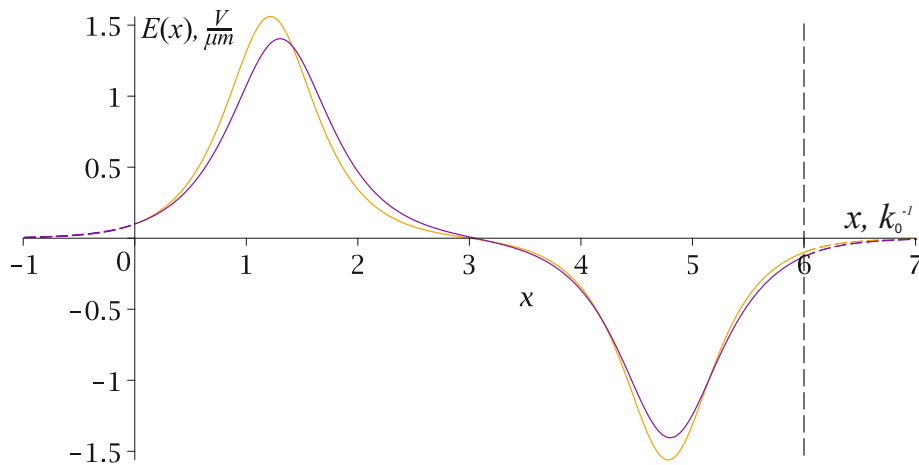
Пусть $F(u^2)$ есть первообразная функции $f(u^2)$, т.е.

$$F(u^2) = \int_0^{u^2} f(s)ds = \frac{u^{2(2q+1)}}{2q+1} + \int_0^{u^2} f_1(s)ds = \frac{u^{2(2q+1)}}{2q+1} + F_1(u^2).$$

Далее будем считать, что $u^4 \leq F(u^2)$. Отметим, что в случае, если верно обратное неравенство, т.е. $u^4 > F(u^2)$, ограниченность u и u' , а значит, и справедливость доказываемого утверждения непосредственно следуют из указанного неравенства (см. подробности в конце доказательства).



Фиг. 7. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 1.5 \times 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(2x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$ (красный), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.011$ (фиолетовый), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.338$ (оранжевый) волновода Σ толщиной $h = 6$.



Фиг. 8. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\hat{\gamma}_{2,2}$ и $\bar{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 7 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$.

Принимая во внимание, что $\partial F(u^2(x))/\partial x = f(u^2(x)) 2u(x)u'(x)$ и применяя интегрирование по частям к последнему интегралу, перепишем соотношение (7.2) в виде

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) = C - 2 \int_0^x p(t)u(t)u'(t)dt + \int_0^x q'(t)F(u^2(t))dt,$$

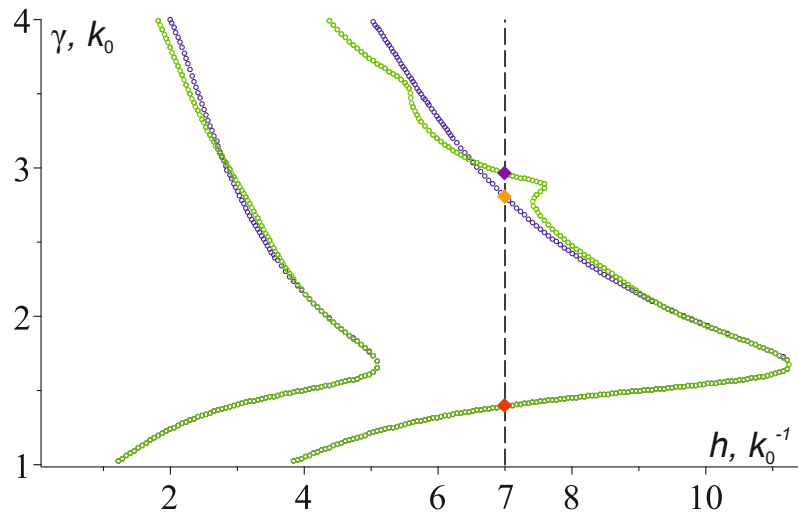
где $C = u'^2(0) + q(0)F(u^2(0)) = k_c^2 A^2 + q(0)F(A^2)$.

Используя элементарные неравенства $2|uu'| \leq u^2 + u'^2$ и $u^2 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^4$, левую часть в последнем соотношении можно оценить следующим образом:

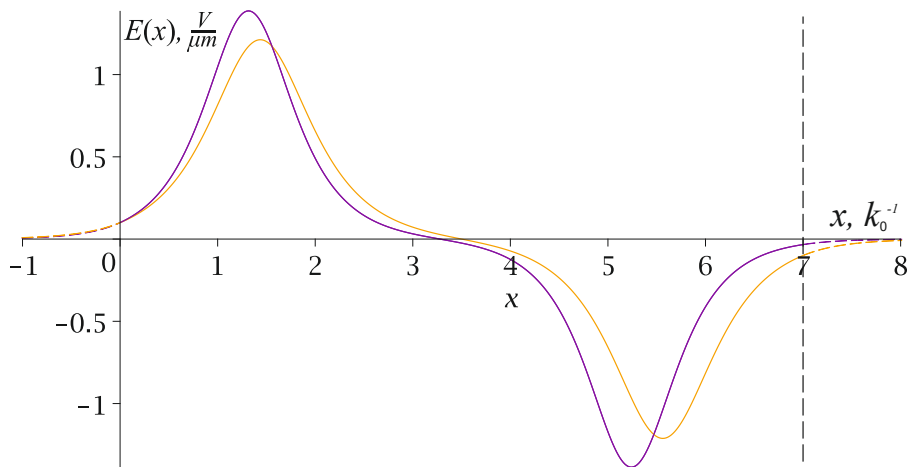
$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C + \int_0^x |p(t)| \left(u'^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}u^4(t) \right) dt + \int_0^x |q'(t)|F(u^2(t)) dt.$$

Принимая во внимание, что $F(u^2) \geq u^4$, получаем

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)|dt + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)|F(u^2(t)) dt + \int_0^x |p(t)|u'^2(t)dt + \int_0^x |q'(t)|F(u^2(t)) dt. \quad (7.3)$$



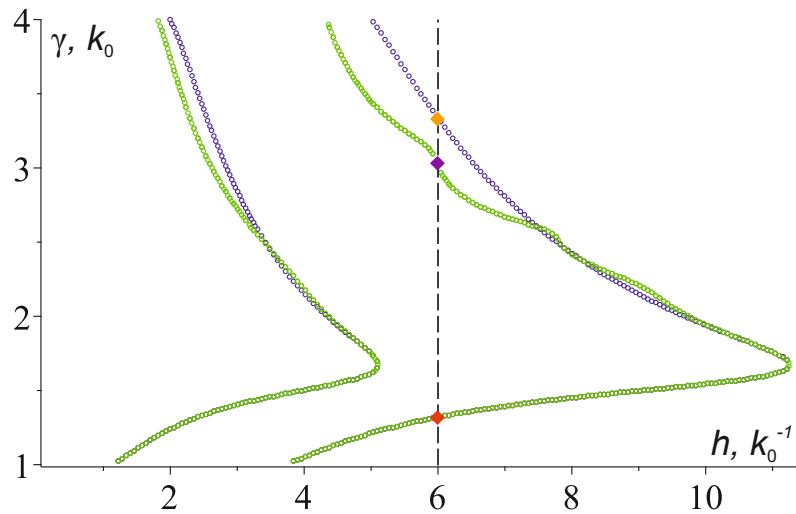
Фиг. 9. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 10^{-4}$, $c_2 = 10^{-15}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \cos(5x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.404$ (красный), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 2.804$ (оранжевый), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.962$ (фиолетовый) волновода Σ толщиной $h = 7$.



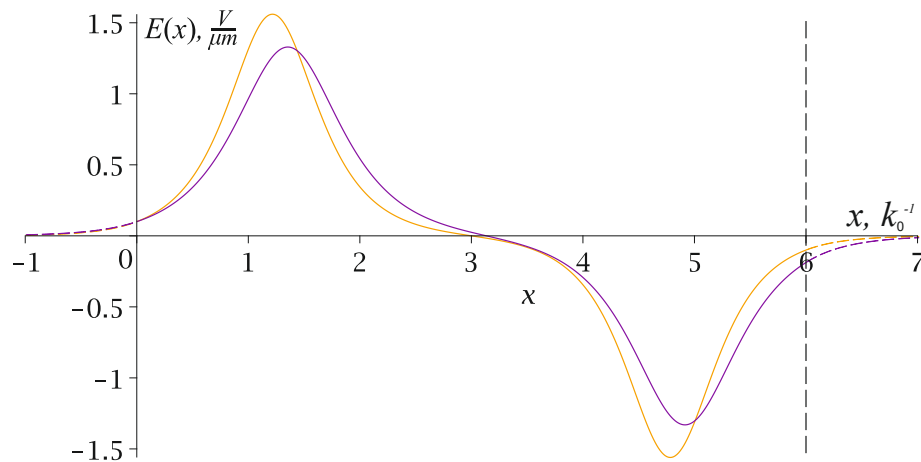
Фиг. 10. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\hat{\gamma}_{2,2}$ и $\bar{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 9 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$.

Для суммы последних трех слагаемых имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)| F(u^2(t)) dt + \int_0^x |p(t)| u'^2(t) dt + \int_0^x |q'(t)| F(u^2(t)) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x \left((|p(t)| + |q'(t)|) u'^2(t) + \left(\frac{1}{2} |p(t)| + |q'(t)| \right) F(u^2(t)) \right) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + F(u^2(t))) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x (|p(t)| + |q'(t)|) u'^2(t) + \frac{|p(t)| + |q'(t)|}{q(t)} q(t) F(u^2(t)) dt \leq \\
 & \leq \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + q(t) F(u^2(t))) dt.
 \end{aligned}$$



Фиг. 11. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 10^{-3}$, $c_2 = 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \cos(5x)$, $\alpha_2 = \sin(5x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.315$ (красный), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.028$ (фиолетовый), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.338$ (оранжевый) волновода Σ толщиной $h = 6$.



Фиг. 12. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\hat{\gamma}_{2,2}$ и $\bar{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 11 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$.

Здесь $\theta(t) = \max \{1, |q(t)|^{-1}\}$. С учетом этого из (7.3) получаем

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2) \leq C' + \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) (u'^2(t) + q(t)F(u^2)) dt,$$

где $C' = C + \frac{1}{2} \int_0^x |p(t)| dt$.

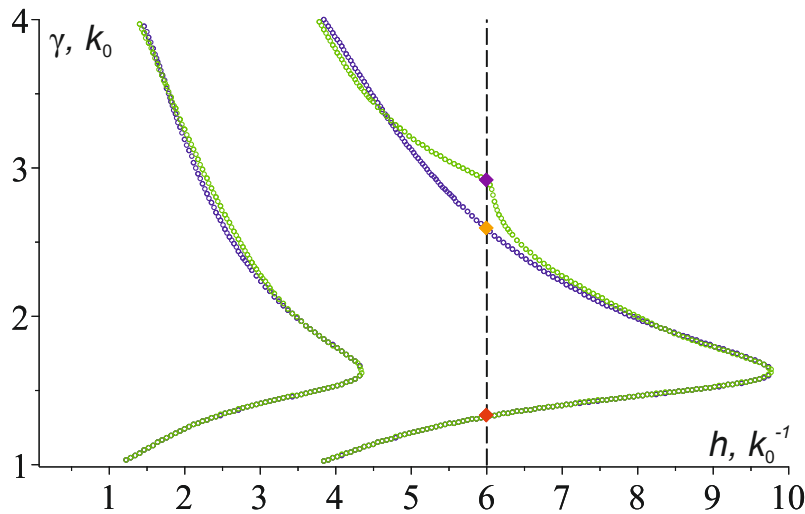
Применяя к последнему выражению лемму Гронуолла, приходим к неравенству вида

$$u'^2(x) + q(x)F(u^2(x)) \leq C' \exp \left\{ \int_0^x \theta(t) (|p(t)| + |q'(t)|) dt \right\},$$

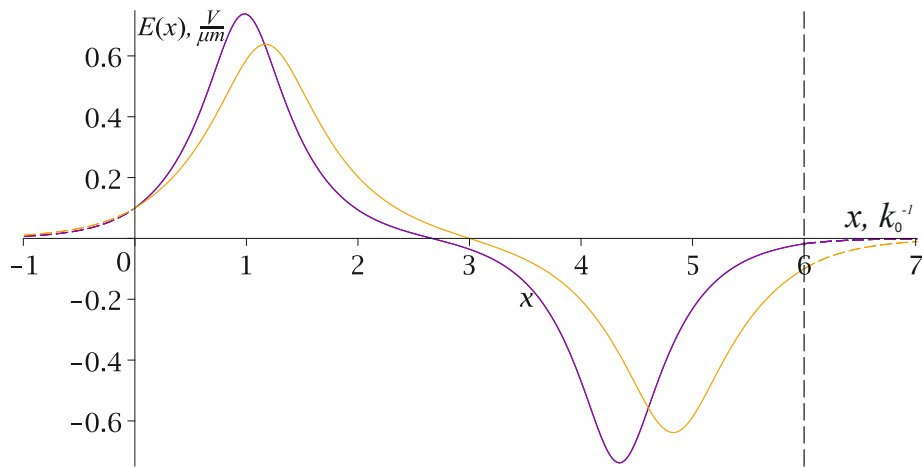
откуда следует ограниченность u и u' в силу ограниченности правой части. Таким образом, утверждение 4 доказано в случае, когда $u^4 \leq F(u^2)$.

Пусть теперь $u^4 > F(u^2)$. Отсюда следует

$$u^{2(2q-1)} \left(1 + u^{-2(2q+1)} F_1(u^2) \right) < 1.$$



Фиг. 13. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 2 \times 10^{-3}$, $c_2 = 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = 1 - \cos(4x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.331$ (красный), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 2.592$ (оранжевый), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 2.916$ (фиолетовый) волновода Σ толщиной $h = 6$.



Фиг. 14. Собственные функции, соответствующие постоянным распространения $\hat{\gamma}_{2,2}$ и $\bar{\gamma}_{2,2}$, отмеченным на фиг. 13 соответственно фиолетовым и оранжевым ромбами. Фиолетовая кривая есть $u(x; \hat{\gamma}_{2,2})$, оранжевая кривая есть $v(x; \bar{\gamma}_{2,2})$.

Поскольку $\lim_{u^2 \rightarrow +\infty} u^{-2(2q+1)} F_1(u^2) = 0$ (см. формулу (2.2)), а $q \geq 1$, то из последнего неравенства следует ограниченность функции u при всех $x \in \mathbb{R}$. Интегрируя (7.1) по x , легко получаем неравенство

$$|u'| \leq u'(0) + \int_0^x |p(t)|u(t)dt + \int_0^x q(t)f(u^2(t))dt,$$

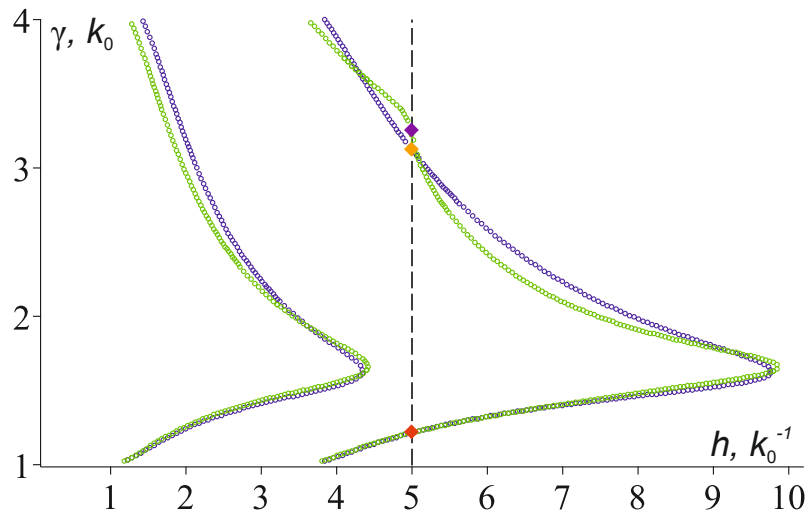
обеспечивающее ограниченность u' при условии ограниченности функции u . Таким образом, справедливость утверждения 4 в случае, когда $u^4 > F(u^2)$, также доказана.

7.2. Доказательство утверждения 6

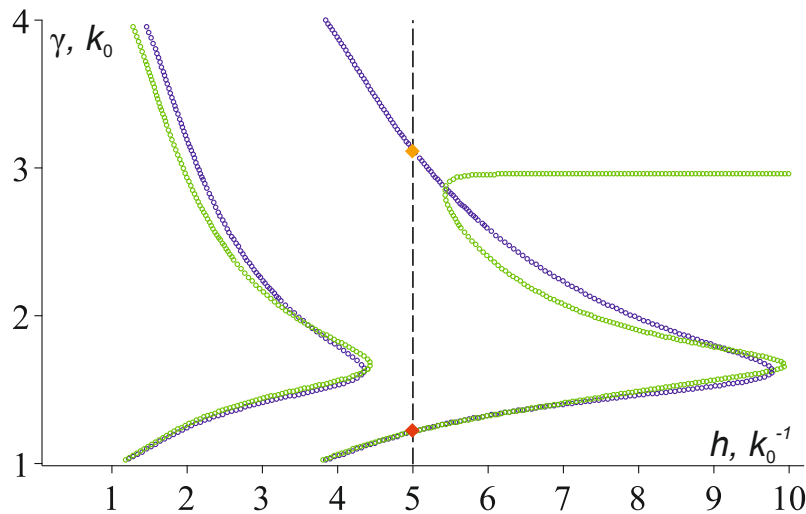
Согласно утверждению 4 задача Коши (3.3), (5.1) глобально однозначно разрешима, и ее решение $u \equiv u(x, \gamma, c_1, c_2)$ определено и непрерывно при $x \in [0, h]$.

В соответствии с утверждением 2 задача Коши (3.7), (3.8) глобально однозначно разрешима, и ее решение $v \equiv v(x, \gamma)$ определено и непрерывно при $x \in [0, h]$.

Тогда тот факт, что $u(x, \gamma, c_1, c_2) \rightarrow v(x, \gamma)$ равномерно по $x \in [0, h]$ и $\gamma \in \Gamma_0$ при $c_1 \rightarrow 0$ и $c_2 \rightarrow 0$, является прямым следствием так называемой интегральной теоремы о непрерывности (см. [26]).



Фиг. 15. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 7.5 \times 10^{-2}$, $c_2 = 5 \times 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$ (красный), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.123$ (оранжевый), $\hat{\gamma}_{2,2} \approx 3.302$ (фиолетовый) волновода Σ толщиной $h = 5$.



Фиг. 16. Зеленые кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}$ с параметрами $c_1 = 0.1$, $c_2 = 5 \times 10^{-14}$, $\varepsilon_2 = \alpha_2 = \sin(x)$, а синие кривые есть ДК задачи $\mathcal{P}'$. Ромбы обозначают постоянные распространения $\hat{\gamma}_{2,1} \approx \bar{\gamma}_{2,1} \approx 1.218$ (красный), $\bar{\gamma}_{2,1} \approx 3.123$ (оранжевый) волновода Σ толщиной $h = 5$.

7.3. Доказательство теоремы 2

Пусть γ_0 достаточно велико, так что задача $\mathcal{P}'$ имеет n собственных значений $\bar{\gamma}_k \in \Gamma_0$, где $k = \overline{1, k}$, каждое из которых обладает свойством (4.2).

Ниже нам понадобятся интервалы $\Gamma_k = (\bar{\gamma}_k - \delta_k, \bar{\gamma}_k + \delta_k)$, где $k = \overline{1, k}$ и $\delta_k > 0$ есть некоторые постоянные, определенные в теореме 1. Подчеркнем, что Γ_k не содержит других собственных значений, кроме $\bar{\gamma}_k$ для каждого k .

В силу утверждения 6 левая часть уравнения (5.4) ограничена при $\gamma \in \Gamma_0$, $c_1 \in C_1^0$, $c_2 \in C_2^0$ и стремится к нулю при $|c_1| + |c_2| \rightarrow +0$, т. е. может быть сделана сколь угодно малой при соответствующем выборе c_1 и c_2 . Поскольку правая часть в (5.4) от c_1 и c_2 не зависит и принимает значения разных знаков на противоположных концах Γ_k , то из этого следует, что существует $\bar{\gamma} \in \Gamma_k$, удовлетворяющее (5.4), а значит, и утверждению 5.

Принимая во внимание данные рассуждения, приходим к выводу, что в любом интервале Γ_k существует $\hat{\gamma}_k$, удовлетворяющее уравнению (5.4). Ясно, что $\lim_{|c_1|+|c_2| \rightarrow 0} \hat{\gamma}_k = \bar{\gamma}_k$. В силу утверждения 5 такое $\hat{\gamma}_k$ является собственным значением задачи $\mathcal{P}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eleonskii V.M., Silin V.P. Theory of self-trapping of an electromagnetic field in a nonlinear medium // Sov. Phys. JETP. 1970. V. 31. № 5. P. 918–923.
2. Boardman A.D., Egan P., Lederer F., et al. Third-order nonlinear electromagnetic te and tm guided waves. Elsevier sci. Publ. North-Holland, Amsterdam London New York Tokyo, 1991. Reprinted from *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, Eds. H.-E. Ponath and G. I. Stegeman.
3. Ахмедиев Н.Н., Анкевич А. Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
4. Кившарь Ю.С., Агравал Г.П. Оптические солитоны. От волоконных световодов к фотонным кристаллам. М.: Физматлит, 2005.
5. Christian J.M., McDonald G.S., Potton R.J., Chamorro-Posada P. Helmholtz solitons in power-law optical materials // Phys. Rev. A. 2007. V. 76. № 3. P. 033834.
6. Boardman A.D., Egan P. Novel nonlinear surface and guided te waves in asymmetric lhm waveguides // J. Optic. A: Pure and Appl. Optic. 2009. V. 11. № 11. P. 114032(10).
7. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: TE-волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 838–858.
8. Валовик Д.В. Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой i: ТМ-волны // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60 № 3. С. 429–450.
9. Tikhov S.V., Valovik D.V. Nonlinearizable solutions in an eigenvalue problem for maxwell's equations with nonhomogeneous nonlinear permittivity in a layer // Studies in Appl. Math. 2022. V. 149. № 3. P. 565–587.
10. Valovik D.V. Maxwell's equations with nonlinear inhomogeneous constitutive relation: Guided waves in a film filled with inhomogeneous kerr medium // SIAM J. Appl. Math. 2023. V. 83. № 2. P. 553–575.
11. Tikhov S.V., Valovik D.V. Maxwell's equations in a plane waveguide with nonhomogeneous nonlinear permittivity: Analytical and numerical approaches // J. Nonlinear Sci. 2023. V. 33. № 105.
12. Содха М.С., Гхатак А.К. Неоднородные оптические волноводы. М.: Связь, 1980.
13. Гончаренко А.М., Карпенко В.А. Основы теории оптических волноводов. Минск: Наука и техника, 1983.
14. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
15. Dyundyaeva A., Tikhov S., Valovik D. Transverse electric guided wave propagation in a plane waveguide with kerr nonlinearity and perturbed inhomogeneity in the permittivity function // Photonics. 2023. V. 10. № 4.
16. Eleonskii P.N., Ogan'es'yants L.G., Silin V.P. Cylindrical nonlinear waveguides // Sov. Phys. JETP. 1972. V. 35. № 1. P. 44–47.
17. Unger H.G. Planar optical waveguides and fibres. Oxford: Clarendon Press, 1977.
18. Marcuse D. Theory of dielectric optical waveguides. 2nd ed. Acad. Press, 1991.
19. Смирнов Ю.Г. Задачи сопряжения на собственные значения, описывающие распространение ТЕ- и ТМ-волн в двухслойных неоднородных анизотропных цилиндрических и плоских волноводах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 3. С. 460–468.
20. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.
21. Schurmann H.W., Smirnov Yu.G., Shestopalov Yu.V. Propagation of te-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. № 1. P. 016614(10).
22. Smolkin E.Yu., Valovik D.V. Coupled electromagnetic wave propagation in a cylindrical dielectric waveguide filled with kerr medium: nonlinear effects // J. Modern Optic. 2017. V. 64. № 4. P. 396–406.

23. *Mihalache D., Stegeman G.I., Seaton C.T., et al.* Exact dispersion relations for transverse magnetic polarized guided waves at a nonlinear interface // *Optic. Lett.* 1987. V. 12. № 3. P. 187–189.
24. *Chen Q., Wang Z.H.* Exact dispersion relations for tm waves guided by thin dielectrics films bounded by nonlinear media // *Optic. Lett.* 1993. V. 18. № 4. P. 260–262.
25. *Huang J.H., Chang R., Leung P.T., et al.* Nonlinear dispersion relation for surface plasmon at a metal-kerr medium interface // *Optic. Communicat.* 2009. V. 282. P. 1412–1415.
26. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: ГИФМЛ, 1961.

ON THE NON-INERT PERTURBATION METHOD FOR PROVING THE EXISTENCE OF NON-LINEARIZABLE SOLUTIONS IN A NONLINEAR EIGENVALUE PROBLEM ARISING IN THE THEORY OF WAVEGUIDES

D. V. Valovik*, A. A. Dyundyaeva, S. V. Tikhov**

440026 Penza, Krasnaya str., 40, Penza State University, Russia

*e-mail: dvalovik@mail.ru

**e-mail: tik.stanislav2015@yandex.ru

Received: 16.04.2024

Revised: 26.05.2024

Accepted: 01.07.2024

Abstract. The problem of propagation of electromagnetic waves in a plane dielectric waveguide is studied. The waveguide is filled with a nonlinear inhomogeneous medium; the nonlinearity is characterized by an arbitrary monotone positive continuously differentiable function with a stepwise increase on infinity. The inhomogeneity of the medium is characterized by small (non-monotone) perturbations of the linear part of the dielectric permeability, as well as the coefficient at the nonlinear term. From a mathematical point of view, this problem is equivalent to the eigenvalue problem for a system of Maxwell equations with mixed boundary conditions. To study the problem, a perturbation method is proposed, in which a simpler nonlinear problem is used as the main problem. The existence of both linearizable and non-linearizable solutions is proved.

Keywords: nonlinear Sturm–Liouville type problem, perturbation method, non-linearizable solutions, Maxwell equations, dielectric planar waveguide, nonlinear permittivity, nonlinear Kerr effect, inhomogeneous medium.