

КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА В ЕСТЕСТВЕННОМ БАЗИСЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

© 2024 г. Л. Т. Ащепков^{1,*}¹690091 Владивосток, ул. Мордовцева, 12, стр. 2, Дальневосточный федеральный университет, Россия

*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Поступила в редакцию 15.03.2024 г.

Переработанный вариант 15.03.2024 г.

Принята к публикации 01.07.2024 г.

Предложен простой способ синтеза управления в задаче перевода траектории линейной нестационарной системы из начального состояния в состояние равновесия. Искомое управление находится аналитически с использованием «естественного» базиса линейной системы. Показана связь вырожденности матрицы управляемости с существованием инвариантов и линейных связей между фазовыми переменными. Библ. 6.

Ключевые слова: критерий управляемости, естественный базис, обратная связь, уравнение Риккати, декомпозиция, инварианты системы.

DOI: 10.31857/S0044466924100094, EDN: JZTWQF

1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части монографии [1] изложены метод и результаты исследования классической задачи автоматического управления о нахождении регулятора, переводящего траекторию линейной системы в состояние равновесия. Там же приведены ссылки на ранние публикации и описан алгоритм решения задачи с использованием критерия управляемости и операции псевдообращения матриц. Цель настоящей статьи — показать, что в алгоритме [1] операцию псевдообращения можно без ущерба заменить обычной операцией обращения матрицы, если привлечь к решению задачи дополнительные технические средства — естественный базис и декомпозицию системы. Они позволяют установить ряд новых свойств задачи, начиная с условий разрешимости и корректного аналитического представления регулятора обратными матрицами до связи матрицы управляемости с инвариантами системы (см. [2], [3]). Эта связь обнаруживается при декомпозиции системы и подробнее освещается в разд. 8. Пока лишь отметим, что неполнота ранга матрицы управляемости вызывает появление в фазовом пространстве системы многообразий, содержащих все ее траектории независимо от выбора управлений, и существенно влияет на разрешимость задачи и существование регулятора. Те же явления имеют место и в более общих аффинных системах (см. [4]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим основную задачу управления линейной системой с закрепленными концами траектории

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(t_0) &= x_0, \quad x(t_1) = 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ — переменный и фиксированный фазовые векторы (векторы состояния), $u \in \mathbb{R}^m$ — вектор управляющих воздействий, $\dot{x} = dx/dt$, $t_0 < t_1$, — заданные моменты времени, $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — непрерывные на отрезке $[t_0, t_1]$ матрицы.

Условимся все векторы в формулах считать столбцовыми, операцию транспонирования отмечать штрихом, нулевую и единичную матрицы обозначать символами 0 и I . Их размеры обычно ясны из контекста. Норму вектора x примем евклидовой: $\|x\| = (x'x)^{1/2}$. На полуотрезке $[t_0, t_1]$ управление $u(t)$ полагаем непрерывным, траекторию $x(t)$ системы (1) — непрерывной и непрерывно дифференцируемой. Управление $u(t)$ назовем решением основной задачи, если отвечающая ему траектория $x(t)$ удовлетворяет всем условиям (1). Требуется найти решение задачи в программной и синтезированной форме.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Нам потребуется *фундаментальная матрица* $F(\tau, t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ однородной системы дифференциальных уравнений $\dot{x} = A(t)x$. Эта матрица однозначно определена для всех $\tau, t \in [t_0, t_1]$ условиями *начальной задачи*

$$F_t(\tau, t) = -F(\tau, t)A(t), \quad F(\tau, \tau) = I$$

и при любых $\tau, s, t \in [t_0, t_1]$ обладает *полугрупповым* свойством $F(\tau, s)F(s, t) = F(\tau, t)$.

Для разрешимости основной задачи на отрезке $[t_0, t_1]$ необходимо и достаточно (см. [1, с. 43]), чтобы векторы x_0 и $z \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяли линейному уравнению

$$x_0 + W(t_0, t_1)z = 0 \quad (2)$$

с матрицей *управляемости*

$$W(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} F(t_0, t)B(t)B'(t)F'(t_0, t)dt \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (3)$$

В этом случае программное управление

$$u(t) = B'(t)F'(t_0, t)z, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (4)$$

служит решением основной задачи.

4. ЕСТЕСТВЕННЫЙ БАЗИС ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Пусть ранг матрицы $W(t_0, t_1)$ равен $r, r < n$. Тогда уравнение $e'W(t_0, t_1) = 0$ с неизвестным вектором $e \in \mathbb{R}^n$ имеет $n-r$ линейно независимых решений. Построим из линейных комбинаций решений методом ортогонализации (см. [5, с. 233]) систему ортонормированных векторов $e_{r+1}, \dots, e_n$. Дополним их ортонормированными векторами $e_1, \dots, e_r$ до полного ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ и сформируем *базисные* матрицы

$$E_1 = (e_1, \dots, e_r) \in \mathbb{R}^{n \times r}, \quad E_2 = (e_{r+1}, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}, \quad E = (E_1, E_2) \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

По построению базисные матрицы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} E_1' E_1 &= I, & E_2' E_2 &= I, \\ E' E &= E_1 E_1' + E_2 E_2' = I, \\ E_1' E_2 &= 0, & E_2' W(t_0, t_1) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим далее на отрезке $[t_0, t_1]$ решения

$$\begin{aligned} \Psi_1(t_0, t) &= F'(t_0, t)E_1, & \Psi_2(t_0, t) &= F'(t_0, t)E_2, \\ \Psi(t_0, t) &= (\Psi_1(t_0, t), \Psi_2(t_0, t)) \end{aligned} \quad (6)$$

матричного дифференциального уравнения $\dot{\Psi} = -A'(t)\Psi$. Вследствие единственности матрица $\Psi(t_0, t)$ обратима. Базис фазового пространства $\mathbb{R}^n$, образованный при текущем $t \in [t_0, t_1]$ столбцами матрицы $\Psi(t_0, t)$, назовем *естественным* базисом системы (1).

5. ПРОГРАММНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Предварительно покажем обратимость матрицы

$$W_1(t_0, t_1) = E_1' W(t_0, t_1)E_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}. \quad (7)$$

Предположим противное: столбцы матрицы $W_1(t_0, t_1)$ линейно зависимы, т.е. найдется вектор $\lambda \in \mathbb{R}^r, \lambda \neq 0$, со свойством $W_1(t_0, t_1)\lambda = 0$. Полагая $\mu = E_1\lambda$, имеем

$$0 = \lambda' W_1(t_0, t_1)\lambda = \mu' W(t_0, t_1)\mu = \int_{t_0}^{t_1} \|\mu' F(t_0, t)B(t)\|^2 dt.$$

Непрерывность и неотрицательность подынтегральной функции в последнем равенстве равносильна тождеству $\mu'F(t_0, t)B(t) \equiv 0, t \in [t_0, t_1]$. Умножим тождество справа на матрицу $B'(t)F'(t_0, t)$ и проинтегрируем по $t \in [t_0, t_1]$. В результате получим $\mu'W(t_0, t_1) = 0$. Вектор μ как решение уравнения $e'W(t_0, t_1) = 0$ равен линейной комбинации $E_2v, v \in \mathbb{R}^{n-r}$, фундаментальных решений этого уравнения (см. [6, с. 85]). Тогда из равенств $\mu = E_1\lambda = E_2v$ следует линейная зависимость столбцов базисной матрицы E , что невозможно по определению. Установленное противоречие доказывает обратимость матрицы (7).

Отметим, что в ходе доказательства фактически установлена эквивалентность утверждений

$$E'_2W(t_0, t_1) = 0 \Leftrightarrow (\Psi'_2(t_0, t)B(t) \equiv 0, \quad t \in [t_0, t_1]). \quad (8)$$

Вернемся к решению уравнения (2). Умножив его слева на обратимую матрицу E' , получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{aligned} E'_1x_0 + E'_1W(t_0, t_1)z &= 0, \\ E'_2x_0 + E'_2W(t_0, t_1)z &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда с использованием последнего свойства (5) и установленной выше обратимости матрицы (7) имеем

$$z = -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E'_1x_0, \quad E'_2x_0 = 0. \quad (9)$$

Условие $E'_2x_0 = 0$ необходимо и достаточно для совместности уравнения (2) и, следовательно, для разрешимости основной задачи. Подстановкой вектора z вида (9) в формулу (4) находим программное решение

$$\begin{aligned} u(t, z) &= B'(t)F'(t_0, t)z, \quad t \in [t_0, t_1], \\ z &= -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E'_1x_0, \quad E'_2x_0 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

основной задачи. Для отвечающей управлению (10) траектории $x(t, z)$ системы (1) выполнено тождество $\Psi'_2(t_0, t)x(t, z) = 0, t \in [t_0, t_1]$. В самом деле, левая часть тождества равна нулю на концах отрезка $[t_0, t_1]$ и имеет равную нулю частную производную по t в остальных точках этого отрезка.

Вывод 1. Для разрешимости основной задачи с матрицей управляемости ранга $r < n$ необходимо и достаточно, чтобы начальное состояние x_0 принадлежало подпространству $E'_2x_0 = 0$. В этом случае задача имеет программное решение (10), и соответствующая траектория системы (1) лежит на многообразии $\Psi'_2(t_0, t)x = 0$.

6. СИНТЕЗ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим двухточечную задачу управления

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \\ x(\tau) &= \xi, \quad x(t_1) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

с параметрами $\tau \in [t_0, t_1], \xi \in \mathbb{R}^n$. Очевидно, параметрическая задача (11) содержит основную задачу при $\tau = t_0, \xi = x_0$. Согласно разд. 5 разрешимость параметрической задачи равносильна совместности уравнения $\xi + W(\tau, t_1)z = 0$. Умножив последнее уравнение слева на обратимую матрицу $\Psi'(t_0, \tau)$ вида (6), приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned} \Psi'_1(t_0, \tau)\xi + \Psi'_1(t_0, \tau)W(\tau, t_1)z &= 0, \\ \Psi'_2(t_0, \tau)\xi + \Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1)z &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть матрица $W(\tau, t_1)$ при каждом $\tau \in [t_0, t_1]$ имеет один и тот же ранг $r < n$. Покажем, что тогда выполнено равенство $\Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1) = 0$, и матрица

$$W_2(\tau, t_1) = \Psi'_1(t_0, \tau)W(\tau, t_1)\Psi_1(t_0, \tau) \in \mathbb{R}^{r \times r} \quad (13)$$

обратима. Первое утверждения проверяется с помощью полугруппового свойства фундаментальной матрицы, формулы (3) и тождества (8):

$$\begin{aligned} \Psi'_2(t_0, \tau)W(\tau, t_1) &= E'_2F(t_0, \tau) \int_{\tau}^{t_1} F(\tau, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = \\ &= \int_{\tau}^{t_1} E'_2F(t_0, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = \int_{\tau}^{t_1} \Psi'_2(t_0, t)B(t)B'(t)F'(\tau, t)dt = 0. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что $n - r$ линейно независимых столбцов матрицы $\Psi_2(t_0, \tau)$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения $e'W(\tau, t_1) = 0$.

Докажем теперь второе утверждение. Допустим, матрица $W_2(\tau, t_1)$ при некотором $\tau \in [t_0, t_1]$ вырожденная, т.е. существует вектор $\lambda \in \mathbb{R}^r$, $\lambda \neq 0$, со свойством $W_2(\tau, t_1)\lambda = 0$. Обозначив $\mu = \Psi_1(\tau, t_1)\lambda$, по аналогии с разд. 5 получим равносильные утверждения

$$\begin{aligned} \lambda'W_2(\tau, t_1)\lambda = 0 &\Leftrightarrow \mu'W(\tau, t_1)\mu = 0 \Leftrightarrow \int_{\tau}^{t_1} \|\mu'F(\tau, t)B(t)\|^2 dt = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\mu'F(\tau, t)B(t) \equiv 0, t \in [\tau, t_1]) \Leftrightarrow \mu'W(\tau, t_1) = 0. \end{aligned}$$

Вектор μ как решение последнего однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений этого уравнения (см. [6, с. 85]), т.е. $\mu = \Psi_2(\tau, t_1)v$, $v \in \mathbb{R}^{n-r}$. Тогда из равенств $\mu = \Psi_1(\tau, t_1)\lambda = \Psi_2(\tau, t_1)v$ следует линейная зависимость столбцов базисной матрицы $\Psi(\tau, t_1)$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает обратимость матрицы (13).

На основании сказанного векторы ξ и $z = z(\xi, \tau)$, удовлетворяющие условиям

$$z(\xi, \tau) = -\Psi_1(t_0, \tau)W_2^{-1}(\tau, t_1)\Psi_1'(t_0, \tau)\xi, \quad \Psi_2'(t_0, \tau)\xi = 0, \quad (14)$$

образуют решение уравнений (12). Пользуясь формулой (4), находим отвечающее (14) программное решение параметрической задачи

$$u(t, \xi, \tau) = B'(t)F'(\tau, t)z(\xi, \tau), \quad t \in [\tau, t_1].$$

В начальный момент $t = \tau$ это программное решение становится функцией $u(\tau, \xi, \tau) = B'(\tau)z(\xi, \tau)$ начальных значений. Заменяя ξ, τ соответственно на x, t и $u(t, x, t)$ — на $v(x, t)$, приходим к линейной обратной связи

$$v(x, t) = -B'(t)K(t)x, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1]. \quad (15)$$

Здесь в силу (14) фазовые векторы $x = x(t)$ отвечают условиям

$$\Psi_2'(t_0, t)x(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (16)$$

и матрица $K(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ имеет вид

$$K(t) = \Psi_1(t_0, t)W_2^{-1}(t, t_1)\Psi_1'(t_0, t), \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (17)$$

Формулы (15) и (17) дают решение параметрической задачи и включенной в нее основной задачи.

7. СВОЙСТВА СИНТЕЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Из (17) следует, что в области определения матрица $K(t)$ непрерывна, симметрична, неотрицательно определена и удовлетворяет условиям начальной задачи для матричного уравнения Риккати

$$\dot{K} = -A'(t)K - KA(t) + KB(t)B'(t)K, \quad K(t_0) = E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E_1'. \quad (18)$$

Траектория $x(t)$ замкнутой управлением (15) линейной системы

$$\dot{x} = (A(t) - B(t)B'(t)K(t))x, \quad x(t_0) = x_0, \quad E_2'x_0 = 0, \quad (19)$$

существует на всем полуотрезке $[t_0, t_1]$ и лежит на многообразии (16). Последнее проверяется точно так же, как в разд. 5.

Используя соотношения (18) и (19), можно убедиться, что решение $\psi(t)$ сопряженной начальной задачи

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -A'(t)\psi, \quad \psi(t_0) = z, \\ z &= -E_1W_1^{-1}(t_0, t_1)E_1'x_0, \quad E_2'x_0 = 0, \end{aligned}$$

удовлетворяет равенствам

$$\psi(t) = F'(t_0, t)z = K(t)x(t), \quad t \in [t_0, t_1].$$

Отсюда и из (15) при $x = x(t)$ получим программное управление $v(x(t), t) = -B'(t)F'(t_0, t)z$, $t \in [t_0, t_1]$, которое по непрерывности на замыкании области определения совпадает с управлением (10). Легко видеть, что

совпадают также начальные задачи для замыкаемых этими управлениями систем дифференциальных уравнений. Следовательно, совпадают решения этих систем, т.е. под действием синтезированного управления решение замкнутой системы (19) действительно стремится к нулю при $t \rightarrow t_1$.

Допустим, что матрица $W(t, t_1)$ имеет полный ранг n на всем полуотрезке $[t_0, t_1]$. Зададим естественный базис линейной системы матрицами $E = I$, $\Psi(t_0, t) = F'(t_0, t)$ и примем

$$E_1 = I, \quad E_2 = 0, \quad \Psi_1(t_0, t) = F'(t_0, t), \quad \Psi_2(t_0, t) = 0, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (20)$$

Тогда в законе управления (15) матрица $K(t) = W^{-1}(t, t_1)$ есть решение начальной задачи (18), где в силу (20) и (7) начальное условие примет вид $K(t_0) = W^{-1}(t_0, t_1)$. Равенство (16) при этом выполняется автоматически.

Подведем итоги.

Вывод 2. Если ранг матрица $W(t, t_1)$ при всех $t \in [t_0, t_1]$ равен $r < n$ и начальное состояние x_0 отвечает условию $E'_2 x_0 = 0$, то основная задача имеет решение в форме линейной обратной связи (15) с матрицей (17), определенной начальной задачей (18). Траектория замкнутой системы (19) лежит на многообразии $\Psi'_2(t_0, t)x = 0$. Если $r = n$, то при любом x_0 синтезированное решение основной задачи дается формулами (15) и (18) с уточнениями (20). Если $r < n$ и $E'_2 x_0 \neq 0$, то основная задача не имеет решения.

8. ДЕКОМПОЗИЦИЯ И ИНВАРИАНТ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим подробнее связь вырожденности матрицы управляемости и функциональной зависимости фазовых переменных линейной системы (1).

Пусть по-прежнему ранг матрицы $W(t_0, t_1)$ равен $r < n$. Выполним в системе дифференциальных уравнений и начальном условии (1) невырожденное преобразование фазовых переменных

$$\begin{aligned} F(t_0, t)x &= E_1 y_1 + E_2 y_2, \\ t &\in [t_0, t_1], \quad y_1 \in \mathbb{R}^r, \quad y_2 \in \mathbb{R}^{n-r}. \end{aligned} \quad (21)$$

В прежних обозначениях получим декомпозированную систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \Psi'_1(t_0, t)B(t)u, \\ \dot{y}_2 &= \Psi'_2(t_0, t)B(t)u, \\ y_1(t_0) &= E'_1 x_0, \quad y_2(t_0) = E'_2 x_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда на основании тождества (8) находим *инвариант* — векторную функцию $y_2 = E'_2 x_0$, принимающую постоянное значение на всех решениях системы (22) независимо от выбора управлений. Выполнив обратное (21) преобразование

$$y_1 = \Psi'_1(t_0, t)x, \quad y_2 = \Psi'_2(t_0, t)x$$

фазовых переменных, получим соответствующий инвариант

$$\Psi'_2(t_0, t)x = E'_2 x_0 \quad (23)$$

системы (1). Как видно, вырожденность матрицы $W(t_0, t_1)$ влечет функциональную зависимость (23) фазовых переменных системы. Эту зависимость можно использовать для понижения размерности системы (см., например, [3, с. 57]).

В расширенном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ переменных x, t уравнением (23) задано некоторое многообразие M . Очевидно, $(x_0, t_0) \in M$. В силу тождества (8) многообразие M содержит любую интегральную кривую системы (1), исходящую из точки (x_0, t_0) под действием произвольно выбранного управления. Исходная задача разрешима, если одна из таких кривых проходит через точку $(0, t_1) \in M$. Отсюда и из (23) следует условие $E'_2 x_0 = 0$ на начальное состояние x_0 , определяющее разрешимость основной задачи.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена классическая задача о построении регулятора, переводящего траекторию линейной нестационарной системы в состояние равновесия за конечное время в случае произвольного ранга матрицы управляемости. Предложен простой способ аналитического решения задачи, использующий специальный базис и декомпозицию системы. С их помощью установлены дополнительные свойства задачи и упрощен алгоритм [1] синтеза управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калман Р, Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971.
2. Родина Л.И., Тонков Е.Л. Критерий полной управляемости линейной нестационарной системы в критическом случае // Изв. ИМИ УдГУ. 2002. № 2(25). С. 81–86.
3. Ashchepkov L.T., Dolgy D.V. Taekuan Kim, Agarwal R.P. Optimal Control. Cham: Springer Nature, 2022.
4. Ащепков Л.Т. Синтез оптимальной системы с устойчивыми режимами скольжения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 5. С. 731–738. Ashchepkov L. T. Synthesis of an optimal system with stable sliding modes // Comput. Math. Math. Phys. 2023. V. 63. № 5. P. 743–750.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.

FORMATION OF THE REGULATOR IN THE NATURAL BASIS OF A LINEAR SYSTEM

L. T. Ashchepkov*

690091 Vladivostok, 12 Mordovtseva str., building 2, Far Eastern Federal University, Russia

*e-mail: ashchepkov@yahoo.com

Received: 15.03.2024

Revised: 15.03.2024

Accepted: 01.07.2024

Abstract. A simple method for synthesizing control in the problem of transferring the trajectory of a linear non-stationary system from an initial state to an equilibrium state is proposed. The desired control is found analytically using the "natural" basis of the linear system. The connection of the degeneracy of the controllability matrix with the existence of invariants and linear relationships between phase variables is shown.

Keywords: controllability criterion, natural basis, feedback, Riccati equation, decomposition, invariants of the system.