ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2024, том 64, № 10, с. 1826–1835

УДК 519.63

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РИЧАРДСОНА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ КОШИ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Г. И. Шишкин[1,*], Л. П. Шишкина[1]

[1] 620108 Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16, ИММ УрО РАН, Россия
**e-mail: shishkin@imm.uran.ru*

Поступила в редакцию 16.06.2024 г.
Переработанный вариант 16.06.2024 г.
Принята к публикации 01.07.2024 г.

Рассматривается задача Коши для регулярного уравнения переноса. Для этой задачи с использованием техники Ричардсона строится разностная схема повышенного порядка точности на трех вложенных сетках, сходящаяся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости. Библ. 8.

Ключевые слова: уравнение переноса, задача Коши, стандартная разностная схема, равномерная сетка, невязка, разложение невязки, монотонность дифференциальной и сеточной задач, техника Ричардсона, разностная схема, повышенный порядок точности, сходимость в равномерной норме.

DOI: 10.31857/S0044466924100047, **EDN**: KANTUN

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время все большее внимание уделяется разработке численных методов для уравнений математической физики повышенного порядка точности. Отметим, что техника Ричардсона для улучшения скорости сходимости сеточных решений некоторых классов задач применялась, например, в работах Г. И. Марчука [1], Г. И. Марчука и В. В. Шайдурова [2], А. А. Самарского [3], П. В. Хемкера, Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [4], Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [5].

Для задачи Коши для уравнения переноса в работе Г. И. Шишкина и Л. П. Шишкиной [6] впервые построена улучшенная разностная схема Ричардсона на основе двух вложенных сеток, сходящаяся в равномерной норме со вторым порядком скорости сходимости. В настоящей работе, в отличие от работы [6], для задачи Коши для уравнения переноса строятся разложения обратных разностных производных и соответствующих невязок по степеням шагов основной, разреженных и дважды разреженных сеток соответственно. Такой подход позволяет разработать технику Ричардсона на трех вложенных сетках и построить разностную схему повышенного порядка точности, сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости.

О содержании работы. Постановка задачи Коши для уравнения переноса и цель исследования приводятся в разд. 2. Априорные оценки решения и производных устанавливаются в разд. 3. Стандартная разностная схема для задачи Коши для уравнения переноса рассматривается в разд. 4 и устанавливается ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости. В разд. 5, 6 и 7 разработана техника разложений обратных разностных производных по степеням шагов основной, разреженной и дважды разреженной сеток соответственно. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок. В разд. 8 на основе разложений невязок сеточных решений строится разностная схема Ричардсона повышенного порядка точности, сходящаяся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости. Выводы приводятся в разд. 9.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ЦЕЛЬ ИССЛЕДОВАНИЯ

На полосе $\overline{G}$

$$\overline{G} = G \cup S, \tag{2.1a}$$

где

$$G = D \times (0, T], \ \ D = (-\infty < x < \infty); \tag{2.1б}$$

$$S = \{(x,t) : -\infty < x < \infty, \ t = 0\},$$

рассмотрим задачу Коши для регулярного уравнения переноса

$$L\, u(x,t) = f(x,t), \ \ (x,t) \in G; \quad u(x,t) = \varphi(x), \ \ (x,t) \in S. \tag{2.2}$$

Здесь

$$L = b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + c(x,t) + p(x,t)\frac{\partial}{\partial t}, \quad (x,t) \in G, \tag{2.3а}$$

функции $b(x,t)$, $c(x,t)$, $p(x,t)$, $f(x,t)$ предполагаются достаточно гладкими на $\overline{G}$, функция $\varphi(x)$ предполагается достаточно гладкой на множестве S, причем, [1]

$$b_0 \leqslant b(x,t) \leqslant b^0, \ \ 0 \leqslant c(x,t) \leqslant c^0, \ \ p_0 \leqslant p(x,t) \leqslant p^0, \tag{2.3б}$$

$$|f(x,t)| \leqslant M, \ \ (x,t) \in \overline{G};$$

$$|\varphi(x)| \leqslant M, \ \ x \in D; \quad b_0, \, p_0 > 0. \tag{2.3в}$$

Наша цель — для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) построить разностную схему, сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости.

3. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ И ПРОИЗВОДНЫХ

В этом разделе рассмотрим ряд априорных оценок решения задачи (2.2), (2.1), необходимых при построении разностных схем и обосновании их сходимости. В разд. 5, 6 и 7 нам потребуется ограниченность производных $\partial^k/\partial x^k\, u(x,t)$, $\partial^k/\partial t^k\, u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{G}$, для $k \leqslant K$, $K = 4$. Вывод оценок подобен выводу оценок решения и производных регулярных и сингулярных компонент решения сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7].

3.1. Для задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) справедлив *принцип максимума*, подобный принципу максимума для сингулярно возмущенного уравнения переноса в [7].

Теорема 3.1. *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие*

$$Lu(x,t) \geq 0, \ \ (x,t) \in G; \quad u(x,t) \geq 0, \ \ (x,t) \in S.$$

Тогда для функции $u(x,t)$ *справедлива оценка* $u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \overline{G}$.

3.2. Приведем априорные оценки для решения задачи Коши (2.2), (2.1).

Применяя технику мажорантных функций (подобную приведенной в [7] для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса), находим оценку решения задачи (2.2), (2.1)

$$|\, u(x,t) \,| \leq M, \quad (x,t) \in \overline{G}. \tag{3.1}$$

При исследовании производных решения задачи Коши считаем, что коэффициенты и правая часть уравнения являются достаточно гладкими на $\overline{G}$: $b,\ c,\ p,\ f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \leq K$, $K \leqslant 4$, начальная функция — достаточно гладкая на множестве S, производные $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}\varphi(x)$, $k \leqslant K$, ограничены при $K = 4$. При этих условиях выполняется включение

$$u \in C^{k,k_0}(\overline{G}), \quad k + k_0 \leq K. \tag{3.2}$$

Тогда для функции $u(x,t)$ справедлива оценка

$$\left| \frac{\partial^{k+k_0}}{\partial x^k \partial t^{k_0}} u(x,\, t) \right| \leq M, \quad (x,\, t) \in \overline{G}, \ \ k + k_0 \leq K. \tag{3.3}$$

Справедлива следующая

Теорема 3.2. *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b,\ c,\ p,\ f \in$ $\in C^{k,k_0}(\overline{G})$, $k + k_0 \leq K$, $K = 4$. *Тогда для решения задачи Коши* $u(x,\, t)$ *и его производных справедливы оценки* (3.1), (3.3).

[1] Через M (через m) обозначаем достаточно большие (малые) положительные постоянные. В случае сеточных задач эти постоянные не зависят от шаблонов разностных схем.

4. СТАНДАРТНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

В этом разделе построим *стандартную разностную схему* на основе монотонной сеточной аппроксимации задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) и исследуем ее сходимость.

4.1. На множестве $\overline{G}$ введем сетку
$$\overline{G}_{h\tau} = \overline{\omega} \times \overline{\omega}_0. \tag{4.1}$$
Здесь $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$ — равномерные сетки на множествах $(-\infty,\, \infty)$ и $[0, T]$ соответственно. Пусть h и τ — шаги сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$; узел $(0,\, 0)$ принадлежит сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

Предполагаем выполненным условие $h \leqslant M\,N^{-1}$, $\tau \leqslant M\,N_0^{-1}$, где $N+1$ и N_0+1 — число узлов на отрезке единичной длины на множестве $(-\infty,\, \infty)$ и число узлов сетки $\overline{\omega}_0$ соответственно.

Задачу (2.2), (2.1) аппроксимируем *стандартной разностной схемой* [3]
$$\Lambda z(x,t) = f(x,t),\ \ (x,t) \in G_{h\tau};\quad z(x,t) = \varphi(x),\quad (x,t) \in S_{h\tau}. \tag{4.2а}$$
Здесь $G_{h\tau} = G \bigcap \overline{G}_{h\tau},\ S_{h\tau} = S \bigcap \overline{G}_{h\tau}$,
$$\Lambda \equiv b(x,t)\,\delta_{\overline{x}} + c(x,t) + p(x,t)\,\delta_{\overline{t}}, \tag{4.2б}$$
$\delta_{\overline{x}}\, z(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}}\, z(x,t)$ — первые обратные разностные производные (производные назад) по x и t соответственно.

Разностная схема (4.2), (4.1) монотонна (определение монотонности разностных схем см., например, в [3]). Для схемы (4.2), (4.1) справедлив *сеточный принцип максимума*.

Теорема 4.1. *Пусть для разностной схемы* (4.2), (4.1) *выполняются условия* $\Lambda z(x,t) \ \geq\ 0$, $(x,t) \ \in\ G_{h\tau}$*;* $z(x,t) \geq\ 0$, $(x,t) \in S_{h\tau}$. *Тогда для функции* $z(x,t)$ *справедлива оценка* $z(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in \overline{G}_{h\tau}$.

4.2. С учетом априорных оценок устанавливаем сходимость в равномерной норме разностной схемы (4.2), (4.1).

С использованием оценок (3.3), где $K\,=\,2$, подобно [7], получаем, что решение разностной схемы (4.2), (4.1) сходится в равномерной норме к решению задачи Коши (2.2), (2.1) с оценкой
$$|u(x,t) - z(x,t)| \leqslant M\ \left[N^{-1} + N_0^{-1}\right],\quad (x,t) \in \overline{G}_{h\tau}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.2. *Пусть для решения задачи Коши* (2.2), (2.1) *выполняются оценка* (3.3) *при* $K\,=\,2$. *Тогда решение разностной схемы* (4.2), (4.1) *сходится в равномерной норме и для него справедлива оценка* (4.3).

5. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВРЕМЕННОЙ СЕТОК

В случае разностной схемы (4.2), (4.1) построим разложения первых обратных разностных производных по x и t по степеням шагов h и τ равномерных сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$. С использованием этих разложений получим разложения по степеням шагов h и τ для соответствующих невязок, которые будем использовать в разд. 7 при построении схемы, сходящейся с третьим порядком скорости сходимости.

5.1. Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}} u(x,t)$ по шагу h в узле (x,t), где
$$\delta_{\overline{x}} u(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x-h,t)}{h},\quad (x,t) \in G_{h\tau}.$$
Заметим, что узел $(0,\, 0)$ принадлежит сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

Заметим, что для $u(x-h,t)$ выполняется следующее разложение по степеням шага h:
$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\,\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) + 2^{-1}\,h^2\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) - \tag{5.1}$$
$$-6^{-1}\,h^3\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t) + 24^{-1}\,h^4\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,t),\quad (x,t) \in G_{h\tau},\quad \vartheta \in [x-h,\, x].$$

С учетом разложения (5.1) для $u(x-h,t)$ получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}}u(x,t)$ по степеням шага h в узле (x,t)

$$\delta_{\overline{x}}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) - 2^{-1}\,h\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) + 6^{-1}\,h^2\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t) - \tag{5.2}$$

$$-24^{-1}\,h^3\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,t), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \vartheta\in[x-h,\,x].$$

Теперь, с учетом разложения (5.2) получаем разложение по степеням шага h в узле (x,t) для разности $\delta_{\overline{x}}u(x,t) - \partial/\partial x\,u(x,t)$, которую назовем невязкой [8]

$$\delta_{\overline{x}}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) = -2^{-1}\,h\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) + 6^{-1}\,h^2\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t) - \tag{5.3}$$

$$-24^{-1}\,h^3\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,t), \quad (x,t)\in G_{h\tau}.$$

5.2. Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{t}}u(x,t)$ по степеням шага τ в узле (x,t), где

$$\delta_{\overline{t}}u(x,t) = \frac{u(x,t)-u(x,t-\tau)}{\tau}, \quad (x,t)\in G_{h\tau}.$$

Узел $(0,\,0)$ принадлежит сетке $\overline{G}_{h\tau}$.

Подобно разложению (5.1), для $u(x,t-\tau)$ выполняется следующее разложение по степеням шага τ:

$$u(x,t-\tau) = u(x,t) - \tau\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) + 2^{-1}\,\tau^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t) - \tag{5.4}$$

$$-6^{-1}\,\tau^3\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,t) + 24^{-1}\,\tau^4\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \eta\in[t-\tau,\,t].$$

С учетом разложения (5.4) для $u(x,t-\tau)$ получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{t}}u(x,t)$ по степеням шага τ

$$\delta_{\overline{t}}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) - 2^{-1}\,\tau\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t) + 6^{-1}\,\tau^2\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,t) - \tag{5.5}$$

$$-24^{-1}\,\tau^3\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}, \quad \eta\in[t-\tau,\,t].$$

Аналогично (5.3), с учетом разложения (5.5), получаем разложение по степеням шага τ в узле (x,t) для невязки $\delta_{\overline{t}}u(x,t) - \partial/\partial t\,u(x,t)$

$$\delta_{\overline{t}}u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) = -2^{-1}\,\tau\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t) + 6^{-1}\,\tau^2\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,t) - \tag{5.6}$$

$$-24^{-1}\,\tau^3\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\eta), \quad (x,t)\in G_{h\tau}.$$

5.3. Основные результаты о разложении обратных разностных производных по x и t и невязок по степеням сеточных шагов h и τ равномерных сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$.

Справедлива следующая

Теорема 5.1. *Пусть для решения задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется оценка* (3.3) *при* $K = 4$. *Тогда в случае разностной схемы* (4.2), (4.1) *для разностных производных* $\delta_{\overline{x}}u(x,t)$ *и* $\delta_{\overline{t}}u(x,t)$, $(x,t)\in G_{h\tau}$ *справедливы разложения* (5.2) *и* (5.5) *соответственно.*

Также справедлива следующая

Теорема 5.2. *Пусть выполняется условие теоремы* 5.1. *Тогда для невязок* $\delta_{\overline{x}}u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x}\,u(x,t)$ *и* $\delta_{\overline{t}}u(x,t) - -\dfrac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)$ *справедливы разложения* (5.3) *и* (5.6).

6. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТОК

В этом разделе на основе сетки $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$ строим *разреженную сетку*, на которой для разностной схемы (4.2), аналогично построениям в разд. 5, строим разложения разностных производных по x и t по степеням шагов *разреженных* сеток и разложения для соответствующих невязок, которые будут использованы в разд. 8 при построении схемы повышенного порядка точности, сходящейся с *третьим порядком* скорости сходимости.

6.1. На основе сетки $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$ строим следующую *разреженную сетку*:

$$\overline{G}^*_{h^*\tau^*} = \overline{\omega}^* \times \overline{\omega}^*_0. \tag{6.1}$$

Здесь $\overline{\omega}^*$ и $\overline{\omega}^*_0$ — равномерные сетки на множествах $(-\infty,\,\infty)$ и $[0,T]$ соответственно. Величины шагов h^* и τ^* сеток $\overline{\omega}^*$ и $\overline{\omega}^*_0$ в два раза больше величины шагов h и τ сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$. Узел $(0,\,0)$ принадлежит сеткам $\overline{G}_{h\,\tau}$ и $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$.

На сетке $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$ рассмотрим *разностную схему*

$$\begin{aligned} \Lambda^* z^*(x,t) \;&\equiv\; \{b(x,t)\,\delta_{\overline{x}^*} + p(x,t)\,\delta_{\overline{t}^*} + c(x,t)\}\, z^*(x,t) = \\ &=\; f(x,t), \quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*}, \\ z^*(x,t) \;&=\; \varphi(x), \quad (x,t)\in S^*_{h^*\tau^*}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Здесь $G^*_{h^*\tau^*} = G\bigcap \overline{G}^*_{h^*\tau^*},\ S^*_{h^*\tau^*} = S\bigcap \overline{G}^*_{h^*\tau^*}$; $\delta_{\overline{x}^*}\, z^*(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}^*}\, z^*(x,t)$ — первые обратные разностные производные на разреженной сетке $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{x}^*}\, z^*(x,t) \;&=\; \frac{z^*(x,t)-z^*(x-h^*,t)}{h^*}, \quad (x,t)\in \overline{G}^*_{h^*\tau^*}, \\ \delta_{\overline{t}^*}\, z^*(x,t) \;&=\; \frac{z^*(x,t)-z^*(x,t-\tau^*)}{\tau^*}, \quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*}. \end{aligned}$$

Для функции

$$w^*(x,t) = z^*(x,t) - u(x,t), \quad (x,t)\in \overline{G}^*_{h^*\tau^*}$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda^* w^*(x,t) \;&=\; \Lambda^* z^*(x,t) - \Lambda^* u(x,t) = \big(L-\Lambda^*\big)u(x,t) = \\ &=\; b(x,t)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) - \delta_{\overline{x}^*}\,u(x,t)\Big] + \\ &+\; p(x,t)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) - \delta_{\overline{t}^*}\,u(x,t)\Big], \quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*}, \end{aligned} \tag{6.3}$$

причем

$$w^*(x,t) = 0, \quad (x,t)\in S^*_{h^*\tau^*}.$$

6.2. Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)$ по шагу h^* в узле (x,t).

Для производной $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)$ имеем следующее представление:

$$\delta_{\overline{x}^*}u(x,t) = \frac{u(x,t)-u(x-h^*,t)}{h^*}, \quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*}.$$

Узел $(0,\,0)$ принадлежит сетке $\overline{G}^*_{h^*\tau^*}$.

Заметим, что для $u(x-h^*,t)$ выполняется следующее разложение по степеням шага h^*:

$$\begin{aligned} u(x-h^*,t) = u(x,t) - h^*\,\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) + 2^{-1}\,h^{*\,2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) - 6^{-1}\,h^{*\,3}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t) + \\ +24^{-1}\,h^{*\,4}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,t), \quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*}, \quad \vartheta\in[x-h^*,\,x]. \end{aligned} \tag{6.4}$$

С учетом разложения (6.4) для $u(x-h^*,t)$, получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)$ по степеням шага h^*

$$\delta_{\overline{x}^*}u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t) - 2^{-1}\,h^*\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t) + 6^{-1}\,h^{*\,2}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t) - \tag{6.5}$$

$$-24^{-1}\,h^{*\,3}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,t),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \vartheta\in[x-h^*,\,x].$$

6.3. Подобно (6.4), для $u(x,\,t-\tau^*)$ выполняется следующее разложение по степеням шага τ^*:

$$u(x,\,t-\tau^*)=u(x,t)-\tau^*\,\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)+2^{-1}\,\tau^{*\,2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t)-6^{-1}\,\tau^{*\,3}\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,\,t)+ \tag{6.6}$$

$$+24^{-1}\,\tau^{*\,4}\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\,\eta),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,\,t].$$

С учетом разложения (6.6) для $u(x,\,t-\tau^*)$, получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{t}^*}u(x,t)$ по степеням шага τ^*

$$\delta_{\overline{t}^*}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)-2^{-1}\,\tau^*\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t)+6^{-1}\,\tau^{*\,2}\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,\,t)- \tag{6.7}$$

$$-24^{-1}\,\tau^{*\,3}\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\,\eta),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,\,t].$$

6.4. Основной результат о разложении разностных производных по x и t по степеням сеточных шагов разреженной сетки $G^*_{h^*\tau^*}$.

В силу разложений (6.5) и (6.7), для невязок $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial x}\,u(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}^*}u(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)$ справедливы следующие разложения по степеням сеточных шагов h^* и τ^*:

$$\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t)=-2^{-1}\,h^*\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,u(x,t)+6^{-1}\,h^{*\,2}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,u(x,t)- \tag{6.8}$$

$$-24^{-1}\,h^{*\,3}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\,u(\vartheta,\,x),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \vartheta\in[x-h^*,\,x];$$

$$\delta_{\overline{t}^*}u(x,t)-\frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)=-2^{-1}\,\tau^*\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,u(x,t)+6^{-1}\,\tau^{*\,2}\,\frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,t)- \tag{6.9}$$

$$-24^{-1}\,\tau^{*\,3}\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\,u(x,\eta),\quad (x,t)\in G^*_{h^*\tau^*},\quad \eta\in[t-\tau^*,\,t].$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 6.1. *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2), (2.1) *выполняется условие* $b,\,c,\,p,\,f\in C^{k,k_0}(\overline{G}),\ k,\ k_0\le K,\ K=4$. *Тогда для невязок* $\delta_{\overline{x}^*}u(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial x}\,u(x,t)$ *и* $\delta_{\overline{t}^*}u(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial t}\,u(x,t)$ *справедливы разложения* (6.8) *и* (6.9) *по степеням сеточных шагов* h^* *и* τ^* *разреженной сетки* $G^*_{h^*\tau^*}$.

7. РАЗЛОЖЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ И НЕВЯЗОК ПО СТЕПЕНЯМ ШАГОВ ДВАЖДЫ РАЗРЕЖЕННЫХ СЕТОК

В этом разделе на основе *разреженной сетки* $\overline{G}^*_{h^*\tau^*(6.1)}$ строим *дважды разреженную сетку*, на которой для разностной схемы (4.2), аналогично построениям в разд. 6, строим разложения разностных производных по x и t по степеням шагов *дважды разреженных* сеток и разложения для соответствующих невязок, которые будут использованы в разд. 8 при построении схемы повышенного порядка точности, сходящейся с *третьим порядком* скорости сходимости.

7.1. На основе сетки $\overline{G}_{h\tau(4.1)}$ строим следующую *дважды разреженную сетку*:

$$\overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}=\overline{\omega}^{**}\times\overline{\omega}^{**}_0. \tag{7.1}$$

Здесь $\overline{\omega}^{**}$ и $\overline{\omega}^{**}_0$ — равномерные сетки на множествах $(-\infty,\,\infty)$ и $[0,T]$ соответственно. Величины шагов h^{**} и τ^{**} сеток $\overline{\omega}^{**}$ и $\overline{\omega}^{**}_0$ в четыре раза больше величины шагов h и τ сеток $\overline{\omega}$ и $\overline{\omega}_0$. Узел $(0,\,0)$ принадлежит сеткам $\overline{G}_{h\,\tau}$ и $\overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$.

На сетке $\overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$ рассмотрим *разностную схему*

$$\begin{aligned} \Lambda^{**} z^{**}(x,t) &\equiv \{b(x,t)\,\delta_{\overline{x}^{**}} + p(x,t)\,\delta_{\overline{t}^{**}} + c(x,t)\}\, z^{**}(x,t) = \\ &= f(x,t), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \\ z^{**}(x,t) &= \varphi(x), \quad (x,t) \in S^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}} = G \bigcap \overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$, $S^{**}_{h^{**}\tau^{**}} = S \bigcap \overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$; $\delta_{\overline{x}^{**}}\, z^{**}(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}^{**}}\, z^{**}(x,t)$ — первые обратные разностные производные на разреженной сетке $\overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{x}^{**}}\, z^{**}(x,t) &= \frac{z^{**}(x,t) - z^{**}(x-h^{**},t)}{h^{**}}, \quad (x,t) \in \overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \\ \delta_{\overline{t}^{**}}\, z^{**}(x,t) &= \frac{z^{**}(x,t) - z^{**}(x,t-\tau^{**})}{\tau^{**}}, \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \end{aligned}$$

Для функции

$$w^{**}(x,t) = z^{**}(x,t) - u(x,t), \quad (x,t) \in \overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$$

выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \Lambda^{**} w^{**}(x,t) &= \Lambda^{**} z^{**}(x,t) - \Lambda^{**} u(x,t) = \big(L - \Lambda^{**}\big) u(x,t) = \\ &= b(x,t)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) - \delta_{\overline{x}^{**}}\, u(x,t)\Big] + \\ &+ p(x,t)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) - \delta_{\overline{t}^{**}}\, u(x,t)\Big], \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

причем

$$w^{**}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in S^{**}_{h^{**}\tau^{**}}.$$

7.2. Рассмотрим разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t)$ по шагу h^{**} в узле (x,t).
Для производной $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t)$ имеем следующее представление:

$$\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t) = \frac{u(x,t) - u(x-h^{**},t)}{h^{**}}, \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}.$$

Узел $(0,\, 0)$ принадлежит сетке $\overline{G}^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$.

Заметим, что для $u(x-h^{**},t)$ выполняется следующее разложение по степеням шага h^{**}:

$$\begin{aligned} u(x-h^{**},t) = u(x,t) - h^{**}\,\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) + 2^{-1}\, h^{**2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) - 6^{-1}\, h^{**3}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, u(x,t) + \\ +24^{-1}\, h^{**3}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\, u(\vartheta,t), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \vartheta \in [x-h^{**},\, x]. \end{aligned} \tag{7.4}$$

С учетом разложения (7.4) для $u(x-h^{**},t)$, получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t)$ по степеням шага h^{**}

$$\begin{aligned} \delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t) - 2^{-1}\, h^{**}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) + 6^{-1}\, h^{**2}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, u(x,t) - \\ -24^{-1}\, h^{**3}\,\frac{\partial^4}{\partial x^4}\, u(\vartheta,t), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \vartheta \in [x-h^{**},\, x]. \end{aligned} \tag{7.5}$$

7.3. Подобно (7.4), для $u(x,\, t-\tau^{**})$ выполняется следующее разложение по степеням шага τ^{**}:

$$\begin{aligned} u(x,\, t-\tau^{**}) = u(x,t) - \tau^{**}\,\frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) + 2^{-1}\,\tau^{**2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) - 6^{-1}\,\tau^{**3}\,\frac{\partial^3}{\partial x^3}\, u(x,\, t) + \\ +24^{-1}\,\tau^{**3}\,\frac{\partial^4}{\partial t^4}\, u(x,\eta), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \eta \in [t-\tau^{**},\, t]. \end{aligned} \tag{7.6}$$

С учетом разложения (7.6) для $u(x, t - \tau^{**})$, получаем разложение обратной разностной производной $\delta_{\overline{t}^{**}} u(x,t)$ по степеням шага τ^{**}

$$\delta_{\overline{t}^{**}} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) - 2^{-1}\tau^{**}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + 6^{-1}\tau^{**2}\frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x,t) - \tag{7.7}$$

$$-24^{-1}\tau^{**3}\frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x,\eta), \quad (x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \eta\in[t-\tau^{**}, t].$$

7.4. Основной результат о разложении разностных производных по x и t по степеням сеточных шагов разреженной сетки $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$.

В силу разложений (7.5) и (7.7), для невязок $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x} u(x,t)$ и $\delta_{\overline{t}^{**}} u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ справедливы следующие разложения по степеням сеточных шагов h^{**} и τ^{**}:

$$\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x,t) = -2^{-1} h^{**}\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + 6^{-1} h^{**2}\frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x,t) - \tag{7.8}$$

$$-24^{-1} h^{**3}\frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x,\vartheta), \quad (x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \vartheta\in[x-h^{**}, x];$$

$$\delta_{\overline{t}^{**}} u(x,t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = -2^{-1}\tau^{**}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) + 6^{-1}\tau^{**2}\frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x,t) - \tag{7.9}$$

$$-24^{-1}\tau^{**3}\frac{\partial^4}{\partial t^4} u(x,\eta), \quad (x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}, \quad \eta\in[t-\tau^{**}, t].$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2)*,* (2.1) *выполняется условие* $b, c, p, f \in C^{k,k_0}(\overline{G})$*,* $k, k_0 \le K$, $K = 4$*. Тогда для невязок* $\delta_{\overline{x}^{**}} u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial x} u(x,t)$ *и* $\delta_{\overline{t}^{**}} u(x,t) - \dfrac{\partial}{\partial t} u(x,t)$ *справедливы разложения* (7.8) *и* (7.9) *по степеням сеточных шагов* h^{**} *и* τ^{**} *разреженной сетки* $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$.

8. РАЗНОСТНАЯ СХЕМА РИЧАРДСОНА ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Отметим, что структура разложений невязок сеточных решений относительно шагов сеток на *основной*, *разреженной* и *дважды разреженной* равномерных сетках подобна. Эти разложения позволяют применить технику Ричардсона и построить сеточное решение, сходящееся с *третьим порядком* скорости сходимости.

8.1. В разд. 5—7 получены разложения невязок по степеням шагов x и t на трех вложенных сетках $G_{h\tau}$, $G^{*}_{h^{*}\tau^{*}}$, $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$.

На *дважды разреженной сетке* $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$ строим функцию $\widehat{z}(x,t)$ — линейную комбинацию из трех функций $z(x,t)$, $(x,t)\in G_{h\tau}$; $z^{*}(x,t)$, $(x,t)\in G^{*}_{h^{*}\tau^{*}}$ и $z^{**}(x,t)$, $(x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$:

$$\widehat{z}(x,t) = \alpha\, z(x,t) + \beta\, z^{*}(x,t) + \gamma\, z^{**}(x,t), \quad (x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \tag{8.1}$$

Соотношение (8.1) содержит параметры α, β и γ. Эти параметры выбираются с учетом разложений невязок на основной сетке $G_{h\tau}$ (разд. 5), на разреженной сетке $G^{*}_{h^{*}\tau^{*}}$ (разд. 6) и на дважды разреженной сетке $G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$ (разд. 7). Требуется, чтобы главный член разложения функции $\widehat{z}(x,t)$ при $(x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$ был равен единице, что приводит к следующему условию:

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \tag{8.2}$$

Кроме того, требуется, чтобы в разложении невязок функции $\widehat{z}(x,t)$, $(x,t)\in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$, не содержались линейные и квадратичные члены разложения, что приводит к следующим соотношениям:

$$\alpha + 2\,\beta + 4\,\gamma = 0, \quad \alpha + 4\,\beta + 16\,\gamma = 0. \tag{8.3}$$

Из системы уравнений (8.2), (8.3) получаем следующие значения для параметров α, β и γ:

$$\alpha = 8\times 3^{-1}, \ \ \beta = -2, \ \ \gamma = 3^{-1}. \tag{8.4}$$

Для функции $\widehat{z}_{(8.1)}(x,t)$, $(x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$, получаем представление

$$\widehat{z}(x,t) = 8 \times 3^{-1}\, z(x,t) - 2\, z^{*}(x,t) + 3^{-1}\, z^{**}(x,t), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \tag{8.5}$$

8.2. С учетом (8.5) для функции $\widehat{z}(x,t)$, $(x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$, получаем следующую оценку:

$$|\widehat{z}(x,t) - u(x,t)| \leqslant M\left(N^{-3} + N_0^{-3}\right), \quad (x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}. \tag{8.6}$$

Функцию $\widehat{z}(x,t)$, $(x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$, сходящуюся в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости, назовем решением задачи Коши для уравнения переноса (2.2), (2.1) *повышенного порядка точности*.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 8.1. *Пусть для данных задачи Коши для уравнения переноса* (2.2)*,* (2.1) *в представлении* (8.1) *выполняются условия* (8.2)*,* (8.3) *и* (8.4)*. Тогда функция* $\widehat{z}(x,t)$*,* $(x,t) \in G^{**}_{h^{**}\tau^{**}}$*, — решение разностной схемы Ричардсона повышенного порядка точности — сходится в равномерной норме с третьим порядком скорости сходимости с оценкой* (8.6).

9. ВЫВОДЫ

9.1. Рассмотрена постановка задачи Коши для уравнения переноса и определена цель исследования.

9.2. Для задачи Коши для уравнения переноса построена монотонная стандартная разностная схема и установлена ее сходимость в равномерной норме с первым порядком скорости сходимости.

9.3. Построены разложения первых обратных разностных производных по степеням шагов *основных*, *разреженных* и *дважды разреженных* равномерных сеток по пространству и времени. С использованием этих разложений получены разложения для соответствующих невязок сеточных решений.

9.4. На основе линейной комбинации решений разностных схем на *основных*, *разреженных* и *дважды разреженных* сетках, с учетом разложений соответствующих невязок на этих сетках, построена разностная схема Ричардсона повышенного порядка точности, сходящаяся в равномерной норме *с третьим порядком* скорости сходимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989, 608 с.

2. *Марчук Г.И., Шайдуров В.В.* Повышение точности решений разностных схем. М.: Наука, 1979, 320 с.

3. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989, 616 с.

4. *Хемкер П.В., Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Декомпозиция метода Ричардсона высокого порядка точности для сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 2. С. 328–336.

5. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. V. 140 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Boca Raton: CRC Press, 2009. 408 p.

6. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Улучшенная разностная схема для задачи Коши в случае уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. № 8. С. 1272–1278.

7. *Шишкин Г.И.* Разностная схема для начально-краевой задачи для сингулярно возмущенного уравнения переноса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1824–1830.

8. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978, 512 с.

RICHARDSON'S DIFFERENCE SCHEME OF THE THIRD ORDER OF ACCURACY FOR THE CAUCHY PROBLEM IN THE CASE OF THE TRANSFER EQUATION

 G.I. Shishkin*, L.P. Shishkina

620108 Yekaterinburg, S. Kovalevskaya str., 16, IMM, UB RAS, Russia
**e-mail: shishkin@imm.uran.ru*

Received: 16.06.2024
Revised: 16.06.2024
Accepted: 01.07.2024

Abstract. The Cauchy problem for the regular transfer equation is considered. For this task, using the Richardson technique, a difference scheme of an increased order of accuracy is constructed on three nested grids, converging in a uniform norm with a third order of convergence rate.

Keywords: transfer equation, Cauchy problem, standard difference scheme, uniform grid, residual, residual decomposition, monotony of differential and grid problems, Richardson technique, difference scheme, increased order of accuracy, convergence in uniform norm.