

ЧИСЛЕННАЯ ДИАГНОСТИКА РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ТЕПЛО-ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛУПРОВОДНИКА¹⁾

© 2024 г. М. О. Корпусов^{1,2,*}, Р. С. Шафир^{2,**}, А. К. Матвеева^{1,3,***}

¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М. В. Ломоносова, Россия

² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

³ 115409 Москва, Каширское шоссе, 31, НИЯУ МИФИ, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: romanshafir@mail.ru

***e-mail: matveeva2778@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.03.2024 г.

Переработанный вариант 10.03.2024 г.

Принята к публикации 05.04.2024 г.

Предложена система уравнений с нелинейностью относительно потенциала электрического поля и температуры, описывающая процесс нагрева полупроводниковых элементов электрической платы, причем с течением времени возможно возникновение теплового и электрического “пробоев”. В работе рассматривается метод численной диагностики разрушения решения. В процессе численного исследования этой задачи использовался подход, основанный на сведении исходной системы уравнений в частных производных к дифференциально-алгебраической системе с последующим решением этой системы с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексным коэффициентом. Численная диагностика разрушения точного решения указанной системы уравнений основывалась на методике вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности, получаемой при вычислении приближенного решения на последовательно сгущающихся сетках. Получены численные оценки момента времени разрушения для различных начальных условий. Библ. 34. Фиг. 3.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, численная диагностика разрушения решения, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466924070146, EDN: xhyctn

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в микроэлектронике широко используются полупроводники, что обусловлено их уникальными физическими свойствами. В этой связи возникает насущная необходимость в исследовании как вопросов устойчивости полупроводников в электрическом поле, так и вопросов их неустойчивости в электрическом поле. Физический смысл разрушения — пробой полупроводника, что делает работу актуальной.

Настоящая работа посвящена численной диагностике разрушения решения. Рассмотрена следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \gamma \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in (a, b), t \in (0, T], \\ \varepsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + q_0 \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|^p, \quad x \in (a, b), t \in (0, T], \\ \phi(x, 0) &= \phi_0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi_0(x), \quad x \in (a, b), \\ \phi(a, t) &= \phi_a(t), \quad \phi(b, t) = \phi_b(t), \quad t \in [0, T], \\ \psi(a, t) &= \psi_a(t), \quad \psi(b, t) = \psi_b(t), \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (1)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 23-11-00056) и при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики БАЗИС (проект № 22-2-2-17-1).

Система принадлежит теплоэлектрической теории. Функции $\phi = \phi(x, t)$ и $\psi = \psi(x, t)$, где $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in [0, T]$, описывают распределение потенциала внутри полупроводника и его температуры соответственно.

Отметим, что система уравнений (1) относится к уравнениям соболевского типа (см. [1]). Исследованию уравнений соболевского типа посвящено большое количество работ. Так, в работах Г. А. Свиридюка, С. А. Загребинной, А. А. Замышляевой [3]– [5] были рассмотрены в общем виде и в виде примеров начально–краевые задачи для большого многообразия классов линейных и нелинейных уравнений соболевского типа.

С развитием компьютерной техники стали актуальны вопросы численного исследования задач теории разрушения решений. Численные методы предоставляют мощный инструмент для решения сложных математических задач, которые не могут быть решены аналитически. В данной работе мы используем метод, который основан на идеях апостериорной оценки точности. Метод подробно описан в работах [20–22]. Также отметим работу [23].

Работа продолжает исследования, начатые в [13]– [19].

2. СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной работе мы используем численный подход к исследованию начально краевой задачи. Для численного решения дифференциально-алгебраической системы мы используем жесткий метод прямых, известный как SMOL. Этот метод был подробно описан в работах [24, 25]. Он помогает свести исходную систему с уравнением в частных производных к более простой задаче, требующей решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эта упрощенная система может быть эффективно решена с помощью одностадийной схемы Розенброка с комплексными коэффициентами CROS1 [26].

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу (1). Сначала введем сетку X_N по пространственной переменной x с шагом $h = \frac{b-a}{N}$, где N — число интервалов сетки. Тогда $X_N = \{x_n, 1 \leq n \leq N+1 : x_n = a + (n-1)h\}$. После конечно-разностной аппроксимации производных по переменной x со вторым порядком точности получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{d}{dt} \left(\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} \right) + \sigma \left(\frac{\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}}{h^2} \right) + \\ & + \gamma \left(\frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{h^2} \right) = 0, \quad t \in (0, T], n = \overline{2, N}, \\ & \varepsilon_0 \frac{d\psi_n}{dt} = \frac{\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}}{h^2} + q_0 \left| \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T], n = \overline{2, N}, \\ & \phi_1(t) = \phi_a(t), \quad \phi_{N+1}(t) = \phi_b(t), \quad t \in [0, T], \\ & \psi_1(t) = \psi_a(t), \quad \psi_{N+1}(t) = \psi_b(t), \quad t \in [0, T], \\ & \phi_n(0) = \phi_0(x_n), \quad \psi_n(0) = \psi_0(x_n), \quad n = \overline{2, N}, \end{aligned}$$

где $\phi_n \equiv \phi_n(t) \equiv \phi(x_n, t)$, $\psi_n \equiv \psi_n(t) \equiv \psi(x_n, t)$ — неизвестные функции при $n = \overline{2, N}$.

Исключим из данной системы функции $\phi_1(t)$, $\phi_{N+1}(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_{N+1}(t)$, воспользовавшись граничными условиями. Тогда придем к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (\phi_3 - 2\phi_2) = -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_a(t) - \frac{\sigma}{h^2} (\phi_3 - 2\phi_2 + \phi_a(t)) - \\ & - \frac{\gamma}{h^2} (\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_a(t)), \quad t \in (0, T], \\ & \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) = -\frac{\sigma}{h^2} (\phi_{n+1} - 2\phi_n + \phi_{n-1}) - \\ & - \frac{\gamma}{h^2} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}), \quad t \in (0, T], n = \overline{3, N-1}, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (-2\phi_N + \phi_{N-1}) = -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_b(t) - \frac{\sigma}{h^2} (\phi_b(t) - 2\phi_N + \phi_{N-1}) - \\ - \frac{\gamma}{h^2} (\psi_b(t) - 2\psi_N + \psi_{N-1}), \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{1}{h^2} (\psi_3 - 2\psi_2 + \psi_a(t)) + q_0 \left| \frac{\phi_3 - \phi_a(t)}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{d\psi_n}{dt} = \frac{1}{h^2} (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + \\ + q_0 \left| \frac{\phi_{n+1} - \phi_{n-1}}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T], n = \overline{3, N-1}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 \frac{d\psi_N}{dt} = \frac{1}{h^2} (\psi_b(t) - 2\psi_N + \psi_{N-1}) + q_0 \left| \frac{\phi_b(t) - \phi_{N-1}}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T],$$

$$\phi_n(0) = \phi_0(x_n), \quad \psi_n(0) = \psi_0(x_n), \quad n = \overline{2, N}.$$

Введем вектор неизвестных $\mathbf{y} = (\phi_2, \dots, \phi_N, \psi_2, \dots, \psi_N)$. Тогда $\phi_n = y_{n-1}$, $\psi_n = y_{(N-1)+(n-1)}$ при $n = \overline{2, N}$.

Перепишем систему (2), заменив функции ϕ_n , ψ_n через компоненты вектора $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (y_2 - 2y_1) = -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_a(t) - \frac{\sigma}{h^2} (y_2 - 2y_1 + \phi_a(t)) - \\ - \frac{\gamma}{h^2} (y_{N+1} - 2y_N + \psi_a(t)), \quad t \in (0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) = -\frac{\sigma}{h^2} (y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}) - \\ - \frac{\gamma}{h^2} (y_{(N-1)+n} - 2y_{(N-1)+(n-1)} + y_{(N-1)+(n-2)}), \quad t \in (0, T], n = \overline{3, N-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \frac{d}{dt} (-2y_{N-1} + y_{N-2}) = -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_b(t) - \frac{\sigma}{h^2} (\phi_b(t) - 2y_{N-1} + y_{N-2}) - \\ - \frac{\gamma}{h^2} (\psi_b(t) - 2y_{2(N-1)} + y_{2(N-1)-1}), \quad t \in (0, T], \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 \frac{dy_N}{dt} = \frac{1}{h^2} (y_{N+1} - 2y_N + \psi_a(t)) + q_0 \left| \frac{y_2 - \phi_a(t)}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T],$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{dy_{(N-1)+(n-1)}}{dt} = \frac{1}{h^2} (y_{(N-1)+n} - 2y_{(N-1)+(n-1)} + y_{(N-1)+(n-2)}) + \\ + q_0 \left| \frac{y_n - y_{n-2}}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T], n = \overline{3, N-1}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0 \frac{dy_{2(N-1)}}{dt} = \frac{1}{h^2} (\psi_b(t) - 2y_{2(N-1)} + y_{2(N-1)-1}) + q_0 \left| \frac{\phi_b(t) - y_{N-2}}{2h} \right|^p, \quad t \in (0, T],$$

$$y_n(0) = \phi_0(x_n) \quad \text{при } n = \overline{1, N-1}, \quad y_n(0) = \psi_0(x_n) \quad \text{при } n = \overline{N, 2(N-1)}.$$

Систему (3) можно записать в векторном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Матричная функция **D** имеет следующую структуру :

$$\begin{aligned} D_{k,k-1} &= \frac{\varepsilon}{4\pi h^2}, \quad \text{если } k = \overline{2, N-1}, \\ D_{k,k} &= \begin{cases} -2\frac{\varepsilon}{4\pi h^2}, & \text{если } k = \overline{1, N-1}, \\ \varepsilon_0, & \text{если } k = \overline{N, 2(N-1)}, \end{cases} \\ D_{k,k+1} &= \frac{\varepsilon}{4\pi h^2}, \quad \text{если } k = \overline{1, N-2}, \end{aligned}$$

остальные элементы матрицы **D** равны нулю.

Далее выпишем компоненты вектора $\mathbf{f} = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ \dots \ f_{2N-2})^T$:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_a(t) - \frac{\sigma}{h^2} (y_2 - 2y_1 + \phi_a(t)) - \frac{\gamma}{h^2} (y_{N+1} - 2y_N + \psi_a(t)), \\ f_k &= -\frac{\sigma}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) - \\ &\quad - \frac{\gamma}{h^2} (y_{(N-1)+(k+1)} - 2y_{(N-1)+k} + y_{(N-1)+(k-1)}), \quad k = \overline{2, N-2}, \\ f_{N-1} &= -\frac{\varepsilon}{4\pi h^2} \phi'_b(t) - \frac{\sigma}{h^2} (\phi_b(t) - 2y_{N-1} + y_{N-2}) - \\ &\quad - \frac{\gamma}{h^2} (\psi_b(t) - 2y_{2(N-1)} + y_{2(N-1)-1}), \\ f_N &= \frac{1}{h^2} (y_{N+1} - 2y_N + \psi_a(t)) + q_0 \left| \frac{y_2 - \phi_a(t)}{2h} \right|^p, \\ f_k &= \frac{1}{h^2} (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}) + q_0 \left| \frac{y_{k-(N-2)} - y_{k-(N-2)-2}}{2h} \right|^p, \quad k = \overline{N+1, 2N-3}, \\ f_{2(N-1)} &= \frac{1}{h^2} (\psi_b(t) - 2y_{2(N-1)} + y_{2(N-1)-1}) + q_0 \left| \frac{\phi_b(t) - y_{N-2}}{2h} \right|^p. \end{aligned}$$

Для численного решения системы (4) применим одностадийную схему Розенброка с комплексным коэффициентом (CROS1). Введем равномерную сетку T_M по переменной t с шагом $\tau = \frac{T-0}{M}$, где M — число интервалов. Тогда $T_M = \{t_k, 1 \leq k \leq M+1 : t_k = 0 + (k-1)\tau\}$. Теперь можно применить схему CROS1 для решения системы (4):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{k+1}) &= \mathbf{y}(t_k) + \tau \operatorname{Re} \mathbf{w}, \\ \left[\mathbf{D} - \frac{1+i}{2} \mathbf{f}_y(\mathbf{y}(t_k)) \tau \right] \mathbf{w} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_k)). \end{aligned} \quad (5)$$

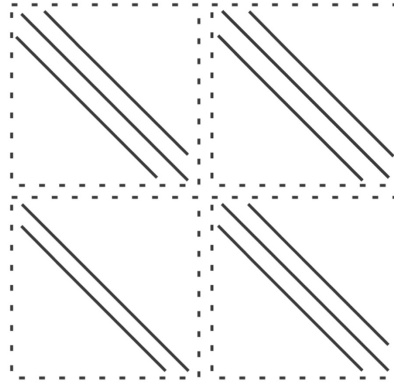
Также нам понадобится матрица Якоби $\mathbf{f}_y$, компоненты которой вычисляются по формуле: $(f_y)_{n,m} = \frac{\partial f_n}{\partial y_m}$. Выпишем ненулевые элементы матрицы Якоби:

$$\begin{aligned} (f_y)_{k,k-1} &= \begin{cases} -\frac{\sigma}{h^2}, & \text{если } k = \overline{2, N-1}, \\ \frac{1}{h^2}, & \text{если } k = \overline{N, 2N-2}, \end{cases} \\ (f_y)_{k,k} &= \begin{cases} \frac{2\sigma}{h^2}, & \text{если } k = \overline{1, N-1}, \\ -\frac{2}{h^2}, & \text{если } k = \overline{N, 2N-2}, \end{cases} \\ (f_y)_{k,k+1} &= \begin{cases} -\frac{\sigma}{h^2}, & \text{если } k = \overline{2, N-1}, \\ \frac{1}{h^2}, & \text{если } k = \overline{N, 2N-3}, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_y)_{k,N-1+(k-1)} &= -\frac{\gamma}{h^2}, \quad \text{если } k = \overline{2, N-2}, \\
(f_y)_{k,N-1+k} &= \frac{2\gamma}{h^2}, \quad \text{если } k = \overline{1, N-1}, \\
(f_y)_{k,N-1+(k+1)} &= -\frac{\gamma}{h^2}, \quad \text{если } k = \overline{2, N-2}, \\
(f_y)_{N,2} &= \frac{q_0 p}{(2h)^p} (y_2 - \phi_a(t)) |y_2 - \phi_a(t)|^{p-2}, \\
(f_y)_{k,k-(N-2)} &= \frac{q_0 p}{(2h)^p} (y_{k-(N-2)} - y_{k-(N-2)-2}) |y_{k-(N-2)} - y_{k-(N-2)-2}|^{p-2}, \\
&\quad \text{если } k = \overline{N+1, 2N-3}, \\
(f_y)_{k,k-(N-2)-2} &= -\frac{q_0 p}{(2h)^p} (y_{k-(N-2)} - y_{k-(N-2)-2}) |y_{k-(N-2)} - y_{k-(N-2)-2}|^{p-2}, \\
&\quad \text{если } k = \overline{N+1, 2N-3}, \\
(f_y)_{2(N-1),N-2} &= -\frac{q_0 p}{(2h)^p} (\phi_b(t) - y_{N-2}) |\phi_b(t) - y_{N-2}|^{p-2}.
\end{aligned}$$

Другие компоненты матрицы f_u в случае рассматриваемого уравнения равны нулю.

Таким образом, матрица системы (5) состоит из четырех блоков размерности $(N-1) \times (N-1)$ (структура матрицы представлена на фиг. 1). Этот факт дает возможность применить алгоритм решения СЛАУ, который найдет решение системы (5) за $O(N)$ операций.



Фиг. 1. Структура матрицы СЛАУ (5).

Отметим, что схема CROS1 имеет точность $O(\tau^2)$. А поскольку при аппроксимации пространственных производных были использованы формулы точности $O(h^2)$, предложенный алгоритм решения системы (4) имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$.

Для оценки точности численного решения, а также диагностики разрушения решения можно эффективно применить метод сгущающихся сеток. Пусть базовая сетка по переменным (x, t) имеет следующий вид: $X_{N^{(0)}} \times T_{M^{(0)}} = \{(x_n, t_k), 1 \leq n \leq N^{(0)} + 1, 1 \leq k \leq M^{(0)} + 1\}$. Сгущать сетку мы будем в целое число раз r_t по переменной t и в r_x раз по переменной x . Выберем $r_t = r_x = 2$. Тогда каждая следующая сетка $X_{N_s} \times T_{M_s}$, где $N_s = r_x^{s-1} N^{(0)}$, $M_s = r_t^{s-1} M^{(0)}$, (s — номер сетки) будет иметь с базовой сеткой общие узлы. В узлах базовой сетки можно оценить эффективный порядок точности по формуле:

$$p_s^{\text{eff}} = \log_{r_t} \left(\frac{|u_{s-2}(x, t) - u_{s-3}(x, t)|}{|u_{s-1}(x, t) - u_{s-2}(x, t)|} \right), \quad (6)$$

где $u_s(x, t)$ — численное решение на сетке с номером s .

В точках (x, t) , в которых решение исходной задачи является достаточно гладким, имеет место сходимость:

$$p_s^{\text{eff}} \rightarrow p^{\text{theor}} = 2 \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Нарушение же данной сходимости будет соответствовать нарушению гладкости решения, что в нашем случае позволит локализовать по времени и пространству разрушение решения.

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

3.1. Численный эксперимент 1

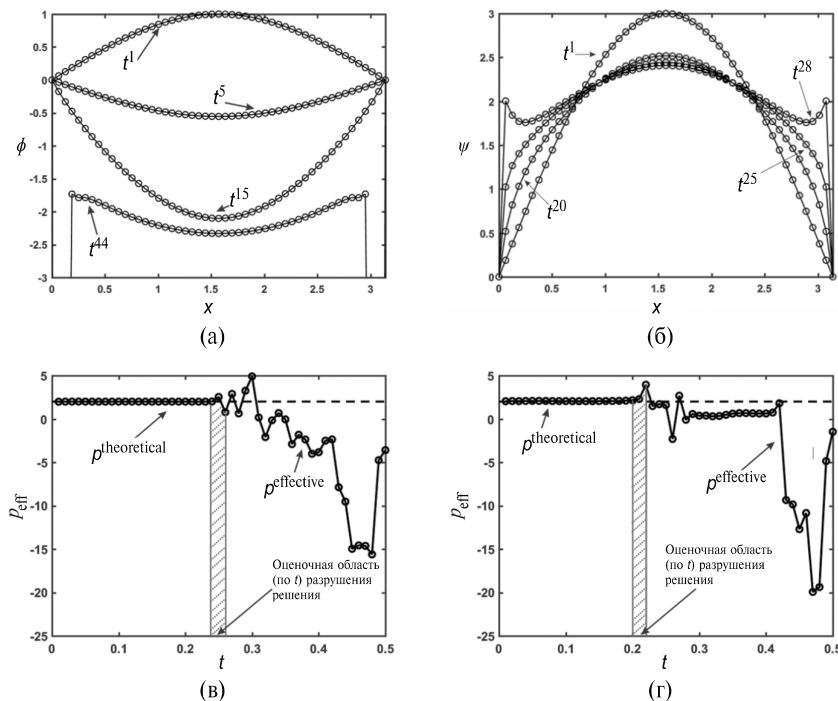
Возьмем для численного решения системы (1) следующий набор параметров: $\varepsilon = 1$, $\sigma = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon_0 = 1$, $q_0 = 1$, $p = 3$.

Задачу будем решать на следующем промежутке: $a = 0$, $b = \pi$, $T = 0.5$.

Начальные и граничные условия выберем в виде: $\phi_0 = \sin x$, $\psi_0 = 3 \sin x$, $\phi_a = 0$, $\phi_b = 0$, $\psi_a = 0$, $\psi_b = 0$.

Число интервалов базовой сетки: $N^{(0)} = 50$, $M^{(0)} = 50$. Число последовательно используемых для вычислений сеток, включая начальную: $K = 6$. Получив приближенное численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле (6).

Из графиков фиг. 2а,б видно, что классическое решение существует лишь до определенного момента времени: t_{20} , что соответствует $t = 0.20$. Также из анализа графика ясно, что потеря гладкости у решения происходит сначала вблизи границы. Поэтому расчет эффективных порядков точности в первую очередь необходимо проводить вблизи граничных точек. Результаты расчетов эффективных порядков точности представлены на графиках фиг. 2в,г. Анализ данных графиков позволяет оценить время разрушения: $0.20 \leq T_{\text{blow-up}} \leq 0.25$.



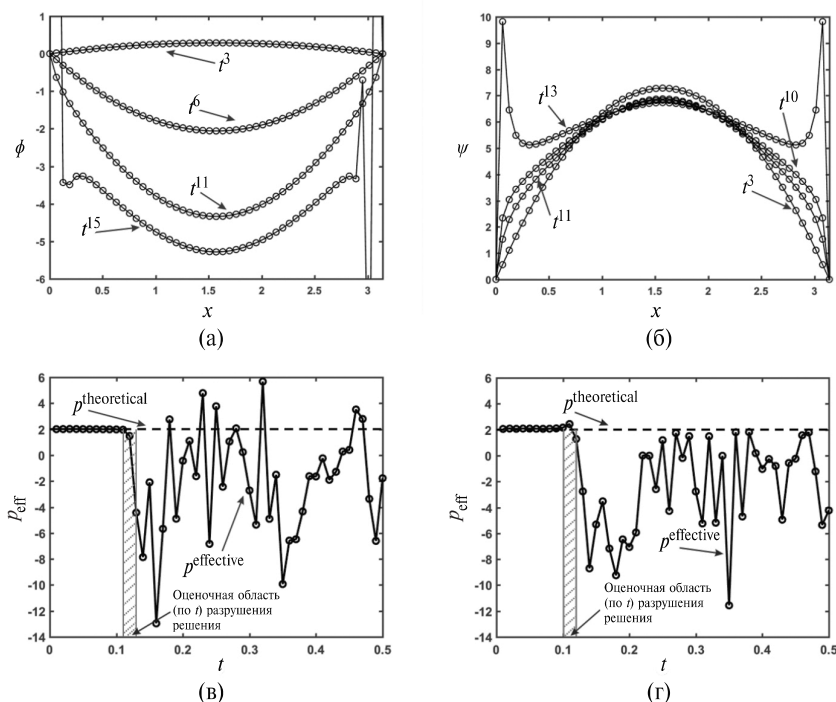
Фиг. 2. Результаты численного расчета для эксперимента 1: а — зависимость потенциала от координаты в различные моменты времени; б — зависимость температуры от координаты в различные моменты времени; в — зависимость эффективного порядка точности для потенциала от времени (вблизи границы); г — зависимость эффективного порядка точности для температуры от времени (вблизи границы).

3.2. Численный эксперимент 2

Выберем другие начальные условия для численного эксперимента: $\phi_0 = x(\pi - x)$, $\psi_0 = 3x(\pi - x)$.

Число интервалов базовой сетки и число сгущений (параметр K) оставим прежними: $N^{(0)} = 50$, $M^{(0)} = 50$, $K = 6$.

Из графиков фиг. 3а,б видно, что классическое решение существует лишь до определенного момента времени: t_{10} , что соответствует $t = 0.10$. Результаты расчетов эффективных порядков точности представлены на графиках фиг. 3в,г. Анализ данных графиков позволяет оценить время разрушения: $0.10 \leq T_{\text{blow-up}} \leq 0.11$.



Фиг. 3. Результаты численного расчета для эксперимента 2: а — зависимость потенциала от координаты в различные моменты времени; б — зависимость температуры от координаты в различные моменты времени; в — зависимость эффективного порядка точности для потенциала от времени (вблизи границы); г — зависимость эффективного порядка точности для температуры от времени (вблизи границы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications. 2011. V. 15. P. 648.
2. Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А. Волны в магнитоактивной плазме. Современные проблемы физики. М.: Наука, 1970.
3. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т. 49. N 4. С. 47–74.
4. Загребина С. А. Начально-конечная задача для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)–радиальным оператором // Матем. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19. N 2. С. 39–48.
5. Zamyshlyayeva A. A., Sviridyuk G. A. Nonclassical equations of mathematical physics. Linear Sobolev type equations of higher order // Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Механ. Физ. 2016. V. 8. N 4. P. 5–16.
6. Капитонов Б. В. Теория потенциала для уравнения малых колебаний вращающейся жидкости // Матем. сб. 1979. Т. 109(151). N 4(8). С. 607–628.

7. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
8. *Габов С. А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
9. *Плетнер Ю. Д.* Фундаментальные решения операторов типа Соболева и некоторые начально-краевые задачи // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1992. Т. 32. N 12. С. 1885–1899.
10. *Похожаев С. И., Митидиери Э.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. МИАН. 2001. Т. 234. С. 3–383.
11. *Galakhov E. I.* Some nonexistence results for quasilinear elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 2000. V. 252. N 1. P. 256–277.
12. *Галахов Е. И., Салиева О. А.* Об отсутствии неотрицательных монотонных решений для некоторых коэрцитивных неравенств в полупространстве // СМФН. 2017. Т. 63. N 4. С. 573–585.
13. *Корпусов М. О.* Критические показатели мгновенного разрушения или локальной разрешимости нелинейных уравнений соболевского типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2015. Т. 79. N 5. С. 103–162.
14. *Корпусов М. О.* О разрушении решений нелинейных уравнений типа уравнения Хохлова—Заболотской // ТМФ. 2018. Т. 194. N 3. С. 403–417.
15. *Korpusov M. O., Ovchinnikov A. V., Panin A. A.* Instantaneous blow-up versus local solvability of solutions to the Cauchy problem for the equation of a semiconductor in a magnetic field // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41. N 17. P. 8070–8099.
16. *Шафир Р. С.* Разрешимость и разрушение слабых решений задач Коши для $3 + 1$ -мерных уравнений дрейфовых волн в плазме // Матем. заметки. 2021. Т. 111. N 3. P. 459–475.
17. *Корпусов М. О., Шафир Р. С.* О разрушении решений задач Коши для нелинейных уравнений теории сегнетоэлектричества // ТМФ. 2022. Т. 212. N 3. P. 327–339.
18. *Корпусов М. О., Шафир Р. С.* О задачах Коши для нелинейных соболевских уравнений теории сегнетоэлектричества // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2023. Т. 63. N 1. P. 123–144.
19. *Корпусов М. О., Перлов А. Ю., Тимошенко А. В., Шафир Р. С.* О глобальной во времени разрешимости одной нелинейной системы уравнений тепло-электрической модели с квадратичной нелинейностью // ТМФ. 2023. Т. 217. N 2. P. 378–390.
20. *Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* Диагностика особенностей точного решения при расчетах с контролем точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. N 10. С. 1837–1847.
21. *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. М.: Физматлит, 2005.
22. *Al'shin A. B., Al'shina E. A.* Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // J. of Math. Scie. 2008. T 148. N 1. С. 143–162.
23. *Лукьяненко Д. В., Панин А. А.* Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // Выч. мет. программирование. 2016. Т. 17. N 4. P. 437–446.
24. *E. Hairer and G. Wanner* Solving of Ordinary Differential Equations // Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer, 2002.
25. *Калиткин Н. Н.* Численные методы решения жестких систем // Матем. моделирование. 1995. Т. 7. N 6. С. 111–117.
26. *Rosenbrock H. H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer Journal. 1963. Т. 5. N 4. С. 329–330.

27. Альшин А. Б., Альшина Е. А., Калиткин Н. Н., Корягина А. Б. Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46. N 8. С. 1392–1414.
28. Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. N 6. С. 1006–1022.
29. Кудашев В. Р., Михайловский А. Б., Шарапов С. Е. К нелинейной теории дрейфовой моды, индуцированной тороидальностью // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. N 4. С. 417–421.
30. Каменец Ф. Ф., Лахин В. П., Михайловский А. Б. Нелинейные электронные градиентные волны // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. N 4. С. 412–416.
31. Ситенко А. П., Сосенко П. П. О коротковолновой конвективной турбулентности и аномальной электронной теплопроводности плазмы // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. N 4. С. 456–462.
32. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
33. Панин А. А. О локальной разрешимости и разрушении решения абстрактного нелинейного интегрального уравнения Вольтерра // Матем. заметки. 2015. Т. 97. N 6. С. 884–903.
34. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

NUMERICAL DIAGNOSTICS OF THE DESTRUCTION OF A SOLUTION OF ONE THERMOELECTRIC SEMICONDUCTOR MODEL

M. O. Korpusov^{a,b,*}, R. S. Shafir^{b,**}, A. K. Matveyeva^{a,c,***}

^a 119991 Moscow, Lenin Hills, 1, Lomonosov MSU, Russia

^b 117198 Moscow, Miklukho-Maklay Str., 6, RUDN University, Russia

^c 115409 Moscow, Kashirskoye Highway, 31, National Research Nuclear University MEPhI, Russia

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: romanshafir@mail.ru

***e-mail: matveeva2778@yandex.ru

Received 10 March, 2024

Revised 10 March, 2024

Accepted 5 April, 2024

Abstract. A system of equations with nonlinearity with respect to the potential of the electric field and temperature is proposed, describing the heating process of semiconductor elements of an electric board, and over time, thermal and electrical “breakdowns” may occur. The paper considers a method for the numerical diagnosis of solution destruction. In the process of numerical investigation of this problem, an approach was used based on the reduction of the initial system of partial differential equations to a differential algebraic system, followed by the solution of this system using a one-stage Rosenbrock scheme with a complex coefficient. Numerical diagnostics of the destruction of the exact solution of the specified system of equations was based on the method for calculating a posteriori asymptotically accurate error estimate obtained when calculating an approximate solution on successively thickening grids. Numerical estimates of the moment of destruction are obtained for various initial conditions.

Keywords: Sobolev type nonlinear equations, failure, blow-up, local solvability, numerical diagnostics of solution failure, numerical diagnostics of solution destruction, destruction time estimates.