

ПРИМЕНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ТОЧКИ ЗАПУСКА ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

© 2024 г. А. Д. Чернышов^{1,*}, О. Ю. Никифорова^{1,**}, В. В. Горяйнов^{2,***}, И. Г. Рукин^{1,****}

¹394000 Воронеж, пр-т Революции, 19, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Россия

²394006 Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84, Воронежский государственный технический университет, Россия

*e-mail: chernyshovad@mail.ru

**e-mail: niki22@mail.ru

***e-mail: gorvit77@mail.ru

****e-mail: thenotnick@gmail.com

Поступила в редакцию 30.10.2023 г.

Переработанный вариант 28.02.2024 г.

Принята к публикации 05.04.2024 г.

Приведены основы быстрой универсальной тригонометрической интерполяции для непериодических функций, позволяющей получить приближенное решение с высокой точностью. Получены формулы для вычисления координат точки запуска летательного аппарата (ЛА) с высокой точностью за счет одновременного применения метода универсальных быстрых тригонометрических интерполяций и метода экстраполяции на концах некоторого заданного отрезка. Численные эксперименты показывают, что после запуска первого ЛА координаты пускового механизма могут быть определены за 7 сек с точностью 10^{-17} м. Библ. 17. Фиг. 3. Табл. 3.

Ключевые слова: быстрые разложения, быстрая тригонометрическая интерполяция, экстраполяция, высокая точность, летательный аппарат, координаты, точка запуска.

DOI: 10.31857/S0044466924070063, EDN: xirkgm

ВВЕДЕНИЕ

Классические ряды Фурье медленно сходятся и в общем случае не допускают почленное дифференцирование [1]. При применении быстрых разложений с граничной функцией M_p p -го порядка коэффициенты Фурье с увеличением порядкового номера m в ряде быстро уменьшаются по закону m^{-p-2} , что допускает возможность p -кратного дифференцирования ряда и обеспечивает высокую точность и скорость его сходимости [2]. Увеличению скорости сходимости рядов Фурье для непериодической функции посвящены многочисленные исследования, например, [3–5]. Наиболее эффективными в данном направлении являются быстрые разложения [2, 6]. В работе [7] показано, что быстрые разложения не только увеличивают скорость сходимости ряда в сотни раз по сравнению со сходимостью классических рядов Фурье, но и позволяют их почленно дифференцировать p раз. В этой связи в дальнейших рассмотрениях будем использовать универсальные быстрые разложения. Это увеличивает точность определения координат механизма, из которого происходят запуски ЛА. Под ЛА будем понимать ракету или снаряд. При многократном запуске ЛА из одного механизма задача определения его координат упрощается.

В данной статье для определения координат точки запуска ЛА все рассуждения будут проводиться в прямоугольной декартовой геоцентрической системе координат, связанной с Землей, с учетом реактивной силы предполагаемой ракеты, силы тяжести, зависящей от расстояния до центра Земли, нелинейной силы сопротивления атмосферы и силы Кориолиса. Вследствие нелинейности полученной системы с дробными степенями относительно неизвестных для определения коэффициентов

Фурье будем использовать метод универсальных быстрых тригонометрических интерполяций. Поточечное определение коэффициентов ряда применяют в методе коллокаций [8–10] и в методе тригонометрической интерполяции [11]. Ранее метод быстрых тригонометрических интерполяций с успехом использовался для вычисления определенных интегралов с переменным верхним пределом от сложных или неявно заданных функций [12] и решения ряда прикладных задач, например, [13–15]. Приведем основы универсальных быстрых интерполяционных разложений.

1. БЫСТРЫЕ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Пусть некоторая регистрирующая установка (РУ) определяет положение подвижного ЛА в пространстве. Промежуток интерполяции $2a$ определяется разностью между концом \tilde{t}_2 и началом \tilde{t}_1 времени работы РУ

$$\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = 2a. \quad (1)$$

Для математических вычислений удобнее ввести вспомогательную временную переменную t , связанную с реальным временем \tilde{t} формулой

$$t = \tilde{t} - \frac{\tilde{t}_2 + \tilde{t}_1}{2}. \quad (2)$$

При построении быстрых разложений будем использовать следующий полный функциональный базис Фурье:

$$\left\{ 1, \cos \frac{m\pi t}{a}, \sin \frac{m\pi t}{a} \right\}, \quad t \in [-a, a], \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Пусть некоторая непериодическая функция $f(t) \in L_2^a[-a \leq t \leq a]$ из пространства Гильберта рассматривается на временном отрезке $[-a \leq t \leq a]$.

Быстрым разложением $f(t)$, $[-a \leq t \leq a]$ назовем сумму некоторой граничной функции $M_p(t)$ и ряда Фурье для разности $f(t) - M_p(t)$, т.е.

$$\begin{aligned} f(t) &= M_p(t) + a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\pi \frac{t}{a} + b_m \sin m\pi \frac{t}{a}, \\ a_0 &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (f(t) - M_p(t)) dt, \quad a_m = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (f(t) - M_p(t)) \cos m\pi \frac{t}{a} dt, \\ b_m &= \frac{1}{a} \int_{-a}^a (f(t) - M_p(t)) \sin m\pi \frac{t}{a} dt, \quad t \in [-a, a]. \end{aligned} \quad (4)$$

Граничная функция $M_p(t)$ в (4) введена с целью увеличения точности и скорости сходимости ряда Фурье для разности $(f(t) - M_p(t))$ и возможности его многократного дифференцирования, где $M_p(t)$ определим следующей суммой из $p + 1$ слагаемых:

$$M_p(t) = \sum_{q=0}^p A_q P_q(t), \quad (5)$$

где A_q — некоторые постоянные, а $P_q(t)$ — быстрые полиномы.

Коэффициенты A_q определяются по формуле ([6])

$$A_q = f^{(q)}(a) - f^{(q)}(-a). \quad (6)$$

Полиномы четной и нечетной степеней $P_q(t)$ запишем рекуррентными формулами через определенные интегралы

$$P_0(t) = \frac{t}{2a}, \quad P_{2q-1}(t) = \int_0^t P_{2q-2}(t) dt, \tag{7}$$

$$P_{2q}(t) = \int_0^t P_{2q-1}(t) dt - \frac{t}{a} \int_0^a P_{2q-1}(t) dt, \quad q = 1, 2, \dots$$

Полином первой степени $P_0(t)$ является начальным, остальные полиномы получаются по рекуррентным формулам (7). Например, при $p = 6$, что соответствует граничной функции 6-го порядка $M_6(t)$, получим

$$P_0(t) = \frac{t}{2a}, \quad P_1(t) = \frac{t^2}{4a}, \quad P_2(t) = \frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12}, \quad P_3(t) = \frac{t^4}{48a^3} - \frac{at^2}{24},$$

$$P_4(t) = \frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720}, \quad P_5(t) = \frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440},$$

$$P_6(t) = \frac{t^7}{7 \cdot 1440a} - \frac{at^5}{1440} + \frac{7a^3t^3}{3 \cdot 1440} - \frac{31ta^5}{21 \cdot 1440}.$$

Поскольку зависимость $f(t)$ предполагается неизвестной, известны только дискретные значения $f(t_j)$, то воспользоваться интегральными формулами Фурье для нахождения a_0, a_m, b_m не представляется возможным. Поэтому для определения коэффициентов a_0, a_m, b_m используем дискретную систему, полученную в виде частичной суммы ряда (4) при $t = t_j$:

$$f(t_j) = M_p(t_j) + a_0 + \sum_{m=1}^{N-1} a_m \cos m\pi \frac{t_j}{a} + b_m \sin m\pi \frac{t_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1, \quad j = -N \div N - 1. \tag{9}$$

где $2N$ число внутренних точек деления, нанесенных на отрезок $[-a, a]$.

Из базиса (3) с непрерывной переменной $t \in [-a, a]$ построим базис с дискретной переменной $t_j = \frac{ja}{N}$:

$$\left\{ 1, \cos m\pi \frac{t_j}{a}, \sin m\pi \frac{t_j}{a} \right\}, \quad t_j = \frac{ja}{N}, \quad t_j \in [-a, a), \quad j = -N \div N - 1. \tag{10}$$

Здесь t_j — координаты интерполяционных точек на отрезке $[-a, a)$. Базис (10) будем называть дискретным. При использовании универсальных быстрых интерполяционных разложений по дискретному базису необходимо выполнить три условия:

- 1) отрезок $[-a, a]$ следует разбить на равные части;
- 2) количество внутренних точек разбиения должно быть четным $2N$.

Нечетное количество внутренних точек разбиения ($2N + 1$) строго не допускается, иначе дискретная система (9) не будет ортогональной на отрезке $[-a, a]$, что приведет к увеличению погрешности. В случае, если в системе (9) каждый коэффициент ряда Фурье вычислять с некоторой погрешностью, тогда погрешность будет накапливаться. Если же система (9) ортогональная, то точность существенно увеличивается;

- 3) в число расчетных точек должна входить только совокупность внутренних точек равномерного разбиения и левая граница отрезка $[-a, a]$, т.е. $t = -a$.

Доказательство дискретной ортогональности базиса (10) приведено в [16]. Также в [16] показано, что система (14) имеет решение относительно a_0, a_m, b_m в конечном виде с высокой точностью:

$$a_0 = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)), \tag{11}$$

$$a_m = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)) \cos m\pi \frac{t_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1, \tag{12}$$

$$b_m = \frac{1}{N} \sum_{j=1-N}^{N-1} (f(t_j) - M_p(t_j)) \sin m\pi \frac{t_j}{a}, \quad m = 1 \div N - 1. \quad (13)$$

Подставляя a_0 , a_m , b_m из (11), (12), (13) в (9), где возьмем $M_p(t) = M_6(t)$, получим формулу для полной тригонометрической интерполяции $f(t)$ на отрезке $[-a, a]$ в явном виде при задании $f(t)$ дискретными значениями $f(t_j)$ с граничной функцией 6-го порядка:

$$\begin{aligned} f(t) = & \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_6(t_j)) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_6(t_j)) \cos n\pi \frac{t_j}{a} \cos n\pi \frac{t}{a} + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{j=-N}^{N-1} (f(t_j) - M_6(t_j)) \sin n\pi \frac{t_j}{a} \sin n\pi \frac{t}{a} + M_6(t), \quad f(t) \in L_2^{5+2} (t \in [-a, a]). \end{aligned} \quad (14)$$

При $t = t_j$ из (14) будем иметь точное равенство, т.е. интерполяционная кривая (14) точно проходит через экспериментальные точки $t = t_j$. Кроме этого свойства решение допускает еще и дифференцирование заданное число раз, что не рассматривается у других авторов.

В [16] получены оценки для коэффициентов a_m и b_m :

$$|a_m| \leq \frac{2a^7}{m^7 \pi^7} \left| f^{(7)}(t) \right| \sim (m\pi)^{-7}, \quad (15)$$

$$|b_m| \leq \frac{2a^8}{m^8 \pi^8} \max \left| f^{(8)}(t) \right| \sim (m\pi)^{-8}. \quad (16)$$

Из данных оценок следует, что даже вторые члены полного ряда Фурье будут иметь порядок $|a_2| \leq (2\pi)^{-7}$ и $|b_2| \leq (2\pi)^{-8}$, что является чрезвычайно малой величиной. Таким образом, при использовании универсального быстрого разложения из полного ряда Фурье достаточно учитывать всего два члена — один первый член ряда по синусам и один первый член ряда по косинусам.

Также из оценок (15) и (16) следует, что данный здесь метод по скорости сходимости ряда во много раз превосходит все известные методы и обладает следующими замечательными свойствами.

1. Данный здесь приближенный метод является аналитическим.
2. Интерполяционная кривая (14) с коэффициентами a_0 , a_m , b_m , вычисленными по формулам (11), (12), (13), точно проходит через заданные интерполяционные точки $t = t_j$.
3. Вследствие чрезвычайно высокой скорости сходимости ряда Фурье и высокой точности в ряде достаточно учитывать только несколько первых слагаемых с синусами и с косинусами. Это приводит к весьма экономной расчетной алгебраической системе и позволяет быстро определять координаты пусковой установки.
4. Данный полный ряд Фурье с граничной функцией $M_6(t)$ допускает шестикратное почленное дифференцирование, что является недоступным в других методах и позволяет проводить исследования.
5. Погрешность предлагаемого приближенного метода значительно меньше погрешности входных данных рассматриваемых инженерных задач (силы тяжести, коэффициентов сопротивления атмосферы и т.д.). Поэтому вполне можно принимать подобное приближенное решение в качестве точного на отрезке $t \in [-a, a]$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПУСКОВОГО МЕХАНИЗМА МЕТОДОМ УНИВЕРСАЛЬНЫХ БЫСТРЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ

2.1. Постановка задачи

Пусть с поверхности Земли из некоторого пускового механизма запускается ЛА, который может выходить за пределы земной атмосферы, при этом ЛА движется по заранее неизвестной траектории, но координаты его определяются при $t \geq \tilde{t}_1$, где \tilde{t}_1 — начало работы регистрирующей установки (РУ). Введем неподвижную $(x = x_1, y = x_2, z = x_3)$ систему координат, жестко связанную с Землей. Начало

системы координат находится в центре Земли. Ось $z = x_3$ неподвижной системы направим по оси вращения Земли к Северному полюсу.

Для удобства вычислений введем вспомогательную временную переменную t . Координаты ЛА в зависимости от t регистрируется с помощью РУ. Момент начала работы РУ будем принимать за значение $t = \tilde{t}_1 = -a$, конец учитываемых точек работы РУ принимается за значение $t = \tilde{t}_2 = a$, весь промежуток работы РУ равен $\tilde{t}_2 - \tilde{t}_1 = 2a$. Переменная t изменяется в пределах $t \in [-a, a]$, в середине отрезка $[\tilde{t}_1, \tilde{t}_2]$ переменная t принимает значение, равное нулю, при $t \in [-a, 0)$ переменная t принимает отрицательные значения $t < 0$, при $t \in (0, a]$ переменная t принимает положительные значения $t > 0$. Математическая переменная t связана с реальным временем \tilde{t} зависимостью (2). Все рассмотрение проведем в наиболее приближенном виде к реальной обстановке.

Пусть масса ЛА вследствие равномерного сгорания топлива уменьшается со временем по линейному закону $m(t) = m_0 (1 - \gamma (t - \tilde{t}_1))$. Начальную массу ЛА m_0 и скорость сгорания топлива γ для данного класса ЛА считаем известными. Если ЛА — это артиллерийский снаряд, движущийся по инерции за счет начальной скорости, то следует считать $\gamma = 0$.

Абсолютное ускорение ЛА складывается из суммы относительного ускорения $(\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{x}_3)$ и вектора ускорения Кориолиса со следующими проекциями $2\omega_0 \times \mathbf{v}_r = 2(-\omega_0 \dot{x}_2, \omega_0 \dot{x}_1, 0)$.

Запишем уравнения движения центра масс ЛА в системе (x_1, x_2, x_3) в виде трех дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} D_2(t) &= \begin{cases} m(t) (\ddot{x}_1 - 2\omega_0 \dot{x}_2 + G(t)x_1) + F_f(t)\dot{x}_1 - H_1 = 0, \\ m(t) (\ddot{x}_2 + 2\omega_0 \dot{x}_1 + G(t)x_2) + F_f(t)\dot{x}_2 - H_2 = 0, \\ m(t) (\ddot{x}_3 + G(t)x_3) + F_f(t)\dot{x}_3 - H_3 = 0, \end{cases} \\ F_f(t) &= \rho \left(\beta_1 + \beta_2 \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2} + \beta_3 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) \right), \\ G(t) &= \frac{gR_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad m(t) = m_0 (1 - \gamma (t - \tilde{t}_1)). \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь величина $G(t)$ учитывает переменное притяжение к Земле за счет изменения расстояния до центра Земли, g — ускорение Земного притяжения. Индекс 2 внизу оператора $D_2(t)$ означает, что каждое из трех уравнений — второго порядка. В системе (17) в (H_1, H_2, H_3) может включаться реактивная сила, а также некоторые внешние силы. В записи системы (17) учтено также ускорение Кориолиса, переменное притяжение к Земле, атмосферное сопротивление с учетом до третьей степени скорости ЛА, так как нелинейный коэффициент силы атмосферного сопротивления F_f умножается на вектор скорости $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — коэффициенты сопротивления, γ — коэффициент сгорания топлива, m_0 — масса ЛА в момент начала работы РУ при $t = \tilde{t}_1$. В системе (17) с таким же успехом можно было бы учесть силы притяжения к Солнцу, Луне и т.д. Усложнения были бы не принципиальными. Для атмосферной плотности ρ примем экспоненциальную модель [17]

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-(x_3(t) - R_3)/7170}, \tag{18}$$

где ρ_0 — атмосферная плотность на поверхности Земли.

К системе (17) следует добавить начальные условия, которые записываются обычно заданием начального положения и начальной скорости

$$x_1(T_0) = 0, \quad x_2(T_0) = 0, \quad x_3(T_0) = x_{3,0} = R_3 + h_0, \tag{19}$$

$$\dot{x}_k(T_0) = \dot{x}_{k,0}, \quad k = 1, 2, 3, \tag{20}$$

где T_0 — неизвестный момент запуска ЛА, h_0 — высота над поверхностью Земли, откуда стартует ЛА, которую считаем известной для данного класса ЛА.

2.2. Решение задачи

Будем полагать, что начальные данные ЛА (19) и (20) хотя и существуют, но заранее момент T_0 запуска ЛА, а также ее начальные координаты (19) и начальная скорость (20) неизвестны, их надо определить. Известно только множество значений координат ЛА, полученные из измерительных данных:

$$t_{-N} = \tilde{t}_1, \quad t_N = \tilde{t}_2, \quad x_k(t_j) = x_j^{(k)}, \quad t_j = j \frac{a}{N}, \quad j = -N \div N - 1, \quad k = 1, 2, 3. \tag{21}$$

Из (21) при $j = -N$, $t_j = t_{-N} = -a$ получаем первую известную начальную точку из системы данных(21) для промежутка $t \in [-a, a]$

$$x_k(-a) = x_{-N}^{(k)}, \quad x_k(a) = x_N^{(k)}. \tag{22}$$

Здесь $(x_{-N}^1, x_{-N}^2, x_{-N}^3)$ — первая точка из данной системы точек. Значения проекций начальной скорости при $j = -N$

$$\dot{x}_1(t_{-N}) = \dot{x}_{1,0}, \quad \dot{x}_2(t_{-N}) = \dot{x}_{2,0}, \quad \dot{x}_3(t_{-N}) = \dot{x}_{3,0} \tag{23}$$

полагаем заранее неизвестными. Решение задачи в данной постановке никаким известным методом невозможно, кроме предлагаемого метода быстрых разложений [2, 6]. Левые части трех уравнений (17) примем за некоторые три функции от переменной $t \in [-a, a]$, к каждой из которых применим быстрые разложения с граничной функцией шестого порядка $M_6(t)$ из (5) по аналогии с разложением (4) с использованием частичных сумм, т.е.

$$\begin{aligned} x_k(t) &= M_6^k(t) + a_0^k + \sum_{m=1}^{N-1} a_m^k \cos m\pi \frac{t}{a} + b_m^k \sin m\pi \frac{t}{a}, \quad k = 1, 2, 3, \quad t \in [-a, a], \\ M_6^k(t) &= A_0^k \frac{t}{2a} + A_1^k \frac{t^2}{4a} + A_2^k \left(\frac{t^3}{12a} - \frac{at}{12} \right) + A_3^k \left(\frac{t^4}{48a} - \frac{at^2}{24} \right) + \\ &+ A_4^k \left(\frac{t^5}{240a} - \frac{at^3}{72} + \frac{7a^3t}{720} \right) + A_5^k \left(\frac{t^6}{1440a} - \frac{at^4}{288} + \frac{7a^3t^2}{1440} \right) + \\ &+ A_6^k \left(\frac{t^7}{7 \cdot 1440a} - \frac{at^5}{1440} + \frac{7a^3t^3}{3 \cdot 1440} - \frac{31a^5t}{21 \cdot 1440} \right). \end{aligned} \tag{24}$$

Коэффициенты Фурье в (24) вычисляются по формулам (11), (12), (13):

$$\begin{aligned} a_0^k &= \frac{1}{2N} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(x_k(t_j) - M_6^k(t_j) \right), \quad a_m^k = \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(x_k(t_j) - M_6^k(t_j) \right) \cos m\pi \frac{t_j}{a}, \\ b_m^k &= \frac{1}{N} \sum_{j=-N}^{N-1} \left(x_k(t_j) - M_6^k(t_j) \right) \sin m\pi \frac{t_j}{a}, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1 \div N - 1. \end{aligned} \tag{25}$$

В силу свойств рядов Фурье быстрое разложение (24) справедливо только на замкнутом отрезке $t \in [-a, a]$, включая и его концы, вне отрезка решение будем строить при помощи экстраполяций.

Вначале определим коэффициенты A_0^k по формуле

$$A_0^k = x_k(a) - x_k(-a), \quad x_k(-a) = x_{-N}^{(k)}, \quad x_k(a) = x_N^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Поскольку $x_k(a)$ и $x_k(-a)$ известны из данных (21), то и A_0^k определяется из (26). Остальные $A_1^k \div A_6^k$ будем находить из системы 18-ти уравнений. Для нахождения A_1^k в первом уравнении (24) положим $t = a$, что пока отдельно нигде не использовалось, и потому такое уравнение является независимым от всех ранее записанных уравнений:

$$x_k(t = a) = x_N = \frac{1}{2}A_0^k + \frac{a}{4}A_1^k - \frac{a^3}{48}A_3^k + \frac{a^5}{480}A_5^k + a_0^k + \sum_{m=1}^{N-1} a_m^k (-1)^m, \quad k = 1, 2, 3. \tag{27}$$

Уравнение (27) содержит неизвестные a_0^k, a_m^k , исключить которые можно с помощью формул (25). Для нахождения A_2^k в системе (17) вначале положим $t = a$, затем $t = -a$ и составим разностные уравнения

$$D_2(t = a) - D_2(t = -a) = 0. \tag{28}$$

После дифференцирования левой и правой частей уравнений (17) последовательно один, два, три, четыре раза [6], что допустимо в силу свойств быстрых разложений и, положив $t = a$ и $t = -a$ в каждом из них, составим еще четыре разностных уравнения

$$\begin{aligned} D_2'(t = a) - D_2'(t = -a) &= 0, & D_2''(t = a) - D_2''(t = -a) &= 0, \\ D_2'''(t = a) - D_2'''(t = -a) &= 0, & D_2^{(4)}(t = a) - D_2^{(4)}(t = -a) &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что уравнения (28) и (29) записаны в символическом виде, но представить их явно при помощи систем компьютерной алгебры не представляет особых трудностей.

Из уравнений (28) и (29), также как и из уравнения (27) исключены коэффициенты a_0^k, a_m^k, b_m^k с помощью формул (25). Система 18-ти алгебраических уравнений (27)–(29) относительно $A_1^k \div A_6^k$ является замкнутой. После подстановки найденных $A_1^k \div A_6^k$ в (25) определим a_0^k, a_m^k, b_m^k . Затем подставив найденные $A_1^k \div A_6^k$ и a_0^k, a_m^k, b_m^k в выражение (24) для $x_k(t)$, будем иметь аналитическое решение для координат ЛА (или артиллерийского снаряда), справедливое на замкнутом временном отрезке $t \in [-a, a]$. Таким образом, универсальная быстрая тригонометрическая интерполяция позволяет построить траекторию полета ЛА на отрезке $t \in [-a, a]$. Для определения координат пускового механизма необходимо получить траекторию полета ЛА при $t \leq -a$. Поэтому предложенный выше метод интерполяций можно использовать для организации экстраполяций при $t \leq -a$, где интерполяционное разложение (24) по построению уже неприменимо. Однако из (24) можно вычислить производные $x_k^p(t)$, $k = 1, 2, 3$, $p = 0 \div 6$, до шестого порядка включительно при $t = -a$, с помощью которых организуем ряд Тейлора, являющийся искомой экстраполяцией справедливой при $t \leq -a$, а также и при $t \geq -a$:

$$\begin{aligned} x_k(t) &= \sum_{p=0}^6 x_k^{(p)}(-a) \frac{(t+a)^p}{p!}, \\ x_k'(-a) &= A_0^k \frac{1}{2a} - A_1^k \frac{1}{2} + A_2^k \frac{a}{6} - A_4^k \frac{a^3}{90} + A_6^k \frac{a^5}{945} + \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{\pi}{a} (-1)^m, \\ x_k''(-a) &= A_1^k \frac{1}{2a} - A_2^k \frac{1}{2} + A_3^k \frac{a}{6} - A_5^k \frac{a^3}{90} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(m \frac{\pi}{a}\right)^2 (-1)^m a_m^k, \\ x_k'''(-a) &= A_2^k \frac{1}{2a} - A_3^k \frac{1}{2} + A_4^k \frac{a}{6} - A_6^k \frac{a^3}{90} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(m \frac{\pi}{a}\right)^3 (-1)^m b_m^k, \\ x_k^{(4)}(-a) &= A_3^k \frac{1}{2a} - A_4^k \frac{1}{2} + A_5^k \frac{a}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(m \frac{\pi}{a}\right)^4 a_m^k (-1)^m, \\ x_k^{(5)}(-a) &= A_4^k \frac{1}{2a} - A_5^k \frac{1}{2} + A_6^k \frac{a}{6} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(m \frac{\pi}{a}\right)^5 b_m^k (-1)^m, \\ x_k^{(6)}(-a) &= A_5^k \frac{1}{2a} - A_6^k \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(m \frac{\pi}{a}\right)^6 a_m^k (-1)^m. \end{aligned} \tag{30}$$

Радиус сходимости ряда Тейлора неизвестен. Поэтому в примере, демонстрирующем применение метода быстрых универсальных тригонометрических интерполяций, для определения координат пускового механизма будет произведено сравнение значений $x_k(t)$ при $t \geq -a$, вычисленных по формулам быстрых разложений (24) и рядом Тейлора (30), с целью экспериментального установления радиуса сходимости ряда Тейлора (30).

АЛГОРИТМ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА БЫСТРЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕРПОЛЯЦИЙ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ КООРДИНАТ ПУСКОВОГО МЕХАНИЗМА

1. Расположить РУ в удобном месте для регистрации координат ЛА.
2. Включить передатчики П с записями ложных телефонных сигналов и включить РУ для определения координат ЛА.
3. Определить моменты времени начала \tilde{t}_1 и конца \tilde{t}_2 работы РУ при регистрации координат ЛА.
4. По формуле (1) вычислить величину a и определить количество N .
5. Данные РУ представить в виде (21).
6. По формуле (26) найти коэффициенты A_0^k .
7. По формулам (25) выразить коэффициенты a_0^k, b_m^k, b_m^k через коэффициенты $A_1^k \div A_6^k$ граничной функции.
8. Записать замкнутую нелинейную алгебраическую систему уравнений (27)–(29) для определения $A_1^k \div A_6^k$.
9. Найденные a_0^k, b_m^k, b_m^k и $A_1^k \div A_6^k$ подставить в (24) и получить искомую быструю интерполяцию для координат $x_k(t)$, справедливую на замкнутом отрезке $t \in [-a, a]$ и допускающую дифференцирование на всем отрезке и на его концах 6 раз.
10. Вычислить значения $x_k(t)$ и их первых шести производных в точке $t = -a$ и составить для $x_k(t)$ ряд Тейлора в виде (30).
11. Из условия $x_3(T_0) = R_3$ определить значение T_0 — время запуска ЛА и вычислить в точке $t = T_0$ координаты $x_k(t)$ из (30). Тем самым получим координаты пускового механизма.

3. ПРИМЕР ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ПУСКОВОГО МЕХАНИЗМА

Пусть в качестве тестового примера в начальные моменты времени запуска ЛА движется по винтовой линии

$$x_1^* = R_0 \cos \omega_1 t + \delta_1, \quad x_2^* = R_0 \sin \omega_1 t + \delta_2, \quad x_3^* = R_3 + K + w(t + a) + \delta_3, \quad (31)$$

где R_0, K, ω_1, w — некоторые заданные постоянные, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ — постоянные, определяющие ошибки РУ нахождения координат траектории ЛА из-за воздействия шумов. И пусть функции $H_1 \div H_3, F_f, G$ в правых частях системы (17) заданы выражениями

$$H_1 = m_0 (1 - \gamma (t - \tilde{t}_1)) (-R_0 \omega_1^2 \cos \omega_1 t - 2\omega_0 R_0 \omega_1 \cos \omega_1 t + G (R_0 \cos \omega_1 t + \delta_1)) - F_f R_0 \omega_1 \sin \omega_1 t,$$

$$H_2 = m_0 (1 - \gamma (t - \tilde{t}_1)) (-R_0 \omega_1^2 \sin \omega_1 t - 2\omega_0 R_0 \omega_1 \sin \omega_1 t + G (R_0 \cos \omega_1 t + \delta_2)) + F_f R_0 \omega_1 \cos \omega_1 t,$$

$$H_3 = m_0 (1 - \gamma (t - \tilde{t}_1)) G (R_3 + K + w(t + a) + \delta_3) + F_f w,$$

$$F_f = \rho_0 \cdot e^{-(K+w(t+a)+\delta_3)/7170} \left(\beta_1 + \beta_2 \sqrt{R_0^2 \omega_1^2 + w^2} + \beta_3 (R_0^2 \omega_1^2 + w^2) \right),$$

$$G = \frac{gR_3^2}{\left((R_0 \cos \omega_1 t + \delta_1)^2 + (R_0 \sin \omega_1 t + \delta_2)^2 + (R_3 + K + w(t + a) + \delta_3)^2 \right)^{3/2}}.$$

Граничные условия для точного решения (31) имеют вид

$$x_1^*(-a) = R_0 \cos \omega_1 a + \delta_1, \quad x_2^*(-a) = -R_0 \sin \omega_1 a + \delta_2, \quad x_3^*(-a) = R_3 + K + \delta_3.$$

Тестовая траектория (31) здесь выбрана одной из простейших, типа винтовой линии, что не является принципиальным. Подобные траектории используются часто, чтобы затруднить определение положения пускового механизма. При использовании метода быстрых разложений с таким же успехом могла бы быть использована и любая другая тестовая траектория ЛА, если она будет предложена.

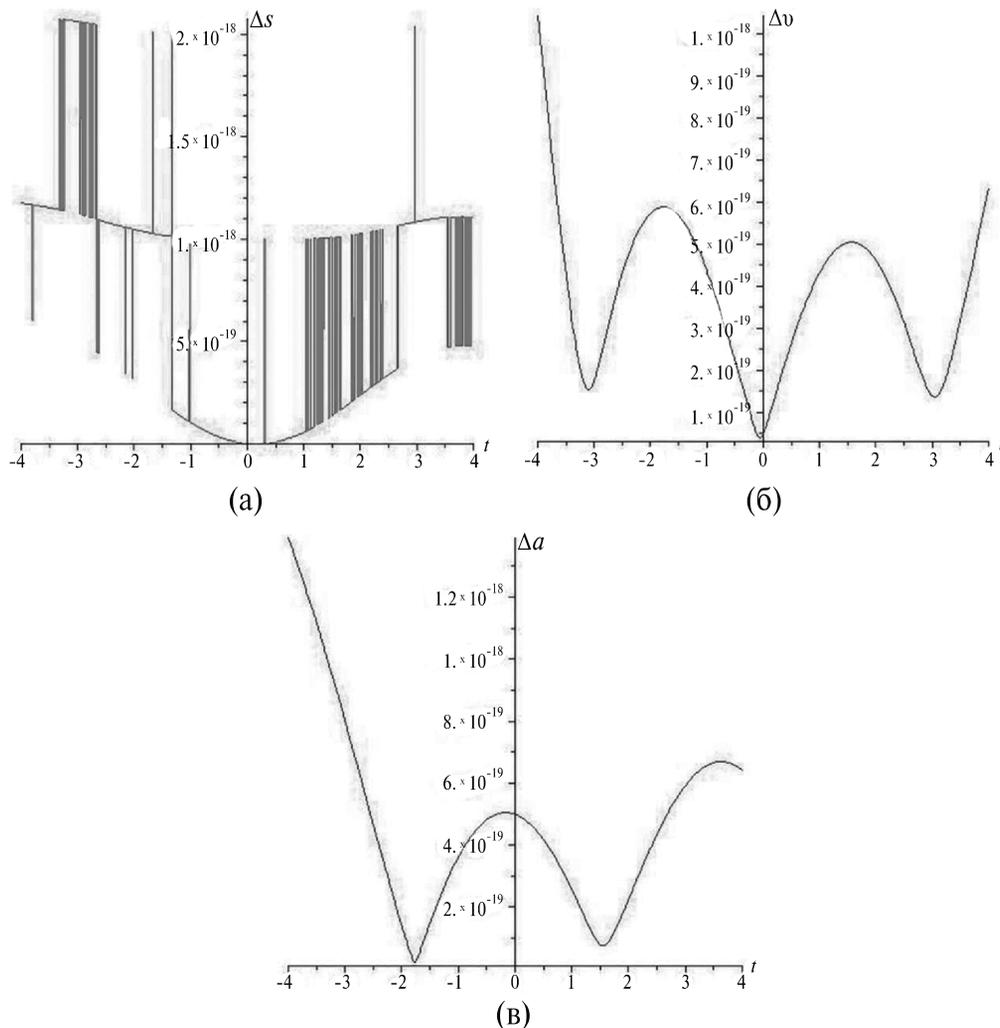
Имея тестовое точное решение (31), можно путем сравнения с приближенным аналитическим решением (24) вычислить абсолютную погрешность в определении положения ЛА, его скорости и ускорения.

Значения параметров выберем следующими: $m_0 = 80$ кг, $\omega_1 = 2\pi/7200$ с⁻¹, $w = 5$ м/с, $R_0 = 100$ м, $K = 50$ м, $g = 9.80665$ м/с², $R_3 = 6372000$ м, $\omega_0 = 1.995 \cdot 10^{-7}$ с⁻¹, $\rho = 1.2754$ кг/м³, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\beta_3 = 1$, $\gamma = 1/80$, $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$. Значения указанных величин задавались случайным образом. Все расчеты выполнены в системе компьютерной алгебры Maple.

Абсолютные погрешности траектории ЛА Δs , его скорости Δv и ускорения Δa вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} \Delta s &= \sqrt{(x_1^* - x_1)^2 + (x_2^* - x_2)^2 + (x_3^* - x_3)^2}, \\ \Delta v &= \sqrt{(\dot{x}_1^* - \dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2^* - \dot{x}_2)^2 + (\dot{x}_3^* - \dot{x}_3)^2}, \\ \Delta a &= \sqrt{(\ddot{x}_1^* - \ddot{x}_1)^2 + (\ddot{x}_2^* - \ddot{x}_2)^2 + (\ddot{x}_3^* - \ddot{x}_3)^2}. \end{aligned} \tag{32}$$

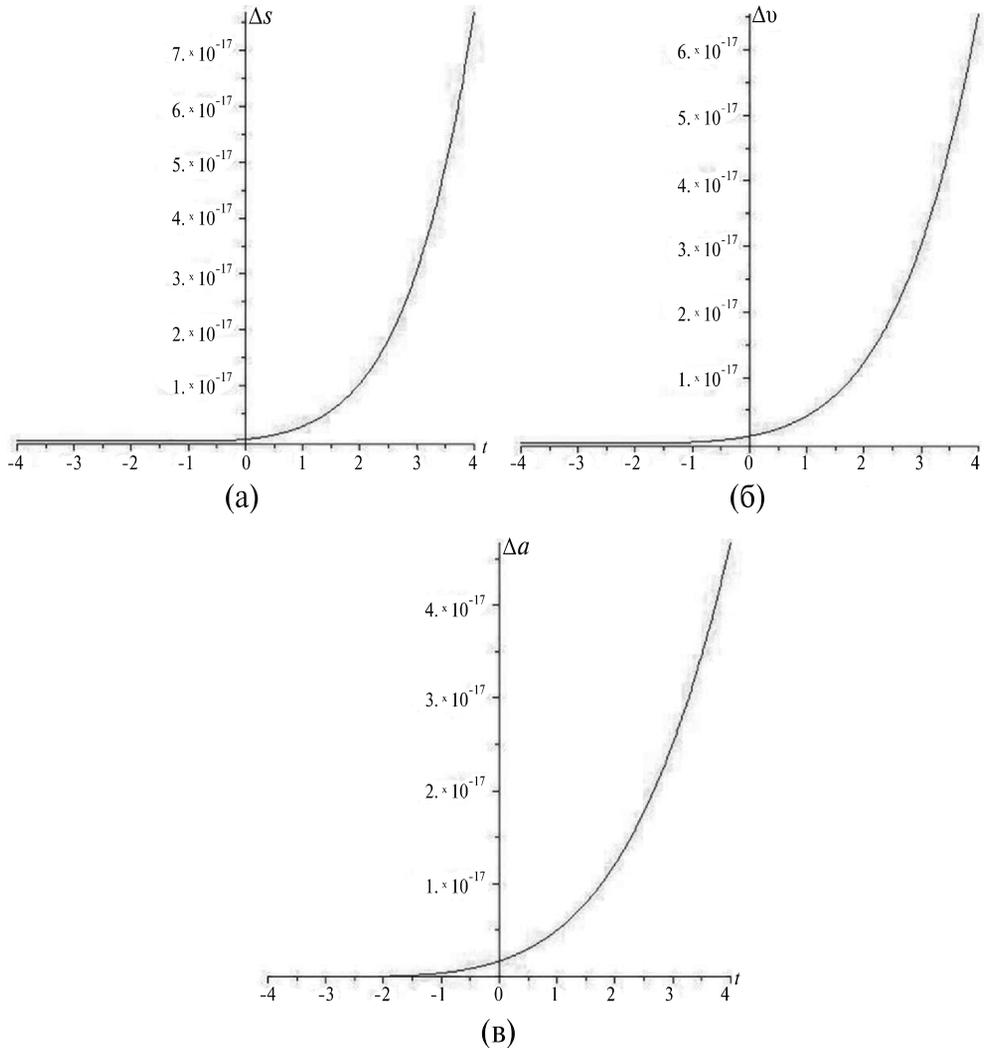
На фиг. 1 показана абсолютная погрешность приближенного аналитического решения (24) по сравнению с точным (31) при значениях $N = 2$ и времени $a = 4$. Из фиг. 1 видно, что порядок погрешностей Δs равен 10^{-18} м, $\Delta v = 10^{-18}$ м/с, а для Δa составляет 10^{-18} м/с². Поэтому, приближенное аналитическое решение (24), справедливое на замкнутом отрезке $t \in [-a, a]$, можно принять за точное.



Фиг. 1. Абсолютная погрешность решения (24) по сравнению с (31): (а) — траектории полета ЛА, (б) — скорости ЛА, (в) — ускорения ЛА.

На фиг. 2 представлена абсолютная погрешность ряда Тейлора (30) по сравнению с аналитическим решением (24). Данная погрешность также вычислялась по формулам (32), где за x_1^* , x_2^* , x_3^* принима-

лось решение (24). Порядки погрешностей Δs , Δv и Δa , которые соответственно составляют 10^{-17} м, 10^{-17} м/с, 10^{-17} м/с² позволяют сделать вывод о том, что радиус сходимости ряда Тейлора (30) больше a . Следовательно, ряд Тейлора (30) можно использовать для экстраполяции траектории полета ЛА на отрезок $t \in [T_0, -a]$ с целью определения координат пускового механизма установки.



Фиг. 2. Абсолютная погрешность ряда Тейлора (30) по сравнению с решением (24): (а) — траектории полета ЛА, (б) — скорости ЛА, (в) — ускорения ЛА.

Также, как и точность определения координат пускового механизма, важным параметром является время обнаружения этого механизма. Уменьшить значение этого критерия можно, сократив время поиска координат пускового механизма. Так, например, время расчета программы по обнаружению пускового механизма, выполненном на персональном компьютере с процессором Intel Core i3-4160 и ОЗУ 8 ГБ при значениях $N = 2$ и времени $a = 4$ составляет 6.5 с. Если же при $N = 2$ время a увеличилось до $a = 8$, то время расчета программы будет 7.3 с. Следовательно, на определение координат пускового механизма можно отводить не более 8 с.

Представляет интерес исследование устойчивости решения. Максимальные значения абсолютных погрешностей Δs , Δv и Δa при различных значениях коэффициентов сопротивления β_1 , β_2 , β_3 приведены в табл. 1, из которой следует, что при малых возмущениях исходных данных ($\beta_1, \beta_2, \beta_3$) абсолютная погрешность изменяется незначительно, т.е. решение устойчиво по отношению к возмущениям коэффициентов сопротивления.

Таблица 1. Устойчивость решения по отношению к возмущениям коэффициентов сопротивления

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$	$\Delta S_{\max}, \text{ м}$	$\Delta v_{\max}, \text{ м/с}$	$\Delta a_{\max}, \text{ м/с}^2$
0.99	$2.031 \cdot 10^{-18}$	$1.039 \cdot 10^{-18}$	$1.383 \cdot 10^{-18}$
1.00	$2.052 \cdot 10^{-18}$	$1.042 \cdot 10^{-18}$	$1.392 \cdot 10^{-18}$
1.01	$2.151 \cdot 10^{-18}$	$1.044 \cdot 10^{-18}$	$1.400 \cdot 10^{-18}$

В табл. 2 приведены данные расчетов, показывающих влияние коэффициентов сопротивления $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ на точность результатов. В обоих случаях полученные абсолютные погрешности ничтожно малы.

Таблица 2. Влияние коэффициентов сопротивления на точность результатов

$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3$	$\Delta S_{\max}, \text{ м}$	$\Delta v_{\max}, \text{ м/с}$	$\Delta a_{\max}, \text{ м/с}^2$
0.0	$2.000 \cdot 10^{-18}$	$8.059 \cdot 10^{-19}$	$8.502 \cdot 10^{-19}$
1.0	$2.052 \cdot 10^{-18}$	$1.042 \cdot 10^{-18}$	$1.392 \cdot 10^{-18}$
1.2	$2.061 \cdot 10^{-18}$	$1.112 \cdot 10^{-18}$	$1.557 \cdot 10^{-18}$

Предположим, что РУ выдает координаты траектории ЛА с некоторыми ошибками $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ из-за воздействия шумов. Максимальные значения абсолютных погрешностей $\Delta s, \Delta v$ и Δa при различных величинах ошибок $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ приведены в табл. 3, из которой видно, что ошибки измерений незначительно влияют на точность вычислений, т.е. порядок абсолютных погрешностей $\Delta s, \Delta v$ и Δa ничтожно малый.

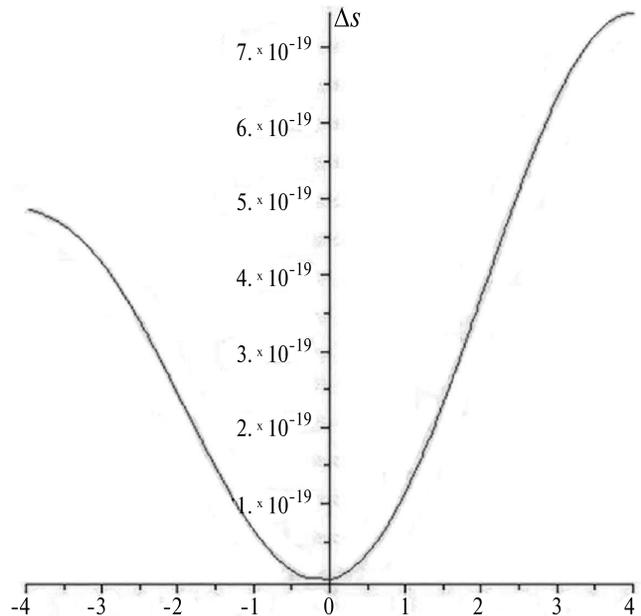
Таблица 3. Влияние ошибок измерений на точность расчетов

$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3, \text{ м}$	$\Delta S_{\max}, \text{ м}$	$\Delta v_{\max}, \text{ м/с}$	$\Delta a_{\max}, \text{ м/с}^2$
1.0	$3.043 \cdot 10^{-18}$	$1.040 \cdot 10^{-18}$	$1.391 \cdot 10^{-18}$
2.0	$3.394 \cdot 10^{-18}$	$1.048 \cdot 10^{-18}$	$1.397 \cdot 10^{-18}$
5.0	$3.402 \cdot 10^{-18}$	$1.050 \cdot 10^{-18}$	$1.399 \cdot 10^{-18}$

Для анализа влияния погрешности в определении массы ЛА на точность определения траектории его полета проведено сравнение траекторий ЛА с различными массами. Одно значение массы ЛА примем за эталонное и будем считать его заложенным в программу. Другую массу ЛА считаем реальной массой ЛА, траекторию которого нужно определить. Расчеты проведены с использованием зашумленности данных ($\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1 \text{ м}$). Пусть в программу внесена масса ЛА 80 кг. Допустим, что реальная масса ЛА 100 кг. Абсолютная погрешность траектории ΔS движения ЛА массой 100 кг по сравнению с движением ЛА с массой 80 кг представлена на фиг. 3. Как видно из фиг. 3 точность определения траектории ЛА остается очень высокая даже при не точном определении массы ЛА на 20%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методом универсальных быстрых тригонометрических интерполяций получено приближенное аналитическое решение задачи о быстром определении координат пускового механизма. Учитывая в рядах Фурье универсальных быстрых разложений только по одному коэффициенту у косинусов и у синусов, абсолютная погрешность расчетов для траектории ЛА составила 10^{-18} м. Абсолютная погрешность определения скорости и ускорения ЛА составляет 10^{-18} м/с и 10^{-18} м/с² соответственно. В связи с этим, приближенное аналитическое решение (24) можно считать точным решением. Время, затрачиваемое на определение координат пускового механизма, составляет не более 8 сек.



Фиг. 3. Абсолютная погрешность траектории ΔS движения ЛА с массой 100 кг по сравнению с движением ЛА массой 80 кг.

Подобная высокая точность и, одновременно с этим, высокая скорость нахождения координат пускового механизма позволят более эффективно проводить его поиск.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Толстов Г. П. Ряды Фурье. М.: Наука, 1980. 384 с.
2. Чернышов А. Д. Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2024. Т. 54. № 1. С. 13–24.
3. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986. 502 с.
4. Нерсисян А., Погосян А., Бархударян Р. Ускоренная сходимость рядов Фурье // Известия НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41. № 2. С. 43–56.
5. Балакирев Ю. Г. Об улучшении сходимости модальных разложений в задачах синтеза динамических характеристик составных конструкций // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 6. С. 158–170.
6. Chernyshov A. D., Saiko D. S., Kovaleva E. N. Universal fast expansion for solving nonlinear problems // Journal of Physics: Conference Series. 2020. С. 012147.
7. Чернышов А. Д., Горяинов В. В., Лешонков О. В., Соболева Е. А., Никифорова О. Ю. Сравнение скорости сходимости быстрых разложений с разложениями в классический ряд Фурье // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2019. № 1. С. 27–34.
8. Самохин А. Б., Тыртышников Е. Е. Численный метод решения объемных интегральных уравнений на неравномерной сетке // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 5. С. 878–884.
9. Исаев В. И., Шанеев В. П. Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье—Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 10. С. 1758–1770.

10. *Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шанеев В. П.* Н-, Р- и НР-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2022. Т. 62. № 4. С. 531–552.
11. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. М. Наука, 1987. 800 с.
12. *Лешонков О. В., Соболева Е. А., Чернышов А. Д.* Метод быстрых разложений для вычисления определенных интегралов с переменным верхним пределом от сложных или неявно заданных функций // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2021. Т. 61. № 6. С. 926–935.
13. *Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Чернышов О. А.* Применение метода быстрых разложений для расчета траекторий космических кораблей // *Известия вузов. Авиационная техника.* 2015. № 2. С. 41–47.
14. *Chernyshov A. D., Goryainov V. V., Danshin A. A.* Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients // *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series.* 973. 2018. 012002.
15. *Чернышов А. Д., Горяйнов В. В., Попов М. И.* Исследование погрешности быстрой тригонометрической интерполяции при решении задачи о напряжениях в бруске // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела.* 2023. № 1. С. 115–128.
16. *Чернышов А. Д., Никифорова О. Ю., Горяйнов В. В., Кузнецов С. Ф., Рукин И. Г.* Универсальные быстрые тригонометрические интерполяции для интегро-дифференциальных задач различного порядка // *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния.* 2022. № 4 (54). С. 57–70.
17. *Дубровина А. А.* Применение методов условной многомерной минимизации к задаче расчета траектории баллистической ракеты // *Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей».* 2017. № 3. С. 59–62.

THE USE OF UNIVERSAL FAST TRIGONOMETRIC INTERPOLATION AND EXTRAPOLATION TO DETERMINE THE COORDINATES OF THE LAUNCH POINT OF THE AIRCRAFT

A. D. Chernyshov^{a,*}, O. Yu. Nikiforova^{a,**}, V. V. Goryainov^{b,***}, I. G. Rukin^{a,****}

^a 394000 Voronezh, Revolution Ave., 19, Voronezh State Engineering Technologies University, Russia

^b 394006 Voronezh, 20th Anniversary of October Str. 84, Voronezh State Technical University, Russia

*e-mail: chernyshovad@mail.ru

**e-mail: niki22@mail.ru

***e-mail: gorvit77@mail.ru

****e-mail: thenotnick@gmail.com

Received 30 October, 2023

Revised 28 February, 2024

Accepted 5 April, 2024

Abstract. The basics of fast trigonometric interpolation are given for nonperiodic functions, making it possible to obtain an approximate solution with high accuracy. Formulas are obtained to calculate the coordinates of the launch point of an aircraft with high accuracy due to the simultaneous application of the method for universal fast trigonometric interpolations and the method for extrapolations at the ends of a certain specified segment. Numerical experiments show that after the launch of the first aircraft the coordinates of the launching mechanism can be determined in 7 seconds with an accuracy up to 10^{-17} m.

Keywords: fast decompositions, fast trigonometric interpolation, extrapolation, high accuracy, aircraft, coordinates, launch point.