

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 519.635

ФОРМИРОВАНИЕ ОСОБЕННОСТИ В НЕСЖИМАЕМОМ
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ДВИЖУЩЕЙСЯ ВВЕРХ ПО ПОТОКУ
СТЕНКЕ ПРИ ЗАДАННОМ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ© 2023 г. С. И. Безродных^{1,*}, В. Б. Заметаев^{1,**}, Тэ Ха Чжун²¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

*e-mail: sbesrodnykh@mail.ru

**e-mail: zametaev.vb@mipt.ru

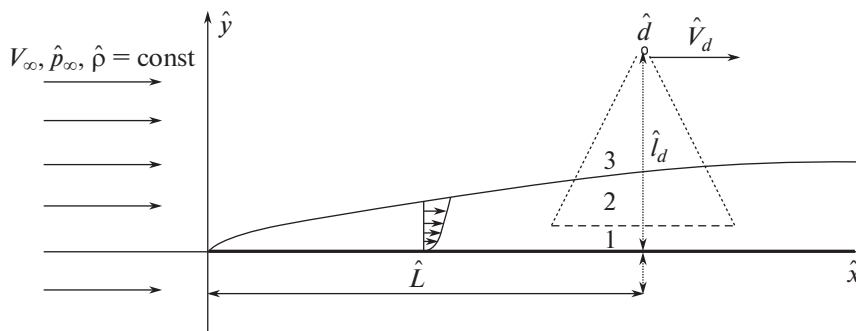
Поступила в редакцию 17.03.2023 г.
Переработанный вариант 28.04.2023 г.
Принята к публикации 20.06.2023 г.

Рассматривается двумерное ламинарное обтекание плоской пластины вязкой несжимаемой жидкостью при больших числах Рейнольдса. В рамках асимптотической теории исследуется влияние тела, сносимого вниз по потоку с малой скоростью относительно пластины, на пограничный слой Блазиуса. Исследуется случай, в котором внешнее малое тело, моделируемое потенциальным диполем, движется вниз по потоку с постоянной скоростью. Эта классическая задача формально нестационарна, однако в результате перехода в подвижную систему координат, связанную с диполем, она описывается стационарными решениями уравнений пограничного слоя на движущейся вверх по потоку стенке. Найденные численно решения этой задачи содержат закрытые и открытые висячие отрывные зоны в поле течения. В работе рассчитаны нелинейные режимы влияния диполя на пограничный слой с противотоками и обнаружено, что по мере возрастания интенсивности диполя растет и заданное им давление, действующее на пограничный слой, что вызывает по достижении некоторой критической интенсивности диполя особенность внутри поля течения. Изучена асимптотика решения задачи вблизи уединенной особой точки поля течения и найдено, что вертикальная составляющая скорости обращается в ней в бесконечность, вязкое напряжение в нуль, а при больших интенсивностях диполя решение задачи не существует. Библ. 16. Фиг. 6.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, отрыв, асимптотический метод.**DOI:** 10.31857/S0044466923120074, **EDN:** UWBYWN

1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена исследованию квазистационарного вязко-невязкого взаимодействия ламинарного пограничного слоя на плоской поверхности с движущимся выше пограничного слоя двумерным малым телом, создающим возмущения давления и скорости. Подобное малое цилиндрическое тело удобно моделировать классическим потенциальным диполем, что позволяет выписать аналитическую формулу для возмущения давления, воздействующего на медленные токи жидкости вблизи дна пограничного слоя. Традиционно в таких нестационарных течениях переходят в подвижную систему координат, связанную с движущимся с постоянной скоростью источником возмущений, и получают стационарную задачу, но на подвижной поверхности. Задача о движении обтекаемой стенки по потоку или против потока в стационарном пограничном слое является частным случаем нестационарного отрыва пограничного слоя вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. Широкий класс плоских отрывных ламинарных течений вязкой несжимаемой жидкости описан в [1], где, в частности, изложены основы асимптотической теории отрыва стационарного и нестационарного пограничных слоев и подробно описан случай стенки, движущейся вниз по потоку. В деталях изложено формирование особенности Мура–Рота–Сирса (см. [2–4]) в решении уравнений пограничного слоя при воздействии на него неблагоприятного, тормозящего градиента давления. Похожая задача была рассмотрена и в [5], в которой величину неблагоприятного градиента давления можно было регулировать. Причем удалось найти решение задачи с более слабой особенностью “кро-



Фиг. 1. Схема течения.

мочного” типа, нежели особенность Мура–Рота–Сирса, далее которой вниз по потоку решение не существует. Случай слабой ударной волны, движущейся вверх по потоку газа, в рамках теории свободного взаимодействия при больших числах Рейнольдса изучался в [6]. Случай движущейся вниз по течению слабой ударной волны рассчитывался с использованием тех же уравнений в [7] и [8]. Недавно Рубан и соавт. (2020) опубликовали еще одну статью [9] о влиянии движущегося вниз по потоку сверхзвукового веера разрежения Прандтля–Майера на отрыв пограничного слоя. Установлен интересный эффект, что именно убывающее вниз по потоку давление вызывает рост развитой зоны отрыва, а растущее давление не влияет на отрыв. Анализ отрывных течений в канале с подвижной стенкой с использованием метода срачиваемых асимптотических разложений выполнен в статье [10]. Численный расчет полных уравнений Навье–Стокса для чисел Маха больше единицы в случае подвижного скачка уплотнения, падающего на пограничный слой вязкого совершенного газа, выполнен в работе [11]. В [12] выполнены расчеты полных несжимаемых уравнений Навье–Стокса для течения около пластины с поверхностью, движущейся вверх по потоку. Подобные расчеты являются убедительным средством проверки и подтверждения результатов применения асимптотических теорий. Обобщение указанной асимптотической теории на несжимаемый пограничный слой, текущий вдоль пластины, движущейся вверх по потоку, и подверженный воздействию заданного локального распределения давления, предложено в [13]. Дальнейшее развитие теории развитых отрывных течений на подвижной стенке было выполнено в [14], где также рассматривалась поверхность, медленно движущаяся вверх по потоку.

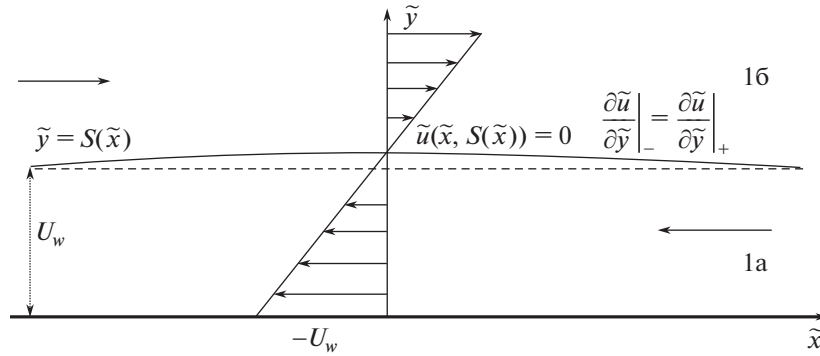
В настоящей работе продолжено исследование [13], а именно, изучается численно и аналитически влияние заданных, более значительных возмущений давления на пограничный слой, содержащий противотоки. Рассматриваются критические величины возмущения давления, при которых в поле течения формируется особенность, а при дальнейшем увеличении заданного давления решение задачи не существует.

2. ПОСТАНОВКА И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

В качестве базового течения в работе рассматривается двумерное ламинарное обтекание плоской пластины потоком вязкой несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса. На расстоянии $\hat{L}$ от передней кромки пластины и на высоте $\hat{l}_d = \hat{L} \cdot l$ выше обтекаемой поверхности расположено малое тело, движущееся вниз по потоку с заданной постоянной скоростью $\hat{V}_d = \hat{V}_\infty u_W$, где $\hat{V}_\infty$ – скорость внешнего потока (фиг. 1). Для анализа течения все переменные обезразмерены традиционно: $\{\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}\} = \{\hat{x}/\hat{L}, \hat{y}/\hat{L}, u/\hat{V}_\infty, v/\hat{V}_\infty\}$, $\hat{p} = \hat{p}_\infty + \rho \hat{V}_\infty^2 \bar{p}$.

При переходе в систему координат, движущуюся вместе с диполем вниз по потоку с малой постоянной скоростью u_W , заданное диполем распределение давления будет воздействовать на вязкий пристенный подслой (область 1, фиг. 1), развивающийся на стенке, которая движется против потока со скоростью $-u_W$. При ненулевой интенсивности диполя наблюдатель, движущийся вместе с ним, увидит вблизи обтекаемой стенки стационарное возмущенное течение с противотоками, качественно изображенное на фиг. 2.

Асимптотику решения уравнений Навье–Стокса в вязком подслое 1а–1б, содержащем противотоки и расположенном на дне пограничного слоя Блазиуса вблизи точки $\bar{x} = 1$ с известным



Фиг. 2. Противотоки в вязком подслое, разделенные неизвестной границей.

напряжением трения $u'_{BLAS}(0) = \lambda$, будем искать, совершая двойной предельный переход $l \rightarrow 0$, $Re \rightarrow \infty$. Высота размещения диполя над поверхностью $l \ll 1$ используется для нормировки продольного размера изучаемого слоя, а число Рейнольдса $Re = \rho \hat{V}_\infty \hat{L} / \mu$ введено традиционно:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 1 + l\tilde{x}, & \bar{y} &= Re^{-1/2} l^{1/3} \lambda^{-1/3} \tilde{y}, & Re^{-3/8} \ll l \ll 1, \\ \bar{u} &= l^{1/3} \lambda^{2/3} \tilde{u} + \dots, & \bar{v} &= Re^{-1/2} l^{-1/3} \lambda^{1/3} \tilde{v} + \dots, & \bar{p} = l^{2/3} \tilde{p} + \dots, \\ u_w &= \lambda^{2/3} l^{1/3} U_w, & m &= \lambda^{4/3} l^{8/3} M. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В результате подстановки одночленных асимптотических разложений решения (2.1) в уравнения Навье—Стокса задача в вязком подслое (область 1a–16, фиг. 1) сведется к обычным уравнениям пограничного слоя с заданным внешним давлением, условиями прилипания на поверхности и условиями срачивания с набегающим потоком:

$$\begin{aligned} \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, & \tilde{p} &= M \frac{2(\tilde{x}^2 - 1)}{(\tilde{x}^2 + 1)^2}, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, & \tilde{v}(\tilde{x}, 0) &= 0, & \tilde{u}|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} &= \tilde{y} + A(\tilde{x}) + \dots, & \tilde{u}|_{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} &= -U_w + \tilde{y} + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача (2.2) содержит нормированные независимые параметры M (интенсивность диполя) и U_w (скорость стенки), а $\tilde{p}(\tilde{x})$ — давление, заданное диполем. Уравнения вязкого подслоя (2.2) являются уравнениями параболического типа, однако из-за наличия противотоков начальные условия должны быть заданы с двух сторон: при $\tilde{x} \rightarrow +\infty$ и $\tilde{x} \rightarrow -\infty$.

Обозначим через $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ заранее неизвестную кривую, в каждой точке которой горизонтальная скорость $\tilde{u}$ принимает нулевое значение. Таким образом, кривая $S(\tilde{x})$ делит исходную область на две подобласти 1a и 16 (см. фиг. 2), причем в 1a, $\tilde{y} \in [0; S(\tilde{x})]$, поток движется только в отрицательном направлении оси $O\tilde{x}$, а в 16, $\tilde{y} \in [S(\tilde{x}); +\infty)$, — только в положительном направлении. В результате в случае заданного давления и известной функции $S(\tilde{x})$ можно сформулировать следующие начально-краевые задачи в каждой из введенных областей по отдельности:

$$\begin{aligned} 1a. \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, 0) &= -U_w, & \tilde{v}(\tilde{x}, 0) &= 0, & \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) &= 0, & \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} &= -U_w + \tilde{y}, & S|_{\tilde{x} \rightarrow +\infty} &= U_w, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} 16. \quad \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} &= -\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2}, & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{y}} &= 0, \\ \tilde{u}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) &= 0, & \tilde{v}(\tilde{x}, S(\tilde{x})) &= \tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x})), & \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}}|_{\tilde{y} \rightarrow +\infty} &= 1, & \tilde{u}|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} &= -U_w + \tilde{y}, & S|_{\tilde{x} \rightarrow -\infty} &= U_w, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\tilde{v}^-(\tilde{x}, S(\tilde{x}))$ – вертикальная скорость на линии раздела, найденная из расчета течения в области 1а. Отметим, что на линии $\tilde{y} = S(\tilde{x})$ справедливо дополнительное краевое условие, которое в выбранных переменных имеет вид

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_- = \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_+. \quad (2.5)$$

Выполним преобразование координат и искомых скоростей, которое упрощает численное решение рассматриваемой задачи (2.3)–(2.5):

$$x = \tilde{x}, \quad Y = \frac{\tilde{y}}{S(\tilde{x})}, \quad \tilde{u} = \frac{U(x, Y)}{S(x)}, \quad \tilde{v} = \frac{S'(x)}{S(x)} Y \cdot U(x, Y) + V(x, Y). \quad (2.6)$$

После преобразований (2.6) структура областей в вязком подслое существенно упрощается, так как граница раздела разнонаправленных потоков (областей 1а и 1б) в новых координатах проходит по прямой линии $Y = 1$, а задача (2.3)–(2.5) принимает следующий вид:

$$1a. \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (2.7)$$

$$U(x, 0) = -S(x) \cdot U_w, \quad V(x, 0) = 0, \quad U(x, 1) = 0, \quad U|_{x \rightarrow +\infty} = -SU_w + S^2 Y,$$

$$1b. \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -S^2(x) \frac{dp}{dx} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{S'(x)}{S(x)} U^2, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (2.8)$$

$$U(x, 1) = 0, \quad V(x, 1) = V^-(x, 1), \quad \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{Y \rightarrow +\infty} = S^2(x), \quad U|_{x \rightarrow -\infty} = -SU_w + S^2 Y, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_- = \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_+.$$

Результаты численных расчетов показали существенный рост вертикальной скорости V на линии раздела потоков и наклона функции $S(x)$ вблизи точки $x_* \approx -0.48$ при стремлении параметра к критическому значению $M \rightarrow M_* \approx 0.7$ (фиг. 3а,б). При дальнейшем увеличении параметра M численное решение задачи перестает сходиться, что свидетельствует об отсутствии решений с противотоками при сильном отрицательном градиенте давления. В расчетах использовался метод, развитый в [13] и [15].

В предельном решении наблюдается существенное уменьшение касательного напряжения на границе противотоков вблизи указанной точки. Картина поля течения в трансформированных переменных представляет собой две открытые и одну крупную замкнутую висячую отрывную область, а в целом течение обладает локальной симметрией относительно линии раздела потоков (фиг. 4). Внутри замкнутой отрывной области формируется заметное сгущение вертикальных линий тока, именно около точки $x_* \approx -0.48$, в которой достигается максимальная вертикальная скорость течения. Как и в работе [9], сингулярная точка формируется на фоне отрицательного градиента давления, который является неблагоприятным для пристенного возвратного течения.

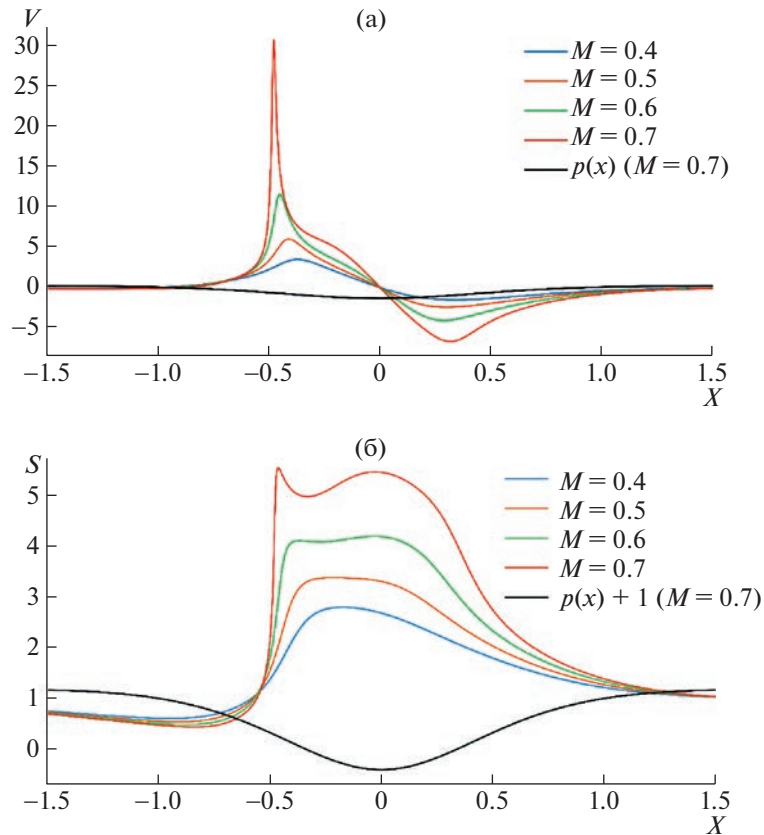
Однако, в отличие от результатов [9], анализ в представленном исследовании не содержит дополнительных предположений о структуре течения, а непосредственно вычисляется координата особенности, и она заметно отстоит от точки торможения, которой обычно приписывают начало зоны отрыва. Можно также сделать вывод об определяющем влиянии пристенного возвратного течения на все области вязкого подслоя.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

3.1. Поведение решения около линии раздела потоков

Прежде всего необходимо проанализировать решение задачи (2.7), (2.8) вблизи линии раздела противотоков. Для этого введем функцию тока ψ и будем искать для нее асимптотику при $Y \rightarrow 1$ в следующем виде:

$$\psi = \psi_0(x) + \frac{1}{2} \lambda(x) (Y-1)^2 + B(x) (Y-1)^3 + C(x) (Y-1)^4 + D(x) (Y-1)^5 + \dots \quad (3.1)$$



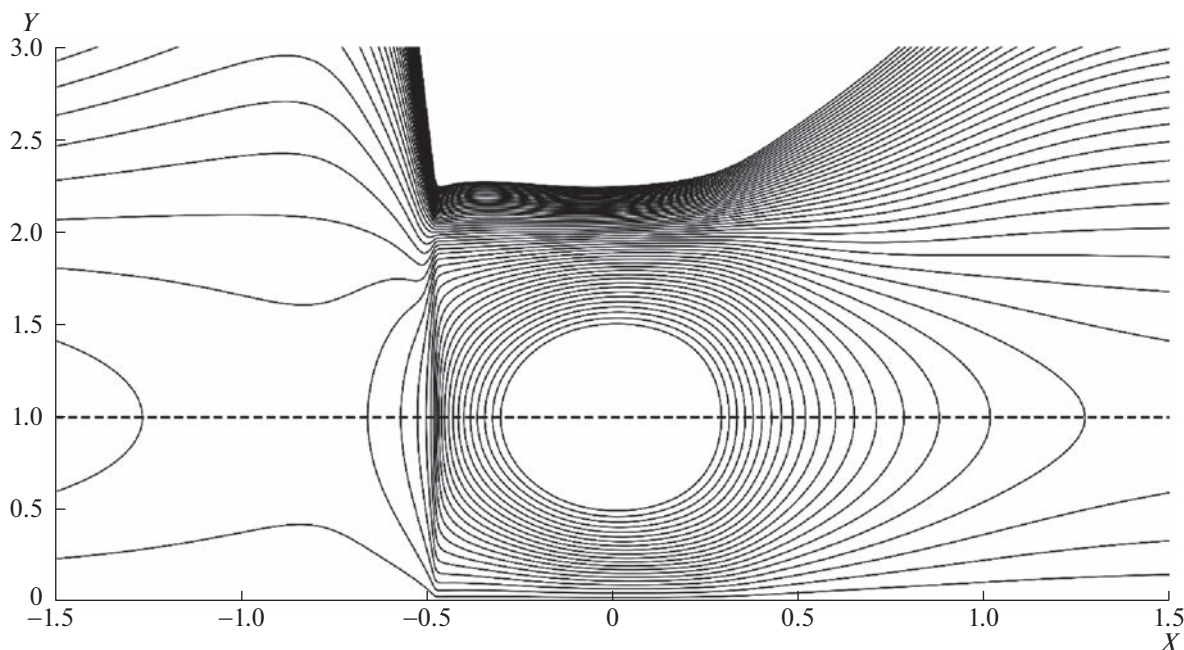
Фиг. 3. (а) – Распределение вертикальной скорости на линии раздела потоков, (б) – форма границы раздела потоков.

Подставим указанное разложение в уравнение импульса и, выделяя последовательно главные члены уравнения по переменной $(Y - 1)$, получим

$$\begin{aligned}
 O(1): \quad -\psi'_0 \cdot \lambda &= -S^2 \frac{dp}{dx} + \frac{6B}{S} \Rightarrow 6B(x) = S \left[S^2 \frac{dp}{dx} - \lambda \psi'_0 \right], \\
 O(Y - 1): \quad -6B\psi'_0 &= \frac{24C}{S} \Rightarrow 24C(x) = -S^2 \psi'_0 \left[S^2 \frac{dp}{dx} - \lambda \psi'_0 \right], \\
 O((Y - 1)^2): \quad \frac{1}{2} \lambda \lambda' - \psi'_0 12C &= \frac{60D}{S} + \frac{S'}{S} \lambda^2 \Rightarrow 60D(x) = S \left[\frac{1}{2} \lambda \lambda' - \psi'_0 12C \right] - S' \lambda^2.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, зная $\psi_0(x)$, $\lambda(x)$, $S(x)$ и dp/dx , можно вычислить последовательно все остальные функции в искомом ряду Тейлора. Но нас интересует решение, в котором при приближении к точке $x_* \approx -0.48$ вязкое напряжение $\lambda(x)$ стремится к нулю, вертикальная скорость $-\psi'_0(x)$ — в бесконечность, а их произведение балансируется заданным конечным градиентом давления. Такое поведение решения следует из численных расчетов при $M \rightarrow M_* \approx 0.7$. Будем искать асимптотики искомых коэффициентов в представлении (3.1) при $x \rightarrow x_* + 0$ в виде

$$\begin{aligned}
 S(x) &= S_0 + S_1 (x - x_*)^\delta + \dots, \quad S_0 = 4.85, \quad S_1 > 0, \\
 \lambda(x) &= \lambda_1 (x - x_*)^\alpha + \lambda_2 (x - x_*)^{2\alpha} + \lambda_3 (x - x_*)^{\alpha+\delta} + \dots, \quad \lambda_1 > 0, \quad \alpha \leq \delta < 1, \\
 \psi_0(x) &= \psi_{00} + c_1 (x - x_*)^{1-\alpha} + c_2 (x - x_*) + c_3 (x - x_*)^{1-\alpha+\delta} + \dots, \quad \psi_{00} = -1.16, \\
 \psi'_0 &= (1 - \alpha)c_1 (x - x_*)^{-\alpha} + c_2 + (1 - \alpha + \delta)c_3 (x - x_*)^{-\alpha+\delta} + \dots \quad c_1 < 0.
 \end{aligned}$$



Фиг. 4. Поле течения при критическом значении параметра.

Подставляя данные разложения в формулы (3.2) для вычисления коэффициентов ряда по $(Y - 1)$, потребуем баланс градиента давления и произведения напряжения на вертикальную скорость, а также дадим оценки следующих членов разложения:

$$\lambda_1(1 - \alpha)(-c_1) = S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right) \Big|_0, \quad B = O\left((x - x_*)^\alpha\right), \quad C = O(1).$$

С учетом сказанного, получаем представление функции тока вблизи линии раздела в окрестности точки $x = x_*$

$$\Psi = \Psi_{00} + c_1 (x - x_*)^{1-\alpha} + \frac{1}{2} \lambda_1 (x - x_*)^\alpha (Y - 1)^2 + \text{const} \cdot (x - x_*)^\alpha (Y - 1)^3 + \text{const} \cdot (Y - 1)^4 + \dots \quad (3.3)$$

Таким образом, найдено решение общего вида, справедливое для вязких уравнений вблизи линии раздела (сверху и снизу) и вблизи особой точки с почти нулевым трением и почти бесконечной вертикальной скоростью. Любая асимптотика из нижнего или верхнего слоев не должна противоречить указанному представлению (3.3). Что же касается показателей степеней в данном выражении, то они отыскиваются традиционно при рассмотрении более полной асимптотики, что и будет проделано далее. Отметим, что при $x = x_*$ асимптотика функции тока (3.3) примет вид $\Psi_0(Y) = \Psi_{00} + C_0(Y - 1)^4 + \dots$ при $Y \rightarrow 1$, где константа C_0 определяется развитием всего пограничного слоя, а функция $(Y - 1)^4$ соответствует симметричному решению в численном расчете.

3.2. Поведение решения в области возвратных токов

На следующем этапе целесообразно проанализировать основной слой жидкости, текущий вверх по потоку, при подходе к особой точке $x \rightarrow x_* + 0$, $Y \in [0; 1]$, учитывая, что в систему уравнений и граничные условия на стенке входит функция $S(x)$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_0(Y) + (x - x_*)^\delta \Psi_1(Y) + (x - x_*)^{2\delta} \Psi_2(Y) + \dots + (x - x_*) \Psi_3(Y) + \dots, \\ S &= S_0 + S_1 (x - x_*)^\delta + \dots, \quad S_0 > 0, \quad S_1 > 0, \quad \delta < 1, \\ U(x, 0) &= \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = -S(x) \cdot U_w = -S_0 U_w - (x - x_*)^\delta S_1 U_w + \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подставляя данные координатные разложения в уравнения, последовательно найдем

$$\underline{O((x - x_*)^{\delta-1})}: \quad \Psi'_0 \Psi'_1 - \Psi_1 \Psi''_0 = \frac{S_1}{S_0} (\Psi'_0)^2 \quad \Rightarrow \quad \Psi_1 = \frac{S_1}{S_0} Y \Psi'_0 \Big|_{Y \rightarrow 1-} = 4C_0 \frac{S_1}{S_0} (Y-1)^3 + \dots,$$

$$\underline{O((x - x_*)^{2\delta-1})}: \quad \Psi'_0 2\Psi'_2 + \Psi'_1 \Psi'_1 - \Psi_1 \Psi''_1 - 2\Psi_2 \Psi''_0 = -\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 (\Psi'_0)^2 + \frac{S_1}{S_0} 2\Psi'_0 \Psi'_1,$$

$$\Psi_2 = D(Y) \Psi'_0 \Big|_{Y \rightarrow 1-} = 6C_0 \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 (Y-1)^2 + \dots,$$

$$D = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 \int_0^Y \left[2 \frac{\Psi'_0 \Psi''_0}{(\Psi'_0)^2} Y + \frac{\Psi'_0 \Psi'''_0}{(\Psi'_0)^2} Y^2 - \left(\frac{\Psi''_0}{\Psi'_0} Y\right)^2 \right] dY,$$

$$\underline{O(1)}: \quad \Psi'_0 \Psi'_3 - \Psi_3 \Psi''_0 = -S_0^2 \frac{dp}{dx} \Big|_0 + \frac{1}{S_0} \Psi'''_0 \quad \Rightarrow \quad \Psi_3 = R(Y) \Psi'_0 \Big|_{Y \rightarrow 1-} = \frac{S_0^2}{20C_0} \frac{dp}{dx} \Big|_0 \frac{1}{(y-1)^2} + \dots,$$

$$R(Y) = \int_0^Y \left[-S_0^2 \frac{dp}{dx} \Big|_0 \frac{1}{(\Psi'_0)^2} + \frac{1}{S_0} \frac{\Psi'''_0}{(\Psi'_0)^2} \right] dY.$$

Нетрудно увидеть, что равномерная пригодность координатного разложения (3.4) нарушается при приближении к линии раздела $Y \rightarrow 1-$, а именно, поведение функции тока следующее:

$$\begin{aligned} \Psi = & \Psi_{00} + C_0 (Y-1)^4 + \frac{4C_0 S_1}{S_0} (x - x_*)^\delta (Y-1)^3 + \\ & + 6C_0 \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 (x - x_*)^{2\delta} (Y-1)^2 + \frac{S_0^2}{20C_0} \frac{dp}{dx} \Big|_0 \frac{(x - x_*)}{(Y-1)^2} + \dots, \end{aligned} \quad (3.5)$$

поэтому необходимо рассмотреть отдельно тонкий слой жидкости в области вблизи самой линии раздела при $x \rightarrow x_* +$. Из (3.5) следует, что в слое $(Y-1) \sim (x - x_*)^{1/6}$ течение является невязким, нелинейным и зависит от свойств $\Psi_0(y)$ и градиента давления. Параметр $\delta > 1/6$ остается произвольным.

3.3. Асимптотика решения в тонком невязком слое

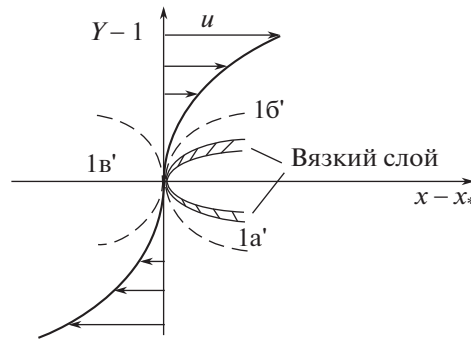
Отталкиваясь от (3.5), введем координатное разложение в слое 1a' (фиг. 5) и найдем

$$\Psi = \Psi_{00} + (x - x_*)^{2/3} f(\eta) + \dots, \quad \eta = \frac{Y-1}{(x - x_*)^{1/6}}, \quad \eta = O(1),$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = (x - x_*)^{1/2} f'(\eta) + \dots, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (x - x_*)^{-1/3} \left[-\frac{2}{3} f + \frac{1}{6} \eta f' \right], \quad (3.6)$$

$$\frac{1}{2} (f'')^2 - \frac{2}{3} f f''' = S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \Big|_0 \right) \quad \Rightarrow \quad g(f) = f'(\eta) \quad \Rightarrow \quad f''(\eta) = g'_f g.$$

Функция тока $f(\eta)$ положительна во внешней части слоя 1a', разделенного заштрихованной тонкой вязкой областью, и при $\eta \rightarrow -\infty$ должна срачиваться с решением в основной части возвратного течения, и отрицательна во внутренней части слоя 1a' вблизи самой линии, что следует из результатов расчета. Уместно искать решение задачи раздельно в областях с разными знаками функции тока и требовать равенство нулю продольной скорости u на линии раздела противото-



Фиг. 5. Структура течения вблизи особой точки.

ков при $\eta = 0$. Отметим, что найдется точка $\eta = \eta_s < 0$, в которой $f(\eta_s) = 0$, и тогда решение во внешней части слоя $1a'$ примет вид

$$\eta = (-\infty; \eta_s]; \quad f = (+\infty; 0], \quad \eta_s < 0, \quad f(\eta_s) = 0, \quad f_{\eta \rightarrow -\infty} = C_0 \eta^4 + \dots, \quad (3.8)$$

$$f'(\eta) = -\left[16\sqrt{C_0}f^{3/2} + 2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)\right]^{1/2}, \quad f'' = 12\sqrt{C_0}f^{1/2}, \quad f''' = 6\sqrt{C_0}f^{-1/2}f',$$

и во внутренней —

$$\eta = [\eta_s; 0]; \quad f = [0; f_0], \quad f_0 = f(0) < 0, \quad f'(\eta) = -\sqrt{2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)}\left[1 - \frac{(-f)^{3/2}}{(-f_0)^{3/2}}\right]^{1/2}, \quad (3.9)$$

$$f'' = S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)\frac{3(-f)^{1/2}}{2(-f_0)^{3/2}}, \quad f''' = -S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)\frac{3(-f)^{-1/2}}{4(-f_0)^{3/2}}f'.$$

Таким образом, найдено решение в тонком нелинейном слое, которое срачивается с основным возвратным течением, и во внутреннем слое, в котором удастся выполнить условие равенства нулю продольной скорости на линии раздела противотоков. Отметим, что во внутреннем слое течение развивается исключительно благодаря действию заданного градиента давления, а во внешнем слое поток испытывает совместное влияние основного возвратного течения и тормозящего градиента давления. Найдена линия $\eta = \eta_s < 0$, разделяющая изучаемую область на два таких слоя. На этой линии переменная часть функции тока принимает нулевое значение, продольные скорости выше и ниже ее равны друг другу, а завихренность обращается локально в нуль. Однако производные завихренности f''' принимают бесконечно большие значения, что требует введения еще одного, но вязкого подслоя для сглаживания решения.

3.4. Вязкий подслой, сглаживающий завихренность в невязком потоке

Введем вязкий подслой внутри зоны $1a'$ (заштрихованная область) около линии разрыва производной завихренности $Y_s = 1 + (x - x_*)^{1/6} \eta_s$. Физическое объяснение для появления такого слоя очень простое: завихренность в возвратном течении порождается на движущейся стенке и на границе раздела противотоков, а их согласование возможно только с учетом вязкой диффузии. Для оценки его толщины выпишем поведение функции тока во внешней части слоя $1a'$ вблизи линии $\eta = \eta_s$:

$$f(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s-} = -\sqrt{2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)}(\eta - \eta_s) + c(\eta_s - \eta)^{5/2} + \dots, \quad c = \frac{16}{5}\sqrt{C_0}\left[2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)\right]^{1/4},$$

$$f'(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s-} = -\sqrt{2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx_0}\right)} - \frac{5}{2}c(\eta_s - \eta)^{3/2} + \dots, \quad f''(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s-} = \frac{15}{4}c(\eta_s - \eta)^{1/2},$$

и во внутренней части слоя

$$f(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s+} = -\sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right)} (\eta - \eta_s) + d(\eta - \eta_s)^{5/2} + \dots, \quad d = \frac{1}{5} \frac{1}{(-f_0)^{3/2}} \left[2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right) \right]^{5/4},$$

$$f'(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s+} = -\sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right)} + \frac{5}{2} d(\eta - \eta_s)^{3/2} + \dots, \quad f''(\eta)|_{\eta \rightarrow \eta_s+} = \frac{15}{4} d(\eta - \eta_s)^{1/2} + \dots$$

Подстановка полученных выражений в исходное уравнение импульсов (2.3), (2.8) и сравнение его инерционных и вязких членов (подчеркнуты снизу):

$$S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right) + \frac{5}{2} c \sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right)} (\eta_s - \eta)^{3/2} - \frac{5}{2} c \sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right)} (\eta_s - \eta)^{3/2} =$$

$$= -S_0^2 \frac{dp}{dx} - \frac{1}{S_0} \frac{15}{8} c (x - x_*)^{1/6} (\eta_s - \eta)^{-1/2},$$

дает оценку толщины вязкого слоя

$$(\eta_s - \eta) \sim (x - x_*)^{1/12} \Rightarrow \eta = \eta_s + (x - x_*)^{1/12} \sigma,$$

$$Y = 1 + (x - x_*)^{1/6} \eta = 1 + (x - x_*)^{1/6} \eta_s + (x - x_*)^{3/12} \sigma, \quad \sigma \in (-\infty; +\infty),$$

$$\sigma = \frac{Y - 1 - (x - x_*)^{1/6} \eta_s}{(x - x_*)^{6/24}} = O(1).$$

Подставляя новые переменные в линеаризованное представление функции тока, укажем иско-
мое координатное разложение функции тока в этом вязком слое при $x \rightarrow x_* +$:

$$\Psi = \Psi_{00} - (x - x_*)^{18/24} \sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx} \right)} \sigma + (x - x_*)^{21/24} F(\sigma) + \dots, \quad (3.10)$$

$$F(\sigma)|_{\sigma \rightarrow -\infty} = c(-\sigma)^{5/2} + \dots, \quad F(\sigma)|_{\sigma \rightarrow +\infty} = d\sigma^{5/2} + \dots, \quad \sigma = \frac{y - 1 - (x - x_*)^{1/6} \eta_s}{(x - x_*)^{6/24}} = O(1).$$

Подстановка разложения в уравнение импульса и совершение предельного перехода позволяет сформулировать задачу в вязком слое относительно функции $F(\theta)$:

$$\sigma = E\theta, \quad E = \frac{2\sqrt{2}}{3S_0} \left(2 \left(-\frac{dp}{dx} \right) \right)^{-1/4}, \quad (3.11)$$

$$F''' - \frac{2}{3} \theta F'' + F' = 0, \quad F(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} = E^{5/2} c (-\theta)^{5/2} + \dots, \quad F(\theta)|_{\theta \rightarrow +\infty} = E^{5/2} d (\theta)^{5/2} + \dots$$

У сформулированной задачи можно понизить порядок дифференциального уравнения заменой переменных $g = F'$:

$$g'' - \frac{2}{3} \theta g' + g = 0, \quad g(\theta)|_{\theta \rightarrow -\infty} = -\frac{5}{2} E^{5/2} c (-\theta)^{3/2} + \dots, \quad g(\theta)|_{\theta \rightarrow +\infty} = \frac{5}{2} E^{5/2} d (\theta)^{3/2} + \dots, \quad (3.12)$$

а также свести его к вырожденному гипергеометрическому уравнению еще одной заменой, и в результате получим краевую задачу

$$g = \theta \cdot g_1(\xi), \quad \xi = \frac{\theta^2}{3}, \quad \theta \cdot g_1|_{\theta \rightarrow -\infty} = -\frac{5}{2} E^{5/2} c (-\theta)^{3/2} + \dots, \quad \theta \cdot g_1|_{\theta \rightarrow +\infty} = \frac{5}{2} E^{5/2} d (\theta)^{3/2} + \dots,$$

$$\xi \frac{d^2 g_1}{d\xi^2} + \left(\frac{3}{2} - \xi \right) \frac{dg_1}{d\xi} + \frac{1}{4} g_1 = 0, \quad (3.13)$$

$$g_1|_{\theta \rightarrow -\infty} = \frac{5}{2} E^{5/2} c (-\theta)^{1/2} + \dots = \frac{5}{2} E^{5/2} c [(-\theta)^2]^{1/4} + \dots = \frac{5 \cdot 3^{1/4}}{2} E^{5/2} c \xi^{1/4} + \dots,$$

$$g_1|_{\theta \rightarrow +\infty} = \frac{5}{2} E^{5/2} d (\theta)^{1/2} + \dots = \frac{5}{2} E^{5/2} d [\theta^2]^{1/4} + \dots = \frac{5 \cdot 3^{1/4}}{2} E^{5/2} d \xi^{1/4} + \dots$$

У этого уравнения есть решение, растущее алгебраически (см. [16]):

$$g_1 = U(a, b, \xi) = U\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\theta^2}{3}\right), \quad U(a, b, \xi)|_{\xi \rightarrow +\infty} = \xi^{-a} + \dots = \xi^{1/4} + \dots = \left(\frac{\theta^2}{3}\right)^{1/4} + \dots,$$

$$U(a, b, \xi)|_{\xi \rightarrow 0} = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)} \xi^{1-b} + \dots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)} \xi^{-1/2} + \dots = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)} \left(\frac{\theta^2}{3}\right)^{-1/2} + \dots$$

В результате найдено решение, удовлетворяющее обоим граничным условиям, если $d = c$:

$$F' = g = 3^{1/4} \frac{5}{2} c \cdot E^{5/2} \cdot \theta \cdot U\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{\theta^2}{3}\right). \quad (3.14)$$

Получен принципиально важный результат — гладкое решение в вязком подслое существует на всей действительной оси, а это означает непротиворечивость построенной асимптотики во всей области возвратного течения. Указано условие разрешимости задачи

$$d = c \quad \Rightarrow \quad S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx_0} \right) = 8\sqrt{C_0} (-f_0)^{3/2}. \quad (3.15)$$

3.5. Асимптотика решения в тонком слое выше линии раздела

Функция тока $f(\eta)$ положительна во внешней части слоя $16'$ и при $\eta \rightarrow +\infty$ должна сражаться с решением в основной части прямого течения и отрицательна в некоторой области вблизи самой линии раздела (внутренняя часть слоя $16'$), что соответствует симметричной картине линий тока. Решение задачи полностью аналогично невязкой зоне ниже линии раздела, необходимо лишь заменить знак скорости. Отметим, что найдется точка $\eta = -\eta_s > 0$, в которой $f(-\eta_s) = 0$, и тогда решение во внешней части слоя $16'$ примет вид

$$\eta = [(-\eta_s); +\infty); \quad f = (0; +\infty], \quad (-\eta_s) > 0, \quad f(-\eta_s) = 0, \quad f_{\eta \rightarrow +\infty} = C_0 \eta^4 + \dots,$$

$$f'(\eta) = \left[16\sqrt{C_0} f^{3/2} + 2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx_0} \right) \right]^{1/2}, \quad f'' = 12\sqrt{C_0} f^{1/2}, \quad f''' = 6\sqrt{C_0} f^{-1/2} f', \quad (3.16)$$

и во внутренней —

$$\eta = [0; (-\eta_s)]; \quad f = [f_0; 0], \quad f_0 = f(0) < 0, \quad f'(\eta) = \sqrt{2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx_0} \right)} \left[1 - \frac{(-f)^{3/2}}{(-f_0)^{3/2}} \right]^{1/2},$$

$$f'' = S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx_0} \right) \frac{3(-f)^{1/2}}{2(-f_0)^{3/2}}, \quad f''' = -S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx_0} \right) \frac{3(-f)^{-1/2}}{4(-f_0)^{3/2}} f'. \quad (3.17)$$

Найдена линия $\eta = (-\eta_s) > 0$, разделяющая изучаемую область на два таких слоя. На этой линии переменная часть функции тока принимает нулевое значение, продольные скорости выше и ниже ее равны друг другу, а завихренность обращается локально в нуль. Однако производные завихренности, пропорциональные f''' , принимают бесконечно большие значения, что требует введение еще одного, но вязкого подслоя для сглаживания решения (заштрихованная область на фиг. 5 в слое $16'$). Решение задачи в вязком подслое существует и его можно найти схожим образом, как и в п. 3.4.

3.6. Асимптотика решения слева перед особой точкой в области $1в'$

Для полного рассмотрения решения задачи вблизи особой точки в поле течения необходимо изучить поток слева от точки $x = x_*$. В соответствии с численными расчетами возвратное течение ниже линии раздела потоков проходит зону влияния особой точки, вертикальная скорость заметно убывает и постепенно течение выравнивается. Выше линии раздела протокотоков ситуация обратная: прямое течение при приближении слева к особой точке испытывает влияние растущей вертикальной скорости и благоприятного градиента давления одновременно. Вязкое на-

пряжение убывает в соответствии с условием равенства напряжений (2.5) ниже и выше линии раздела, а произведение напряжения на вертикальную скорость должно оставаться конечной величиной согласно (3.3).

Введем тонкий невязкий слой слева от особой точки (1в', фиг. 5), в нем координатное разложение решения имеет вид, схожий с разложением справа от особой точки, и после подстановки в задачу получим уравнение

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_{00} + (x_* - x)^{2/3} f(\eta) + \dots, \quad \eta = \frac{Y - 1}{(x_* - x)^{1/6}}, \quad \eta = O(1), \\ u = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} &= (x_* - x)^{1/2} f'(\eta) + \dots, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = (x_* - x)^{-1/3} \left[\frac{2}{3} f - \frac{1}{6} \eta f' \right], \\ -\frac{1}{2}(f')^2 + \frac{2}{3} f f'' &= S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right) \Rightarrow g(f) = f'(\eta) \Rightarrow f''(\eta) = g'_f g, \\ \frac{1}{3} f(g^2)' - \frac{1}{2} g^2 &= S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Функция тока $f(\eta)$ положительна при стремлении и вниз, и вверх от линии раздела потоков и при $\eta \rightarrow \mp\infty$ должна срачиваться с решением в основной части возвратного течения и в основной части прямого течения. Значение продольной скорости на линии раздела должно обнуляться, и тогда решение имеет вид

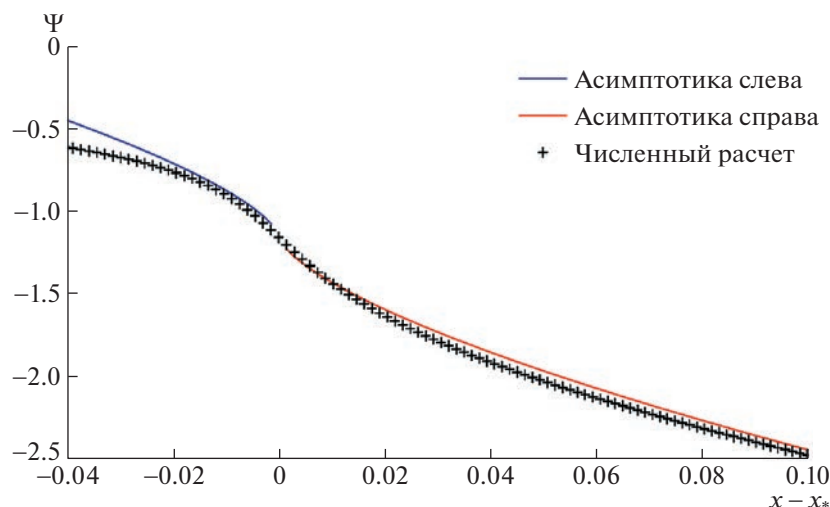
$$\begin{aligned}\eta = (-\infty; 0]: \quad f'(\eta) &= -\left[16\sqrt{C_0} f^{3/2} - 2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right) \right]^{1/2}, \\ \eta = [0; +\infty): \quad f'(\eta) &= \left[16\sqrt{C_0} f^{3/2} - 2S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right) \right]^{1/2}, \\ f_{\eta \rightarrow \pm\infty} &= C_0 \eta^4 + \dots, \quad f'' = 12\sqrt{C_0} f^{1/2}, \quad f''' = 6\sqrt{C_0} f^{-1/2} f', \\ f'(0) = 0 &\Rightarrow \left[f_0^- \right]^{3/2} = \frac{S_0^2}{8\sqrt{C_0}} \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right).\end{aligned}\tag{3.19}$$

Таким образом, формулы (3.18), (3.19) дают асимптотическое представление решения в тонком нелинейном невязком слое; такое представление срачивается как с основным возвратным течением, так и с основным прямым течением. Каких-либо разрывов, требующих участия вязких сил, в решении нет, в отличие от возвратного течения справа от особой точки. Выполнив условие равенства нулю продольной скорости на линии раздела, удалось вычислить величину коэффициента в поведении функции тока на самой линии раздела $f(0) = f_0^-$. Если воспользоваться условием разрешимости задачи в вязком подслое (3.15), то получим связь между функциями тока слева и справа от особой точки:

$$\begin{aligned}S_0^2 \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right) &= 8\sqrt{C_0} (-f_0)^{3/2}, \quad (f_0^-)^{3/2} = \frac{S_0^2}{8\sqrt{C_0}} \left(-\frac{dp}{dx|_0} \right), \\ f_0^- &= -f_0.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Функция тока на линии раздела противотоков из численного расчета и ее асимптоты, вычисленные по формулам (3.6), (3.9), (3.18) и (3.20), приведены на фиг. 6. Величина $f_0 = -6$ взята из расчетных данных.

Следует отметить, что для завершения подробного асимптотического анализа течения при стремлении интенсивности диполя M к критическому значению, необходимо определить поведение функции $S(x)$ вблизи особой точки, а именно, найти показатель степени δ в (3.4). Это не-



Фиг. 6. Сравнение функции тока на линии раздела противотоков с асимптотами, вблизи особой точки.

сложно сделать, если выписать двучленную асимптотику решения (3.8) при $\eta \rightarrow -\infty$ и подставить ее в разложение для функции тока:

$$f'(\eta) = -\left[16\sqrt{C_0}f^{3/2} + 2S_0^2\left(-\frac{dp}{dx}\right)\right]^{1/2}, \quad f_{\eta \rightarrow -\infty} = C_0\eta^4 + R_0\eta^3 + \dots, \quad \eta = \frac{Y-1}{(x-x_*)^{1/6}},$$

$$\Psi = \Psi_{00} + (x-x_*)^{2/3}f(\eta) + \dots \Big|_{\eta \rightarrow -\infty} = \Psi_{00} + C_0(Y-1)^4 + (x-x_*)^{1/6}R_0(Y-1)^3 + \dots$$

Поскольку функция тока в возвратном течении определяется именно поведением функции $S(x)$, то можно заключить, что $\delta = 1/6$.

3. ВЫВОДЫ

Изучено двумерное ламинарное течение в несжимаемом пограничном слое на поверхности, движущейся с постоянной малой скоростью вверх по потоку, и подверженное воздействию заданного градиента давления, индуцированного внешним диполем. Выполнены расчеты краевой задачи для вязкого подслоя с противотоками, и получено поле течения, содержащее крупную висячую замкнутую зону отрыва и две открытые области отрыва. С ростом интенсивности диполя обнаружено формирование предельного решения задачи, и для амплитуд диполя выше критической величины решение рассчитать не удастся.

Выполнен асимптотический анализ предельного состояния течения вблизи точки сгущения вертикальных линий тока внутри замкнутой зоны отрыва на фоне локально убывающего давления. В указанной точке на линии раздела противотоков вертикальная скорость неограниченно возрастает, а вязкое напряжение стремится к нулю, в то же время их произведение в точности балансируется заданным от диполя градиентом давления. Получено равномерно пригодное координатное разложение решения задачи во всех областях вокруг особой точки. Положение сингулярной точки заметно отличается от точки ветвления потоков, которой обычно приписывают начало зоны отрыва.

В отличие от особенности Гольдштейна, которая формируется в однонаправленном пограничном слое при воздействии заданного растущего давления, в случае течения с противотоками висячие отрывы возникают при любом сколь угодно малом возмущении давления. Поэтому в нашем случае заданное давление действует именно на отрывную картину течения, деформирует ее и порождает особую точку на линии раздела противотоков. Найденное решение означает доминирующую роль пристенного возвратного потока, подверженного действию неблагоприятного градиента давления. Прямое течение выше линии раздела носит подчиненный характер при формировании особенности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В.В., Рубан А.И., Сычев Вук.В., Королев Г.Л. Асимптотическая теория отрывных течений. Под ред. Сычева В.В. М.: Наука. Гл. ред. Физ. Мат. литер., 1987.
2. Moore F.K. On the separation of the unsteady laminar boundary-layer. In Boundary Layer Research (ed. H. Görtler). Springer, 1958. P. 296–311.
3. Rott N. Unsteady viscous flow in the vicinity of a stagnation point // Q. Appl. Math. 1956. V. 13. № 4. P. 444–451.
4. Sears W.R. Some recent developments in airfoil theory // J. Aeronaut. Sci. 1956. V. 23. № 5. P. 490–499.
5. Timoshin S. Concerning marginal singularities in the boundary-layer flow on a downstream-moving surface // J. Fluid Mech. 1996. V. 308. P. 171–194.
6. Ruban A.I., Araki D., Yapalparvi R., Gajjar J.S.B. On unsteady boundary-layer separation in supersonic flow. Part 1. Upstream moving separation point // J. Fluid Mech. 2011. V. 678. P. 124–155.
7. Жук В.И. О локальных рециркуляционных зонах в сверхзвуковом пограничном слое на движущейся поверхности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1982. Т. 22. № 5. С. 249–255.
8. Yapalparvi R., Van Dommelen L. Numerical solution of unsteady boundary-layer separation in supersonic flow: Upstream moving wall // J. Fluid Mech. 2012. V. 706. P. 413–430.
9. Ruban A.I., Djehizian A., Kirsten J., Kravtsova M.A. On quasi-steady boundary-layer separation in supersonic flow. Part 2. Downstream moving separation point // J. Fluid Mech. 2020. V. 900. A9-1–A9-32.
10. Timoshin S.N., Thapa P. On-wall and interior separation in a two-fluid boundary layer // J. Engineer. Math. 2019. V. 199. P. 1–21.
11. Egorov I.V., Ilukhin I.M., Neiland V.Ya. Numerical modeling of the interaction between shock wave and boundary layer past moving surface // Fluid Dyn. 2020. V. 55. P. 110–117.
12. Gaifullin A.M., Zubtsov A.V. Asymptotic structure of unsteady flow over a semi-infinite plate with a moving surface // Fluid Dyn. 2013. V. 48. P. 77–88.
13. Чжун Т.Х., Безродных С.И., Заметаев В.Б. Несжимаемый пограничный слой с противотоками при заданном градиенте давления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2022. Т. 62. № 6. С. 1007–1015.
14. Сычев Вук.В. О ламинарном отрыве на медленно движущейся вверх по потоку поверхности // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Т. 47. Вып. 3. С. 1–26.
15. Kravtsova M.A., Zametaev V.B., Ruban A.I. An effective numerical method for solving viscous-inviscid interaction problems // Philosophic. Transact. 2005. V. 363. № 1830. P. 1157–1167.
16. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука. Физматлит, 1979.