ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 8, с. 1395–1412

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.86

О МНОЖЕСТВЕ СТАБИЛЬНЫХ МАТЧИНГОВ ДВУДОЛЬНОГО ГРАФА

© 2023 г. А. В. Карзанов[1,*]

[1] 117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия

*e-mail: akarzanov7@gmail.com

Поступила в редакцию 16.02.2023 г.
Переработанный вариант 16.02.2023 г.
Принята к публикации 28.04.2023 г.

Тема стабильных матчингов (марьяжей) в двудольных графах приобрела широкую популярность, начиная с выхода классической работы Гейла и Шепли. В настоящей работе дается развернутый обзор избранных и взаимосвязанных утверждений в этой области, описывающих структурные, полиэдральные и алгоритмические свойства таких объектов и их множеств, снабжая эти утверждения короткими доказательствами. Библ. 24. Фиг. 3.

Ключевые слова: стабильный матчинг, посет ротаций, стабильный матчинг минимальной стоимости, медианный стабильный матчинг.

DOI: 10.31857/S0044466923080082, **EDN:** WSLYAY

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с классической работы Гейла и Шепли [1], область задач о стабильных марьяжах и их обобщений привлекала внимание многочисленных исследователей, и в этой области был собран богатый урожай интересных результатов, как теоретического, так и прикладного характера.

В задаче о стабильном марьяже (или, более определенно, о стабильном матчинге в двудольном графе) рассматривается двудольный граф $G = (V, E)$, в котором для каждой вершины v задан линейный порядок $<_v$, указывающий предпочтения на множестве ребер $\delta_G(v)$, инцидентных v. Пусть I и J – вершинные доли в G. В [1] и других работах вершины в I и J понимались как лица разных полов (“мужчины” и “женщины” соответственно), а ребра как возможные союзы (или “браки”) между ними: если для вершины $m \in I$ (“man”) и инцидентных ей ребер $e = mw$ и $e' = mw'$ выполняется $e <_m e'$, это означает, что m предпочитает союз с w союзу с w'. И аналогично для $w \in J$ (“woman”) относительно порядка $<_w$.

Матчинг в G – это подмножество ребер $M \subseteq E$, где никакие два ребра не имеют общей вершины; таким образом, можно считать, что M описывает множество “моногамных браков”. Матчинг M называется *стабильным*, если для любого ребра $e = mw \in E - M$ по крайней мере одна из вершин m и w имеет инцидентное ребро в M (определяющее выбранного “партнера”), и это ребро является более предпочтительным для данной вершины, чем e. Стабильный матчинг существует для любого двудольного $G = (V, E)$ с произвольными линейными порядками $<_v$ на $\delta_G(v)$, $v \in V$, что первоначально было доказано Гейлом и Шепли [1] для полных двудольных графов с долями одного размера, и обобщено последующими авторами на произвольные двудольные графы.

Впоследствии развитие в области стабильности, касающейся графов, шло по нескольким направлениям. В одном из них понятие стабильности переносилось на матчинги в произвольных графах (здесь следует особо выделить основополагающие работы Ирвинга [2] и Тана [3] о “стабильных расселениях по комнатам” (stable roommates)). В другом направлении изучались вопросы стабильности при рассмотрении вариантов весовых функций на ребрах и вершинах графа (отметим, как одну из наиболее общих, задачу о “стабильном распределении” (stable allocation problem), которая была введена и изучена Бейу и Балински [4]).

В то же время целый ряд глубоких результатов был получен в пределах собственной теории стабильных матчингов для двудольных графов, и цель данной работы – сделать обзор избранных, наиболее значительных на наш взгляд, известных результатов в этой теории. Они в большой степени связаны между собой и охватывают комбинаторные, полиэдральные, алгоритмические и др. аспекты. Ряд задач, освещаемых в обзоре, состоит в описании структурных свойств множества $\mathcal{M}(G)$ стабильных матчингов в $(G,<)$.

Наше изложение организовано следующим образом.

Раздел 2 содержит описание базовых утверждений и конструкций. Он начинается с напоминания классических результатов, восходящих к работе Гейла и Шепли о существовании стабильного матчинга и о методе “отложенных принятий” для его построения. Затем объясняется, что в множестве $\mathcal{M}(G)$ стабильных матчингов произвольного двудольного графа G все матчинги покрывают одно и то же множество вершин (предложение 2), и описываются операции на парах стабильных матчингов, позволяющих определить частичный порядок $\prec$ на множестве $\mathcal{M}(G)$, представляющий его в виде дистрибутивной решетки (предложение 3).

Раздел 3 посвящен обсуждению ключевого понятия *ротации* в стабильном матчинге. Оно было введено Ирвингом [2] в связи с задачей на произвольном графе (stable roommates problem), но оказалось очень полезным и для исследования структуры множества стабильных матчингов двудольного графа G. В графе G со стабильным матчингом M мы понимаем под ротацией определенный цикл в G, чередующийся относительно M. К числу основных из известных утверждений, обсуждаемых в этом разделе, относятся такие: (а) трансформация вдоль ротации преобразует стабильный матчинг в стабильный (предложение 4); (б) ротационные трансформации соответствуют отношениям немедленного предшествования в решетке $(\mathcal{M}(G),\prec)$ (предложение 6); (в) во всех максимальных цепях решетки $(\mathcal{M}(G),\prec)$ множество ротаций одно и то же, обозначаемое $\mathcal{R}_G$ (предложение 7).

В разделе 4 продолжаются обсуждения, связанные с ротациями. Здесь вводится частичный порядок $\lessdot$ на множестве $\mathcal{R}_G$ и приводится альтернативное представление для множества стабильных матчингов $\mathcal{M}(G)$, установленное Ирвингом и Лейтером [5], а именно: стабильные матчинги в G взаимно-однозначно соответствуют идеалам (или анти-цепям) посета $(\mathcal{R}_G,\lessdot)$ (предложение 8).

В разделе 5 рассматривается усиленный, “стоимостной”, вариант задачи о стабильном матчинге. Здесь множество ребер двудольного графа $G=(V,E,<)$ снабжаются вещественной весовой функцией $c: E\to\mathbb{R}$, и требуется найти стабильный матчинг M, минимизирующий общий вес $\sum(c(e)\colon e\in E)$. В частном случае, когда для ребра $e=mw$ вес $c(e)$ равняется сумме его рангов в порядках $<_m$ и $<_w$, получаем задачу об эгалитарном стабильном матчинге (в котором стороны I и J “уравниваются”), поставленную в [6]. Для произвольных весов c задача минимизации (или максимизации) решается эффективным комбинаторным алгоритмом, разработанном в [7]. Это является следствием того, что: во-первых, стабильные матчинги представляются идеалами посета ротаций $(\mathcal{R}_G,\lessdot)$, в котором число элементов $|\mathcal{R}_G|$ не превосходит числа ребер $|E|$; во-вторых, вес стабильного матчинга выражается, с точностью до константы, как вес соответствующего идеала (при назначении подходящих весов ротаций); и, в-третьих, задача о нахождении идеала (или “замкнутого множества”) минимального веса в произвольном конечном посете сводится к задаче о минимальном разрезе ориентированного графа, как показано Пикаром [8].

Раздел 6 посвящен полиэдральным аспектам. Здесь описывается многогранник стабильных матчингов $\mathcal{P}_{\rm st}(G)$ через систему линейных неравенств (близкую к той, что указана Ванде Вейтом [9]). Также, следуя полиэдральной конструкции Тео и Сетурамана [10], показывается, что для произвольного набора стабильных матчингов $M_1,\dots,M_\ell$ и любого $k\le\ell$, выбирая для каждой покрытой вершины в доле I ребро, имеющее порядок k среди этих матчингов, мы снова получаем стабильный матчинг. В частности, когда ℓ нечетно и $k=(\ell+1)/2$, определяется т.н. *медианный* стабильный матчинг для заданных $M_1,\dots,M_\ell$.

В заключительном разд. 7 формулируется результат, полученный в [7], о труднорешаемости ($\#P$-полноте) задачи определения числа стабильных матчингов в двудольном графе. Это отвечает на вопрос Кнута [11] об алгоритмической сложности вычисления такого числа.

Для полноты изложения мы, как правило, сопровождаем представленные утверждения доказательствами, часто альтернативными и более короткими по сравнению с оригинальными доказательствами в работах авторов. Отметим, что везде, где мы даем ссылки на работы [5, 7] и некоторые другие, соответствующие результаты в этих работах были получены для случая полного двудольного графа $K_{n,n}$ (с произвольными порядками $<$), но эти результаты распространяются и на случай произвольного двудольного графа G.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И БАЗОВЫЕ ФАКТЫ

На протяжении всего изложения мы рассматриваем двудольный граф $G = (V, E)$ с разбиением множества вершин V на подмножества I и J (где каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств). Иногда мы будем считать граф G ориентированным, с ребрами, направленными от I к J. Ребро, соединяющее вершины $m \in I$ (“man”) и $w \in J$ (“woman”), обозначается через mw. Множество ребер, инцидентных вершине $v \in V$, обозначается $\delta(v) = \delta_G(v)$. Каждая вершина v снабжена линейным порядком $<_v$, задающим предпочтения на множестве $\delta(v)$. А именно для ребер $e, e' \in \delta(v)$, если $e <_v e'$, то ребро e считается более предпочтительным для v, чем ребро e'; иногда нам также будет удобно говорить, что e расположено раньше или левее, чем e' (а e' позднее, или правее, чем e). Если вершина v ясна из контекста, можно писать $e < e'$. Обычно мы включаем порядки $<$, а также разбиение V на доли I, J в описание графа, применяя обозначение $G = (V, E, <)$ или $G = (I \sqcup J, E, <)$.

Матчинг M в G называется *стабильным*, если он не допускает блокирующих ребер. Здесь ребро $e = mw \in E - M$ считается блокирующим для M, если вершина m либо не покрывается M, либо ребро e' в M, инцидентное m, менее предпочтительно: $e <_m e'$, и аналогичное верно для вершины w.

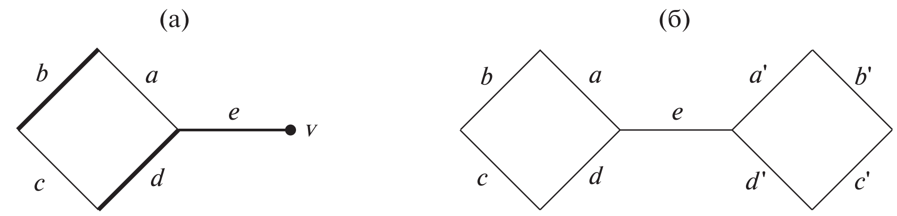
Ниже в этом разделе мы приводим две группы базовых свойств стабильных матчингов в G.

I. В основании теории стабильных матчингов лежит эффективный алгоритм построения стабильного матчинга Гейла и Шепли [1] (в изложении для полного двудольного графа с долями I, J одинакового размера n: $G \simeq K_{n,n}$). Рекурсивное изложение этого алгоритма, который часто называют “алгоритмом отложенных принятий” (АОП), дано МакВайти и Вилсоном в работе [6] (где также описан алгоритм последовательного конструирования множества всех стабильных матчингов для $G \simeq K_{n,n}$). Короткое неконструктивное доказательство существования стабильного матчинга в двудольном случае можно найти в [12, Sec. 18.5g].

В АОП роли сторон I и J неравнозначны: одна сторона “предлагает”, а другая “принимает или отвергает” предложения. (Напомним, что на каждом шаге АОП произвольно выбирается не включенный в текущий марьяж “man” $m \in I$, который делает предложение “woman” $w \in J$ согласно наилучшему ребру mw из еще не использованных им ребер в $\delta(m)$; это предложение сразу отвергается, если w уже имеет лучшее предложение от $m' \in I$ (т.е. $m'w <_w mw$), и принимается в ином случае, отвергая предыдущее предложение, если таковое имеется.) Результаты естественно расширяются и для произвольного двудольного графа G. Это приводит к следующему важному свойству.

Предложение 1 (см. [1, 6]). *В случае, когда I предлагает, а J принимает/отвергает, АОП находит (за линейное время $O(|V| + |E|)$) канонический стабильный матчинг, в котором выбор ребер для вершин в I наилучший, а для вершин в J наихудший по всем стабильным матчингам.*

Мы обозначаем этот матчинг $M^{\min} = M^{\min}(G)$. По симметрии, если АОП применяется в варианте, когда J предлагает, то алгоритм строит стабильный матчинг, для которого выборы ребер для J наилучшие, а для I наихудшие; обозначим его $M^{\max} = M^{\max}(G)$. Уточним смысл терминов “наилучший-наихудший”, рассматривая любой другой стабильный матчинг L для G. А именно, если ребра $e \in M^{\min}$ и $e' \in L$ имеют общую вершину $m \in I$, то $e \le_m e'$, а если общую вершину $w \in J$, то $e' \le_w e$. Здесь мы опираемся на инвариантность множества вершин, покрытых стабильным матчингом (что тривиально в случае полного двудольного графа $K_{n,n}$, где стабильный матчинг является совершенным, т.е. покрывающим все вершины). А именно, справедливо следующее свойство, установленное в [13].



Фиг. 1. Два примера.

Предложение 2. *Для двудольного $G = (V, E, <)$ все стабильные матчинги покрывают одно и то же множество вершин.*

Чтобы показать это свойство, примем следующие определения и обозначения (которые понадобятся и в дальнейшем).

Путь в ориентированном графе – это последовательность $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$, где e_i – ребро, соединяющее вершины v_{i-1} и v_i. Для пути P мы можем также применять сокращенную запись через вершины: $v_0 v_1 \cdots v_k$, или ребра: $e_1 e_2 \cdots e_k$. Ребро e_i в P называется *прямым* (forward), если $e_i = v_{i-1}v_i$, и *обратным* (backward), если $e_i = v_i v_{i-1}$. (Мы обозначаем ребро, выходящее из u и входящее в v, как uv, вместо (u, v).) Путь называется *ориентированным*, если все его ребра прямые, и называется *простым*, если все его вершины различные. Путь из вершины u в вершину v может быть назван *u–v путем*. Для подмножества ребер $A \subseteq E$ множество вершин, покрытых A, обозначается V_A. Для подмножеств X, Y множества S мы пишем $X - Y$ вместо $X \backslash Y$ $(= \{s \in X : s \notin Y\})$ и обозначаем $X \Delta Y$ симметрическую разность $(X - Y) \cup (Y - X)$.

Пусть теперь M, L – два стабильных матчинга в двудольном G. Рассмотрим подграф $\Delta_{M,L}$ в G, индуцированный множеством ребер $M \Delta L$. Заметим, что

$$\text{если } e, e', e'' \text{ – различные ребра в } \Delta_{M,L} \text{ такие, что } e, e' \text{ имеют общую вершину } u, \text{ а } e', e'' \text{ имеют общую вершину } v, u \text{ если } e >_u e', \text{ то } e' >_v e''. \tag{2.1}$$

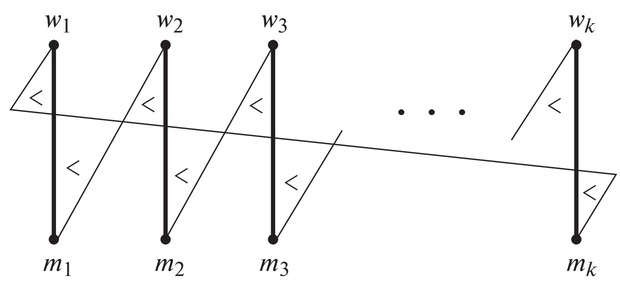
Действительно, пусть для определенности $e' \in M$. Тогда $e, e'' \in L$. Если бы было $e' <_v e''$, то ребро e' было бы блокирующим для L.

Перейдем теперь к доказательству предложения 2. Предположим, что $V_M \neq V_L$. Тогда, по крайней мере, одна из компонент в $\Delta_{M,L}$ является простым путем $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$. В этом пути ребра из M и L чередуются, и из стабильности M, L следует $k \geq 2$. Без ограничения общности можно считать, что $e_1 \in M$. Тогда $v_0 \notin V_L$, и так как ребро e_1 не является блокирующим для L, то должно выполняться $e_1 >_{v_1} e_2$.

Ввиду этого, последовательно применяя (2.1) к тройкам соседних ребер в P, получаем, что $e_{k-1} >_{v_{k-1}} e_k$. Но тогда при нечетном k ребро e_k является блокирующим для L (так как $e_{k-1} \in L$, $e_k \notin L$ и $v_k \notin V_L$), а при четном k ребро e_k является блокирующим для M (так как $e_{k-1} \in M$, $e_k \notin M$ и $v_k \notin V_M$); противоречие.

Будем обозначать множество вершин в G, покрытых стабильным матчингом, через $\tilde{V}$. Очевидно, при удалении вершин в $V - \tilde{V}$ каждый стабильный матчинг для G остается стабильным и для результирующего графа $\tilde{G}$. Однако в $\tilde{G}$ могут появиться новые стабильные матчинги (и, следовательно, включение $\mathcal{M}(G) \subseteq \mathcal{M}(\tilde{G})$ может быть строгим), как показывает простой пример в левом фрагменте на фиг. 1. Здесь отношения предпочтений устроены так: $a < b$, $b < c$, $c < d$, $d < e < a$, и можно проверить, что имеется единственный стабильный матчинг, а именно, $M = \{b, d\}$. Тогда вершина v не покрыта M, однако при ее удалении (вместе с ребром e) появляется новый стабильный матчинг $\{a, c\}$.

Таким образом, при исследовании множества стабильных матчингов для G мы, вообще говоря, не можем выкидывать из рассмотрения непокрытые вершины, оставляя только подграф $\tilde{G} = (\tilde{V} = (\tilde{I} \sqcup \tilde{J}), \tilde{E})$ (где доли $\tilde{I} := I \cap \tilde{V}$ и $\tilde{J} := J \cap \tilde{V}$ имеют одинаковый размер, и все стабиль-



Фиг. 2. Повышающий цикл для (M, L). Матчинг M изображен жирными линиями, а L – светлыми линиями. Вершины m_i принадлежат доле I.

ные матчинги совершенные). По похожим причинам в случае отсутствия непокрытых вершин удаление ребра, не входящего ни в один стабильный матчинг, может повлечь появление нового стабильного матчинга. На фиг. 1а изображено расширение предыдущего графа с аналогичными предпочтениями для новых ребер, а именно, $a' < b'$, $b' < c'$, $c' < d'$ и $d' < e < a'$. Здесь имеются три стабильных матчинга, а именно: $\{a, c, b', d'\}$, $\{b, d, a', c'\}$ и $\{b, d, b', d'\}$, однако, при удалении непокрытого ребра e появляется четвертый стабильный матчинг $\{a, c, a', c'\}$, для которого ранее имелось блокирующее ребро e.)

II. Далее рассмотрим упорядоченную пару (M, L) стабильных матчингов в G. Из предложения 2 следует, что граф $\Delta_{M,L}$, индуцированный $M \Delta L$, распадается на некоторое множество $\mathscr{C} = \mathscr{C}(M, L)$ непересекающихся чередующихся циклов. Считая G ориентированным от I к J, будем полагать каждый цикл $C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v_0) \in \mathscr{C}$ направленным согласно ориентации ребер в L, т.е. прямые ребра в C принадлежат L, а обратные принадлежат M. Ввиду (2.1), все предпочтения вдоль C "направлены в одну сторону", а именно:

$$\begin{gathered}\text{для цикла } C = e_1 e_2 \cdots e_k \in \mathscr{C}(M, L) \text{ (применяя обозначение } C \text{ через ребра),}\\ \text{если } e_i < e_{i+1} \text{ выполнено для некоторого } i, \text{ то это выполняется}\\ \text{для всех } i = 1, \ldots, k \text{ (полагая } e_{k+1} := e_1).\end{gathered} \tag{2.2}$$

В этом случае скажем, что цикл C повышающий, или правый, относительно M. Иначе C считается понижающим, или левым. Обозначим через $\mathscr{C}^+(M, L)$ и $\mathscr{C}^-(M, L)$ множества правых и левых циклов для (M, L) соответственно. Если матчинг M' получается из M заменой ребер вдоль цикла C, будем писать $M \xrightarrow{C} M'$ или $M' = \mathrm{Repl}(M, C)$, и аналогично, будем писать $L \xrightarrow{C} L'$ или $L' = \mathrm{Repl}(L, C)$ для замены вдоль C в L. Заметим, что если цикл C правый относительно M, то по сравнению с M матчинг M' является менее предпочтительным для всех вершин в $I \cap C$ ("men") и более предпочтительным для всех вершин в $J \cap C$ ("women"), а для L и L' поведение противоположное. (Иначе говоря, при замене вдоль повышающего цикла мы как бы удаляемся от $M^{\min}$ и приближаемся к $M^{\max}$.) Повышающий цикл показан на фиг. 2.

Можно было бы ожидать, что матчинг $M' = \mathrm{Repl}(M, C)$ должен быть стабильным. Однако это может быть неверным. Например, рассмотрим граф как в правом фрагменте на фиг. 1 (с указанными выше предпочтениями) и возьмем стабильные матчинги $M = \{b, d, a', c'\}$ и $L = \{a, c, b', d'\}$. Тогда ребра a, b, c, d порождают цикл C в $\Delta_{M,L}$, но матчинг $M' = \{a, c, a', c'\}$, получающийся в результате замены ребер в M вдоль C, не является стабильным.

Тем не менее стабильность сохраняется при замене сразу во всех циклах в $\mathscr{C}^+(M, L)$ или в $\mathscr{C}^-(M, L)$. В этих случаях будем писать $M' = \mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^+(M, L))$ и $M' = \mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^-(M, L))$ соответственно.

Лемма 1 (см. [11]). *Если M, L – стабильные матчинги, то $M' = \mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^+(M, L))$ – тоже стабильный матчинг. Аналогично для* $\mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^-(M, L))$.

Доказательство. Очевидно, M' является матчингом. Предположим, M' имеет блокирующее ребро $e = mw$ (где $m \in I$). Легко видеть, что это в принципе возможно, только если одна из вершин m, w принадлежит правому циклу, а другая – левому циклу в $\mathscr{C}(M, L)$. Без ограничения общности можно считать, что m принадлежит циклу $C \in \mathscr{C}^+(M, L)$, а w – циклу $C' \in \mathscr{C}^-(M, L)$. Пусть вершина m инцидентна ребрам $a \in M$ и $b \in L$ в C, а w инцидентна ребрам $c \in M$ и $d \in L$ в C'. Тогда $a <_m b$ и $c <_w d$ (учитывая $m \in I$ и $w \in J$). При преобразовании $M \mapsto M'$ в матчинг M' попадают ребра b и c, и должно выполняться $e <_m b$ и $e <_w c$ (так как по предположению e блокирует M'). Но тогда получаем $e < d$ (ввиду $c < d$), и, следовательно, e блокирует L; противоречие.

Это позволяет определить решетку на стабильных матчингах в G. Заметим, что для $M, L \in \mathscr{M}(G)$ заменить в M ребра вдоль всех повышающих циклов для M – это все равно, что сделать в L замены вдоль всех повышающих циклов для L, т.е. $\mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^+(M, L)) = \mathrm{Repl}(L, \mathscr{C}^+(L, M))$. Аналогично $\mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^-(M, L)) = \mathrm{Repl}(L, \mathscr{C}^-(L, M))$. Ввиду Предложения 1, в $\mathscr{C}(M, L)$ нет понижающих циклов при $M = M^{\min}$, и нет повышающих циклов при $M = M^{\max}$.

Предложение 3 (см. [11]). *Для различных $M, L \in \mathscr{M}(G)$ положим $M \prec L$, если для каждой пары ребер $e \in M$ и $e' \in L$, инцидентных вершине в $\tilde{I}$ $(= I \cap \tilde{V})$ выполняется $e \le e'$ (давая противоположные соотношения для вершин в $\tilde{J}$). Тогда $\prec$ определяет дистрибутивную решетку на $\mathscr{M}(G)$ с минимальным элементом $M^{\min}(G)$ и максимальным элементом $M^{\max}(G)$, в которой для $M, L \in \mathscr{M}(G)$ точной нижней гранью $M \wedge L$ является* $\mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}^-(M, L)) = \mathrm{Repl}(L, \mathscr{C}^-(L, M))$*, а точной верхней гранью $M \vee L$ –* $\mathrm{Repl}(M, \mathscr{C}(M, L)) = \mathrm{Repl}(L, \mathscr{C}^+(L, M))$.

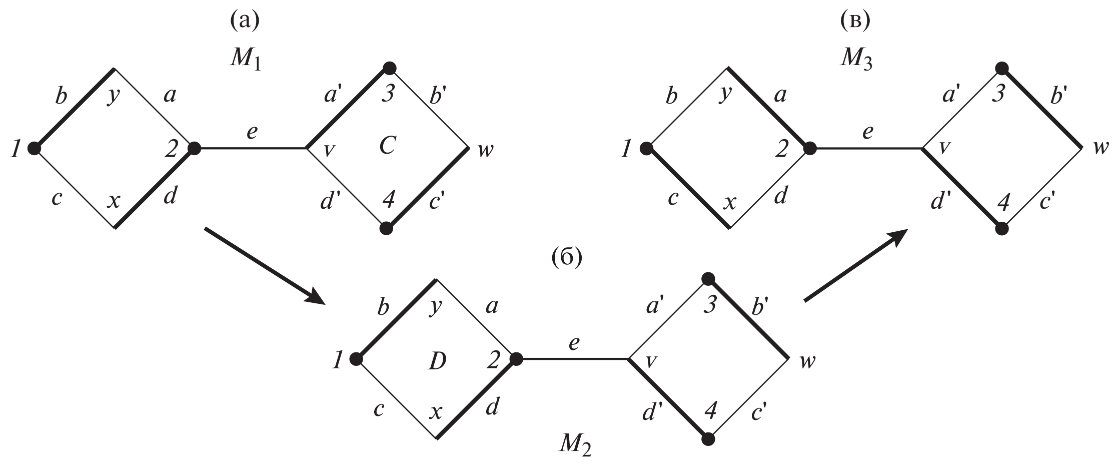
3. РОТАЦИИ

Благодаря решеточности множества $\mathscr{M}(G)$, можно, имея два или более стабильных матчингов, конструировать новые, делая переназначения в соответствующих циклах для пар матчингов, как указано в лемме 1. Другой метод, связанный с понятием ротации, позволяет порождать новые стабильные матчинги, исходя из одиночных элементов в $\mathscr{M}(G)$. Это понятие было введено Ирвингом и Лейтером [5] для задачи о стабильном марьяже, основываясь на концепции "цикла типа все или ничего" (all-or-nothing cycle) из работы Ирвинга [2], посвященной задаче о стабильных матчингах в общем графе ("stable roommates problem"). Впоследствии понятие ротации было распространено и на другие задачи о стабильности, такие как задачи о стабильных b-матчингах, распределениях (allocations) и др. (см., например, [14]. Отметим также недавнюю работу [15], где устанавливается связь между выпуклой оболочкой стабильных распределений при отсутствии ограничений на ребрах и порядковым многогранником посета ротаций.) Заметим, что хотя в [5] рассматривался случай полного двудольного графа $G \simeq K_{n,n}$, конструкции и результаты без особого труда переносятся на произвольный случай, и как выше, мы далее будем рассматривать произвольный двудольный граф $G = (V = I \sqcup J, E, <)$.

Пусть M – стабильный матчинг в G.

Определение 1. Скажем, что ребро $a = mw \in E - M$ (где $m \in I$) допустимое, если в M есть ребро e, инцидентное m, и это ребро более предпочтительное, чем a (т.е. $e <_m a$), и при этом либо вершина w непокрытая, либо M имеет ребро e', инцидентное w, и это ребро менее предпочтительное, чем a (т.е. $a <_w e'$). Если для вершины $m \in I$ множество допустимых ребер в $\delta(m)$ непустое, то самое первое (наиболее предпочтительное) из них назовем *активным*. Обозначим через A множество активных ребер для M. Подграф в G, индуцированный множеством ребер $M \cup A$, обозначим $\Gamma = \Gamma(M)$ и назовем *активным графом*.

Учитывая то, что из каждой вершины в I исходит не более одного активного ребра (в то время как в вершину в J может входить несколько активных ребер), всякий цикл в Γ должен быть чередующимся относительно M и A. Кроме того, каждая компонента K в Γ либо является деревом, либо содержит ровно один цикл. (Действительно, в противном случае в K имелась бы пара циклов и соединяющий их простой u–v путь P, все вершины которого, кроме u, v, не принадлежат циклам.) Концевые ребра этого пути должны принадлежать A, и, по крайней мере, одна из вер-



Фиг. 3. Граф с тремя стабильными матчингами, выделенными жирными линиями: $M_1 = M^{\min}$ (а), M_2 (б) и $M_3 = M^{\max}$ (в).

шин u, v должна находиться в I. Эта вершина имеет два инцидентных ребра в A (одно на P, другое на цикле); противоречие. При наличии цикла мы называем компоненту K *цикло-содержащей*, а сам цикл обозначаем через C_K и называем *ротацией* для M. (Заметим, что в [5] ротацией называется не сам цикл, а его пересечение с M.) Ребра в C_K, принадлежащие M, назовем *матчинговыми*, а остальные – *активными*. При замене ребер вдоль ротации C возникает матчинг, который по сравнению с M менее предпочтителен для вершин в $I \cap C$ и более предпочтительный для вершин в $J \cap C$. (Для операции замены вдоль C в [5] применяется термин “rotation elimination”.) Когда C – цикл в $\Gamma(M)$, мы также можем говорить, что матчинг M допускает ротацию C.

Пример. На фиг. 3 изображены три стабильных матчинга M_1, M_2, M_3 (выделенных жирной линией) в графе $G = (V, E, <)$ как на фиг. 1б. Здесь доля I составлена вершинами 1, 2, 3, 4, а доля J – вершинами x, y, v, w, и предпочтения заданы как и раньше, а именно:

$$a <_y b, \quad b <_1 c, \quad c <_x d, \quad d <_2 e <_2 a,$$

$$a' <_3 b', \quad b' <_w c', \quad c' <_4 d', \quad d' <_v e <_v a'.$$

Для матчинга M_1 все нематчинговые ребра a, c, e, b', d' являются допустимыми, но из них активными оказываются только c, e, b', d' (так как $e <_2 a$). Поэтому подграф $\Gamma(M_1)$ порожден $M_1 \cup \{c, e, b', d'\}$, имеет ровно одну компоненту, и она является цикло-содержащей с циклом $C = a'b'c'd'$. При замене вдоль ротации C получаем матчинг M_2 (являющийся стабильным согласно предложению 4 ниже). Для M_2 допустимыми ребрами в $E - M_2$ являются только a и c (а e, a', c' – не допустимые, ввиду $d' <_v e, a'$ и $b' <_w c'$, учитывая $b', d' \in M_2$ и $v, w \in J$). Поэтому активными ребрами являются a и c, и граф $\Gamma(M_2)$ состоит из трех компонент, порожденных $\{a, b, c, d\}$, $\{b'\}$ и $\{d'\}$. Первая из них образует цикл $D = abcd$. Наконец, при замене вдоль ротации D получаем стабильный матчинг M_3. Для него ни одно из ребер в $E - M_3$ не является допустимым, и $\Gamma(M_3)$ составлено просто ребрами в M_3. Можно видеть, что $M_1 = M^{\min}$ и $M_3 = M^{\max}$.

Следующие два утверждения демонстрируют важные свойства $\Gamma(M)$.

Предложение 4 (см. [5]). *Для любого цикла (ротации) C в $\Gamma(M)$ матчинг $M' = \mathrm{Repl}(M, C)$ является стабильным.*

Доказательство. Оба M и M' покрывают одно и то же множество вершин $\tilde{V}$. Предположим, что M' допускает блокирующее ребро $e = mw \in E - M'$. Заметим, что $e \notin M$ (учитывая то, что ребра в $C \cap M$ не могут быть блокирующими для M'). Возможны два случая.

Случай 1: $w \in \tilde{V}$. Тогда вершина w принадлежит ребрам $a \in M'$ и $b \in M$, и мы имеем $e <_w a$ (ввиду блокирования) и $a \leq_w b$ (так как в случае $a \neq b$ ребро a лежит в C и является допустимым). Следовательно, $e <_w b$. Тогда $m \in \tilde{V}$ (иначе e было бы блокирующим для M).

Пусть вершина m принадлежит ребрам $c \in M'$ и $d \in M$. Тогда $e <_m c$, и должно выполняться $d <_m e$ (иначе e было бы блокирующим для M, учитывая $e <_w b$). Следовательно, e является допустимым для M и более предпочтительным, чем ребро c, которое принадлежит A; противоречие.

Случай 2: $w \notin \tilde{V}$. Тогда $m \in \tilde{V}$. Пусть m принадлежит ребрам $c \in M'$ и $d \in M$. Так как e является блокирующим для M', но не для M, имеем $d <_m e <_m c$. Но тогда ребро e допустимое и более предпочтительное, чем активное ребро c; противоречие.

Говоря далее о чередующихся (относительно M и A) путях и циклах в $\Gamma(M)$, мы считаем, что в них выбрано такое направление, чтобы ребра из A были прямыми, а ребра из M обратными.

Предложение 5. *Пусть e – ребро в M, принадлежащее древесной компоненте K в $\Gamma(M)$. Тогда для любого стабильного матчинга $L \in \mathcal{M}(G)$ либо $e \in L$, либо e содержится в понижающем цикле в $\mathscr{C}(M,L)$.*

Доказательство. Предположим, ребро $e = mw \in M$ из древесной компоненты K находится в повышающем цикле $C \in \mathscr{C}^+(M,L)$ для некоторого $L \in \mathcal{M}(G)$. Пусть C имеет вид $e_1e_2\cdots e_k$ (применяя обозначение через ребра и учитывая направленность C), и пусть $e := e_1 \in M$. Возьмем максимальный чередующийся путь $P = p_1p_2\cdots p_r$ (через ребра) в $\Gamma(M)$, начиная с $p_1 = e$. Можно считать, что никакое ребро в $P \cap M$, кроме p_1, не лежит в повышающем цикле в $\mathcal{C}(M,L)$ (в противном случае возьмем его в качестве e). Ребра e_1 и $e_2 = mw'$ инцидентны вершине $m \in I$, и поскольку C повышающий, $e_1 <_m e_2$ и $e_2 <_{w'} e_3$. Кроме того, $e_1, e_3 \in M$ и $e_2 \in L$. Следовательно, e_2 – допустимое ребро для M, и в $\delta(m)$ есть активное ребро $a = mv$, для которого $e_1 <_m a \leq_m e_2$. Это a совпадает с ребром p_2 в P. Кроме того, $a \neq e_2$ (иначе $e_3 \in P$ и $e_3 \in C \cap M$, вопреки условию на $p_1 = e$).

Мы утверждаем, что ребро $a = p_2$ – блокирующее для L. Это следует из $a <_m e_2 \in L$, если $r = 2$ (в этом случае концевая вершина v в P является непокрытой), а также если $r \geq 3$ и $p_3 \in L$ (так как $p_3 \in M$ и $a <_v p_3$). Наконец, пусть $p_3 \notin L$. Тогда p_3 принадлежит понижающему циклу $C' \in \mathscr{C}^-(M,L)$. Для ребра b в C', инцидентного v и отличного от p_3, выполняется $b \in L$ и $p_3 <_v b$ (учитывая $v \in J$ и то, что C' понижающий). Тогда из $a <_v p_3 <_v b$ и $a <_m e_2 \in L$ следует, что a блокирует L; противоречие.

Ясно, что для матчинга $M' = \mathrm{Repl}(M,C)$, полученного заменой вдоль ротации C в $\Gamma(M)$, выполняется $M \prec M'$, где $\prec$ – частичный порядок в решетке на $\mathcal{M}(G)$ (см. предложение 3). Как было установлено в [5] (при $G \simeq K_{n,n}$), начиная с $M^{\min}$ и используя ротации, можно исчерпать все $\mathcal{M}(G)$.

Определение 2. Назовем *трассой* последовательность стабильных матчингов $\tau = (M_0, M_1, \dots, M_N)$ в G такую, что $M_0 = M^{\min}$, $M_N = M^{\max}$, и каждое M_i $(1 \leq i \leq N)$ получается из M_{i-1} заменой вдоль одной ротации C_i в $\Gamma(M_{i-1})$. Последовательность ротаций $C_1, \dots, C_N$ обозначим через $\mathscr{R}(\tau)$.

Предложение 6. *Трассы покрывают всю решетку* $(\mathcal{M}(G), \prec)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если матчинги $M, L \in \mathcal{M}$ удовлетворяют $M \prec L$, то найдется ротация C для M такая, что для $M' = \mathrm{Repl}(M,C)$ справедливо $M' \preceq L$. Чтобы построить такую ротацию, возьмем вершину $m \in \tilde{I}$, для которой инцидентные ребра $e = mw \in M$ и $f = mv \in L$ различны. Тогда $e <_m f$ (ввиду $M \prec L$), и ребро f допустимое для M (так как имеется ребро $b \in M$, инцидентное v, и для него выполняется $f <_v b$, ввиду $M \prec L$ и $w \in \tilde{J}$). Поэтому в $\delta(m)$ есть активное ребро $a = mw'$, и выполняется $a \leq_m f$. Заметим, что $w' \in \tilde{V}$ (иначе должно быть $a \notin L$; тогда $a \neq f$, и a блокирует L).

Следовательно, имеется ребро $e' = m'w' \in M$, а также ребро $f' \in L$, инцидентное m'. Мы утверждаем, что $f' \neq e'$. Действительно, в случае $f' = e'$, мы имели бы $a <_{w'} f'$ и $a <_m f$, и, следовательно, a блокировало бы L.

Теперь из $f' \neq e'$ получаем $e' <_{m'} f'$, аналогично $e <_m f$ в начальной ситуации. Продолжая построение, мы получаем "неограниченный" чередующийся путь P в $\Gamma(M)$ с последовательностью ребер $e = e_1 = m_1w_1$, $a = a_1 = m_2w_1$, $e' = e_2 = m_2w_2$, $a_2 = m_2w_3, \ldots$, и для каждого i имеется ребро $f_i \in L$, инцидентное m_i и отличное от e_i. Тогда $e_i <_{m_i} a_i \leq_{m_i} f_i$, и P содержит искомую ротацию C.

Назовем *рангом* матчинга M сумму $\rho(M)$ порядковых номеров его ребер mw в множествах $\delta(m)$ (упорядоченных согласно $<_m$), где $m \in I$. Очевидно, $\rho(M) \leq |E|$, и если $M \prec L$, то $\rho(M) < \rho(L)$. Поэтому

$$\text{любая трасса } \tau \text{ в } G = (V, E, <) \text{ содержит не более } |E| \text{ матчингов; следовательно, } |\mathcal{R}(\tau)| < |E|. \tag{3.1}$$

Из предложений 4–6 мы также получаем

Следствие 1. (i) Граф $\Gamma(M^{\max}(G))$ является лесом (и ротации для $M^{\max}(G)$ отсутствуют).

(ii) Ребра минимального стабильного матчинга $M = M^{\min}(G)$, находящиеся в древесных компонентах активного графа $\Gamma(M)$, принадлежат всем стабильным матчингам в $\mathcal{M}(G)$.

(iii) G имеет единственный стабильный матчинг тогда и только тогда, когда $\Gamma(M^{\min})$ является лесом.

Следующее утверждение, установленное в [5], несмотря на относительную простоту доказательства, является наиболее существенным в области ротаций.

Предложение 7. *Множество ротаций $\mathcal{R}(\tau)$ для всех трасс τ в $(\mathcal{M}(G), \prec)$ одно и то же.*

Доказательство. Для $M \in \mathcal{M}(G)$ определим $\mathcal{T}(M)$ как множество отрезков трасс ("подтрасс"), начинающихся с M и оканчивающихся в $M^{\max}$. Для такой подтрассы $\tau \in \mathcal{T}(M)$ соответствующее множество ротаций обозначим через $\mathcal{R}(\tau)$ и скажем, что матчинг M *особый*, если в $\mathcal{T}(M)$ имеются подтрассы τ и τ' с $\mathcal{R}(\tau) \neq \mathcal{R}(\tau')$. Надо доказать, что $M^{\min}$ не является особым.

Предположим, что это не так, и рассмотрим особый матчинг M максимальной высоты, т.е. такой, что матчинг L не является особым, если $M \prec L$. Пусть $\mathcal{C}(M)$ – множество ротаций в $\Gamma(M)$; тогда для любой подтрассы $\tau = (M = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k = M^{\max})$ матчинг M_1 получается из M заменой вдоль некоторой ротации $C \in \mathcal{C}(M)$. Ввиду максимальности M, найдутся ротации $C', C'' \in \mathcal{C}(M)$ такие, что матчинги $M' = \mathrm{Repl}(M, C')$ и $M'' = \mathrm{Repl}(M, C'')$ неособые, и множества ротаций $\mathcal{R}(\tau')$ и $\mathcal{R}(\tau'')$ различны для подтрасс $\tau', \tau'' \in \mathcal{T}(M)$ таких, что τ' проходит через M', а τ'' проходит через M''.

Теперь заметим, что поскольку ротации C' и C'' не пересекаются, то C' является ротацией в $\Gamma(M'')$, а C'' – ротацией в $\Gamma(M')$. Поэтому в $\mathcal{T}(M)$ есть подтрассы τ', τ'' такие, что τ' начинается с $M, M', \mathrm{Repl}(M', C'')$, и τ'' начинается с $M, M'', \mathrm{Repl}(M'', C')$, а после матчинга $\mathrm{Repl}(M', C'') = \mathrm{Repl}(M'', C')$ подтрассы τ' и τ'' совпадают. Но тогда $\mathcal{R}(\tau') = \mathcal{R}(\tau'')$; противоречие.

Это множество ротаций $\mathcal{R}(\tau)$, не зависящее от трасс $\tau \in \mathcal{T}(M^{\min})$, обозначим через $\mathcal{R}_G$. Ввиду (3.1), получаем

Следствие 2. Число ротаций в $\mathcal{R}_G$ не превосходит $|E|$.

Приведем еще одно полезное свойство:

$$\text{множества матчинговых ребер двух различных ротаций не пересекаются (и поэтому общее число ребер в ротациях не превосходит } 2|E|). \tag{3.2}$$

Действительно, если $e = mw$ – матчинговое ребро в ротации C, где $m \in I$, то при трансформации в C новым матчинговым ребром в $\delta(m)$ становится активное ребро $a = mv$ в C; при этом выполняется $e <_m a$. При дальнейшем движении вдоль трассы матчинговые ребра в $\delta(m)$ могут перемещаться только "вправо" (по аналогичным причинам), и возврата к ребру e не происходит.

В заключение этого раздела скажем о компонентах графа объединения стабильных матчингов Σ_G. Для этого обозначим через M^0 множество ребер минимального матчинга $M^{\min}$, принадлежащих древесным компонентам в $\Gamma(M^{\min})$, и обозначим через U_G подграф в G, являющийся объединением всех ротаций в $\mathcal{R}_G$. Как указано в следствии 1(ii), M^0 принадлежит всем матчингам в $\mathcal{M}(G)$ (поскольку активный граф $\Gamma(M^{\min})$ не имеет понижающих циклов, и учитывая предложение 5); отсюда получаем, что каждое ребро в M^0 образует компоненту в Σ_G. В то же время очевидно, что каждая ротация целиком лежит в Σ_G, и поэтому $U_G \subseteq \Sigma_G$. Более того, так как каждый стабильный матчинг получается из $M^{\min}$ в результате последовательности ротационных трансформаций, то справедливо

Следствие 3. Σ_G является объединением $U_G = \cup\{C \in \mathcal{R}_G\}$ и $M^{\min}$. Каждое ребро в M^0 и каждая компонента в U_G является компонентой в Σ_G.

Таким образом, Σ_G строится эффективно (за время $O(|V||E|)$, ввиду сказанного в следующем разделе). А также каждое ребро в M^0 и каждая компонента в U_G является компонентой в Σ_G. В связи с этим можно спросить, есть ли в Σ_G другие компоненты? Если да, то ими могут быть только ребра в $M^{\min}$, которые находятся в цикло-содержащих компонентах K графа $\Gamma(M^{\min})$, но при этом не входят в объединение ротаций U_K. Вопрос о существовании таких компонент открытый для нас.

4. ИДЕАЛЫ ПОСЕТА РОТАЦИЙ И СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ

Как было сказано выше, естественный частичный порядок $\prec$ на стабильных матчингах превращает множество $\mathcal{M}(G)$ в дистрибутивную решетку (см. предложение 3). Известно, что любая дистрибутивная решетка изоморфна решетке идеалов некоторого посета (и наоборот). Для решетки $(\mathcal{M}(G),\prec)$ Ирвинг и Лейтер [5] указали явную конструкцию. (Хотя [5] и последующая работа [7] имеют дело с полным двудольным графом $K_{n,n}$, полученные там результаты без большого труда распространяются на произвольный двудольный граф G.) А именно, опираясь на ключевой факт о постоянстве множества ротаций, ассоциированных с трассами (см. предложение 7), а также на определенный способ задания структуры посета на множестве ротаций $\mathcal{R}_G$, было показано соответствие между стабильными матчингами и идеалами в таком посете. Это представление для $\mathcal{M}(G)$ имеет важные применения, в частности, позволяет эффективно решать задачи линейной оптимизации для $\mathcal{M}(G)$ и установить труднорешаемость задачи вычисления числа $|\mathcal{M}(G)|$, о чем будет сказано в разд. 6 и 7.

Начнем с построения упомянутого посета на $\mathcal{R}_G$. Напомним, что для трассы $\tau = (M_0, M_1,\dots, M_N)$ мы обозначаем через $\mathcal{R}(\tau)$ последовательность ротаций $C_1,\dots,C_N$, где M_i получается из M_{i-1} заменой вдоль C_i.

Определение 3. Для ротаций $C, D \in \mathcal{R}_G$ скажем, что C предшествует D, и обозначим это как $C \lessdot D$, если для каждой трассы τ в $(\mathcal{M}(G),\prec)$ ротация C встречается в последовательности $\mathcal{R}(\tau)$ раньше, чем D. Иными словами, трансформация матчинга в D не может произойти ранее, чем трансформация в C.

Это бинарное отношение антисимметричное и транзитивное и дает частичный порядок на $\mathcal{R}_G$.

Чтобы объяснить связь с матчингами, рассмотрим $M \in \mathcal{M}(G)$. Пусть $\tau = (M_0, M_1,\dots, M_N)$ – трасса, содержащая M, скажем, $M = M_i$, и пусть $\mathcal{R}(\tau) = (C_1,\dots,C_N)$. Тогда M получается из $M_0 = M^{\min}$ последовательностью трансформаций относительно ротаций $C_1,\dots,C_i$. Из предложения 7 легко следует, что

$$\begin{gathered}\text{(неупорядоченное) множество } \mathcal{R}_M := \{C_1,\dots,C_i\} \text{ не зависит от трассы } \tau,\\ \text{проходящей через } M\text{; аналогично для множества } \mathcal{R}^+_M := \{C_{i+1},\dots,C_N\},\\ \text{и для множества } \mathcal{R}_{M,M'} := \{C_{i+1},\dots,C_j\}, \text{ где } M' = M_j \text{ для } j \ge i.\end{gathered} \tag{4.1}$$

В соответствии с определением $\lessdot$ отношение $C_j \lessdot C_k$ может выполняться, только если $j < k$. Более того, $\mathcal{R}_M$ образует замкнутое множество, или идеал, в посете $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$ (т.е. из $C \lessdot D$ и $D \in \mathcal{R}_M$ следует $C \in \mathcal{R}_M$). Это дает инъективное отображение β множества $\mathcal{M}(G)$ в множество идеалов в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$. В действительности, β является биекцией, как показано в [5, Th. 4.1].

Предложение 8. *Отображение* $M \overset{\beta}{\mapsto} \mathcal{R}_M$ *устанавливает изоморфизм между решеткой стабильных матчингов* $(\mathcal{M}(G), \prec)$ *и решеткой* $\mathcal{I}(G)$ *идеалов в* $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$.

Доказательство. Рассмотрим стабильные матчинги M и L, и пусть E' и E'' – множества ребер, принадлежащих циклам в $\mathcal{C}^+(M, L)$ и $\mathcal{C}^-(M, L)$ соответственно. Очевидно, подграфы, порожденные этими множествами, не пересекаются. Из доказательства предложения 6 следует, что E' является объединением множества R' ротаций, требуемых для получения $M \vee L$ из M (или, эквивалентно, L из $M \wedge L$), а E'' – объединением множества R'' ротаций, требуемых для получения $M \vee L$ из L (эквивалентно, M из $M \wedge L$). Следовательно, ротации R' и R'' "перестановочны": чтобы получить матчинг $M \vee L$ из $M \wedge L$, можно применять сначала R', а затем R'', или наоборот. Это дает $\beta(M) \cap \beta(L) = \beta(M \wedge L)$ и $\beta(M) \cup \beta(L) = \beta(M \vee L)$ (т.е. β определяет гомоморфизм решеток). Теперь утверждение легко следует из того факта, что для ротаций $C, D \in \mathcal{R}_G$ не выполняется $C \lessdot D$ тогда и только тогда, когда найдется стабильный матчинг M такой, что $D \in \mathcal{R}_M \not\ni C$.

Как следствие, $\mathcal{M}(G)$ биективно множеству $\mathcal{A}(G)$ анти-цепей в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$. (Напомним, что *анти-цепь* в посете $(P, <)$ – это множество A попарно несравнимых элементов. Оно определяет идеал $\{p \in P : p \le a \, \exists a \in A\}$, и определяется идеалом, будучи множеством его максимальных элементов.)

Мы завершаем этот раздел, объясняя, как эффективно проверять отношение $\lessdot$. Заметим, что C, D не связаны этим отношением, если они являются ротациями для одного и того же стабильного матчинга M (и, следовательно, трансформации в C и D могут производиться в произвольном порядке); в этом случае C и D лежат в разных компонентах в $\Gamma(M)$, и поэтому $V_C \cap V_D = \varnothing$. С другой стороны, если C и D имеют общую вершину v, то они сравнимы по $\lessdot$.

Действительно, для C и D матчинговые ребра, инцидентные v, различные, и порядок следования C и D для любой трассы один и тот же и определяется порядком $<_v$ для этих ребер (см. объяснение свойства (3.2)). Вообще, множество ротаций $\mathcal{R}^v$, содержащих фиксированную вершину v, упорядочено по $\lessdot$, скажем, $\mathcal{R}^v = (C_1 \lessdot C_2 \lessdot \cdots \lessdot C_k)$, и этот порядок легко определяется, так как он согласуется с порядком в $<_v$, если $v \in I$, и обратным порядком, если $v \in J$.

Есть еще одна локальная причина того, что две ротации C, D должны быть сравнимы по $\lessdot$. А именно, предположим, что

$$\begin{gathered} C \text{ содержит матчинговое ребро } e = mw \text{ и активное ребро } vw, \\ \text{и } D \text{ содержит матчинговое ребро } e' = m'w', \text{ для которых: } b = m'w \text{ – ребро в } G, \\ \text{не принадлежащие никаким ротациям и являющимся первым после } e' \\ \text{ребром в } \delta(m'), \text{ и при этом выполняется: } a <_w b <_w e. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Тогда $C \lessdot D$. Действительно, ввиду $a <_w b <_w e$, после трансформации в C ребро b становится недопустимым. С другой стороны, если бы D предшествовало C в какой-то трассе, то именно b было бы активным ребром в $\delta(m')$ и вошло бы в ротацию.

Пример в разд. 3 именно таков: здесь после замены вдоль ротации C ребро $e = 2v$ становится недопустимым, ввиду $d' <_v e <_v a'$ и $d, d' \in M_2$ (при этом e – первое после d ребро в $\delta(2)$). В этом примере посет состоит из двух ротаций C, D при соотношении $C \lessdot D$, и есть ровно три идеала: $\varnothing$, $\{C\}$ и $\{C, D\}$, отвечающие стабильным матчингам $M_1 = M^{\min}$, M_2 и $M_3 = M^{\max}$ (а $\{D\}$ – не идеал).

Заметим, что для нахождения множества ротаций $\mathcal{R}_G$ достаточно определить $M^{\min}$ и затем построить произвольную трассу, делая трансформации на ротациях в текущих матчингах. (Это выполняется естественным алгоритмом за время $O(|V||E|)$. В [16] предложен алгоритм формирования $\mathcal{R}_G$ за время $O(|V|^2)$.)

В свою очередь в [7, Sec. 5] был установлен важный факт, что для эффективного описания порядка $\lessdot$, действительно достаточно рассмотреть пересечения ротаций и учесть (4.2). А именно, образуем ориентированный граф $H = (\mathcal{R}_G, \mathcal{E})$, ребрами которого являются пары ротаций (C, D) такие, что либо $V_C \cap V_D \neq \varnothing$ и $C \lessdot D$, либо выполняется (4.2) (этот граф легко строится за время $O(|V||E|)$; с некоторой изобретательностью время можно уменьшить до $O(|E|)$). Можно показать, что

граф H содержит ребро (C, D) тогда и только тогда, когда найдется стабильный матчинг M такой, что M допускает ротацию C, но не D, а после трансформации M относительно C полученный стабильный матчинг M' уже допускает D. (4.3)

Граф H ациклический, и если какая-либо вершина D в H достижима ориентированным путем из C, то выполняется $C \lessdot D$. Верно и обратное.

Предложение 9. *Если $C \lessdot D$, то в H имеется ориентированный путь из C в D. Следовательно, отношение достижимости для вершин в H совпадает с отношением $\lessdot$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{I}'$ – множество идеалов в посете для H; тогда $\mathcal{I}' \supseteq \mathcal{I}(G)$. Надо доказать, что $\mathcal{I}' \supseteq \mathcal{I}(G)$. Предположим, это не так, т.е. имеется $X \in \mathcal{I}'$, не являющийся идеалом в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$. Пусть при этом X выбрано так, чтобы число элементов $|X|$ было максимальным. Также выберем идеал $R \in \mathcal{I}(G)$ такой, что $R \subset X$, и при этом $|R|$ максимально. Согласно предложению 8, $R = \mathcal{R}_M$ для некоторого стабильного матчинга M. Возьмем допустимую ротацию C для M. Ввиду максимальности R, элемент C должен быть вне X. Тогда $R' := R \cup \{C\}$ – идеал в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$ (соответствующий матчингу M', получаемому из M заменой вдоль C). Также $X' := X \cup \{C\} \in \mathcal{I}'$.

Ввиду максимальности X, имеем $X' \in \mathcal{I}(G)$. Поскольку $X' \supset R'$, и оба X', R' – идеалы в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$, множество $X' - R'$ содержит элемент (ротацию) D такой, что $R'' := R' \cup \{D\} \in \mathcal{I}(G)$. В то же время $X'' := R \cup \{D\}$ не является идеалом в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$; иначе, ввиду $R \subset X'' \subseteq X$, мы получили бы противоречие с максимальностью R (если $X'' \neq X$) или с условием на X (если $X'' = X$).

Итак, мы пришли к ситуации, когда $R, R', R'' \in \mathcal{I}(G)$, $R' = R \cup \{C\}$, $R'' = R' \cup \{D\}$, но $R \cup \{D\} \notin \mathcal{I}(G)$. Тогда ротация D недопустима для матчинга M, но становится допустимой сразу после того, как в M производится замена вдоль ротации C. Это в точности означает, что граф H содержит ребро (C, D); ср. (4.3). Но такое ребро идет из $\mathcal{R}_G - X$ в X, вопреки тому, что X принадлежит $\mathcal{I}'$.

Можно показать, что ребра (C, D) графа H как в (4.3) определяют отношения непосредственного предшествования в посете $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$, а именно, выполнение $C \lessdot D$ и отсутствие ротации C' между C и D (т.е. $C \lessdot C' \lessdot D$).

Замечание 1. Пусть нам даны стабильные матчинги M и M' в двудольном G такие, что $M \prec M'$, и пусть $[M, M']$ обозначает множество ("интервал") стабильных матчингов L, для которых $M \preceq L \preceq M'$. (Как специальные случаи можно рассматривать $M = M^{\min}$ или $M' = M^{\max}$.) Нас интересует возможность "очистки" графа G путем удаления части его ребер с тем, чтобы для полученного графа G' множество стабильных матчингов в точности совпадало с интервалом $[M, M']$ для G. Чтобы попытаться ответить на данный вопрос, возьмем произвольную трассу τ, проходящую через оба M, M', и рассмотрим множество ротаций, используемых на участке трассы от M до M', т.е. $\mathcal{R}_{M,M'}$, см. (4.1). (Трасса τ и множество $\mathcal{R}_{M,M'}$ строятся эффективно; ср. доказательство предложения 6.) Тогда интервал $[M, M']$ состоит ровно из тех $L \in \mathcal{M}(G)$, которые получаются из M применением последовательности ротаций из множества $\mathcal{R}_{M,M'}$. Поэтому искомый граф G' должен включать M и объединение всех ротаций из $\mathcal{R}_{M,M'}$. Однако он также должен учитывать структуру графа H (см. (4.3)), чтобы избежать появления "лишних" матчингов, использующих ротации из $\mathcal{R}_{M,M'}$. Следовательно, нужно добавить ребра как в (4.2) (вида $m'w$), чтобы гарантировать сохранение указанного там отношения $C \lessdot D$ для соответствующих ротаций

C, D в $\mathcal{R}_{M,M'}$. Гипотеза: подграф G' существует и получается из G удалением всех остальных ребер.

5. ОПТИМАЛЬНЫЕ СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ

В этом разделе мы рассматриваем ситуацию, когда двудольный граф $G = (V, E, <)$ дополнительно снабжен вещественной функцией *весов* (или *стоимостей*) ребер $c : E \to \mathbb{R}$. Нас интересует *задача о стабильном матчинге минимального веса*:

$$\text{найти стабильный матчинг } M \in \mathcal{M}(G), \text{ минимизирующий общий весс } (M) := \sum_{e \in M} c(e). \quad (5.1)$$

(Ввиду того, что все стабильные матчинги в G имеют одинаковый размер, добавление константы к функции c фактически не меняет задачи; поэтому можно считать функцию c неотрицательной. При замене c на $-c$ получаем задачу максимизации веса $c(M)$.)

В важном частном случае этой задачи, известном как задача об *оптимальном стабильном матчинге* (см. [6]), вес $c(e)$ ребра $e = mw$ определяется как

$$c(e) := r_I(e) + r_J(e), \quad (5.2)$$

где $r_I(e)$ – порядковый номер ребра e в упорядоченном (согласно $<_m$) списке $\delta(m)$, и, аналогично, $r_J(e)$ – номер в списке $\delta(w)$. (Такая постановка широко обсуждалась в литературе, в частности, в [11, 17]. Здесь интересуются матчингом, который “наиболее благоприятен по суммарным (или средним) предпочтениям для всех персон” (в то время как “алгоритм отложенных принятий” (АОП) дает наилучшее решение только для одного множества из I и J).) В [7] задача с весовой функцией как в (5.2) также называется задачей об *эгалитарном стабильном матчинге*.

Задача (5.1) может быть сформулирована как задача линейного программирования с $0, \pm 1$-матрицей размера $(|V| + |E|) \times |E|$ (о чем будет сказано в следующем разделе), поэтому она может быть решена универсальным сильно полиномиальным алгоритмом (усиленной версией метода эллипсоидов в [18]). Однако изложенное в предыдущем разделе представление $\mathcal{M}(G)$ в виде множества идеалов в посете ротаций $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$ дает возможность решать (5.1) намного более экономным и наглядным методом. Это было предложено Ирвингом–Лейтером–Гасфилдом в [7], и ниже мы описываем этот метод (применительно к рассматриваемому нами произвольному двудольному графу G).

Для заданной функции весов c и произвольной ротации $R = e_1a_1e_2a_2 \cdots e_ka_k$ в $\mathcal{R}_G$, где ребра e_i матчинговые, а ребра a_i активные, определим вес R как

$$c^R := \sum (c(a_i) - c(e_i) : i = 1, \ldots, k). \quad (5.3)$$

При трансформации относительно ротации R к весу текущего матчинга прибавляются веса активных ребер и из него вычитаются веса матчинговых ребер в R. Поэтому вес любого стабильного матчинга M выражается как

$$c(M) = c(M^{\min}) + \sum (c^R : R \in \mathcal{R}_M),$$

где $\mathcal{R}_M$ – идеал в $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$, соответствующий M (т.е. множество ротаций, возникающих на участке (любой) трассы от $M^{\min}$ до M).

Таким образом, (5.1) эквивалентно задаче нахождения идеала минимального веса. В общем случае задача такого рода выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\text{для ориентированного графа } Q = (V_Q, E_Q) \text{ и функции } \zeta\colon V_Q \to \mathbb{R} \text{ найти замкнутое} \\ \text{множество } X \subseteq V_Q \text{ минимального веса } \zeta(X) := \sum (\zeta(v) : v \in X).\end{gathered} \quad (5.4)$$

(Напомним, что множество X считается *замкнутым*, если нет ребер, идущих из $V_Q - X$ в X. В частности, замкнутыми множествами являются $\varnothing$ и V_Q. Без ограничения общности можно считать граф Q ациклическим, так как любой ориентированный цикл не может разделяться замкнутым множеством, и его можно стянуть в одну вершину суммарного веса.)

Решение задачи (5.4), предложенное Пикаром [8], состоит в ее сведении к задаче о минимальном разрезе в ориентированном графе $\hat{Q} = (\hat{V}, \hat{E})$ с пропускными способностями ребер $h(e)$, $e \in \hat{E}$, определяемыми следующим образом.

Положим $V^+ := \{v \in V_Q : \zeta(v) > 0\}$ и $V^- := \{v \in V_Q : \zeta(v) < 0\}$. Граф $\hat{Q}$ получается из Q добавлением двух вершин: “источника” s и “стока” t, а также множества ребер E^+ из s в v для всех $v \in V^+$ и множества ребер E^- из u в t для всех $u \in V^-$. Пропускные способности ребер $e \in \hat{E}$ задаются так:

$$h(e) := \begin{cases} \zeta(v), & \text{если} \quad e = sv \in E^+, \\ |\zeta(u)|, & \text{если} \quad e = ut \in E^-, \\ \infty, & \text{если} \quad e \in E_Q. \end{cases}$$

Для подмножества $S \subseteq \hat{V}$ такого, что $s \in X \not\ni t$, обозначим через $\delta(S)$ множество ребер в $\hat{Q}$, идущих из S в $\hat{V} - S$, называемое *s–t разрезом*; величина $h(\delta(S)) := \sum (h(e) : e \in \delta(S))$ считается пропускной способностью этого разреза.

Лемма 2 (см. [8]). *Подмножество $X \subseteq V_Q$ является замкнутым множеством минимального веса в (Q, ζ) тогда и только тогда, когда $\delta((V_Q - X) \cup \{s\})$ является s–t разрезом минимальной пропускной способности в $(\hat{Q}, h)$.*

Доказательство. Заметим, что $X \subseteq V_Q$ – замкнутое множество тогда и только тогда, когда разрез $E' = \delta((V_Q - X) \cup \{s\})$ не содержит ребер бесконечной пропускной способности; эквивалентно, E' содержится в $E^+ \cup E^-$. Для такого разреза, состоящего из ребер вида sv для $v \in X$ и ребер вида ut для $u \in V_Q - X$, пропускная способность выглядит так:

$$h(E') = \zeta(X \cap V^+) + \sum (|\zeta(u)| : u \in (V_Q - X) \cap V^-) =$$
$$= \zeta(X \cap V^+) + \zeta(X \cap V^-) - \zeta(V^-) = \zeta(X) - \zeta(V^-).$$

Следовательно, вес замкнутого множества отличается от пропускной способности соответствующего разреза на постоянную величину $-\zeta(V^-)$, откуда получаем требуемое утверждение.

Таким образом, задача (5.1) сводится к задаче о минимильном двухполюсном разрезе в сети с $N = O(|E|)$ вершинами и $A = O(|E|)$ ребрами. (Учитывая то, что вместо всего посета $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$ достаточно рассматривать его порождающий граф H, имеющий $O(|E|)$ ребер, см. предложение 9. Применяя быстрые алгоритмы для задачи о максимальном потоке и минимальном разрезе (см., например, обзор в [12, Sec. 10.8]), можно получить временную оценку $O(NA \log N) \simeq \simeq O(|V|^4 \log |V|)$. В [7] приведена имплементация, решающая (5.1) за время $O(|V|^4)$.)

Замечание 2. В [19] доказывалась трудноразрешаемость некоторых вариантов задачи о замкнутых множествах. Используя один из них, а также тот факт, что любой транзитивно замкнутый граф реализуется как посет ротаций (о чем будет сказано в разд. 7), можно показать NP-трудность следующего усиления задачи (5.1): для двудольного $G = (V, E, <)$, функций $c, g : E \to \mathbb{R}_+$ и числа $K \in \mathbb{R}_+$ найти стабильный матчинг $M \in \mathcal{M}(G)$, минимизирующий $c(M)$ при условии $g(M) \geq K$. (Здесь $g(M)$ можно интерпретировать как прибыль, а $c(M)$ как затраты при организации союзов (или контрактов) в M.)

6. ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ И МЕДИАННЫЕ СТАБИЛЬНЫЕ МАТЧИНГИ

Как мы упоминали ранее, для двудольного графа $G = (V = I \sqcup J, E, <)$ имеется полиэдральная характеризация многогранника стабильных матчингов $\mathcal{P}_{\text{st}}(G)$, задаваемая линейным от $|V|, |E|$ числом неравенств. Здесь $\mathcal{P}_{\text{st}}(G)$ – выпуклая оболочка множества характеристических векторов χ^M стабильных матчингов M в пространстве $\mathbb{R}^E$. Первоначальное описание $\mathcal{P}_{\text{st}}(G)$ (в случае $G \simeq K_{n,n}$) было дано в работе Ванде Вейта [9] (и повторено в работе [20]). Ниже мы приводим описание (несколько отличающееся по виду, но близкое к тому, что в [9]) и доказательство, основываясь на изложении в [12], Sec. 18.5g.

Для ребер $e, f \in E$ будем писать $f \prec e$, если они имеют общую вершину v, и выполняется $f <_v e$ (т.е. f предпочтительнее, чем e). Для $e \in E$ обозначим $\gamma(e)$ множество ребер f таких, что $f \preceq e$ (в частности, $e \in \gamma(e)$).

Напомним, что многогранник матчингов в двудольном случае описывается системой линейных неравенств

$$x(e) \geq 0, \quad e \in E; \tag{6.1}$$

$$x(\delta(v)) \leq 1, \quad v \in V. \tag{6.2}$$

В случае стабильных матчингов добавляется еще один тип неравенств:

$$x(\gamma(e)) \geq 1, \quad e \in E. \tag{6.3}$$

Предложение 10. *Система* (6.1)–(6.3) *описывает в точности множество векторов* $x \in \mathbb{R}^E$*, принадлежащих* $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(G)$.

Доказательство. Легко видеть, что для любого стабильного матчинга M вектор $x = \chi^M$ удовлетворяет (6.1)–(6.3). Поэтому достаточно доказать, что если x – вершина многогранника $\mathcal{P}'$, определяемого (6.1)–(6.3), то вектор x целочисленный.

Положим $E^+ := \{e \in E : x(e) > 0\}$ и обозначим V^+ множество вершин в G, покрытых E^+. Для $v \in V^+$ обозначим через e_v наилучшее ребро в $\delta(v) \cap E^+$ относительно порядка $<_v$. Справедливо следующее свойство:

$$\begin{gathered}\text{для } v \in V^+ \text{ и } e_v = \{v, u\} \text{ ребро } e_v \text{ является наихудшим в } (\delta(u) \cap E^+, <_u);\\ \text{кроме того, выполняется } x(\delta(u)) = 1.\end{gathered} \tag{6.4}$$

Действительно, полагая $e := e_v$, имеем

$$\begin{gathered}1 \leq \sum(x(f) : f \preceq e) \text{ (ввиду (6.3))} = \sum(x(f) : f \leq_u e) \text{ (ввиду определения } e_v) =\\ = x(\delta(u)) - \sum(x(f) : f >_u e) \leq 1 - \sum(x(f) : f >_u e) \text{ (применяя (6.2) к } u).\end{gathered}$$

Здесь все неравенства должны обращаться в равенства. Это дает $\sum(x(f) : f >_u e) = 0$ и $x(\delta(u)) = 1$, откуда следует (6.4).

Образуем множества $M := \{e \in E^+ : e = e_v \text{ для } v \in I\}$ и $L := \{e \in E^+ : e = e_v \text{ для } v \in J\}$. Для любой вершины $v \in I \cap V^+$ наилучшее ребро в $\delta(v) \cap E^+$ принадлежит M, а наихудшее ребро, и только оно, принадлежит L (ввиду (6.4)); для вершин в $J \cap V^+$ поведение обратное. Отсюда можно заключить, что оба M и L являются матчингами. Каждое ребро $e \in M \cap L$ образует компоненту в подграфе (V^+, E^+); это дает $x(e) = 1$ (ввиду (6.2), (6.3)). В частности, x целочисленный, если $M = L$.

Пусть теперь $M \neq L$. Очевидно, для любого ребра e в $M' := M - L$ или в $L' := L - M$ выполняется $0 < x(e) < 1$. Поэтому можно выбрать достаточно малое число $\varepsilon > 0$ так, чтобы вектора $x' := x + \varepsilon\chi^{M'} - \varepsilon\chi^{L'}$ удовлетворяли (6.1) и (6.2). Проверим, что оба x' и x'' удовлетворяют также и (6.3).

Для этого рассмотрим ребро $e = mw$ с $x(e) < 1$ и предположим, что $x'(\gamma(e)) < x(\gamma(e))$. Это возможно только если $a \leq_w e <_w b$, где $\{a\} = L \cap \delta(w)$ и $\{b\} = M \cap \delta(w)$. При этом должно выполняться либо (i) $m \notin V^+$, либо (ii) $m \in V^+$, и e более предпочтительное, чем ребро в $M \cap \delta(m)$ (иначе такое ребро давало бы положительный вклад в $x'(\gamma(e))$, откуда $x'(\gamma(e)) = x(\gamma(e))$). Но в этих случаях из равенства $x(\delta(w) = 1$ (ввиду (6.4)) и неравенства $x(b) > 0$ следует

$$x(\gamma(e)) = \sum(x(f) : f \leq_w e) \leq x(\delta(w)) - x(b) < 1,$$

что невозможно. Аналогично, (6.3) верно для x''.

Таким образом, $x', x'' \in \mathcal{P}'$. Но $x' \neq x''$ и $(x' + x'')/2 = x$. Это противоречит тому, что x — вершина в $\mathcal{P}'$.

Имеется еще одно полезное свойство, показанное в [21]; мы приводим его в несколько иной, но эквивалентной, форме.

Лемма 3. *Пусть* $x \in \mathcal{P}_{\mathrm{st}}(G)$, *и пусть* $e = mw$ — *ребро в* G, *для которого* $x(e) > 0$. *Тогда* $x(\delta(m)) = x(\delta(w)) = x(\gamma(e)) = 1$.

Доказательство. Представим x как $\alpha_1\chi^{M_1} + \dots + \alpha_k\chi^{M_k}$, где M_i — стабильный матчинг, $\alpha_i > 0$, и $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$. Обозначим $x_i := \chi^{M_i}$. Ввиду $x(e) > 0$, ребро e принадлежит некоторому M_i. Тогда $x_i(\delta(m)) = x_i(\delta(w)) = x_i(\gamma(e)) = 1$. Аналогичные равенства имеют место и для матчинга M_j, не содержащего e. Действительно, так как M_i и M_j покрывают одно и то же множество вершин (ввиду предложения 2), в M_j есть ребро e', инцидентное m, и ребро e'', инцидентное w. Более того, рассматривая пару M_i, M_j и применяя (2.1), получаем либо $e' <_m e <_w e''$, либо $e' >_m e >_w e''$. В обоих случаях в $\gamma(e)$ попадает ровно одно ребро из e', e''; поэтому $x_j(\gamma(e)) = 1$. Теперь утверждение следует из $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$.

Эта лемма помогает получить интересный результат Тео и Сетурамана.

Предложение 11 (см. [10]). *Пусть* $M_1, \dots, M_\ell$ — *стабильные матчинги в* G. *Для каждого* $m \in \tilde{I}$ *обозначим* E_m *список (с возможными повторениями) ребер в* $\delta(m)$, *принадлежащих этим матчингам и упорядоченных согласно* $<_m$, *и пусть* $e_m(i)$ *обозначает* i*-й элемент в* E_m, $i = 1, \dots, \ell$. *Аналогично, для каждого* $w \in \tilde{J}$ *пусть* $e_w(j)$ *обозначает* j*-й элемент в списке* E_w *ребер в* $\delta(w)$, *принадлежащих данным матчингам и упорядоченных согласно* $<_w$, $j = 1, \dots, \ell$. *Тогда для любого* $k \in \{1, \dots, \ell\}$ *множество ребер* $A(k) := \{e_m(k) : m \in \tilde{I}\}$ *совпадает с множеством* $B(\ell - k + 1) := \{e_w(\ell - k + 1) : w \in \tilde{J}\}$ *и образует стабильный матчинг в* G.

Доказательство. Положим $x_i := \frac{1}{\ell}\chi^{M_i}$. Тогда $x = x_1 + \dots + x_\ell$ лежит в многограннике $\mathcal{P}_{\mathrm{st}}(G)$ (является т.н. "дробным стабильным матчингом").

Вначале предположим для простоты, что все ребра в $M_1, \dots, M_\ell$ различны. Тогда для $m \in \tilde{I}$ список E_m состоит из ℓ различных ребер, и ребро $e_m(k)$ является k-м элементом в E_m. Из Леммы 3, примененной к x и $e = e_m(k)$ следует, что множество $\gamma(e)$ состоит из ℓ элементов. Тогда e является в точности $(\ell - k + 1)$-м элементом в списке E_w (по предположению состоящем из ℓ различных ребер), и тем самым $e_m(k) = e_w(\ell - k + 1)$.

Таким образом, $A(k) = B(\ell - k + 1)$, откуда следует, что $A(k)$ является матчингом в G. Чтобы показать стабильность $A(k)$ рассмотрим произвольное ребро $e = mw \notin A(k)$ в G. Надо проверить, что e не блокирует $A(k)$, или, эквивалентно, что $A(k) \cap \gamma(e) \neq \varnothing$.

По крайней мере один из концов e, скажем, m, принадлежит $\tilde{V}$ (и покрывается $A(k)$); иначе для x и e мы имели бы $x(\gamma(e)) = 0$ вопреки (6.3). Если $w \notin \tilde{V}$, то $x(\delta(w)) = 0$, и из неравенства $x(\gamma(e)) \geq 1$ следует, что для всех ребер $f \in E_m$ (включая $f = e_m(k)$) выполняется $f <_m e$. Это дает требуемое $A(k) \cap \gamma(e) \neq \varnothing$.

Пусть теперь $w \in \tilde{V}$. Ввиду $x(\gamma(e)) \geq 1$, число ребер f в $E_m \cup E_w$, для которых $f \preceq e$, не меньше ℓ. Тогда должно выполняться по крайней мере одно из $e_m(k) \leq_m e$ и $e_w(\ell - k + 1) \leq_w e$, откуда опять следует $A(k) \cap \gamma(e) \neq \varnothing$.

В том случае, когда в $M_1, \dots, M_\ell$ есть общие ребра, можно рассмотреть мультиграф, получаемый из G заменой каждого ребра $e = mw$ с $x(e) > 0$ на $\ell x(e) =: r$ параллельных ребер $e^1, \dots, e^r$. При этом продолжение порядка $<_m$ на эти ребра назначается противоположным продолжению порядка $<_w$, скажем, $e^1 <_m \dots <_m e^r$ и $e^1 >_w \dots >_w e^r$. Требуемое утверждение для этого общего случая получается повторением (с незначительными уточнениями) рассуждений для случая непересекающихся матчингов выше.

Следствие 4. Если ℓ нечетно, то для $k := (\ell+1)/2$ множество, состоящее из k-х по порядку элементов в списках ребер E_v, инцидентных v и принадлежащих $M_1,\dots,M_\ell$, для всех вершин $v \in \tilde{V}$, является стабильным матчингом.

Такой матчинг называют *медианным* для $M_1,\dots,M_\ell$. В [10] был поставлен вопрос о возможности эффективного нахождения медианного стабильного матчинга среди всех стабильных матчингов в G (или "почти медианного", когда число стабильных матчингов четное). Нам это представляется маловероятным в свете того, что задача вычисления числа $|\mathcal{M}(G)|$ является труднорешаемой, о чем будет сказано ниже.

7. О ПОДСЧЕТЕ ЧИСЛА СТАБИЛЬНЫХ МАТЧИНГОВ

Кнут [11] указал примеры, когда число стабильных матчингов двудольного графа экспоненциально велико по сравнению с размером графа, и задал вопрос о сложности точного вычисления этого числа. Ответ был дан Ирвингом и Лейтером [5], которые показали труднорешаемость такой задачи (рассматривая графы вида $K_{n,n}$). Ниже мы кратко поясним идею их доказательства.

Напомним некоторые понятия (отсылая за точными определениями к [22] или [23, разд. 7.3]). Не вдаваясь в полную логическую строгость, можно понимать, что описание той или иной перечислительной задачи (enumeration problem) $\mathcal{P}$ состоит из бесконечного семейства $\mathcal{S}$ конечных множеств, и для каждого $S \in \mathcal{S}$ имеется семейство $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ подмножеств в S ("объектов"). В задаче $\mathcal{P}$ требуется для заданного $S \in \mathcal{S}$ определить число $|\mathcal{F}(S)|$. Говорят, что $\mathcal{P}$ является *$\#P$-задачей* (или *KP-задачей*, в терминологии некоторых авторов), если распознавание объекта проводится за полиномиальное время, т.е. имеется алгоритм, который для любых $S \in \mathcal{S}$ и $X \subseteq S$ за время, полиномиальное от $|S|$, определяет, принадлежит или нет данное множество X семейству $\mathcal{F}(S)$. Говорят, что $\#P$-задача $\mathcal{P} = \{\mathcal{F}(S), S \in \mathcal{S}\}$ является *$\#P$-полной* (или универсальной в классе $\#P$), если любая другая $\#P$-задача $\mathcal{P}' = \{\mathcal{F}'(S'), S' \in \mathcal{S}'\}$ сводится к ней за полиномиальное время (т.е. есть отображение $\omega : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}$ такое, что для каждого $S' \in \mathcal{S}$ число $|\mathcal{F}'(S')|$ определяется из $|\mathcal{F}(\omega(S'))|$ за время, полиномиальное от $|S'|$).

В рассматриваемой нами задаче роль семейства $\mathcal{S}$ играет совокупность реберных множеств E двудольных графов $G = (V, E, <)$, а роль семейства $\mathcal{F}(S)$, $S \in \mathcal{S}$, – соответствующее множество стабильных матчингов в G. Задача определения $|\mathcal{M}(G)|$ – это действительно $\#P$-задача, так как для любого подмножества $M \subseteq E$ можно определить, является ли M стабильным матчингом, за время $O(|E|)$.

Заметим, что $\#P$-аналог любой NP-полной задачи является "труднорешаемым" (поскольку в последней задаче требуется "всего лишь" определить, является ли непустым соответствующее семейство объектов $\mathcal{F}(S)$ (например, содержит ли заданный граф хотя бы один гамильтонов цикл), а в первой нужно найти количество объектов). Однако есть P-задачи, чьи перечислительные аналоги являются $\#P$-полными. Именно таковой и является задача определения $|\mathcal{M}(G)|$. Это вытекает из следующих двух результатов.

Предложение 12. *Задача определения числа анти-цепей в конечном посете является $\#P$-полной.*

Предложение 13. *Пусть $(P, <')$ – посет на n элементах. Существует и может быть построен за время полиномиальное от n двудольный граф $G = (V, E, <)$ такой, что его ротационный посет $(\mathcal{R}_G, \lessdot)$ изоморфен $(P, <')$. Следовательно (ввиду предложения 8), число $|\mathcal{M}(G)|$ стабильных матчингов в G равно числу анти-цепей (или числу идеалов) в посете $(P, <')$.*

Предложение 12 было установлено Прованом и Боллом [24]. Предложение 13 было доказано в [5, Sec. 5] путем явной конструкции требуемого графа G для заданного посета $(P, <')$.

Автор благодарит рецензента за анализ начальной версии статьи и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gale D., Shapley L.S.* College admissions and the stability of marriage // Amer. Math. Monthly. 1962. V. 69. № 1. P. 9–15.
2. *Irving R.W.* An efficient algorithm for the "stable roommates" problem // J. Algorithms. 1985. V. 6. P. 577–595.

3. *Tan J.* A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching // J. Algorithms. 1991. V. 12. P. 154–178.
4. *Baiou M., Balinski M.* Erratum: the stable allocation (or ordinal transportation) problem // Math. Oper. Res. 2002. V. 27. № 4. P. 662–680.
5. *Irving R.W., Leather P.* The complexity of counting stable marriages // SIAM J. Comput. 1986. V. 15. P. 655–667.
6. *McVitie D., Wilson L.B.* The stable marriage problem // Commun. ACM. 1971. V. 14. P. 486–492.
7. *Irving R.W., Leather P., Gusfield D.* An efficient algorithm for the optimal stable marriage problem // J. ACM. 1987. V. 34. P. 532–543.
8. *Picard J.* Maximum closure of a graph and applications to combinatorial problems // Manage. Sci. 1976. V. 22. P. 1268–1272.
9. *Vande Vate J.H.* Linear programming brings marital bliss // Oper. Res. Lett. 1989. V. 8. P. 147–153.
10. *Teo C.P., Sethuraman J.* The geometry of fractional stable matchings and its applications // Math. Oper. Res. 1998. V. 23. № 4. P. 874–891.
11. *Knuth D.E.* Mariages stables. Les Presses de l'Université de Montreal. Montreal, 1976.
12. *Schrijver A.* Combinatorial Optimization. Vol. A. Springer, 2003.
13. *McVitie D., Wilson L.B.* Stable marriage assignments for unequal sets // BIT. 1970. V. 10. P. 295–309.
14. *Dean B.C., Munshi S.* Faster algorithms for stable allocation problems // Algorithmica. 2010. V. 58. № 1. P. 59–81.
15. *Mourtos I., Samaris M.* Stable allocations and partially ordered sets // Discr. Optimiz. 2022. V. 46. P. 100731.
16. *Gusfield D.* Three fast algorithms for four problems in stable marriage // SIAM J. Comput. 1987. V. 16. P. 111–128.
17. *Polya G., Tarjan R.E., Woods D.R.* Notes on Introductory Combinatorics. Birkbauser Verlag, Boston, Mass., 1983.
18. *Tardos È.* A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear problems // Oper. Research. 1986. V. 34. P. 250–256.
19. *Карзанов А.В.* О замкнутых множествах ориентированного графа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. С. 1903–1906.
20. *Rothblum U.G.* Characterization of stable matchings as extreme points of a polytope // Math. Programming. 1992. V. 54. P. 57–67.
21. *Roth A.E., Rothblum U.G., Vande Vate J.H.* Stable matching, optimal assignments and linear programming // Math. Oper. Res. 1993. V. 18. P. 808–828.
22. *Valiant L.G.* The complexity of computing the permanent // Theoret. Comp. Sci. 1979. V. 8. P. 189–201.
23. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
24. *Provan J.S., Ball M.O.* The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected // SIAM J. Comput. 1983. V. 12. P. 777–788.