

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ЛОКАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ АБСТРАКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕКОЭРЦИТИВНЫМ ИСТОЧНИКОМ

© 2023 г. М. В. Артемьева^{1,2,*}, М. О. Корпусов^{1,2}¹ 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 1, Физический факультет,
кафедра математики МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 01.06.2022 г.

Переработанный вариант 11.11.2022 г.

Принята к публикации 15.12.2022 г.

Рассматривается одна абстрактная задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка с нелинейными операторными коэффициентами. Доказана локальная разрешимость в соответствующих пространствах абстрактных непрерывных и дифференцируемых функций. Получены достаточные условия разрушения решений этой абстрактной задачи Коши за конечное время. Библ. 4.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, blow-up, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466923040026, EDN: IVTJTE

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы рассмотрели абстрактную задачу Коши следующего вида:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^N A_j(u) \right) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (1.1)$$

где операторы A_0 и L линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u)$ нелинейные. Отметим, что уравнение (1.1) содержит некоэрцитивный источник

$$\frac{d}{dt} F(u),$$

что сильно усложняет получение достаточных условий разрушения задачи Коши (1.1) за конечное время.

В работе [2] была рассмотрена следующая абстрактная задача Коши для интегродифференциального уравнения с нелинейными операторными коэффициентами:

$$\frac{d}{dt} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right) + L_1 u + \int_0^t ds h(t-s) L_2 u(s) + DP(u) = F(u), \quad u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

где операторы A_0 и L_1, L_2, D линейные, а операторы $A_j(u)$ и $F(u), P(u)$ нелинейные. Для доказательства существования сильного решения этой задачи Коши мы применим метод монотонных операторов Браудера–Минти (см. [3]), а для доказательства разрушения за конечное время применим метод энергетических оценок, развитый в [4].

В настоящей работе мы докажем существование непродолжаемого во времени классического решения задачи Коши

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^N A_j(u) \right) + \frac{d}{dt} DP(u) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1 \quad (1.3)$$

при некоторых условиях на операторные коэффициенты и получим достаточные условия разрушения решения за конечное время. Уравнение (1.3) отличается от уравнения (1.1) наличием нелинейного слагаемого

$$\frac{d}{dt} DP(u),$$

которое в приложениях имеет, например, следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u^2(x, t)}{\partial t \partial x_1}.$$

Отметим, что задача Коши (1.3) существенно отличается от задачи Коши (1.2) в силу условий на функцию $h(t)$, при которых рассматривалась задача (1.2).

Подробная библиография и приложения изложены в работе [1].

2. УСЛОВИЯ НА ОПЕРАТОРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и при $i = \overline{1, 3}$ относительно соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0, \quad \|\cdot\|_j, \quad |\cdot|_i$$

и с сопряженными банаховыми пространствами V_0^*, V_j^*, W_i^* относительно соответствующих скобок двойственностей

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_j, \quad (\cdot, \cdot)_i$$

и соответствующих норм

$$\|\cdot\|_0^*, \quad \|\cdot\|_j^*, \quad |\cdot|_i^*.$$

Предположим, что банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и при $i = \overline{1, 3}$ являются рефлексивными и сепарабельными. Предположим также, что

$$\begin{aligned} A_0 : V_0 &\rightarrow V_0^*, & A_j : V_j &\rightarrow V_j^*, & L_1 : W_1 &\rightarrow W_1^*, \\ F : W_2 &\rightarrow W_2^*, & P : V_0 &\rightarrow W_3, & D : W_3 &\rightarrow V_0^*. \end{aligned}$$

Условия A_0 .

(i) Оператор $A_0 : V_0 \rightarrow V_0^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем имеет место неравенство

$$\|A_0 u\|_0^* \leq M_0 \|u\|_0 \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(ii) оператор A_0 является коэрцитивным, причем имеет место неравенство

$$\langle A_0 u, u \rangle_0 \geq m_0 \|u\|_0^2 \quad \text{для всех } u \in V_0.$$

Замечание 1. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $\langle A_0 u, u \rangle_0^{1/2}$ является эквивалентной нормой на V_0 .

Условия A .

(i) Оператор $A_j : V_j \rightarrow V_j^*$ является монотонным и непрерывным;

(ii) оператор A_j дифференцируем по Фреше, причем его производная Фреше

$$A'_{jf}(u) : V_j \rightarrow \mathcal{L}(V_j, V_j^*)$$

является непрерывным, симметричным, монотонным и неотрицательно определенным оператором при любом фиксированном $u \in V_j$ и $A'_{jf}(0) = 0$;

(iii) оператор A_j является положительно-однородным

$$A_j(ru) = r^{p_j-1} A_j(u) \quad \text{при } p_j > 2, \quad r \geq 0, \quad u \in V_j;$$

(iv) справедливы следующие неравенства сверху и снизу:

$$\|A_j(u)\|_j^* \leq M_j \|u\|_j^{p_j-1}, \quad \langle A_j(u), u \rangle_j \geq m_j \|u\|_j^{p_j}, \quad M_j, m_j > 0.$$

Замечание 2. Из условия (iv) вытекает, что величина $\langle A_j(u), u \rangle_j^{1/p_j}$ является эквивалентной нормой на банаховом пространстве V_j .

Условия F.

(i) Оператор $F : W_2 \rightarrow W_2^*$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е. имеет место неравенство

$$|F(u_1) - F(u_2)|_2 \leq \mu(R) |u_1 - u_2|_2 \quad \text{для всех } u_1, u_2 \in W_2,$$

где $R = \max\{|u_1|_2, |u_2|_2\}$, $\mu = \mu(R)$ есть ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента;

(ii) оператор F является положительно-однородным, т.е.

$$F(ru) = r^{1+q} F(u) \quad \text{при } q > 0, \quad r \geq 0, \quad u \in W_2;$$

(iii) оператор F имеет симметричную производную Фреше

$$F'_f(\cdot) : W_2 \rightarrow \mathcal{L}(W_2, W_2^*);$$

(iv) оператор F удовлетворяет неравенству сверху

$$|F(u)|_2^* \leq M |u|_2^{q+1} \quad \text{для всех } u \in W_2.$$

Условия DP.

(i) Оператор $D : W_3 \rightarrow V_0^*$ является линейным и непрерывным, причем

$$\|Du\|_0^* \leq D_3 |u|_3 \quad \text{для всех } u \in W_3;$$

(ii) оператор $P : V_0 \rightarrow W_3$ является ограниченно липшиц-непрерывным, т.е.

$$|P(u_1) - P(u_2)|_3 \leq \mu_0(R) \|u_1 - u_2\|_0 \quad \text{для всех } u_1, u_2 \in V_0,$$

где функция $\mu_0 = \mu_0(R)$ — ограниченная на всяком компакте неубывающая функция своего аргумента, $R = \max\{\|u_1\|_0, \|u_2\|_0\}$;

(iii) справедливо неравенство сверху

$$|P(u)|_3 \leq D_4 \|u\|_0^{1+q_0}, \quad q_0 \geq 0, \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(iv) для всех $u \in V_0$ имеет место неравенство

$$\langle DP(u), u \rangle_0 = 0 \quad \text{для всех } u \in V_0;$$

(v) оператор P имеет производную Фреше

$$P'_f(\cdot) : V_0 \rightarrow \mathcal{L}(V_0, W_3).$$

Условия L.

(i) Оператор $L : W_1 \rightarrow W_1^*$ является линейным, непрерывным и симметричным, причем

$$|Lu|_1^* \leq D_1 |u|_1 \quad \text{для всех } u \in W_1;$$

(ii) оператор L_1 является коэрцитивным, причем

$$(L_1 u, u)_1 \geq d_1 |u|_1^2 \quad \text{для всех } u \in W_1.$$

Замечание 3. Из условий (i) и (ii) вытекает, что величина $(L_1 u, u)_1^{1/2}$ является эквивалентной нормой на W_1 .

Рассмотрим теперь используемые нами банаховы пространства V_0, V_j, W_i при $j = \overline{1, n}$ и $i = \overline{1, 3}$. Пусть H — это некоторое сепарабельное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным. Предположим, что выполнены следующие условия:

Условия H .

Имеют место следующие цепочки плотных и непрерывных вложений:

$$V_0 \stackrel{ds}{\subset} V_j \stackrel{ds}{\subset} H \stackrel{ds}{\subset} V_j^* \stackrel{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n},$$

$$V_0 \stackrel{ds}{\subset} W_i \stackrel{ds}{\subset} H \stackrel{ds}{\subset} W_i^* \stackrel{ds}{\subset} V_0^* \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 3}.$$

Заметим, что в силу условий H имеют место следующие свойства:

$$\langle f, u \rangle_0 = \langle f, u \rangle_j \quad \text{для всех} \quad f \in V_j^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.1)$$

$$\langle f, u \rangle_0 = \langle f, u \rangle_i \quad \text{для всех} \quad f \in W_i^*, \quad u \in V_0, \quad \text{при} \quad i = \overline{1, 3}. \quad (2.2)$$

3. РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО НЕРАВЕНСТВА

Пусть функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T]$ и удовлетворяет интегродифференциальному неравенству

$$\Phi\Phi'' - \alpha(\Phi')^2 + \beta\Phi^2 + \gamma_1\Phi(t) + \gamma_2 T \int_0^t \Phi(s)ds\Phi(t) + \gamma_3\Phi^{1+\lambda}(t) \geq 0, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

при $\alpha > 1$, $\lambda > 1$ и $\beta \geq 0$, $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \geq 0$, $\gamma_3 \geq 0$. Справедлива следующая теорема (см. [1]).

Теорема 1. Пусть $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0]$ и удовлетворяет дифференциальному неравенству (3.1) и

$$\Phi(0) > 0, \quad \Phi'(0) > 0, \quad \alpha > 1, \quad 1 < \lambda < 2\alpha - 1, \quad (3.2)$$

причем начальные условия $\Phi(0)$ и $\Phi'(0)$ таковы, что существует T_1 — наименьший положительный корень уравнения

$$(\Phi'(0))^2 = \frac{1}{T_1^2(\alpha-1)^2}(\Phi(0))^2 + \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}, \quad (3.3)$$

то $\Phi(t)$ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \quad (3.4)$$

для всех $t \in [0, \min\{T_1, T_0\})$, где

$$A(T_1) = (\alpha-1)^2\Phi^{-2\alpha}(0)[(\Phi'(0))^2 - \frac{\beta + \gamma_2 T_1^2}{\alpha-1}(\Phi(0))^2 - \frac{2\gamma_1}{2\alpha-1}\Phi(0) - \frac{2\gamma_3}{(\alpha-1)\delta}(\Phi(0))^{1+\lambda}] > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Все утверждения теоремы в целом доказаны. Отметим только, что в силу явного вида функции $A = A(T)$ и неравенства (3.3) выполнены неравенства

$$A(T) \geq A(T_1) > 0 \quad \text{для всех} \quad T \in [0, T_1].$$

Поэтому имеют место неравенства

$$\Phi(t) \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T)t\right]^{1/(\alpha-1)}} \geq \frac{1}{\left[\Phi^{1-\alpha}(0) - A^{1/2}(T_1)t\right]^{1/(\alpha-1)}}$$

для всех $t \in [0, T]$. Значит, функция в правой части неравенства (3.4) является неограниченной при $T = T_1$ и $t \in [0, T_1]$.

4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРОДОЛЖАЕМОГО РЕШЕНИЯ

Пусть выполнены все условия, сформулированные в разд. 2. Рассмотрим следующую задачу Коши для абстрактного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right) + \frac{d}{dt} DP(u) + Lu = \frac{d}{dt} F(u), \quad (4.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \quad (4.2)$$

Дадим определение классического решения этой абстрактной задачи Коши.

Определение 1. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; V_0)$ называется *классическим решением задачи Коши* (4.1), если

$$\frac{d^2}{dt^2} A_j(u) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0^*) \quad \text{для всех } j = \overline{1, n}, \quad (4.3)$$

равенство (4.1) справедливо для каждого $t \in [0, T]$ и понимается в смысле банахового пространства V_0^* , причем

$$u_0 \in V_0, \quad u_1 \in V_0. \quad (4.4)$$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T]; V_0)$ – классическое решение задачи (4.1). Пусть $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ – произвольная функция. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(t) := \int_t^T \phi(s) ds \in \mathbb{C}^{(1)}[0, T], \quad t \in [0, T]. \quad (4.5)$$

Заметим, что $\psi(T) = 0$ и $\psi'(t) = -\phi(t)$. Справедливы следующие формулы интегрирования по частям для интегралов Бохнера в V_0^* :

$$\begin{aligned} \int_0^T \frac{d^2}{dt^2} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \psi(t) dt &= \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \psi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \\ &+ \int_0^T \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \phi(t) dt = - \left(A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A_j'(u_0) u_1 \right) \int_0^T \phi(t) dt + \\ &+ \int_0^T \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) \phi(t) dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\int_0^T Lu(t) \psi(t) dt = \int_0^t Lu(s) ds \psi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \int_0^T \phi(t) \int_0^t Lu(s) ds dt \int_0^T \phi(t) \int_0^t Lu(s) ds dt, \quad (4.7)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} F(u)(t) \psi(t) dt = -F(u_0) \int_0^T \phi(t) dt + \int_0^T F(u)(t) \phi(t) dt, \quad (4.8)$$

$$\int_0^T \frac{d}{dt} DP(u)(t) \psi(t) dt = -DP(u_0) \int_0^T \phi(t) dt + \int_0^T DP(u)(t) \phi(t) dt. \quad (4.9)$$

Теперь, умножив обе части равенства (4.1) на функцию $\psi(t)$, с учетом (4.6)–(4.8) мы получим следующее равенство:

$$\int_0^T \left\{ \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u) + \int_0^t Lu(s) ds - F(u) - f \right\} \phi(t) dt = 0 \quad (4.10)$$

для всех $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, где

$$f := -F(u_0) + DP(u_0) + A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A'_{jf}(u_0) u_1. \quad (4.11)$$

Полученное равенство (4.10) позволяет сформулировать определение сильного решения задачи Коши (4.1).

Определение 2. Функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0)$ называется *сильным решением задачи Коши* (4.1), если для любой функции $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ выполнено равенство (4.10), причем $u(0) = u_0 \in V_0$, $u_1 \in V_0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть банахово пространство V_0 сепарабельно, тогда в классе сильных решений задачи Коши (4.1) равенство (4.10), выполненное для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, эквивалентно равенству

$$\int_0^T \left\langle \frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u)(t) + \int_0^t Lu(s) ds - F(u) - f, v(t) \right\rangle_0 dt = 0 \quad (4.12)$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0)$.

Замечание 4. С учетом равенства скобок двойственности (2.1) и (2.2) равенство (4.12) можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), v(t) \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), v(t) \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), v(t) \rangle_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t (Lu(s), v(t))_1 ds - (F(u), v(t))_2 - \langle f, v(t) \rangle_0 \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

для всех $v(t) \in \mathbb{C}([0, T]; V_0)$. Теперь в равенстве (4.13) возьмем $v(t) = \phi(t)w$, $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$, $w \in V_0$ и получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \phi(t) \left[\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \right. \\ & \left. + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

для любых $\phi(t) \in \mathbb{C}[0, T]$ и $w \in V_0$. В силу условий на операторные коэффициенты имеем

$$\left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 \in \mathbb{C}[0, T], \quad \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j \in \mathbb{C}[0, T], \quad (4.15)$$

$$\int_0^t (Lu(s), w)_1 ds \in \mathbb{C}[0, T], \quad (F(u), w)_2 \in \mathbb{C}[0, T], \quad (4.16)$$

$$\langle DP(u), w \rangle_0 \in \mathbb{C}[0, T]. \quad (4.17)$$

Поэтому из равенства (4.14) и свойств (4.15), (4.16) в силу основной леммы вариационного исчисления вытекает следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt} A_0 u(t), w \right\rangle_0 + \sum_{j=1}^n \left\langle \frac{d}{dt} A_j(u)(t), w \right\rangle_j + \langle DP(u)(t), w \rangle_0 + \\ & + \int_0^t (Lu(s), w)_1 ds - (F(u), w)_2 - \langle f, w \rangle_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

для всех $w \in V_0$ и всех $t \in [0, T]$.

Теперь рассмотрим абстрактную задачу Коши

$$\frac{d}{dt} \left(A_0 u(t) + \sum_{j=1}^n A_j(u)(t) \right) + DP(u)(t) + \int_0^t Lu(s) ds = F(u) + f, \quad (4.19)$$

$$u(0) = u_0. \quad (4.20)$$

Дадим определение классического решения задачи Коши (4.19), (4.20).

Определение 3. Классическим решением задачи Коши (4.19), (4.20) называется функция $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T]; V_0)$, удовлетворяющая уравнению (4.19) для каждого $t \in [0, T]$ в смысле V_0^* , причем $u_0 \in V_0$ и $f \in V_0^*$.

Совершенно понятно, что классическое решение задачи Коши (4.19) является сильным решением задачи Коши (4.1).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Пусть выполнены все условия разд. 2 на операторные коэффициенты A_0, A_j, L, DP и F . Тогда при дополнительном условии, что операторы $A_j(u)$ дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше для всех $u \in V_j$, для любых u_0 и u_1 из V_0 найдется такое $T_0 = T_0(u_0, u_1) > 0$, что существует единственное классическое решение задачи Коши (4.1) класса $u(t) \in \mathbb{C}^{(2)}([0, T_0]; V_0)$, причем либо $T_0 = +\infty$, либо $T_0 < +\infty$ и в последнем случае имеет место предельное свойство

$$\lim_{t \uparrow T_0} \left\| A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u) \right\|_0^* (t) = +\infty. \quad (4.21)$$

Доказательство. Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.4 работы [1].

5. РАЗРУШЕНИЕ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (4.1) ПРИ $q + 2 > \bar{p}$

Пусть $u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; V_0)$ – классическое решение задачи (4.19). Прежде всего введем обозначения

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \langle A_0 u, u \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u), u \rangle_j, \quad (5.1)$$

$$J(t) = \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n (p_j - 1) \langle A'_{jf}(u) u', u' \rangle_j. \quad (5.2)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Имеет место следующее неравенство:

$$(\Phi'(t))^2 \leq \bar{p} J(t) \Phi(t) \quad \text{при} \quad \bar{p} = \max_{j=1, n} p_j, \quad t \in [0, T_0]. \quad (5.3)$$

Доказательство. Доказательство приведено в лемме 7.1 работы [1].

Заметим, что определение 2 сильного решения задачи Коши (4.1) эквивалентно равенству (4.18).

Положим сначала в равенстве (4.18) $w = u(t) \in \mathbb{C}^{(1)}([0, T_0]; V_0)$ из определения (5.1) функционала $\Phi(t) \in \mathbb{C}[0, T_0]$ и свойства (iv) условий DP , получим следующее первое энергетическое равенство:

$$\frac{d\Phi}{dt} + \int_0^t ds (Lu(s), u(t))_1 = (F(u), u)_2 + \langle f, u \rangle_0. \quad (5.4)$$

Теперь положим в равенстве (4.18) $w = u'(t) \in \mathbb{C}([0, T_0]; V_0)$ и с учетом определения (5.2) функционала $J(t)$ получим второе энергетическое равенство

$$J(t) + \int_0^t ds (Lu(s), u'(t))_1 + \langle DP(u), u' \rangle_0 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (F(u), u)_2 + \frac{d}{dt} \langle f, u \rangle_0, \quad (5.5)$$

где мы воспользовались равенством

$$(F(u), u')_2 = \frac{1}{q+2} \frac{d}{dt} (F(u), u)_2.$$

Выразим из равенства (5.4) величину $(F(u), u)_2$, подставим его в равенство (5.5) и после элементарных преобразований получим следующее выражение для функционала $J(t)$:

$$J(t) = \frac{1}{q+2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{1}{q+2} (Lu, u)_1 - \langle DP(u), u' \rangle_0 - \frac{q+1}{q+2} \int_0^t (Lu(s), u'(t)) ds + \frac{q+1}{q+2} \langle f, u' \rangle_0. \quad (5.6)$$

Для дальнейшего мы воспользуемся неравенством Коши–Буняковского с произвольным $\varepsilon_1 > 0$:

$$ab \leq \varepsilon_1 a^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} b^2, \quad a, b \geq 0.$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{q+2} (Lu, u)_1 \leq \frac{l}{q+2} \langle A_0 u, u \rangle_0 = \frac{2l}{q+2} \Phi(t), \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{q+1}{q+2} \int_0^t (Lu(s), u'(t))_1 ds \right| &\leq \frac{q+1}{q+2} l \int_0^t \langle A_0 u(s), u(s) \rangle_0^{1/2} \langle A_0 u'(t), u'(t) \rangle_0^{1/2} ds \leq \\ &\leq \varepsilon \langle A_0 u'(t), u'(t) \rangle_0 + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{4\varepsilon} \int_0^t \langle A_0 u(s), u(s) \rangle_0 ds \leq \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds, \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\frac{q+1}{q+2} |\langle f, u' \rangle_0| \leq \frac{q+1}{q+2} \|f\|_0^* \|u'\|_0 \leq \frac{q+1}{q+2} \|f\|_0^* \frac{1}{m_0^{1/2}} \langle A_0 u', u' \rangle_0^{1/2} \leq \varepsilon J(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \quad (5.9)$$

$$|\langle DP(u), u' \rangle_0| \leq \varepsilon \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \frac{b}{\varepsilon} \langle A_0 u, u \rangle_0^{1+q_0} \leq \varepsilon J(t) + \frac{d}{\varepsilon} \Phi^{1+q_0}(t). \quad (5.10)$$

Итак, из равенства (5.6) с учетом неравенств (5.7)–(5.9) получим оценку

$$(1 - 3\varepsilon)J(t) \leq \frac{1}{q+2} \frac{d^2 \Phi(t)}{dt^2} + \frac{2l}{q+2} \Phi(t) + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds + \left(\frac{q+1}{q+2} \right)^2 \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} + \frac{d}{\varepsilon} \Phi^{1+q_0}(t). \quad (5.11)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Тогда из неравенств (5.3) и (5.11) получим следующее обыкновенное дифференциальное неравенство второго порядка:

$$\begin{aligned} \Phi \Phi'' - \frac{q+2}{\bar{p}} (1 - 3\varepsilon) (\Phi')^2 + 2l\Phi^2 + \frac{(q+1)^2}{q+2} l^2 \frac{T}{2\varepsilon} \int_0^t \Phi(s) ds \Phi(t) + \\ + \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon} \Phi + \frac{d(q+2)}{\varepsilon} \Phi^{2+q_0} \geq 0, \end{aligned} \quad (5.12)$$

которое перепишем в общем виде, сделав замену $3\varepsilon \mapsto \varepsilon$:

$$\Phi \Phi'' - \alpha (\Phi')^2 + \beta \Phi^2 + \gamma_1 \Phi + \gamma_2 T \int_0^t \Phi(s) ds \Phi(t) + \gamma_3 \Phi^{1+\lambda} \geq 0, \quad (5.13)$$

где

$$\alpha = \frac{q+2}{\bar{p}} (1 - \varepsilon), \quad \beta = 2l, \quad \gamma_1 = \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{3\|f\|_0^{*2}}{4m_0\varepsilon}, \quad (5.14)$$

$$\gamma_2 = l^2 \frac{(q+1)^2}{q+2} \frac{3}{2\varepsilon}, \quad \gamma_3 = \frac{3d(q+2)}{\varepsilon}, \quad \lambda = 1 + q_0. \quad (5.15)$$

Потребуем выполнения условия $\alpha > 1$. Отсюда получим неравенства

$$0 < \varepsilon < \frac{q+2-\bar{p}}{q+2}, \quad q+2 > \bar{p}. \quad (5.16)$$

Кроме того, имеем

$$2\alpha - 1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 \varepsilon}{\bar{p}}, \quad \alpha_1 = 2(q+2) - \bar{p}, \quad \alpha_2 = 2(q+2). \quad (5.17)$$

Выберем параметр $\varepsilon > 0$, входящий в коэффициенты (5.14), таким образом, чтобы коэффициент

$$\frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1}$$

равенства (3.3) принял минимальное значение:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \begin{cases} \frac{q+2-\bar{p}}{q+2} - \delta_0, & \text{если } q+2 \leq \frac{3}{2}\bar{p}, \\ \frac{2(q+2)-\bar{p}}{4(q+2)}, & \text{если } \frac{3}{2}\bar{p} < q+2, \end{cases} \quad (5.18)$$

для любого малого $\delta_0 > 0$. Теперь подставим это значение $\varepsilon = \varepsilon_0$ в коэффициенты (5.14). Проверим выполнимость условий теоремы 1.

Пусть $u_0 \in V_0$ и $f \in V_0^*$ — произвольные фиксированные, а $u_1 \in V_0$ — единственное решение следующего уравнения в V_0^* :

$$A_0 u_1 + \sum_{j=1}^n A'_{jf}(u_0) u_1 = -DP(u_0) + F(u_0) + f \in V_0^*. \quad (5.19)$$

Решение $u_1 \in V_0$ этого уравнения действительно существует в силу теоремы Браудера—Минти. В нашем случае функционал $\Phi(t) \in \mathbb{C}^{(2)}[0, T_0]$ имеет вид (5.1). Поэтому при $t = 0$ имеем

$$\Phi(0) = \frac{1}{2} \langle A_0 u_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u_0), u_0 \rangle_j, \quad (5.20)$$

а производная Фреше функционала $\Phi(t)$ имеет следующий вид:

$$\Phi'(t) = \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle (A_j(u))', u' \rangle_j \langle A_0 u', u' \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle A'_{jf}(u) u', u' \rangle_j. \quad (5.21)$$

Отсюда получаем, что

$$\Phi'(0) = \langle A_0 u_1, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n \langle A'_{jf}(u_0) u_1, u_0 \rangle_j. \quad (5.22)$$

С учетом равенства (5.19) и свойства (iv) условия DP получим следующее выражение:

$$\Phi'(0) = (F(u_0), u_0)_2 + \langle f, u_0 \rangle_0. \quad (5.23)$$

Перепишем уравнение (3.3) в эквивалентном виде

$$K_1 T_1^4 + K_2 T_1^2 + K_3 = 0, \quad (5.24)$$

где

$$K_1 = \frac{\gamma_2}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2, \quad K_3 = \frac{1}{(\alpha - 1)^2} (\Phi(0))^2, \quad (5.25)$$

$$K_2 = \frac{\beta}{\alpha - 1} (\Phi(0))^2 + \frac{2\gamma_1}{2\alpha - 1} \Phi(0) + \frac{2\gamma_3}{(\alpha - 1)\delta} (\Phi(0))^{1+\lambda} - (\Phi'(0))^2. \quad (5.26)$$

Введем следующие функции:

$$I_1(R) = \left(\Phi'(0) \Big|_{Ru_0} \right)^2 = \left((F(Ru_0), Ru_0)_2 + \langle f, Ru_0 \rangle_0 \right)^2 = \left(R^{q+2} (F(u_0), u_0)_2 + R \langle f, u_0 \rangle_0 \right)^2, \quad (5.27)$$

$$I_2(R) = \Phi(0) \Big|_{Ru_0} = R^2 \frac{1}{2} \langle Au_0, u_0 \rangle_0 + \sum_{j=1}^n R^{p_j} \frac{p_j - 1}{p_j} \langle A_j(u_0), u_0 \rangle_j. \quad (5.28)$$

Подставим теперь в правые части равенств (5.25) и (5.26) вместо u_0 элемент Ru_0 при $R \geq 0$. Пусть, кроме того, $x = T_1^2$. Тогда биквадратное уравнение примет вид

$$K_1 x^2 + K_2 x + K_3 = 0. \quad (5.29)$$

Прежде всего, заметим, что в силу условий

$$q + 2 > \bar{p} = \max_{j=1, n} p_j, \quad 2(q + 2) > \bar{p}(1 + \lambda) \Rightarrow \lambda < \frac{2(q + 2)}{\bar{p}} - 1 \quad (5.30)$$

и формул (5.27) и (5.28) коэффициент K_2 окажется отрицательным при достаточно большом $R > 0$ и при условии $(F(u_0), u_0)_2 \neq 0$. Дискриминант

$$\mathcal{D} = K_2^2 - 4K_1 K_3$$

является положительным при достаточно большом $R > 0$. Итак, при достаточно большом $R > 0$ существует положительный корень уравнения (5.29)

$$T_1^2 = x = \frac{-K_2 + \sqrt{K_2^2 - 4K_1 K_3}}{2K_1} > 0.$$

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 4. Пусть выполнены неравенства

$$q + 2 > \bar{p}, \quad 0 < q_0 < 2 \frac{q + 2 - \bar{p}}{\bar{p}},$$

$u_0 \in V_0$, $f \in V_0^*$ и $u_1 \in V_0$ является решением уравнения (5.19), причем

$$(F(u_0), u_0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно большом $R > 0$ для начальной функции Ru_0 функционал $\Phi(t)$, определенный формулой (5.1), удовлетворяет неравенству (3.4).

Справедливо следующее утверждение (см. лемму 7.4 работы [1]):

Лемма 2. Имеет место двустороннее неравенство

$$M_1 \Phi^{1/2}(t) \leq \|A(u)\|_0^* \leq M_2 \Phi^{1/2} + \sum_{j=1}^n B_j \Phi^{(p_j-1)/p_j}(t), \quad (5.31)$$

где постоянные M_1 , M_2 и B_j больше нуля и не зависят от $u(t)$,

$$A(u) := A_0 u + \sum_{j=1}^n A_j(u).$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены неравенства

$$q + 2 > \bar{p}, \quad 0 < q_0 < 2 \frac{q + 2 - \bar{p}}{\bar{p}},$$

в качестве начальной функции $u_0 \in V_0$ взята функция Ru_0 , а $u_1 \in V_0$ — решение уравнения (5.19) при $f \in V_0^*$, в котором вместо u_0 нужно подставить Ru_0 . Тогда при достаточно большом $R > 0$ время $T_0 > 0$ существования классического решения задачи (4.1) конечно и имеет следующее предельное свойство:

$$\lim_{t \uparrow T_0} \Phi(t) = +\infty, \quad (5.32)$$

а также справедлива оценка сверху $T_0 \leq T_1$ на время разрушения решения, где число T_1 является положительным решением биквадратного уравнения (3.3).

6. ПРИМЕРЫ

Приведем примеры начально-краевых задач, для которых справедливы полученные в работе результаты. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Пример 1. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2} u \right) - u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q}{\partial t} u = 0, \quad (6.1)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad (6.2)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.3)$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \quad (6.4)$$

Пример 2. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Delta u - u - \sum_{j=1}^n |u|^{p_j-2} u \right) + a_1 \Delta u - a_2 u + \frac{\partial^2 |u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} - \frac{\partial |u|^q}{\partial t} u = 0, \quad (6.5)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^1(\Omega), \quad (6.6)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.7)$$

где $p_j > 2$, $q > 0$, $q_0 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^1(\Omega), \quad V_j = L^{p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \quad (6.8)$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = L^{q+2}(\Omega). \quad (6.9)$$

Пример 3. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\Delta^2 u + \Delta u + \sum_{j=1}^n \operatorname{div} (|\nabla u|^{p_j-2} \nabla u) \right) + \Delta u + \frac{\partial^2 |\nabla u|^{1+q_0}}{\partial t \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} (|\nabla u|^q \nabla u), \quad (6.10)$$

$$u(0) = u_0 \in H_0^2(\Omega), \quad u'(0) = u_1 \in H_0^2(\Omega), \quad (6.11)$$

$$u(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial n_x} = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega, \quad (6.12)$$

где $p_j > 2$, $q_0 > 0$, $q > 0$. При этом рассматриваются следующие банаховы пространства:

$$V_0 = H_0^2(\Omega), \quad V_j = W_0^{1,p_j}(\Omega), \quad W_1 = H_0^1(\Omega), \quad (6.13)$$

$$H = L^2(\Omega), \quad W_2 = W_0^{1,q+2}(\Omega). \quad (6.14)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпусов М.О. Разрушение и глобальная разрешимость в классическом смысле задачи Коши для формально гиперболического уравнения с некоэрцитивным источником // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 5. С. 119–150.
2. Корпусов М.О. Разрушение решений неклассических нелокальных нелинейных модельных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 621–648.
3. Гаевский Х., Греггер К., Захаруас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
4. Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations // De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl. 2011. V. 15. P. 648.