ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 987–999

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.956.25

ОБ ОТСУТСТВИИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕЛОКАЛЬНЫМ ИСТОЧНИКОМ[1)]

В. Е. Адмасу[1,*]

[1] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

**e-mail: mihretesme@gmail.com*

Поступила в редакцию 15.11.2021 г.
Переработанный вариант 19.02.2023 г.
Принята к публикации 02.03.2023 г.

Доказывается отсутствие решений полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка с сингулярным потенциалом и нелокальными источниками. Доказательства основаны на методе пробных функций, разработанном Э. Митидиери и С.И. Похожаевым. Библ. 13.

Ключевые слова: сингулярный потенциал, нелокальный источник, метод пробных функций.

DOI: 10.31857/S0044466923060029, **EDN:** TQSKVV

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия большое внимание уделялось проблеме нахождения необходимых условий разрешимости уравнений и неравенств различных типов в частных производных. Многие авторы исследовали проблему условий локальной и глобальной разрешимости нелинейных дифференциальных уравнений, неравенств и их систем. Сейчас исследователи интересуются оценкой условий существования и поведения решений для различных классов уравнений и неравенств в частных производных в соответствующих функциональных пространствах. Например, большое значение придается проблеме существования и разрушения решений параболических уравнений и неравенств в частных производных с сингулярными коэффициентами или начальными данными в соответствующих функциональных классах.

Получено много пионерских результатов об отсутствии локальных и глобальных решений задач Коши для дифференциальных уравнений или неравенств параболического типа без потенциального члена (см. [1–6] (эллиптические или параболические уравнения без сингулярных переменных коэффициентов) и ссылки там). Исследования локальной разрешимости квазилинейных параболических уравнений и неравенств с потенциальными членами можно найти в [7–10]. Что касается нелокальных задач, в [11] рассмотрены некоторые вырожденные параболические неравенства с локальными и нелокальными нелинейностями, причем было доказано отсутствие глобальных нетривиальных решений методом пробных функций. Позднее в [12] было доказано отсутствие глобального слабого решения для однородных квазилинейных параболических неравенств при наличии сингулярного потенциала и нелокального источника. Однако условия отсутствия решений при наличии потенциала и весового источника не рассматривались для полулинейных параболических неравенств и систем высокого порядка.

В настоящей работе мы обобщаем результаты [12] на параболические неравенства и системы высокого порядка, модифицируя условия на источник, и получаем условия отсутствия решений при наличии сингулярного потенциала и нелокального весового источника. Мы используем метод пробных функций (см. [1], [2], [4], [13]), чтобы определить влияние сингулярного потенциала, весовой функции и нелокального источника на отсутствие неотрицательного нетривиального глобального слабого решения.

В разд. 2 мы доказываем отсутствие решений для рассматриваемого неравенства, а в разд. 3 – для системы таких неравенств.

[1)] Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН.

2. СИНГУЛЯРНОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ НЕРАВЕНСТВО

Рассмотрим неравенство вида

$$\begin{aligned}
&\partial u/\partial t \geq \Delta^k u - V(x)u^q + |x|^\alpha u^s \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),\\
&u(x,t) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$k \in \mathbb{N}, \quad \min\{q,s,r,\alpha\} > 0, \quad q(s+r) > q + rs > q, \tag{2.2}$$

начальная функция $u_0(x)$ неотрицательна и локально интегрируема, $V(x)$ – положительный сингулярный потенциал, удовлетворяющий оценке $V(x) \sim |x|^{-\sigma}$, $\sigma > 0$, а $\beta(x)$ – положительная весовая функция, сингулярная в начале координат, т.е. $\beta(x) \geq c|x|^{-l}$, $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ с некоторым $c > 0$ и $l \in \mathbb{R}_+$.

Определение 1. Неотрицательная функция $u(x,t)$ называется *слабым решением нелинейного неравенства* (2.1), если $u(x,t) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$ такова, что $V(x)u^q, |x|^\alpha u^s \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N \times (0,\infty))$, и соотношение

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \leq -\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\Delta^k\varphi\right)dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q\varphi dxdt \tag{2.3}$$

выполняется для любой пробной функции $\varphi \in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N \times (0,\infty); \mathbb{R}_+)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (2.2). *Если* $\alpha > lr/q$ *и предположим, что*

$$N \leq \frac{(\alpha+\sigma)q - lr}{q(q+r-s) - r}, \tag{2.4}$$

то задача (2.1) *не имеет нетривиального глобального слабого решения.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ – слабое решение неравенства (2.1), а φ – неотрицательная пробная функция. Тогда по определению слабого решения имеем

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \leq \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\Delta^k\varphi\right|dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q\varphi dxdt. \tag{2.5}$$

Теперь оценим правую часть неравенства (2.5). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (2.5), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha u^s\varphi dx\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta(x)u^q\varphi dx\right)^{r/(q\lambda_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2}. \tag{2.6}$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt &\leq \int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha u^s\varphi dx\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta(x)u^q\varphi dx\right)^{r/(q\lambda_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2} dt \leq\\
&\leq \left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt\right)^{1/\lambda_1'} \leq \\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + C_1\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r)-(q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Используя рассуждения, аналогичные рассмотрению первого члена в (2.5), ко второму и третьему членам, получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u|\Delta^k\varphi|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi dx\right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \varphi dx\right)^{r/(q\lambda_1)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2}. \tag{2.8}$$

Вновь применяя неравенства Гёльдера и Юнга, имеем

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\Delta^k\varphi\right|dxdt \le \int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi dx\right)^{1/\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta(x) u^q \varphi dx\right)^{r/q\lambda_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2} dt \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt\right)^{1/\lambda_1'} \le \tag{2.9}$$

$$\le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + C_2\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt,$$

где

$$\lambda_1 = s + r > 1, \quad \lambda_2 = \frac{q(s+r)}{q(s+r)-(q+r)} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1 - \frac{1}{\lambda_1}.$$

Аналогично третий член в правой части (2.5) становится

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q\varphi dx \le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + C_3\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma-\frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt, \tag{2.10}$$

где

$$\lambda_3 = \frac{s+r}{q} > 1, \quad \lambda_4 = \frac{s+r}{s-q} > 1, \quad \frac{1}{\lambda_3'} = 1 - \frac{1}{\lambda_3}.$$

Тогда из (2.5)–(2.10) следует

$$\begin{gathered}\int_0^\infty\int_{\Re^N} |x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + 4\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \le 4C_1\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt + \\ + 4C_2\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt + 4C_3\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma-\frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Теперь положим $R > 0$ и введем пробные функции вида $\varphi(x,t) = \varphi_R(x,t) = \varphi_0\left(t/R^\theta\right)\varphi_0\left(|x|^2/R^2\right)$ с $\theta \ge 1$. Здесь φ_0 – функция класса $C_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\varphi_0(s) = \begin{cases}1, & 0 \le s \le 1,\\ 0, & s \ge 2.\end{cases} \tag{2.12}$$

Далее оценим правую часть (2.11). Рассмотрим замену переменных вида $x = R\xi, t = R^\theta\tau$, тогда

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, \tag{2.13}$$

где $\gamma_1 = \theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} dx \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} dt = R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau, \tag{2.14}$$

где $\gamma_2 = \theta + \left(N - 2k\lambda_2 + \frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1} \right) \frac{\lambda_1'}{\lambda_2}$;

$$\int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} \beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} dx \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} dt = R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3}} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau, \tag{2.15}$$

где $\gamma_3 = \theta + \left(N - \left(\sigma + \frac{\alpha}{\lambda_3} \right)\lambda_4 + \frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3} \right) \frac{\lambda_3'}{\lambda_4}$.

Тогда из (2.11)–(2.15) получим

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dx dt + 4\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \le 4C_1 R^{\gamma_1} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau + \\ &+ 4C_2 R^{\gamma_2} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau + 4C_3 R^{\gamma_3} \int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3}} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Теперь выберем φ_0 так, что

$$\int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1} - \frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}} \left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2} \varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}} d\xi \right)^{\lambda_1'/\lambda_2} d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\left(-\sigma - \frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3}} \varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}} d\xi \right)^{\lambda_3'/\lambda_4} d\tau < \infty.$$

Тогда из неравенства (2.16) следует, что

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dx dt + 4\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \le \sum_{i=1}^3 C_i^\star R^{\gamma_i} \tag{2.17}$$

с некоторыми $C_1^\star, C_2^\star, C_3^\star > 0$ и положительным параметром R.

Затем мы выбираем θ так, что

$$\theta+\left(N-\theta\lambda_2+\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1}-\frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_1'}{\lambda_2}=\theta+\left(N-2k\lambda_2+\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1}-\frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_1'}{\lambda_2}=$$
$$=\theta+\left[N-\left(\sigma+\frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4+\frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3}\right]\frac{\lambda_3'}{\lambda_4}. \tag{2.18}$$

Такой выбор дает следующее общее значение экспоненты R в соотношении (2.17):

$$\gamma=\frac{1}{s+r-q}\left[\left(\frac{r(q-1)+q(s-q)}{q}\right)N+\left(\frac{rl}{q}-\alpha\right)-\sigma\right]. \tag{2.19}$$

Теперь рассмотрим следующие два случая для значений γ.

Случай 1: $\gamma<0$.

Очевидно, что правая часть (2.17) стремится к нулю, если $R\to\infty$. Таким образом, утверждение теоремы 1 доказано для $\gamma<0$.

Случай 2: $\gamma=0$.

В этом случае из (2.13)–(2.15) имеем

$$\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt=c_1, \tag{2.20}$$

$$\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt=c_2, \tag{2.21}$$

$$\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_4}{q\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma-\frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt=c_3, \tag{2.22}$$

где

$$c_1=\begin{cases}\displaystyle\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt2}|\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1}-\frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau, & \text{если}\quad \gamma=\gamma_1=0,\\ 0, \quad \text{если}\quad \gamma_1<0.\end{cases}$$

$$c_2=\begin{cases}\displaystyle\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt2}|\xi|^{\frac{rl\lambda_2}{q\lambda_1}-\frac{\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^k\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau, & \text{если}\quad \gamma=\gamma_2=0,\\ 0, \quad \text{если}\quad \gamma_2<0.\end{cases}$$

$$c_3=\begin{cases}\displaystyle\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt2}|\xi|^{\left(-\sigma-\frac{\alpha}{\lambda_3}\right)\lambda_4+\frac{rl\lambda_4}{q\lambda_3}}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}d\xi\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}d\tau, & \text{если}\quad \gamma=\gamma_3=0,\\ 0, \quad \text{если}\quad \gamma_3<0.\end{cases}$$

Тогда соотношение (2.17) принимает вид

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha u^s\varphi\left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt+4\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)dx\le c. \tag{2.23}$$

Перейдя к пределу при $R \to \infty$, получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt \le c. \tag{2.24}$$

Теперь вернемся к неравенству (2.5). Применяя неравенство Гёльдера, из соотношения (2.5) получим

$$\begin{gathered}\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \le \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u\left|\Delta^k \varphi\right| dxdt + \\ + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^q \varphi dxdt \le c_1^{1/\lambda_1'}\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt\right)^{1/\lambda_1} + \\ + c_2^{1/\lambda_1'}\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt\right)^{1/\lambda_1} + c_3^{1/\lambda_3'}\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^\alpha u^s \varphi \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt\right)^{1/\lambda_3}.\end{gathered} \tag{2.25}$$

Однако в силу (2.24) и абсолютной сходимости интеграла имеем

$$\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^\alpha u^s \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt \to 0 \tag{2.26}$$

при $R \to \infty$. Перейдя к пределу при $R \to \infty$ в (2.25), получим

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha u^s \left\|\beta^{1/q}(x)u\right\|_q^r dxdt = 0.$$

Таким образом, $u = 0$ п.в. и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 1.

3. СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим систему параболических неравенств вида

$$\begin{aligned}&\partial u/\partial t \ge \Delta^{k_1} u - V_1(x)v^{q_1} + |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),\\ &\partial v/\partial t \ge \Delta^{k_2} v - V_2(x)u^{q_2} + |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),\\ &u(x,t) \ge 0, \quad v(x,t) \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \times (0,\infty),\\ &u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N,\end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$\begin{gathered}k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \quad \min\{q_1, q_2, s_1, s_2\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2\} > 0, \quad q_2(r_1 + s_1) > (q_2 + r_1),\\ s_2 > q_1, \quad q_1(r_2 + s_2) > (q_1 + r_2), \quad s_1 > q_2, \quad \beta_1(x) \ge c|x|^{-l_1}, \quad \beta_2(x) \ge c|x|^{-l_2},\\ x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad V_1(x) \sim |x|^{-\sigma_1}, \quad V_2(x) \sim |x|^{-\sigma_2}\end{gathered} \tag{3.2}$$

для некоторых $c > 0$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ и $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$, $u_0(x)$ и $v(x)$ – неотрицательные локально интегрируемые функции.

Определение 2. Пара неотрицательных функций $(u(x,t),v(x,t))$ называется *слабым решением системы нелинейных неравенств* (3.1), если $u(x,t),\ v(x,t)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N\times(0,\infty))$ таковы, что $V_1(x)v^{q_1}$, $V_2(x)u^{q_2}$, $|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}$, $|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N\times(0,\infty))$ и соотношения

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)dx\le\\&\le-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial t}+u\Delta^{k_1}\varphi\right)dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)v^{q_1}\varphi dxdt,\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx\le\\&\le-\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}\left(v\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\Delta^{k_2}\varphi\right)dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)u^{q_2}\varphi dxdt\end{aligned}\tag{3.4}$$

выполняются для любой пробной функции $\varphi\in C_0^{2k,1}(\mathbb{R}^N\times(0,\infty);\mathbb{R}_+)$, где $k=\max(k_1,k_2)$.

Теорема 2. *Пусть условия* (3.2), $\alpha_1>l_1r_1/q_2$ *и* $\alpha_2>l_2r_2/q_1$ *выполняются. Предположим, что* $\gamma\overset{\mathrm{def}}{=}\max\limits_{i=1,\ldots,6}\gamma_i\le0$, *где*

$$\begin{gathered}\gamma_1=\frac{[q_2(r_1+s_1)-(q_2+r_1)]N-q_2\theta+l_1r_1-\alpha_1q_2}{q_2(r_1+s_1-1)},\\ \gamma_2=\frac{(N+\theta-2k_1)q_2s_1+(N+\theta-2k_1)q_2r_1+(l_1-N)r_1-(\alpha_1+N)q_2-\theta}{q_2(r_1+s_1-1)},\\ \gamma_3=\frac{(N+\theta-\sigma_2)s_1+(\theta+l_1-\sigma_2)r_1-(\theta-\alpha_1)q_2}{r_1+s_1-q_2},\\ \gamma_4=\frac{[q_1(r_2+s_2)-(q_1+r_2)]N-q_1\theta+l_2r_2-\alpha_2q_1}{q_1(r_2+s_2-1)},\\ \gamma_5=\frac{(N+\theta-2k_2)q_1s_2+(N+\theta-2k_2)q_1r_2+(l_2-N)r_2-(\alpha_2+N)q_1-\theta}{q_1(r_2+s_2-1)},\\ \gamma_6=\frac{(N+\theta-\sigma_1)s_2+(\theta+l_2-\sigma_1)r_2-(\theta-\alpha_2)q_1}{r_2+s_2-q_1}\end{gathered}\tag{3.5}$$

с некоторым параметром $\theta\ge1$. *Тогда задача* (3.1) *не имеет нетривиального глобального слабого решения*.

Доказательство. Пусть пара функций (u,v) – слабое решение системы неравенств (3.1), а φ – неотрицательная гладкая пробная функция, тогда по определению слабого решения известно, что

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\varphi(x,0)dx\le\\&\le\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}u\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}V_1(x)v^{q_1}\varphi dxdt,\end{aligned}\tag{3.6}$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\|_{q_1}^{r_2}dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \le$$
$$\le \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} v\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} V_2(x)u^{q_2}\varphi dxdt. \tag{3.7}$$

Теперь оценим правую часть неравенства (3.6). Применяя неравенство Гёльдера к первому слагаемому в правой части (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi dx\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1(x)u^{q_2}dx\right)^{r_1/(q_2\lambda_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2}. \tag{3.8}$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга, придем к

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt \le \int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi dx\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1(x)u^{q_2}dx\right)^{r_1/(q_2\lambda_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2}dt \le$$
$$\le \left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt\right)^{1/\lambda_1'} \le \tag{3.9}$$
$$\le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt + C_1\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r\lambda_2}{q\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt,$$

где

$$\lambda_1 = s_1 + r_1 > 1,\quad \lambda_2 = \frac{q_2(s_1+r_1)}{q_2(s_1+r_1)-(q_2+r_1)} > 1,\quad \frac{1}{\lambda_1'} = 1-\frac{1}{\lambda_1}.$$

Применяя аналогичные рассуждения ко второму и третьему слагаемым (3.6), получим

$$\int_{\mathbb{R}^N} u\left\|\Delta^{k_1}\varphi\right\|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi dx\right)^{1/\lambda_1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1(x)u^{q_2}dx\right)^{r_1/(q_2\lambda_1)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{1/\lambda_2}. \tag{3.10}$$

Снова применяя неравенства Гёльдера и Юнга в (3.10), придем к

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} u\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|dxdt \le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt + C_2\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt \tag{3.11}$$

и

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N} V_1(x)v^{q_1}\varphi dxdt \le \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt + C_3\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta^{\frac{-r_2\mu_2}{q_1\mu_1}}(x)|x|^{\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2}\varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1'}}dx\right)^{\mu_1'/\mu_2}dt, \tag{3.12}$$

где

$$\mu_1 = \frac{s_2+r_2}{q_1} > 1,\quad \mu_2 = \frac{r_2+s_2}{s_2-q_1} > 1,\quad \frac{1}{\mu_1'} = 1-\frac{1}{\mu_1}.$$

Комбинируя соотношения (3.6) и (3.9)–(3.12), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx - \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt \le$$

$$\le C_1\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt+C_2\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt+ \quad (3.13)$$

$$+C_3\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_2}{q_1\mu_1}}(x)|x|^{\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2}\varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1'}}dx\right)^{\mu_1'/\mu_2}dt.$$

Аналогично, применяя такие же рассуждения, как в (3.6), получим следующие три оценки слагаемых правой части соотношения (3.7):

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}v\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt\le\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+C_4\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt, \quad (3.14)$$

где

$$\mu_3=s_2+r_2>1,\quad \mu_4=\frac{q_1(s_2+r_2)}{q_1(s_2+r_2)-(q_1+r_2)}>1,\quad \frac{1}{\mu_3'}=1-\frac{1}{\mu_3},$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}v|\Delta^{k_2}\varphi|dxdt\le\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+C_5\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt, \quad (3.15)$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)u^{q_2}\varphi dxdt\le\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+C_6\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma_2-\frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt, \quad (3.16)$$

где

$$\lambda_3=\frac{s_1+r_1}{q_2}>1,\quad \lambda_4=\frac{r_1+s_1}{s_1-q_2}>1,\quad \frac{1}{\lambda_3'}=1-\frac{1}{\lambda_3}.$$

Комбинируя соотношения (3.7) и (3.14)–(3.16), получим

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx-\frac{1}{4}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt\le$$

$$\le C_4\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt+C_5\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt+ \quad (3.17)$$

$$+C_6\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma_2-\frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt.$$

Складывая (3.13) с (3.17) и упрощая, будем иметь

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+4\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx+$$

$$+4\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx\le 4C_1\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt+$$

$$+ 4C_2\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}dx\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}dt + 4C_3\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_1^{\frac{-r_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}}(x)|x|^{\left(-\sigma_2-\frac{-\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}dx\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}dt + \quad (3.18)$$

$$+ 4C_4\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt +$$

$$+ 4C_5\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_4}{q_1\mu_3}}(x)|x|^{\frac{-\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}dx\right)^{\mu_3'/\mu_4}dt + 4C_6\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}\beta_2^{\frac{-r_2\mu_2}{q_1\mu_1}}(x)|x|^{\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2}\varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1'}}dx\right)^{\mu_1'/\mu_2}dt.$$

Затем, в силу (2.12) и замены переменных $x = R\xi, t = R^\theta\tau$ на (3.18), имеем

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt + \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt + 4\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx +$$

$$+ 4\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx \le 4C_1R^{\gamma_1}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau +$$

$$+ 4C_2R^{\gamma_2}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau + 4C_3R^{\gamma_3}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}-\left(\sigma_2+\frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}d\xi\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}d\tau + \quad (3.19)$$

$$+ 4C_4R^{\gamma_4}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_2r_2\mu_4}{q_1\mu_3}-\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-u_4}{\mu_3}}d\xi\right)^{\mu_3'/\mu_4}d\tau + 4C_5R^{\gamma_5}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_2r_2\mu_4}{q_1\mu_3}-\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}d\xi\right)^{\mu_3'/\mu_4}d\tau +$$

$$+ 4C_6R^{\gamma_6}\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_2r_2\mu_2}{q_1\mu_1}+\left(-\sigma_1-\frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2}\varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1'}}d\xi\right)^{\mu_1'/\mu_2}d\tau.$$

Выберем φ так, что

$$\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_2}{q_2\lambda_1}-\frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}}\left|\Delta^{k_1}\varphi\right|^{\lambda_2}\varphi^{\frac{-\lambda_2}{\lambda_1}}d\xi\right)^{\lambda_1'/\lambda_2}d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_1r_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}-\left(\sigma_2+\frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4}\varphi^{\frac{\lambda_4}{\lambda_3'}}d\xi\right)^{\lambda_3'/\lambda_4}d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_2r_2\mu_4}{q_1\mu_3}-\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}d\xi\right)^{\mu_3'/\mu_4}d\tau < \infty,$$

$$\int_1^2\left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}}|\xi|^{\frac{l_2r_2\mu_4}{q_1\mu_3}-\frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}}\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|^{\mu_4}\varphi^{\frac{-\mu_4}{\mu_3}}d\xi\right)^{\mu_3'/\mu_4}d\tau < \infty,$$

$$
\int_1^2 \left(\int_{1\le|\xi|\le\sqrt{2}} |\xi|^{\frac{l_2 r_2 \mu_2}{q_1\mu_1} + \left(-\sigma_1 - \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2} \varphi^{\frac{\mu_2}{\mu_1'}} d\xi \right)^{\mu_1'/\mu_2} d\tau < \infty.
$$

Тогда из неравенства (3.19) следует, что

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2} dxdt + 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + \\
+ 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \le C_1^\star R^{\theta + \left(N - \theta\lambda_2 + \frac{r_1 l_1\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_1'}{\lambda_2}} + C_2^\star R^{\theta + \left(N - 2k_1\lambda_2 + \frac{r_1 l_1\lambda_2}{q_2\lambda_1} - \frac{\alpha_1\lambda_2}{\lambda_1}\right)\frac{\lambda_1'}{\lambda_2}} + \\
+ C_3^\star R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_2 + \frac{\alpha_1}{\lambda_3}\right)\lambda_4 + \frac{r_1 l_1\lambda_4}{q_2\lambda_3}\right)\frac{\lambda_3'}{\lambda_4}} + C_4^\star R^{\theta + \left(N - \theta\mu_4 + \frac{r_2 l_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}\right)\frac{\mu_3'}{\mu_4}} + C_5^\star R^{\theta + \left(N - 2k_2\mu_4 + \frac{r_2 l_2\mu_4}{q_1\mu_3} - \frac{\alpha_2\mu_4}{\mu_3}\right)\frac{\mu_3'}{\mu_4}} + \\
+ C_6^\star R^{\theta + \left(N - \left(\sigma_1 + \frac{\alpha_2}{\mu_1}\right)\mu_2 + \frac{r_2 l_2\mu_2}{q_1\mu_1}\right)\frac{\mu_1'}{\mu_2}} \le \sum_{i=1}^{6} C_i^\star R^{\gamma_i}
\end{gathered}
\tag{3.20}
$$

с некоторыми $C_i^\star > 0$, $i = 1,\ldots,6$. Если выполнено любое из неравенств (3.3), т.е. если $\gamma = \max\limits_{i=1,\ldots,6} \gamma_i \le 0$, имеем два случая.

Случай 1: $\gamma < 0$.

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.20), получим

$$
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2} dxdt \to 0. \tag{3.21}
$$

Таким образом, $u = 0$ и $v = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N \times (0,\infty)$.

Случай 2: $\gamma = 0$.

Тогда соотношение (3.20) принимает вид

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2} dxdt + 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + \\
+ 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx + 4\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\varphi(x,0)dx \le c.
\end{gathered}
\tag{3.22}
$$

Переходя к пределу при $R \to \infty$ в (3.22), получим

$$
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1} \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_2} v^{s_2} \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2} dxdt \le c. \tag{3.23}
$$

Теперь вернемся к неравенствам (3.6) и (3.7). Применяя неравенство Гёльдера, получим

$$
\begin{gathered}
\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt + \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\varphi(x,0)dx \le \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right| dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} u\left|\Delta^{k_1}\varphi\right| dxdt + \\
+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} V_1(x) v^{q_1}\varphi dxdt \le \left(c_1^{1/\lambda_1'} + c_2^{1/\lambda_1'}\right)\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^{\alpha_1} u^{s_1}\varphi \left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1} dxdt \right)^{1/\lambda_1} + \\
+ c_6^{1/\mu_1'} \left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta} \int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2} |x|^{\alpha_2} v^{s_2}\varphi \left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2} dxdt \right)^{1/\mu_1},
\end{gathered}
\tag{3.24}
$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt+\int_{\mathbb{R}^N}v_0(x)\varphi(x,0)dx\le\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}v\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}v\left|\Delta^{k_2}\varphi\right|dxdt+$$
$$+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}V_2(x)u^{q_2}\varphi dxdt\le\left(c_4^{1/\mu_3'}+c_5^{1/\mu_3'}\right)\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta}\int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\varphi\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt\right)^{1/\mu_3}+\tag{3.25}$$
$$+c_3^{1/\lambda_3'}\left(\int_{R^\theta}^{2R^\theta}\int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\varphi\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt\right)^{1/\lambda_3}.$$

Однако в силу (3.23) и абсолютной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt=c$$

имеем

$$\int_{R^\theta}^{2R^\theta}\int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_{R^\theta}^{2R^\theta}\int_{R^2\le|x|^2\le 2R^2}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt=0\tag{3.26}$$

при $R\to\infty$.

Переходя к пределу при $R\to\infty$ в (3.24) и (3.25), получим

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_1}u^{s_1}\left\|\beta_1^{1/q_2}(x)u\right\|_{q_2}^{r_1}dxdt+\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\alpha_2}v^{s_2}\left\|\beta_2^{1/q_1}(x)v\right\|_{q_1}^{r_2}dxdt=0.$$

Таким образом, $u=0$ и $v=0$ п.в. в $\mathbb{R}^N\times(0,\infty)$ и в этом случае. Это завершает доказательство теоремы 2.

Замечание. Можно также выбрать θ, как показано выше в доказательстве теоремы 1, и получить достаточное условие теоремы 2.

В заключение автор выражает благодарность Евгению Галахову за постановку задачи, руководство и полезное обсуждение результатов работы в ходе подготовки этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Отсутствие положительных решений для квазилинейных эллиптических задач в $\mathbb{R}^N$ // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 1999. Т. 227. С. 186–216.
2. *Mitidieri E., Pohozaev S.I.* Nonexistence of weak solutions for some degenerate elliptic and parabolic problems on R^n // J. Evolut. Equat. 2001. V. 1. № 2. P. 189–220.
3. *Kartsatos A.G., Kurta V.V.* On the critical Fujita exponents for solutions of quasilinear parabolic inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2002. V. 269. № 1. P. 73–86.
4. *Jiang Z.X., Zheng, S.N.* A Liouville-type theorem for a doubly degenerate parabolic inequality // Acta Math. Scientia. 2010. V. 30. № 3. P. 639–643.
5. *Admasu W.E., Galakhov E.I., Salieva O.A.* Nonexistence of nontrivial weak solutions of some nonlinear inequalities with gradient nonlinearity // Contemporary Math. Fundament. Direct. 2021. V. 67. № 1. P. 1–13.
6. *Галахов Е.И.* Об отсутствии локальных решений некоторых эволюционных задач // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 337–349.
7. *Yang C., Zhao L., Zheng S.* The critical Fujita exponent for the fast diffusion equation with potential // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 398. № 2. P. 879–885.

8. *Liu C.* The critical Fujita exponent for a diffusion equation with a potential term // Lithuanian Math. J. 2014. V. 54. № 2. P. 182–191.
9. *Ishige K.* On the Fujita exponent for a semilinear heat equation with a potential term // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 344. № 1. P. 231–237.
10. *Pinsky R.* The Fujita exponent for semilinear heat equations with quadratically decaying potential or in an exterior domain // J. Diff. Eq. 2009. V. 246. № 6. P. 2561–2576.
11. *Chen C.S., Huang J.C.* Some nonexistence results for degenerate parabolic inequalities with local and nonlocal nonlinear terms // J. Nanjing Univ. Math. Biq. 2004. V. 21. № 1. P. 12–20.
12. *Xiao S., Fang Z.B.* Nonexistence of solutions for the quasilinear parabolic differential inequalities with singular potential term and nonlocal source // J. Ineq. Appl. 2020. V. 2020. № 1. P. 1–9.
13. *Галахов Е.И.* Об эллиптических и параболических неравенствах высокого порядка с особенностями на границе // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. 2010. Т. 269. № 1. С. 76–84.