ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2023, том 63, № 6, с. 920–936

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.615

ТЕОРИЯ p-РЕГУЛЯРНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНО ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ[1)]

© 2023 г. Ю. Г. Евтушенко[1,2,*], Б. Медак[4], А. А. Третьяков[1,3,4,**]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский переулок, 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия

[3] 01-447 Warsaw, Newelska, 6, System Res. Inst., Polish Acad. Sciences, Poland

[4] 08-110 Siedlce, Siedlce University, Faculty of Exact and Natural Sciences, Poland

*e-mail: yuri-evtushenko@yandex.ru

**e-mail: prof.tretyakov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.
Переработанный вариант 12.12.2022 г.
Принята к публикации 02.02.2023 г.

В статье рассматривается проблема существования решения краевой задачи, непрерывно зависящего от граничных условий. Ранее такой факт был известен только для задачи Коши и является классическим в теории дифференциальных уравнений. В работе удалось обосновать аналогичную ситуацию и для краевых задач при наличии свойства p-регулярности задачи. В общем случае этот факт, вообще говоря, неверен. В данной работе доказывается несколько теорем о неявной функции в случае вырождения, что является развитием теории p-регулярности в направлении решения проблем существования решения нелинейных дифференциальных уравнений. Как иллюстрация полученных результатов, приводится пример классической краевой задачи – вырожденного уравнения Ван дер Поля и доказывается существование решения, непрерывно зависящего от граничных условий возмущенной задачи. Библ. 9.

Ключевые слова: вырожденность, p-регулярность, краевая задача, непрерывная зависимость решения, p-фактор оператор.

DOI: 10.31857/S0044466923060078, **EDN:** TUDVWN

ВВЕДЕНИЕ

Непрерывная зависимость решения дифференциального уравнения от граничных условий – сложная проблема в различных областях математики. Изучение вопроса существования решений в вырожденных задачах – типичная тема исследований, так как вырожденность тесно связана с нелинейностью (см., например, [1]). В случае вырождения характерной является ситуация, когда существует многообразие решений и поэтому построение хотя бы одного решения является существенным. Более того, важно доказать существование непрерывного решения соответствующей проблемы, а тем более построить это решение. В настоящей статье мы решаем эту проблему, используя аппарат теории p-регулярности (p-фактор анализ), описание и представление о котором можно найти, например, в [1–3]. Отметим, что в регулярном случае для исследования такого рода проблем часто используется теорема о неявной функции. В вырожденном (нерегулярном) случае классическая теорема о неявной функции не может быть применена. Результаты, полученные в данной статье, базируются на конструкциях теории p-регулярности и обобщениях теоремы о неявной функции для нерегулярных отображений, которые можно найти, например, в [2], [4], [5]. Далее мы дадим строгое определение и понятие конструкций этой теории. Главным в обосновании наших результатов является аналог теоремы Люстерника, который мы сформулируем в следующем виде.

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-71-30005).

Теорема 1. *Пусть* $F(x,\mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \to Z$, *где* M *— конечномерное евклидово пространство,* X, Z *— банаховы пространства. Пусть отображения* $f_i(x,\mu)$, $i = 1,\ldots,p$, *определены в* (8). *Предположим, что* $F(x^*,\mu^*) = 0$ *для всех* $\overline{\mu} \in M$, $\|\overline{\mu}\| = 1$, *элемент* $(0,\overline{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$ *и* F *— сильно* p*-регулярно на каждом элементе* $(0,\overline{\mu})$, $\overline{\mu} \in M$, *т.е.*

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*) + f_2''(x^*,\mu^*)[0,\overline{\mu}] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[0,\overline{\mu}]^{p-1}\}^{-1}\| \le C. \tag{1}$$

(*Здесь* $\{\cdot\}^{-1}$ *означает правый обратный оператор.*)

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, *где* $V_\varepsilon(\mu^*)$ *— окрестность* μ^*, $x(\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$, *достаточно малое такое, что* $F(x(\mu),\mu) = 0$ *и*

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu - \mu^*\|), \tag{2}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \le C\sum_{k=1}^{p} \|f_k(x^*,\mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall \mu \in V_\varepsilon(\mu^*). \tag{3}$$

При доказательстве этой теоремы применим теорему Майкла о селекторе (см. [6]) в несколько модифицированной форме.

Теорема 2. *Пусть* X, Y *— банаховы пространства,* $A \in L(X,Y)$ *и* $A : X \xrightarrow{on} Y$. *Тогда существует непрерывное отображение* $M : Y \to X$ *такое, что* $AM(y) = y$ *и* $\|M(y)\| \le c\|y\|$, *где* $c > 0$ *— константа, независимая от* y.

В качестве иллюстрации наших результатов рассмотрим краевую задачу вырожденного нелинейного уравнения Ван дер Поля $\ddot{x} + \sigma(x^2 - 1)\ddot{x} + x + x^p = 0$, $x(0) = \nu$, $x(2\pi) = 0$, где $\sigma = 0$ или

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = \nu, \quad x(2\pi) = \rho, \tag{4}$$

где ν и ρ – малые параметры из $U(\nu^*,\rho^*) = U(0,0)$, $\nu^* = 0, \rho^* = 0$, $p = 2$. Покажем, что для любых h_ν, h_ρ таких, что $h_\nu \ne h_\rho$, отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [0,h_\nu,h_\rho]$. Таким образом, исходя из теоремы 1, можно заключить, что существует непрерывное решение (4), зависящее от параметров $\mu = (\nu,\rho)$ для $h_\nu \ne h_\rho$, при этом для $h_\nu = h_\rho$ отображение F является 2-регулярным на элементе $H = [\sin t, h_\nu, h_\rho]$. Отсюда следует, что, исходя из нашей теоремы, непрерывное решение уравнения (4), зависящее от параметра μ, существует для всех достаточно малых μ.

1. ОБОБЩЕННАЯ p-ФАКТОР ТЕОРЕМА ЛЮСТЕРНИКА И ТЕОРЕМА О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ p-ГО ПОРЯДКА

Аппарат p-регулярности является важным инструментом исследования нелинейных задач. В данном разделе будут представлены некоторые определения, обозначения и теоремы теории p-регулярности, которые будут использованы ниже (см. [1–5], [7]).

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$F(x,\mu) = 0, \tag{5}$$

где отображение $F : X \times M \to Z$, а X, M и Z являются банаховыми пространствами.

Предположим, что в некоторой точке $(x^*,\mu^*) \in X \times M$, $\operatorname{Im} F'(x^*,\mu^*) \ne Z$. Пусть

$$Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_p, \tag{6}$$

где $Z_1 = \operatorname{cl}(\operatorname{Im} F'(x^*,\mu^*))$ и $W_1 = Z$. В качестве W_2 берем замкнутое дополнение к Z_1 в Z. Пусть $P_{W_2} : Z \to W_2$ – проектор на W_2 вдоль Z_1. Определим Z_2 как замыкание линейной оболочки образа квадратичного отображения $P_{W_2}F''(x^*,\mu^*)[\cdot]^2$. Далее, индуктивно,

$$Z_i = \operatorname{cl}(\operatorname{span} \operatorname{Im} P_{W_i} F^{(i)}(x^*,\mu^*)[\cdot]^i) \subseteq W_i, \quad i = 2,\ldots,p-1, \tag{7}$$

где W_i – замкнутое дополнение к $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2,\ldots,p$, до пространства Z и $P_{W_i} : Z \to W_i$ проектор на W_i вдоль $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2,\ldots,p$. Наконец, $Z_p = W_p$. Порядок p – это минимальное число (если оно существует), для которого выполняется представление (6). Далее обозначим $\varphi^{(0)} = \varphi$ для любого отображения φ.

Определим следующее отображение:

$$f_i : U \subset X \times M \to Z_i, \quad f_i(x,\mu) = P_{Z_i} F(x,\mu), \quad i = 1,\ldots,p, \tag{8}$$

где $P_{Z_i} : Z \to Z_i$ – оператор проектирования на Z_i вдоль $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \ldots \oplus Z_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x,\mu) = f_1(x,\mu) + \ldots + f_p(x,\mu) \tag{9}$$

или

$$F(x,\mu) = (f_1(x,\mu),\ldots,f_p(x,\mu)). \tag{10}$$

Пусть $h = [h_x, h_\mu]$, $h_x \in X$, $h_\mu \in M$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h) : X \times M \to Z$, определенный как

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*,\mu^*) + f_2''(x^*,\mu^*)[h] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^{p-1} \tag{11}$$

и такой, что

$$\Psi_p(h)[x,\mu] = f_1'(x^*,\mu^*)[x,\mu] + f_2''(x^*,\mu^*)[h][x,\mu] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^{p-1}[x,\mu] \tag{12}$$

называется p-фактор оператором.

Определение 2. Будем говорить, что F абсолютно вырождено на (x^*,μ^*) до порядка p, если $F^{(i)}(x^*,\mu^*) = 0$, $i = 1,\ldots,p-1$.

Замечание 1. В случае абсолютной вырожденности p-фактор оператор сводится к

$$F^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^{p-1}.$$

Замечание 2. Для каждого отображения f_i, имеем (см. [1], с. 145)

$$f_i^{(k)}(x^*,\mu^*) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,i-1, \quad \forall i = 1,\ldots,p. \tag{13}$$

Замечание 3. Каждое отображение $f_i^{(k)}(x^*,\mu^*)$ будет абсолютно вырождено и

$$f_i^{(i)}(x^*,\mu^*)[h]^{i-1} = P_{Z_i} F^{(i)}(x^*,\mu^*)[h]^{i-1}, \quad i = 1,\ldots,p. \tag{14}$$

Это означает, что f_i является i-фактор оператором, соответствующим абсолютно вырожденному отображению f_i до порядка i. Поэтому общий случай вырожденности F может быть сведен к изучению абсолютной вырожденности отображений f_i, $i = 1,\ldots,p$, и их композиций.

Определение 3. *p-ядро оператора $\Psi_p(h)$ есть множество*

$$H_p(x^*,\mu^*) = \mathrm{Ker}^p\,\Psi_p(h) = \{h \in X \times M : f_1'(x^*,\mu^*)[h] + \\ + f_2''(x^*,\mu^*)[h]^2 + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Отметим, что имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{Ker}^p\,\Psi_p(h) = \left\{\bigcap_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}^i f_i^{(i)}(x^*,\mu^*)\right\},$$

p-ядро оператора $F^{(p)}(x^*,\mu^*)$, в случае абсолютной вырожденности есть множество

$$\operatorname{Ker}^p F^{(p)}(x^*,\mu^*) = \{h \in X \times M : F^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется p-регулярным в точке (x^*,μ^*) на h $(p > 1)$, если $\operatorname{Im}\Psi_p(h) = Z$ (т.е. оператор $\Psi_p(h)$ сюръективен).

Определение 5. Отображение F называется p-регулярным в точке (x^*,μ^*) $(p > 1)$, если либо оно является p-регулярным вдоль каждого $h \in H_p(x^*,\mu^*)\backslash\{0\}$, либо $H_p(x^*,\mu^*) = \{0\}$.

Определение 6. Пусть $F : X \times M \to Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p$. Отображение $F(x,\mu)$ называется сильно p-регулярным в точке (x^*,μ^*), если существуют $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{h \in H_\gamma} \left\| \{\Psi_p(h)\}^{-1} \right\| \le c < \infty,$$

где

$$H_\gamma = \{h = (h_x, h_\mu) \in X \times M : \|f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)[h]^k\|_{Z_k} \le \gamma, \forall k = 1,\dots,p, \|h\|_{X\times M} = 1\}.$$

Определим множество решений для отображения F как множество

$$S = S(x^*,\mu^*) = \{x \in X \times M : F(x,\mu) = F(x^*,\mu^*) = 0\} \tag{15}$$

и пусть $T_{(x^*,\mu^*)}S$ обозначает касательный конус к множеству S в точке (x^*,μ^*), т.е.

$$T_{(x^*,\mu^*)}S = \{h \in X \times M : (x^*,\mu^*) + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in S, \|r(\varepsilon)\| = o(\varepsilon), \varepsilon \in [0,\delta], \delta > 0\}. \tag{16}$$

Следующие теоремы описывают касательный конус к множеству решений уравнения (5) в случае p-регулярности.

Теорема 3. *Пусть X, M и Z — банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p-регулярным на $(x^*,\mu^*) \in X \times M$ вдоль h. Тогда $h \in T_{(x^*,\mu^*)}S$.*

Теорема 4 (обобщенная теорема Люстерника, [1]). *Пусть X, M и Z — банаховы пространства, и пусть отображение $F \in C^p(X \times M, Z)$ является p-регулярным на $(x^*,\mu^*) \in X \times M$. Тогда*

$$T_{(x^*,\mu^*)}S = H_p(x^*,\mu^*). \tag{17}$$

При доказательстве теоремы 1, воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Пусть $F : X \times M \to Z$, где X, M, Z — банаховы пространства, $z = z_1 + \ldots + z_p$, $z_i \in Z_i$, $i = 1,\dots,p$, $\|h\| = 1$ и*

$$\left\| \{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[h] + \ldots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[h]^{p-1}\}^{-1} \right\| = C < \infty.$$

Тогда

$$\left\| \{\alpha_1 f_1'(x^*) + \alpha_2 f_2'(x^*)[th] + \ldots + \alpha_p f_p^{(p)}(x^*)[th]^{p-1}\}^{-1}(z_1 + \ldots + z_p) \right\| \le$$
$$\le C\left(\frac{1}{\alpha_1}\|z_1\| + \frac{1}{\alpha_2 t}\|z_2\| + \ldots + \frac{1}{\alpha_p t^{p-1}}\|z_p\| \right),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $i = 1,\dots,p$, $t \ne 0$.

Следующая лемма будет иметь важное значение для исследования суръектвности p-фактор оператора в нашем примере.

Лемма 2. *Предположим, что $Y = Y_1 \oplus Y_2$, где Y_1, Y_2 — замкнутые подпространства в Y, $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\operatorname{Im} A = Y_1$. Пусть также P_2 является проекцией на Y_2 вдоль Y_1. Тогда $(A + P_2 B)X = Y \Leftrightarrow (P_2 B)\operatorname{Ker} A = Y_2$.*

Эта лемма является следствием следующей леммы.

Лемма 3. *Предположим, что* $Y = Y_1 \oplus Y_2$, *где* Y_1, Y_2 — *замкнутые подпространства в* Y, $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$, $A_1X \subset Y_1$, $A_2X \subset Y_2$. *Тогда* $(A_1 + A_2)X = Y$, *если* $A_1 \operatorname{Ker} A_2 = Y_1$ *и* $A_2 \operatorname{Ker} A_1 = Y_2$.

Доказательство очевидно. Лемма 2 следует из леммы 3, если положить $A_1 = A$ и $A_2 = P_2B$.

Некоторые обобщения теоремы о неявной функции на теорему о неявной функции p-порядка для нерегулярных отображений и теорему о неявной функции p-порядка для нетривиального ядра можно найти в [8].

При доказательстве теоремы 1 используется теорема о многозначном сжимающем отображении (см. [9]).

2. НЕКОТОРОЕ ОБОЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЮСТЕРНИКА О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ

В этом разделе мы докажем теорему 1, которая является аналогом и обобщением теоремы Люстерника о касательном конусе, и в которой говорится о существовании непрерывного решения уравнения $F(x,\mu) = 0$.

Замечание 4. Элемент $\mu - \mu^*$ играет роль $\bar{\mu}$ в теореме 1.

Доказательство (теоремы 1). Любой элемент $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$ можно представить как $\mu^* + t\bar{\mu}$, где $t \in [0,\delta]$ и $\delta > 0$ достаточно мало. Отсюда необходимо найти решение уравнения

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0,$$

где $\tilde{\mu} \in V_\varepsilon(0)$, $\bar{\mu} \in M$.

Рассмотрим многозначное отображение $\Phi : C(V_\varepsilon(0)) \times V_\varepsilon(0) \to 2^{X\times M}$, определяемое по формуле

$$\Phi(x,\tilde{\mu}) = (x,\tilde{\mu}) - \{\Psi_p(h)\}^{-1} F(x^* + x, \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}), \tag{18}$$

где

$$h = (0, t\bar{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$$

и p-фактор оператор $\Psi_p(h) : X \times M \to Z$ представлен в форме

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*,\mu^*) + f_2''(x^*,\mu^*)[h] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^{p-1}.$$

Отметим, что обратный оператор многозначного отображения имеет вид

$$\{\Psi_p(h)\}^{-1}(z) = \{[\xi,\eta] \in X \times M : f_1'(x^*,\mu^*)[\xi,\eta] + f_2''(x^*,\mu^*)[h][\xi,\eta] + \ldots$$
$$\ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[h]^{p-1}[\xi,\eta] = z\},$$

где $z = z_1 + \ldots + z_p$ или $z = (z_1,\ldots,z_p)$, $z_i \in Z_i$, $i = 1,\ldots,p$.

"Норма" этого оператора:

$$\left\|\{\Psi_p(h)\}^{-1}\right\| = \sup_{\|z\|=1} \inf\{\|(x,\mu)\| : \Psi_p(h)[x,\mu] = z\}.$$

Покажем, что существует элемент $(x,\tilde{\mu})$ такой, что

$$\|(x,\tilde{\mu})\| = \|x\| + \|\tilde{\mu}\| = o\|(t\bar{\mu})\|$$

и $(x,\tilde{\mu}) \in \Phi(x,\tilde{\mu})$, т.е. $(x,\tilde{\mu})$ — неподвижная точка отображения Φ. Тогда

$$(0,0) \in \{-\{\Psi_p(0,t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получим

$$F(x^* + x(t\bar{\mu}), \mu^* + t\bar{\mu} + \tilde{\mu}(t\bar{\mu})) = 0$$

и $\|(x(t\bar{\mu}), \tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\| = o(t)$.

Сначала, докажем, что

$$\operatorname{dist}((0,0), \Phi(0,0)) = \|\Phi(0,0)\| \le ct^2 = O(t^2) = o(t).$$

Имеем

$$\Phi(0,0) = -\{\Psi_p(0,t\bar{\mu})\}^{-1} F(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}),$$

$$\Phi(0,0) = -\{\Psi_p(0,t\bar{\mu})\}^{-1}(f_1(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}) + \ldots + f_p(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}))$$

и

$$\|\Phi(0,0)\| = \left\| -\{\Psi_p(0,t\bar{\mu})\}^{-1}(f_1(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}) + f_2(x^*,\mu^* + t\bar{\mu}) + \ldots + f_p(x^*,\mu^* + t\bar{\mu})) \right\|.$$

По лемме 1 получаем

$$\|\Phi(0,0)\| \le \|c(f_1(x^*,\mu^* + t\bar{\mu})\| + \frac{c}{t}\|f_2(x^*,\mu^* + t\bar{\mu})\| + \ldots + \frac{c}{t^{p-1}}\|f_p(x^*,\mu^* + t\bar{\mu})\|. \tag{19}$$

Применив формулу Тейлора к выражениям $f_i(x^*,\mu^* + t\bar{\mu})$ при $i = 1,\ldots p$, получаем

$$\|\Phi(0,0)\| \le c\left\| f_1(x^*,\mu^*) + f_1'(x^*,\mu^*)[t\cdot 0, t\bar{\mu}] + O_Z(t^2) \right\| +$$

$$+ \frac{c}{t}\left\| f_2(x^*,\mu^*) + f_2'(x^*,\mu^*)[t\cdot 0, t\bar{\mu}] + \frac{1}{2!} f_2''(x^*,\mu^*)[t\cdot 0, t\bar{\mu}]^2 + O_Z(t^3) \right\| + \ldots$$

$$\ldots + \frac{c}{t^{p-1}}\left\| f_p(x^*,\mu^*) + f_p'(x^*,\mu^*)[t\cdot 0, t\bar{\mu}] + \ldots + \frac{1}{p!} f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[t\cdot 0, t\bar{\mu}]^p + O_Z(t^{p+1}) \right\|.$$

Поэтому, исходя из соотношений (13), можно оценить

$$\|\Phi(0,0)\| \le ct^2 + \frac{c}{t}t^3 + \ldots + \frac{c}{t^{p-1}}t^{p+1} = pct^2 \tag{20}$$

и

$$\|\Phi(0,0)\| = O(t^2) = o(t). \tag{21}$$

Теперь покажем, что для любого $(x_1,\mu_1),(x_2,\mu_2) \in V_{O(t^2)}(0,0)$, справедлива следующая оценка:

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\Phi(x_1,\mu_1),\Phi(x_2,\mu_2)) \le \theta\|(x_1,\mu_1) - (x_2,\mu_2)\|, \tag{22}$$

где $0 < \theta < 1$.

Сначала заметим, что

$$\Psi_p(th)\Phi(x_1,\mu_1) = \Psi_p(th)(x_1,\mu_1) - F((x^*,\mu^*) + th + (x_1,\mu_1)) \tag{23}$$

и

$$\Psi_p(th)\Phi(x_2,\mu_2) = \Psi_p(th)(x_2,\mu_2) - F((x^*,\mu^*) + th + (x_2,\mu_2)). \tag{24}$$

Пусть $(z_1,\xi_1) \in \Phi(x_1,\mu_1)$, $(z_2,\xi_2) \in \Phi(x_2,\mu_2)$. Тогда имеем

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\Phi(x_1,\mu_1),\Phi(x_2,\mu_2)) = \inf\{\|(z_1,\xi_1) - (z_2,\xi_2)\| : (z_i,\xi_i) \in \Phi(x_i,\mu_i),\ i = 1,2\} =$$

$$= \inf\{\|(z_1,\xi_1) - (z_2,\xi_2)\| : \Psi_p(th)((z_1,\xi_1) - (z_2,\xi_2)) = \Psi_p(th)((x_1,\mu_1) - (x_2,\mu_2)) -$$

$$- [F((x^*,\mu^*) + th + (x_1,\mu_1)) - F((x^*,\mu^*) + th + (x_2,\mu_2))]\} = \inf\{\|(z,\xi)\| : \Psi_p(th)(z,\xi) =$$

$$= \Psi_p(th)((x_1,\mu_1) - (x_2,\mu_2)) - \left[F((x^*,\mu^*) + th + (x_1,\mu_1)) - F((x^*,\mu^*) + th + (x_2,\mu_2))\right]\} =$$

$$= \inf\left\{\|(z,\xi)\| : \Psi_p(th)(z,\xi) = \Psi_p(th)((x_1,\mu_1) - (x_2,\mu_2)) - \right.$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{p}(f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)))\right]\Bigg\}=$$

$$=\inf\left\{\left\|\{\Psi_p(th)\}^{-1}\left[f_1'(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))+\sum_{i=2}^{p}f_i^{(i)}(x^*,\mu^*)[th]^{i-1}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\left[\sum_{i=1}^{p}(f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)))\right]\right]\right\|\right\}=$$

$$=\inf\left\{\left\|\{\Psi_p(th)\}^{-1}\left[\left[f_1'(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))-(f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.-f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))\right]+\sum_{i=2}^{p}\left[f_i^{(i)}(x^*,\mu^*)[th]^{i-1}((x_1,\mu_1)-x_2,\mu_2))-\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.-(f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-(f_i((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))\right]\right]\right\|\right\}.$$

По лемме 1, получаем следующую оценку:

$$\operatorname{dist}_H(\Phi(x_1,\mu_1),\Phi(x_2,\mu_2))\le c\|f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))-$$

$$-f_1'(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|+\frac{c}{t}\|f_2((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_2((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))-$$

$$-f_2'[th](x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|+\dots+\frac{c}{t^{p-1}}\|f_p((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_p((x^*,\mu^*)+$$

$$+th+(x_2,\mu_2))-f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|=A_1+A_2+\dots+A_p,$$

где

$$A_1=c\|f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_1((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))-f_1'(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|,$$

$$A_2=\frac{c}{t}\|f_2((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_2((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))-f_2'[th](x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|,$$

$$\vdots$$

$$A_p=\frac{c}{t^{p-1}}\|f_p((x^*,\mu^*)+th+(x_1,\mu_1))-f_p((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2))-$$
$$-f_p^{(p)}[th]^{p-1}(x^*,\mu^*)((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|.$$

К компоненте A_1 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_1'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\bar\theta((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]$. Получаем

$$A_1\le c\sup_{\bar\theta\in[0,1]}\|f_1'((x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\bar\theta((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)))-f_1'(x^*,\mu^*)\|\times$$

$$\times\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|=c\sup_{\bar\theta\in[0,1]}\|f_1'(x^*,\mu^*)+O_Z(t)-f_1'(x^*,\mu^*)\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|=$$

$$=c\sup_{\bar\theta\in[0,1]}\|O_Z(t)\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|\le cc_1t\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|=k_1t\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,$$

где k_1M_1. Положим $\theta_1=k_1t$, где $t\in(0,\delta)$, δ достаточно мало и тогда

$$A_1\le\theta_1\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|.$$

К компоненте A_2 применим теорему о среднем значении, а затем формулу Тейлора к выражению $f_2'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]$. Получаем

$$A_2 \le \frac{c}{t}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\|f_2'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]-f_2''(x^*,\mu^*)[th]\|\times$$

$$\times\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\| = \frac{c}{t}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\|f_2'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)[th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+$$

$$+O_Z(t^2)-f_2''(x^*)[th]\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\| = \frac{c}{t}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\|f_2'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)[th]+$$

$$+f_2''(x^*,\mu^*)[(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+O_Z(t^2)-f_2''(x^*,\mu_*)[th]\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|.$$

Поскольку $f_2'(x^*,\mu^*)=0$ (см. (13)), получаем

$$A_2 \le \frac{c}{t}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\|f_2''(x^*,\mu^*)[(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+O_Z(t^2)\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,$$

следовательно,

$$A_2 \le \frac{c}{t}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}(\|f_2''(x^*,\mu^*)[(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]\|+\|O_Z(t^2)\|)\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|.$$

И, наконец, принимая во внимание, что порядок выражения $f_2''(x^*,\mu^*)[(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-$ $-(x_2,\mu_2))]$ есть t^2, порядок выражения $O_Z(t^2)$ есть t^2 и свойства нормы, заключаем, что

$$A_2 \le \frac{c}{t}(d_1t^2+d_2t^2)\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\| \le 2k_2t\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,$$

где $k_2=\max\{cd_1,cd_2\}$. Можно положить $\theta_2=2k_2t$, и тогда

$$A_2 \le \theta_2\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,$$

где $t\in(0,\delta)$, $\delta>0$, достаточно мало.

Аналогично, оценим теперь компоненту A_p, используя теорему о среднем значении и разложении выражения $f_p'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]$ по формуле Тейлора.

Итак, отметим, что

$$A_p \le \frac{c}{t^{p-1}}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\left\|f_p'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]-\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-1}\right\|\times$$
$$\times\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|. \qquad (25)$$

По формуле Тейлора получаем:

$$f_p'[(x^*,\mu^*)+th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))] = f_p'(x^*,\mu^*)+f_p''(x^*,\mu^*)[th+(x_2,\mu_2)+$$
$$+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+\dots+\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]^{p-1}+O_Z(t^p).$$

Согласно (13), отображение $f_p^{(i)}(x^*,\mu^*)=0$, $i=1,2,\dots,p-1$. Поэтому

$$A_p \le \frac{c}{t^{p-1}}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\left\|\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th+(x_2,\mu_2)+\overline{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]^{p-1}+O_Z(t^p)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-1}\right\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\| = \frac{c}{t^{p-1}}\sup_{\overline{\theta}\in[0,1]}\left\|\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-1}+\right.$$

$$+\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-2}[(x_2,\mu_2)+\bar{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+$$

$$+O_Z(t^p)-\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-1}\Bigg\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|,$$

т.е.

$$A_p\le\frac{c}{t^{p-1}}\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\left\|\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-2}[(x_2,\mu_2)+\bar{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]+O_Z(t^p)\right\|\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))\|.$$

Согласно свойствам нормы, получаем

$$A_p\le\frac{c}{t^{p-1}}\sup_{\bar{\theta}\in[0,1]}\left(\left\|\frac{1}{(p-1)!}f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[th]^{p-2}[(x_2,\mu_2)+\bar{\theta}((x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2))]\right\|+\|O_Z(t^p)\|\right)\times$$
$$\times\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|.$$

Поскольку $(x_1,\mu_1),(x_2,\mu_2)\in V_{O(t^2)}(0,0)$, то

$$A_p\le\frac{c}{t^{p-1}}(\bar{d}_1t^{p-2+2}+\bar{d}_2t^p)\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|\le 2k_pt\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|=\theta_p\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,$$

где $k_2=\max\{c\bar{d}_1,c\bar{d}_2\}$, $t\in(0,\delta)$, $\delta>0$, достаточно мало и $\theta_p=2k_pt$.

Подставляя $\theta=\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_p=\bar{c}t$, $\bar{c}>0$, получаем

$$\mathrm{dist}_{\mathrm{H}}(\Phi(x_1,\mu_1),\Phi(x_2,\mu_2))\le\theta\|(x_1,\mu_1)-(x_2,\mu_2)\|,\tag{26}$$

и $0<\theta<1$.

Покажем, что согласно принципу многозначных сжимающих отображений, будет

$$\varrho((0,0),\Phi(0,0))=\|\Phi(0,0)\|<(1-\theta)\varepsilon,$$

где $\theta=\bar{\bar{c}}t$, $\varepsilon=4pct^2$, для t достаточно малых.

Можно положить $0<\theta=\bar{\bar{c}}t<\frac{1}{2}$. Это неравенство эквивалентно $1<2(1-\bar{\bar{c}}t)$. Отсюда и из неравенства $\|\Phi(0,0)\|\le pct^2$, получаем

$$\|\Phi(0,0)\|\le pct^2\le 2p(1-\bar{\bar{c}}t)ct^2<(1-\bar{\bar{c}}t)4pct^2=(1-\theta)\varepsilon,$$

что и следовало доказать.

Таким образом, мы доказали, что отображение Φ является сжимающим на множестве $V((0,0),ct^2)$. Из принципа многозначных сжимающих отображений следует, что для $(z_0,\mu_0)=(0,0)$ существует элемент $(x,\tilde{\mu})$ такой, что

$$\|(x,\tilde{\mu})\|\le\frac{2}{1-\theta}\|\Phi(0,0)\|\le ct^2,\tag{27}$$

т.е. $\|(x,\tilde{\mu})\|=o(t)$ и $(x,\tilde{\mu})\in\Phi(x,\tilde{\mu})$. Отсюда $(x,\tilde{\mu})$ – неподвижная точка отображения Φ. Тогда

$$(0,0)\in\{-\{\Psi_p(0,t\bar{\mu})\}^{-1}F(x^*+x(t\bar{\mu}),\mu^*+t\bar{\mu}+\tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\}.$$

Следовательно, получаем

$$F(x^*+x(t\bar{\mu}),\mu^*+t\bar{\mu}+\tilde{\mu}(t\bar{\mu}))=0\tag{28}$$

и $\|(x(t\bar{\mu}),\tilde{\mu}(t\bar{\mu}))\|=o(t)$.

Итак, было показано, что для параметра $\mu^* + t\overline{\mu}$ имеется решение $(x^* + x(t\overline{\mu}), \mu^* + t\overline{\mu} + \tilde{\mu}(t\overline{\mu}))$ уравнения $F(x,\mu) = 0$, т.е.

$$F(x^* + x(t\overline{\mu}), \mu^* + t\overline{\mu} + \tilde{\mu}(t\overline{\mu})) = 0.$$

Теперь, без ограничения общности, можно предположить, что множество M совпадает с $\mathbb{R}^2$. Тогда, для любого достаточно малого элемента μ из $\mathbb{R}^2$ существует $\overline{\overline{\mu}}(\mu)$ такое, что

$$\|\overline{\overline{\mu}}(\mu) - \mu\| = o(\mu) \tag{29}$$

и, как было показано выше,

$$F(x^* + x(\overline{\overline{\mu}}(\mu)), \mu^* + \overline{\overline{\mu}}(\mu) + \tilde{\mu}(\overline{\overline{\mu}}(\mu))) = 0. \tag{30}$$

Отметим важный момент. Вернемся к μ. Согласно допущению, мы полагаем $\mu = \mu^* + \overline{\overline{\mu}}(\mu) + \tilde{\mu}(\overline{\overline{\mu}}(\mu))$ и, обозначив $x^* + x(\overline{\overline{\mu}}(\mu))$ через $x(\mu)$, получаем уравнение

$$F(x(\mu), \mu) = 0. \tag{31}$$

Данное равенство выполняется, поскольку мы взяли любой $\overline{\mu}$ из $\mathbb{R}^2$ и доказали, что (28) выполняется для любого $\overline{\mu}$. Следовательно, исходя из вышесказанного, для любого μ из $\mathbb{R}^2$ существует $\overline{\overline{\mu}}(\mu)$ такое, что сжимающий процесс начинается в точке $(0, \mu^* + \overline{\overline{\mu}}(\mu))$, генерирует решение (30) и в конце концов (31).

На этом закончим первую часть доказательства (мы доказали существование решения).

Пусть U – достаточно малая окрестность (x^*, μ^*).

Возьмем $\mu^* + t\overline{\mu}$, где $t > 0$ достаточно мало, и положим

$$h = \frac{(0, t\overline{\mu})}{\|t\overline{\mu}\|} = (0, \overline{\mu}) \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*),$$

где $\|\overline{\mu}\| = 1$. Тогда для любого $k \le p$

$$f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, \overline{\mu}]^k = 0, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Мы показали, что в уравнении (19)

$$\|\Phi(0,0)\| \le \|c(f_1(x^*, \mu^* + t\overline{\mu})\| + \frac{c}{t}\|f_2(x^*, \mu^* + t\overline{\mu})\| + \ldots + \frac{c}{t^{p-1}}\|f_p(x^*, \mu^* + t\overline{\mu})\| \tag{32}$$

или

$$\|\Phi(0,0)\| \le c\sum_{k=1}^{p}\left\|\frac{f_k(x^*, \mu^* + t\overline{\mu})}{t^{k-1}}\right\|. \tag{33}$$

Для $\mu^* + t\overline{\mu}$ имеем

$$\|x(\mu^* + t\overline{\mu}) - x^*\| \le \|(x(\mu^* + t\overline{\mu}) - x^*, t\overline{\mu})\| \le C\,\|\Phi(0,0)\|. \tag{34}$$

Отметим, что выполняется следующее неравенство:

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\overline{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\| \le C_k\,\|f_k(x^*, \mu^* + t\overline{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{1/k}\,\|(0, t\overline{\mu})\|^{k-1} \tag{35}$$

или

$$\|f_k(x^*, \mu^* + t\overline{\mu}) - f_k(x^*, \mu^*)\|^{k-1} \le C_k^k\,\|(0, t\overline{\mu})\|^{k(k-1)}. \tag{36}$$

Это верно, поскольку из разложения по формуле Тейлора и соотношения (13), имеем

$$\left\|f_k(x^*, \mu^*) + f_k'(x^*, \mu^*)[0, t\overline{\mu}] + \ldots + \frac{1}{(k-1)!}f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\overline{\mu}]^k + O(t^{k+1}) - f_k(x^*, \mu^*)\right\|^{k-1} =$$

$$= \left\|\frac{1}{(k-1)!}f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[0, t\overline{\mu}]^k + O(t^{k+1})\right\|^{k-1} \le Ct^{k(k-1)} = C\,\|(0, t\overline{\mu})\|^{k(k-1)}.$$

Следовательно, соотношение (35) выполнено.

Отсюда имеем

$$\|x(\mu^*+t\bar{\mu})-x^*\| \le C\|\Phi(0,0)\| \le Cc\sum_{k=1}^{p}\left\|\frac{f_k(x^*,\mu^*+t\bar{\mu})}{t^{k-1}}\right\| \le$$

$$\le \bar{C}\sum_{k=1}^{p}\frac{\|f_k(x^*,\mu^*+t\bar{\mu})-f_k(x^*,\mu^*)\|^{1/k}}{\|t^{k-1}\|}\|(0,t\bar{\mu})\|^{k-1}$$

или

$$\|x(\mu^*+t\bar{\mu})-x^*\| \le \bar{C}\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*+t\bar{\mu})\|^{1/k}, \tag{37}$$

так как $f_k(x^*,\mu^*)=0$.

Затем, из (37) для любого достаточно малого μ существует $\bar{\bar{\mu}}(\mu)$ такое, что

$$\|x(\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu))-x^*\| \le \bar{C}\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu))\|^{1.k}.$$

Отсюда получаем

$$\|x(\mu)-x^*\| \le \bar{\bar{C}}\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)\|^{1/k} \le \bar{\bar{\bar{C}}}\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)+\tilde{\mu}(\mu))\|^{1/k} = \bar{\bar{\bar{C}}}\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu)\|^{1/k},$$

где

$$\mu = \mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)+\tilde{\mu}(\mu)). \tag{38}$$

Мы воспользовались тем фактом, что

$$\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)\| \le 2\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)+\tilde{\mu}(\mu))\| = 2\|f_k(x^*,\mu)\|, \tag{39}$$

поскольку

$$\|\tilde{\mu}(\mu))\| = o\left(\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*+\bar{\bar{\mu}}(\mu)\|^{1/k}\right),$$

где μ – достаточно мало.

Таким образом, мы доказали, что (3) выполнено. Из этого следует, что (2) верно для $\omega(\mu)=x(\mu)-x^*$ и $\|\omega(\mu)\|=o(\mu-\mu^*)$.

Последний этап доказательства, а именно непрерывность $x(\mu)$, следует из модифицированной формы теоремы Майкла о селекторе теоремы 2. Следовательно, многозначное отображение $\Phi: C(V_\varepsilon(0))\times V_\varepsilon(0)\to 2^{X\times M}$, определенное в (18) по формуле

$$\Phi(x,\tilde{\mu}) = (x,\tilde{\mu})-\{\Psi_p(h)\}^{-1}F(x^*+x,\mu^*+t\bar{\mu}+\tilde{\mu}),$$

дает непрерывный селектор, т.е. можно выбрать непрерывное решение $(x(t\bar{\mu}),\tilde{\mu}(t\bar{\mu}))$ отображения F. Из непрерывности функции $x(t\bar{\mu})$ следует непрерывность функции $x(\mu)$.

На этом доказательство теоремы заканчивается.

Замечание 5. Если предположить, что пространства $X\times M$ и Z конечномерны, то можно доказать существование непрерывной функции $x(\mu)$, рассмотрев следующий сжимающий процесс:

$$(x_{k+1},\tilde{\mu}_{k+1}) = (x_k,\tilde{\mu}_k)-\{\Psi_p(h)\}_R^{-1}F(x^*+x_k,\mu^*+t\bar{\mu}+\tilde{\mu}_k), \tag{40}$$

где $\{\Psi_p(h)\}_R^{-1}z=(x_z,\mu_z)$ – правый обратный оператор и

$$\|(x_z,\mu_z)\| = \min_{\Psi_p(h)(x,\mu)=z}\|(x,\mu)\|. \tag{41}$$

Такой процесс будет сходиться к непрерывному отображению $x(t\bar{\mu})$.

Аналогично, можно доказать две следующие теоремы.

Теорема 5 (теорема о неявной функции для нетривиального ядра). *Пусть $F(x,\mu)\in C^{p+1}(X\times M)$, $F: X\times M \to Z$, где M — конечномерное пространство, X, Z — банаховы пространства. Предположим, что $F(x^*,\mu^*) = 0$ и $\forall\bar{\mu}\in M$, $\|\bar{\mu}\| = 1$; $(0,\bar{\mu})\in \bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$, т.е.*

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*) + f_2''(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}] + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}]^{p-1}\}_X^{-1}\| \le C. \tag{42}$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu)\in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$, достаточно малое такое, что $F(x(\mu),\mu) = 0$ и

$$x(\mu) = x^* + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu-\mu^*\|), \tag{43}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \le C\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu)\|_{Z_k}^{1/k} \quad \forall\mu\in V_\varepsilon(\mu^*). \tag{44}$$

Теорема 6. *Пусть $F(x,\mu)\in C^{p+1}(X\times M)$, $F: X\times M\to Z$, где M — конечномерное пространство, X, Z — банаховы пространства. Пусть для $h_\mu\ne 0$, $h_\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$ существует $\bar{h}_x\in X$, $\|\bar{h}_x\|\le c<\infty$ такое, что F является p-регулярным вдоль $\bar{h} = [\bar{h}_x,\bar{h}_\mu]$, т.е.*

$$\begin{gathered}\|\{f_1'(x^*,\mu^*) + f_2''(x^*,\mu^*)[\bar{h}] + \ldots + \ldots + f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[\bar{h}]^{p-1}\}_X^{-1}\| \le C,\\ \bar{h}\in\bigcap_{k=1}^{p}\operatorname{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*), \quad \bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}.\end{gathered} \tag{45}$$

Тогда существует отображение $x = x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu)\in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon > 0$ достаточно малое такое, что $F(x(\mu),\mu) = 0$ и

$$\mu = \mu^* + h_\mu, \quad x(\mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x + \omega(\mu), \quad \|\omega(\mu)\| = o(\|\mu\|), \|c(\mu)\| = \|\mu\|, \tag{46}$$

$$\|x(\mu) - x^*\| \le C\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^* + h_x,\mu)\|_{Z_k}^{1/k}. \tag{47}$$

3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Вернемся к нашему примеру и покажем, что отображение $F(\cdot)$ будет p-регулярным в решении $x^*(\cdot) = 0$. Не ограничивая общности, рассмотрим случай $p = 2$, так как случай $p > 2$ рассматривается аналогично.

Примем во внимание уравнение

$$\ddot{x} = f(x,\nu,\rho), \quad f: C^2[0,2\pi]\times\mathbb{R}^2 \to C[0,2\pi], \quad x(0) = \nu, \quad x(2\pi) = \rho, \tag{48}$$

или

$$F(x,\nu,\rho) = \ddot{x} - f(x,\nu,\rho) = 0, \quad x(0) = \nu, \quad x(2\pi) = \rho,$$

с граничными условиями, где $\mu \triangleq (\nu,\rho)$, ν и ρ — малые параметры из $U(\nu^*,\rho^*) = U(0,0)$, $\nu^* = 0$, $\rho^* = 0$.

Если отображение $x(t,\nu,\rho)$ невырожденно в точке решения $x^* = x(t,0,0)$ (в дальнейшем будем рассматривать именно такие отображения), то из теоремы о неявной функции следует, что для достаточно малого (ν,ρ) существует Δ_ν, Δ_ρ и функция x_μ такие, что

$$x_\mu(0+\Delta_\nu) = 0, \quad x_\mu(2\pi+\Delta_\rho) = 0, \quad x_\mu(0) = \nu, \quad x_\mu(2\pi) = \rho, \tag{49}$$

и

$$c_1(|\nu| + |\rho|) \le |\Delta_\nu| + |\Delta\rho| \le c_2(|\nu| + |\rho|). \tag{50}$$

В этом случае можно преобразовать (48) к виду

$$\ddot{x} = f(x,\nu,\rho), \quad x(\Delta_\nu) = 0, \quad x(2\pi+\Delta_\rho) = 0 \tag{51}$$

и, подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu\right)\tau + \Delta_\nu, \tag{52}$$

получим задачу (51) в форме

$$\bar{F}(\bar{x}, \Delta_\nu, \Delta_\rho) = 0, \tag{53}$$

где $\bar{F} : X \to C[0, 2\pi]$, $X = \{C^2[0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2 \,|\, \bar{x}(0) = 0, \bar{x}(2\pi) = 0\}$ и

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu\right)\tau + \Delta_\nu\right).$$

Отображение $\bar{F}$ будем называть *канонической формой* отображения F.

Пример 1. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$F(x) = x'' + x + x^2 = 0, \quad x(0) = \nu, \quad x(2\pi) = \rho, \tag{54}$$

где ν и ρ – малые параметры из $U(\nu^*, \rho^*) = U(0,0)$, $\nu^* = 0$, $\rho^* = 0$.

Подставив

$$t = \frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu\right)\tau + \Delta_\nu, \tag{55}$$

получаем следующее уравнение:

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu}\bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \tag{56}$$

где

$$\bar{x}(\tau) = x\left(\frac{1}{2\pi}\left(2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu\right)\tau + \Delta_\nu\right). \tag{57}$$

С учетом вышесказанного, рассмотрим следующую задачу, эквивалентную (48):

$$\frac{2\pi}{2\pi + \Delta_\rho - \Delta_\nu}\bar{x}'' + \bar{x} + \bar{x}^2 = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \tag{58}$$

Пусть

$$\bar{F}(\bar{x}(\tau), \Delta_\nu, \Delta\rho) = \bar{x}'' + \left(1 + \frac{\Delta_\rho}{2\pi} - \frac{\Delta_\nu}{2\pi}\right)(\bar{x} + \bar{x}^2) = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad \bar{x}(2\pi) = 0, \tag{59}$$

является канонической формой уравнения (54). Тогда

$$\bar{F}'(\bar{x}, \Delta_\nu, \Delta\rho) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + \left(1 + \frac{\Delta_\rho}{2\pi} - \frac{\Delta_\nu}{2\pi}\right)(1 + 2\bar{x}), -\frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2), \frac{1}{2\pi}(\bar{x} + \bar{x}^2)\right], \tag{60}$$

$$\bar{F}'(0,0,0) = \left[\frac{d^2}{d\tau^2} + 1, 0, 0\right]. \tag{61}$$

Определим ядро первой производной отображения $\bar{F}$ по переменной $\bar{x}$

$$\operatorname{Ker} \bar{F}'_{\bar{x}}(0,0,0) = \{\bar{x} : \bar{x}'' + \bar{x} = 0,\ \bar{x}(0) = \bar{x}(2\pi) = 0\}. \tag{62}$$

Отсюда $\bar{x}(\tau) = c_1 \cos\tau + c_2 \sin\tau$. С учетом граничных условий получаем $c_1 = 0$, $c_2 \in \mathbb{R}$ и

$$\operatorname{Ker} \bar{F}'_{\bar{x}}(0,0,0) = \operatorname{span}\{\sin\tau\}. \tag{63}$$

Оценим вторую производную отображения $\bar{F}$

$$\bar{F}''(\bar{x},\Delta_\nu,\Delta_\rho)=\begin{bmatrix} 2\left(1+\Delta_\rho-\dfrac{\Delta_\nu}{2\pi}\right) & -\dfrac{1}{2\pi}(1+2\bar{x}) & \dfrac{1}{2\pi}(1+2\bar{x}) \\ -\dfrac{1}{2\pi}(1+2\bar{x}) & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}(1+2\bar{x}) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{64}$$

$$\bar{F}''(0,0,0)=\begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2\pi} & \dfrac{1}{2\pi} \\ -\dfrac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{65}$$

Отметим, что

$$\bar{F}''(0,0,0)[h_{\bar{x}},h_\nu,h_\rho]=\begin{bmatrix} 2 & -\dfrac{1}{2\pi} & \dfrac{1}{2\pi} \\ -\dfrac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2\pi} & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{\bar{x}} \\ h_\nu \\ h_\rho \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2h_{\bar{x}}-\dfrac{1}{2\pi}h_\nu+\dfrac{1}{2\pi}h_\rho \\ -\dfrac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \\ \dfrac{1}{2\pi}h_{\bar{x}} \end{bmatrix}, \tag{66}$$

$$\bar{F}''(0,0,0)[h_{\bar{x}},h_\nu,h_\rho]^2=2h_{\bar{x}}^2-\frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_\nu+\frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_\rho. \tag{67}$$

Введя скалярное произведение в виде

$$\langle z_1,z_2\rangle=\int_0^{2\pi} z_1(\tau)z_2(\tau)d\tau \quad \forall z_1,z_2\in Z=C[0,2\pi], \tag{68}$$

мы опишем пространство $Z_1=\operatorname{Im}F'_{\bar{x}}(0,0,0)$ такое, что $Z=Z_1\oplus W_2$, $W_2=\operatorname{Ker}F'_{\bar{x}}(0,0,0)$.

Отсюда имеем

$$Z_1=\operatorname{Im}\bar{F}'_{\bar{x}}(0,0,0)=\left\{z\in C[0,2\pi]:\int_0^{2\pi} z(\tau)\sin\tau d\tau\right\}. \tag{69}$$

Легко показать, что проекция на W_2 имеет форму

$$P_{W_2}z=\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi} z(\tau)\sin\tau d\tau. \tag{70}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered} Z_2=\operatorname{span}(\operatorname{Im}P_{W_2}\bar{F}''(0,0,0)[\,\cdot\,]^2)= \\ =\operatorname{span}\left\{z\in Z: z(t)=\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\bar{F}''(0,0,0)[\,\cdot\,]^2\sin\tau d\tau\right\}=\operatorname{span}\{\sin t\}=W_2, \end{gathered} \tag{71}$$

т.е. $P_{W_2}=P_{Z_2}$.

Определим 2-фактор оператор

$$\begin{gathered} \forall\bar{h}=[h_{\bar{x}},h_\nu,h_\rho]\in C^2[0,2\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\Psi_2(h)[\bar{h}]=\Psi_2((0,0,0),[h_{\bar{x}},h_\nu,h_\rho])[\bar{h}_{\bar{x}},\bar{h}_\nu,\bar{h}_\rho]= \\ =(\bar{F}'_{\bar{x}}(0,0,0)+P_{Z_2}\bar{F}''(0,0,0)[h_{\bar{x}},h_\nu,h_\rho])[\bar{h}_{\bar{x}},\bar{h}_\nu,\bar{h}_\rho]=\frac{d^2h_{\bar{x}}}{dt^2}+h_{\bar{x}}+ \end{gathered} \tag{72}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\left(2h_{\bar{x}}\bar{h}_{\bar{x}}-\frac{1}{2\pi}h_{\nu}\bar{h}_{\bar{x}}+\frac{1}{2\pi}h_{\rho}\bar{h}_{\bar{x}}-\frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}}\bar{h}_{\nu}+\frac{1}{2\pi}h_{\bar{x}}\bar{h}_{\rho}\right)\sin\tau d\tau$$

и 2-ядро 2-фактор оператора $\Psi_2(h)$

$$\operatorname{Ker}^2\Psi_2(h)=\left\{h=[h_{\bar{x}},h_{\nu},h_{\rho}]\in C^2[0,2\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\Psi_2((0,0,0),[h_{\bar{x}},h_{\nu},h_{\rho}])[h_{\bar{x}},h_{\nu},h_{\rho}]=\right.$$
$$\left.=\frac{d^2h_{\bar{x}}}{dt^2}+h_{\bar{x}}+\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\left(2h_{\bar{x}}^2-\frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_{\nu}+\frac{1}{\pi}h_{\bar{x}}h_{\rho}\right)\sin\tau d\tau=0\right\}. \tag{73}$$

С учетом уравнений

$$\int_0^{2\pi}\sin^3\tau d\tau=0,\qquad\int_0^{2\pi}\sin^2\tau d\tau=\pi \tag{74}$$

и того факта, что $h_{\bar{x}}=q\sin\tau$ (так как $h_{\bar{x}}\in\operatorname{Ker}\bar{F}_x'(0,0,0)$), мы должны решить следующее уравнение с неизвестными q, h_{ν}, h_{ρ}:

$$\frac{1}{\pi}\sin t\left[q\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\pi}h_{\rho}-\frac{1}{\pi}h_{\nu}\right)\sin^2\tau d\tau+2q^2\int_0^{2\pi}\sin^3\tau d\tau\right]=0. \tag{75}$$

Получаем $\left(\frac{1}{\pi}h_{\rho}-\frac{1}{\pi}h_{\nu}\right)q=0$, т.е. $[q,h_{\nu},h_{\rho}]=[0,h_{\nu},h_{\rho}]$ или $[q,h_{\nu},h_{\rho}]=[q,h_{\rho},h_{\rho}]$, где q, h_{ν}, h_{ρ} – любые константы, принадлежащие $\mathbb{R}$. Отсюда

$$\operatorname{Ker}^2\Psi_2(h)=\{[0,h_{\nu},h_{\rho}]\}\cup\{[q\sin t,h_{\rho},h_{\rho}]\},\quad q,h_{\nu},h_{\rho}\in\mathbb{R}. \tag{76}$$

Теперь проверим, является ли 2-фактор оператор сюръекцией на $C[0,2\pi]$ для элементов H, принадлежащих 2-ядру 2-фактор оператору.

Пусть $H=[q\sin t,h_{\rho},h_{\rho}]$. Проверим следующее

$$\forall z\in C[0,2\pi]\quad\exists[\bar{h}_{\bar{x}},\bar{h}_{\nu},\bar{h}_{\rho}]\in C^2[0,2\pi]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R},\quad\text{что}\quad\Psi_2(H)[\bar{h}_{\bar{x}},\bar{h}_{\nu},\bar{h}_{\rho}]=z. \tag{77}$$

Исходя из леммы 2, достаточно показать, что это утверждение выполнено для любого элемента $z=z_2=a\sin t\in Z_2=W_2=\operatorname{Ker}\bar{F}_{\bar{x}}'(0,0,0)=\operatorname{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}}=b\sin t\in$ $\in\operatorname{Ker}\bar{F}_{\bar{x}}'(0,0,0)$. После подстановки в полученную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\left(q\sin\tau b\sin\tau-\frac{1}{2\pi}h_{\rho}b\sin\tau+\frac{1}{2\pi}h_{\rho}b\sin\tau-\frac{1}{2\pi}q\sin\tau\bar{h}_{\nu}+\frac{1}{2\pi}q\sin\tau\bar{h}_{\rho}\right)\sin\tau d\tau=a\sin t. \tag{78}$$

Отсюда $\frac{1}{2\pi}q(-\bar{h}_{\nu}+\bar{h}_{\rho})=a$. Следовательно, $\bar{h}_{\rho}=\bar{h}_{\nu}+\frac{2\pi a}{q}$ и $[\bar{h}_{\bar{x}},\bar{h}_{\nu},\bar{h}_{\rho}]=\left[b\sin t,\bar{h}_{\nu},\bar{h}_{\nu}+\frac{2\pi a}{q}\right]$ для любого b. Поэтому $\Psi_2(H)$ является сурьективным и это означает, что отображение F является 2-регулярным в точке $(0,0,0)$ на элементе $H=[q\sin t,h_{\rho},h_{\rho}]$.

Пусть $H=[0,h_{\nu},h_{\rho}]$.

Согласно лемме 2, берем любой элемент $z=z_2=a\sin t\in Z_2=W_2=\operatorname{Ker}\bar{F}_{\bar{x}}'(0,0,0)=$ $=\operatorname{span}\{\sin t\}$. Мы ищем элемент $\bar{h}_{\bar{x}}=b\sin t\in\operatorname{Ker}\bar{F}_{\bar{x}}'(0,0,0)$. Подставив в указанную форму 2-фактор оператора, получаем

$$\frac{1}{\pi}\sin t\int_0^{2\pi}\left(0-\frac{1}{2\pi}h_{\nu}b\sin\tau+\frac{1}{2\pi}h_{\rho}b\sin\tau-0+0\right)\sin\tau d\tau=a\sin t. \tag{79}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\pi}\sin t\left(-\frac{1}{2\pi}h_\nu b\pi + \frac{1}{2\pi}h_\rho b\pi\right) = a\sin t, \tag{80}$$

и

$$b = \frac{2\pi a}{h_\rho - h_\nu}, \tag{81}$$

для $h_\nu \neq h_\rho$.

Тогда $\bar{F}$ является 2-регулярным в точке $(0,0,0)$ на элементе $H = [0, h_\nu, h_\rho]$ таком, что $h_\nu \neq h_\rho$. Поэтому, согласно нашей теореме 1, можно сформулировать следующий результат для примера 1.

Теорема 7. *Отображение $\bar{F}(\bar{x},\mu)$ является 2-регулярным в точке $(0,0,0)$ на $\bar{h} = (\bar{h}_x, \bar{h}_\mu)$, где $\bar{h}_\mu = \frac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$, $h_\mu = (\nu,\rho)$, и*

$$\bar{h}_x(t,\mu) = \begin{cases} b\sin t, & b \neq 0, \quad \nu = \rho, \\ 0, & \nu \neq \rho. \end{cases}$$

Тогда для $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $\varepsilon > 0$ – достаточно малых существует непрерывная функция $x(t,\mu)$ такая, что

$$x(t,\mu) = c(\mu)\sin t + \omega(t,\mu), \quad x(0,\mu) = \nu, \quad x(2\pi,\mu) = \rho,$$

где

$$c(\mu) = \begin{cases} \|\mu\|, & \nu = \rho, \\ o(\|\mu\|), & \nu \neq \rho. \end{cases}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение теории p –регулярности позволило нам сформулировать и доказать некоторый аналог теоремы Люстерника о касательном конусе, т.е. теорему 1, связанный с проблемой существования непрерывного решения сингулярного уравнения $F(x^*,\mu^*) = 0$, где $F(x,\mu) \in C^{p+1}(X \times M)$ и $F : X \times M \to Z$, M является конечномерным пространством, а X, Z – банаховы пространства. Мы проиллюстрируем этот результат решением дифференциального уравнения второго порядка (54) с граничными условиями.

Ниже приведем общий результат данной статьи.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение:

$$F(x,\mu) = F(x^{(k)},\ldots,x',x,\nu,\rho) = 0, \quad x(a) = \nu, \quad x(\mu) = \rho, \tag{82}$$

где $F : C_m^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to C[a,b]$, $x(t) \in C_m^k[a,b]$, $\nu,\rho \in \mathbb{R}$, $\mu = (\nu,\rho\ )$. Аналогично (53), введем $\bar{x}$ и каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x},\mu)$, где $\bar{F} : X \to C[a,b]$, $X = \{C_m^k[a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid \bar{x}(a) = 0,\ \bar{x}(b) = 0\}$.

Теперь можно сформулировать общий результат.

Теорема 8. *Пусть $F(x,\mu) \in C^{p+1}(C_m^k[a,b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m)$ и для любого $h_\mu \neq 0$, $h_\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $h_\mu = (\nu,\rho)$ существует $\bar{h}_x(t,\mu) \in X$, $\|\bar{h}_x(t,\mu)\| \le c < \infty$ такие, что каноническое отображение $\bar{F}(\bar{x},\mu)$ является p-регулярным в $(\bar{x}^*,\mu^*)$ на $\bar{h}(\mu) = [\bar{h}_x(t,\mu), \bar{h}_\mu]$, где $\bar{h}(\mu) \in \bigcap_{k=1}^{p} \operatorname{Ker}^k \bar{f}_k^{(k)}(\bar{x}^*,\mu^*)$.*

Тогда существует непрерывное отображение $x = x(t,\mu)$, $\mu \in V_\varepsilon(\mu^*)$, $t \in [a,b]$, $x(t,\mu) \in C(V_\varepsilon(\mu^*))$ *и* $\varepsilon > 0$ *достаточно малое такое, что*

$$F(x(t,\mu),\mu) = 0, \quad x(a) = \nu, \quad x(b) = \rho, \tag{83}$$

где

$$x(t,\mu) = x^* + c(\mu)\bar{h}_x(t,\mu) + \omega(t,\mu) \tag{84}$$

и

$$c(\mu) = \begin{cases} O(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t,\mu) \neq 0, \omega(t,\mu) = o(\mu - \mu^*), \\ o(\mu - \mu^*), & \bar{h}_x(t,\mu) = 0, \omega(t,\mu) = o(c(\mu)). \end{cases} \tag{85}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Фактор-анализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
2. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач: теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
3. *Marsden J.E., Tret'yakov A.A.* Factor analysis of nonlinear mappings: p-regularity theory // Communications on Pure & Applied Analysis. 2003. V. 2. № 4. P. 425.
4. *Medak B., Tret'yakov A.A.* Existence of periodic solutions to nonlinear p-regular boundary value problem // Boundary Value Problems. 2015. Art. № 91. P. 1–24.
5. *Медак Б., Третьяков А.А.* Теория p-регулярности. Анализ и приложения. М.: Физматлит, 2017.
6. *Michael E.A.* Continuous selector // Ann. Math. 1956. V. 64. P. 562–580.
7. *Третьяков А.А.* Теорема о неявной функции в вырожденных задачах // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. № 5. С. 215–216.
8. *Brezhneva O.A., Tret'yakov A.A.* Implicit function theorems for nonregular mappings in Banach spaces. Exit from singularity // Banach Spaces and Their Applications in Analysis. 2007. P. 285–302.
9. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.