ЖЭТФ, 2024, том 165, вып. 4, стр. 589–602 

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГИДРОДИНАМИКЕ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

***А. В. Конюхов*** *

*Объединенный институт высоких температур Российской академии наук*
*125412, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 30 октября 2023 г.,
после переработки 16 декабря 2023 г.
Принята к публикации 17 декабря 2023 г.

Показано, что критерий Конторовича нейтральной устойчивости релятивистских ударных волн (релятивистский аналог критерия Дьякова–Конторовича в классической гидродинамике), после исключения производной вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгонио с использованием соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве, сводится к ограничению на изоэнтальпийную производную внутренней энергии по удельному объему в системе покоя: $p > -(\partial\varepsilon/\partial v)_w > p_0$. Полученная формулировка справедлива и в классической гидродинамике. Выведены следствия данной формулировки для ударных волн с однофазным и двухфазным конечными состояниями в среде с фазовым переходом первого рода. Показано влияние параметра Риделя и изохорной теплоемкости на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В модельной постановке задачи исследовано влияние локальной термодинамической неравновесности на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны.

**DOI:** 10.31857/S0044451024040138

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная теория устойчивости ударных волн в средах с произвольными термодинамическими свойствами выделяет диапазон параметров ударной волны, в котором в рамках анализа линеаризованной задачи для уравнений, описывающих эволюцию возмущений, последние не растут и не затухают. Поток энергии акустической составляющей вторичных волн в этом случае направлен от ударной волны в сторону ударно-сжатого вещества, т. е. ударная волна является источником вынужденного излучения звука, если имеет место нелинейная устойчивость, или спонтанного в противном случае. Для обозначения этого диапазона в литературе используются термины: неустойчивость Дьякова–Конторовича, спонтанное излучение звука ударной волной, нейтральная (в рамках линейной теории) устойчивость ударной волны. С выполнением условий нейтральной устойчивости связывают сложное поведение ударных волн, состоящее в аномально медленном затухании возмущений и связанной с этим неоднородностью параметров за ее фронтом.

Впервые анализ устойчивости нерелятивистской ударной волны к малым двумерным возмущениям в среде с произвольными термодинамическими свойствами был выполнен С. П. Дьяковым [1] с использованием метода нормальных мод и позднее уточнен В. М. Конторовичем [2]. В рамках проведенного исследования были получены критерии неустойчивости ударной волны, связывающие безразмерную производную вдоль ударной адиабаты $L = j^2(\partial V/\partial p)_H$, $j = \rho v$ — плотность потока массы через поверхность ударной волны, число Маха течения за фронтом ударной волны ($M$) и степень сжатия вещества в ударной волне:

$$L < -1 \quad \text{или} \quad L > 1 + 2M \quad \text{(неустойчивость)}, \tag{1}$$

$$L > \frac{1 - M^2(1 + V_0/V)}{1 - M^2(1 - V_0/V)} \quad \text{(нейтральная устойчивость)}. \tag{2}$$

* E-mail: konyukhov_av@mail.ru

Впоследствии эти условия были вновь получены на основе более общего математического подхода [3]. В работе Конторовича [4] анализ был обобщен на случай релятивистской гидродинамики и получена релятивистская формулировка критериев устойчивости, которые в нерелятивистском пределе переходят в (1), (2). В [5] введен релятивистский аналог параметра $L$ и предложена формулировка критериев устойчивости ударной волны, полученных в [4], посредством этого параметра. До настоящего времени выполнение (2) фиксировалось для ударных волн в металлах [6–8], в условиях неравновесной ионизации в газах [9, 10], в реальном газе [11–13]. Установлено выполнение этого условия в горячей плазме углерода, кремния, алюминия, ниобия [14], в неадиабатических условиях при протекании реакций [15, 16]. В большинстве случаев реализация условия обнаруживалась в результате непосредственной проверки выполнения (2) на ударной адиабате.

Впервые на тот факт, что условие нейтральной устойчивости ударной волны, после исключения из него параметра $L$ с использованием соотношений на ударно-волновом разрыве, существенно упрощается, было указано в [17] для случая нерелятивистской ударной волны. Позднее устойчивость релятивистских ударных волн в линейном приближении была повторно исследована в [18, 19] на основе метода, аналогичного [3]. Исследование корректности смешанной задачи для уравнений, описывающих эволюцию возмущений с использованием условия Лопатинского, привело к формулировке критерия нейтральной устойчивости ударной волны в виде ограничения на производные уравнения состояния. На основе полученных результатов был рассмотрен вопрос устойчивости ударных волн для некоторых уравнений состояния [11, 20]. Термодинамическая формулировка в виде ограничения на термодинамические производные обладает преимуществом непосредственной, без построения ударных адиабат для конкретного уравнения состояния, связи между термодинамическими свойствами среды и устойчивостью ударной волны и является удобным инструментом для анализа реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн в рамках релятивистской и классической гидродинамики.

Изучению этой связи для сред с фазовыми переходами посвящена данная работа. В разд. 2 на основе результата Конторовича [4] получена эквивалентная термодинамическая формулировка критерия нейтральной устойчивости релятивистской ударной волны в виде ограничения на изоэнтальпийную производную внутренней энергии по удельному объему. В разд. 3 даны примеры применения этого термодинамического критерия для оценки реализуемости нейтральной устойчивости ударных волн в средах с различными уравнениями состояния. В разд. 4 показано, что в термодинамической формулировке критерий нейтральной устойчивости ударных волн одинаково записывается в релятивистском и нерелятивистском случаях. В разд. 5 выведены следствия данной формулировки для ударных волн с однофазным и двухфазным конечными состояниями в среде с фазовым переходом первого рода. Показано влияние параметра Риделя и изохорной теплоемкости на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В разд. 6 в рамках модельной постановки задачи, которая опирается на результаты предыдущих разделов, показано влияние неравновесности внутренних степеней свободы молекул на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны.

## 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

Критерий нейтральной устойчивости релятивистской ударной волны в рамках специальной теории относительности впервые получен Конторовичем на основе исследования устойчивости методом нормальных мод. Результат представлен в системе отсчета, связанной с ударно-волновым разрывом, с использованием системы единиц, в которой скорость света равна 1. Критерий сформулирован в виде следующей цепочки неравенств [4]:

$$-\frac{1}{u_y^2}\left(1+2\gamma\frac{u_y}{c}\right) < \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H < -\frac{1}{u_y^2}\frac{1-M^2-(1+2u_y^2)\,M^2/(u_y^2\alpha)}{1-M^2+M^2/(u_y^2\alpha)}. \quad (3)$$

Здесь

$$\gamma = 1/\sqrt{1-v^2},$$
$$\alpha = [h]/[p]-2,$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок соответствующей величины на ударно-волновом разрыве; $u_y=\gamma v$ — компонента 4-вектора скорости, нормальная к поверхности ударной волны; $v$ — соответствующая компонента гидродинамической скорости, $M=v/c$ — число Маха течения за фронтом ударной волны, $c$ — скорость звука:

$$c^2 = (\partial p/\partial e)_S;$$

$e$ — плотность внутренней энергии; $p$ — давление; $h = e + p$ — плотность энтальпии; производная $(\partial h/\partial p)_H$ берется вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгонио [21]:

$$h_0^2 V_0^2 - h^2 V^2 + (p - p_0)(h_0 V_0^2 + h V^2) = 0, \qquad (4)$$

где индекс «0» относится к состоянию перед ударной волной; $V$ — удельный объем в связанной системе отсчета. В зависимости от рассматриваемой системы удельные величины приходятся на частицу, единицу барионного числа или единицу массы.

Левое неравенство в (3) для определения границы нейтральной устойчивости ударной волны не существенно, поскольку участок неустойчивости

$$-\frac{1}{u_y^2}\left(1 + 2\gamma\frac{u_y}{c}\right) > \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H, \qquad (5)$$

соответствующий экспоненциальному росту возмущений, на ударной адиабате всегда перекрывается областью структурной неустойчивости или метастабильного поведения ударной волны. Интерес представляет правое неравенство, так как оно определяет границу области устойчивых ударных волн и области нейтральной устойчивости. Рассмотрим условия, которым должно удовлетворять уравнение состояния вещества, чтобы в нем были возможны ударные волны, отвечающие (3). Для этого преобразуем правое неравенство (3), исключив производную вдоль ударной адиабаты и скорость, с использованием соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве. Запишем это неравенство в эквивалентном виде

$$\frac{1 + u_y^2 q}{2(1 + u_y^2)} < \frac{1}{1 + (M^{-2} - 1)u_y^2\alpha}, \qquad (6)$$

где по определению

$$q = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_H,$$

и преобразуем отдельно левую и правую части (6). Согласно (4) приращения плотности энергии, давления и удельного объема вдоль ударной адиабаты Тауба–Гюгонио связаны соотношением

$$\frac{X_0}{X}dp + \frac{[p] - h}{X}dX = de, \qquad (7)$$

где $X \equiv hV^2$. Используя соотношение на ударно-волновом разрыве

$$\frac{X_0}{X} = u_y^{-2}\frac{[p]}{h} + 1, \qquad (8)$$

тождество

$$v^2 = \frac{u_y^2}{1 + u_y^2}$$

и вводя обозначения

$$g = \frac{[p]}{h} - 1,\ \bar{V}_p = \frac{h}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_e,\ \bar{V}_e = \frac{h}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial e}\right)_p, \qquad (9)$$

получим выражение для левой части (6):

$$\frac{1 + u_y^2 q}{2(1 + u_y^2)} = \frac{1 + g(\bar{V}_p v^2 - \bar{V}_e)}{1 + g(\bar{V}_p c^2 - \bar{V}_e)}. \qquad (10)$$

Из соотношений на релятивистском ударно-волновом разрыве следует выражение для параметра $\alpha$:

$$\alpha = \left(1 - \frac{[p]}{h}\right) \Big/ \left(u_y^2 + \frac{[p]}{h}\right). \qquad (11)$$

С учетом (11) правая часть (6) приводится к виду

$$\frac{1}{1 + (M^{-2} - 1)u_y^2\alpha} = \frac{1 + g(1 - v^2)}{1 + g(1 - c^2)}. \qquad (12)$$

После подстановки преобразованных выражений (10) и (12) в (6) имеем

$$\frac{1 + g(\bar{V}_p v^2 - \bar{V}_e)}{1 + g(\bar{V}_p c^2 - \bar{V}_e)} < \frac{1 + g(1 - v^2)}{1 + g(1 - c^2)}. \qquad (13)$$

Из соотношения для квадрата скорости звука

$$c^2 = -(1 + \bar{V}_e)/\bar{V}_p > 0,$$

ограничения на параметр $g$, которое следует из соотношений на ударно-волновом разрыве:

$$-1 < g < -1/2,$$

принципа причинности $c < 1$ и условия эволюционности ударно-волнового разрыва $v < c$ следует, что знаменатель правой части (13) положителен, а знак знаменателя левой части неравенства противоположен знаку $\bar{V}_p$. После приведения к общему знаменателю, деления на $g$, $\bar{V}_p$ и $v^2 - c^2$, приходим к неравенству, эквивалентному (13),

$$[p]\left(1 - \bar{V}_e/\bar{V}_p\right) > hc^2. \qquad (14)$$

С учетом тождества

$$1 - \bar{V}_e/\bar{V}_p = w_\varepsilon|_V,$$

где

$$w_\varepsilon|_V = \left(\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}\right)_V,$$

$\varepsilon = Ve$ — внутренняя энергия, $w = \varepsilon + pV$ — энтальпия, (14) принимает вид

$$hc^2 - w_\varepsilon|_V [p] < 0. \tag{15}$$

Условие (15) равносильно критерию нейтральной устойчивости ударной волны в формулировке Конторовича. Термодинамическое тождество

$$w_\varepsilon|_V (\varepsilon_V|_w + p) = hc^2,$$

доказательство которого дано в Приложении, можно записать в виде

$$w_\varepsilon|_V (G + [p]) = hc^2, \tag{16}$$

где

$$G = \varepsilon_V|_w + p_0.$$

Выразив производную $w_\varepsilon|_V$ из (16), после подстановки в (15) получим эквивалентную запись условия нейтральной устойчивости ударной волны:

$$\frac{G}{G + [p]} hc^2 < 0, \tag{17}$$

из которой следует, что условие нейтральной устойчивости выполняется тогда и только тогда, когда параметр $G$ заключен в диапазоне $-[p] < G < 0$, что равносильно ограничению на производную внутренней энергии:

$$p > -\varepsilon_V|_w > p_0. \tag{18}$$

Левое неравенство в (18) равносильно условию $w_\varepsilon|_V > 0$, другая запись которого имеет вид $\Gamma > -1$, где

$$\Gamma = V\, p_T|_V / \varepsilon_T|_V$$

— параметр Грюнайзена. Невыполнение этого условия представляется экзотичным, хотя не противоречит законам термодинамики. В этих условиях силу критерия приобретает правое неравенство

$$-\varepsilon_V|_w > p_0, \tag{19}$$

которое чаще всего не выполняется и выполнение которого в ограниченной области фазовой диаграммы означает реализуемость нейтральной устойчивости ударных волн. Это условие выполняется при отрицательной производной в левой части (19) в первую очередь для ударных волн высокой интенсивности. Приведем ряд примеров.

## 3. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ

Релятивистское уравнение состояния газа невзаимодействующих частиц [22],

$$w = \frac{K_3(1/(w-\varepsilon))}{K_2(1/(w-\varepsilon))}, \tag{20}$$

где $K_2$ и $K_3$ — модифицированные функции Бесселя второго рода второго и третьего порядка, не допускает выполнение (19) в силу того, что левая часть неравенства равна нулю. Аналогично уравнения состояния ультрарелятивистского газа, излучения, нерелятивистского идеального газа, а также любое калорическое уравнение состояния, связывающее энтальпию и внутреннюю энергию функциональной зависимостью вида $f(w, \varepsilon) = 0$, или в параметрической записи $pV = f(T)$, $\varepsilon = \varepsilon(T)$, допускают существование только устойчивых в рамках линейной теории [1–4] ударных волн. Одним из приложений релятивистской гидродинамики является моделирование ударного сжатия ядерной материи при столкновении релятивистских ядер в коллайдерах, приводящего к образованию кварк-глюонной плазмы и последующему ее расширению и адронизации. На этапе столкновения параметры кварк-глюонной плазмы оцениваются из соотношений на ударно-волновом разрыве, и вопрос устойчивости ударной волны поднимался в литературе, см., например, [23–25]. Калорическое уравнение состояния кварк-глюонной плазмы в рамках модели мешков (M.I.T. bag model, см. [26]), при выводе которого пренебрегается массой кварков, имеет вид

$$w = \frac{4}{3}(\varepsilon - BV), \tag{21}$$

где $B > 0$ — константа модели мешков. Следовательно, выполнение (3) для ударных волн с конечным состоянием в области фазовой диаграммы ядерного вещества, соответствующей кварк-глюонной плазме, невозможно, если влияние корректирующих поправок к (21) не превысит стабилизирующее влияние константы $B$.

Пусть уравнение состояния вещества задано в параметрической форме

$$p = p(V, T), \quad \varepsilon = \varepsilon(V, T). \tag{22}$$

Перейдем в (19) от переменных $(p, w)$ к переменным $(V, T)$. Такой переход является взаимно однозначным. В результате получим

$$(pV)_V|_T - \xi(V p_V|_T + T p_T|_V) > p_0, \tag{23}$$

$$\xi = \frac{1}{1 + \varepsilon_T|_V/(Vp_T|_V)}.$$

Необходимое условие реализуемости нейтральной устойчивости, соответствующее пределу ударных волн бесконечной интенсивности, ($p_0 \to 0$) в (23), может быть записано в виде

$$(pV)_V|_T c_V > V p_T|_V \, \varepsilon_V|_T, \qquad (24)$$

где

$$\varepsilon_V|_T = Tp_T|_V - p, \quad c_V = \varepsilon_T|_V.$$

Следовательно, для среды с положительным параметром Грюнайзена, что является наиболее распространенным случаем для реальных сред, независимость внутренней энергии от объема $\varepsilon = \varepsilon(T)$ либо отрицательность производной $\varepsilon_V|_T < 0$ при $(pV)_V|_T > 0$ означает безусловную (независимо от $c_V$) реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн. В этом случае существует пороговая интенсивность ударной волны, выше которой критерий Дьякова–Конторовича выполняется. В оставшихся случаях реализуемость нейтральной устойчивости определяется величиной изохорной теплоемкости. И, напротив, если $(pV)_V|_T < 0$, неотрицательность $\varepsilon_V|_T$ влечет безусловную устойчивость ударных волн в соответствии с этим критерием. На таких примерах мы видим, как свойство вынужденного или спонтанного излучения звука ударной волной одновременно с фактом ее нейтральной устойчивости в рамках линейной теории определяется по уравнению состояния без построения ударных адиабат и проверки критерия в его первоначальном виде.

## 4. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ПРЕДЕЛ

Полученная в рамках более общей теории форма записи условия нейтральной устойчивости ударной волны (18) одинаково справедлива для релятивистских и нерелятивистских ударных волн. В качестве иллюстрации этого утверждения выведем ее непосредственно из (2). Приращения переменных вдоль ударной адиабаты

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \tfrac{1}{2}(p + p_0)(V - V_0) = 0 \qquad (25)$$

связаны соотношением

$$\varepsilon_V|_p dV + \varepsilon_p|_V dp + \frac{V - V_0}{2} dp + \frac{p + p_0}{2} dV = 0, \quad (26)$$

которое с учетом выражения для скорости звука и соотношений на ударно-волновом разрыве приводит к следующему выражению для параметра Дьякова:

$$L = -1 + \frac{1 - M^2}{1 - \frac{1}{2}(p - p_0)/(p + \varepsilon_V|_p)}. \qquad (27)$$

Так как, с другой стороны, (2) равносильно

$$L > -1 + \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2}\left(1 - M^2(V - V_0)/V\right)}, \qquad (28)$$

условие Дьякова–Конторовича можно записать в виде

$$\frac{1 - M^2}{1 - \frac{1}{2}(p - p_0)/(p + \varepsilon_V|_p)} > \frac{1 - M^2}{\frac{1}{2}\left(1 - M^2(V - V_0)/V\right)}. \qquad (29)$$

$M < 1$, $V_0 > V$, следовательно, обе дроби положительны и условие принимает вид

$$M^2 \frac{V_0 - V}{V} > 1 - \frac{p - p_0}{p + \varepsilon_V|_p}. \qquad (30)$$

С учетом тождеств

$$\frac{c^2}{V^2} = \frac{p + \varepsilon_V|_p}{\varepsilon_p|_V}, \quad M^2 = \frac{p - p_0}{V_0 - V}\frac{V^2}{c^2} \qquad (31)$$

имеем

$$w_\varepsilon|_V [p] > c^2/V, \qquad (32)$$

что является нерелятивистским аналогом (15). Используя нерелятивистский предел тождества (16)

$$w_\varepsilon|_V (G + [p]) = c^2/V, \qquad (33)$$

имеем окончательно

$$p > -\varepsilon_V|_w > p_0.$$

Ожидаемо приходим к результату, полученному в рамках релятивистской гидродинамики. Метод нормальных мод и метод исследования корректности смешанной задачи для возмущений одинаково определяют границы устойчивости, соответственно, ограничения на производные уравнения состояния за фронтом нейтрально устойчивой ударной волны [11]

$$\frac{\rho}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\varepsilon < 1, \quad 1 + \frac{1}{\rho \varepsilon_p|_V} > 0 \qquad (34)$$

эквивалентны (18). Действительно, соотношения

$$-\varepsilon_V|_w = \frac{w_V|_\varepsilon}{w_\varepsilon|_V} = \frac{p + V p_V|_\varepsilon}{1 + V/\varepsilon_p|_V} > p_0,$$

$$p + \varepsilon_V|_w = \frac{hc^2}{w_\varepsilon|_V} = \frac{hc^2}{1 + V/\varepsilon_p|_V} > 0$$

показывают связь между (34) и (18). При этом (18) имеет простую термодинамическую трактовку: нейтрально устойчивые ударные волны возможны только в условиях, когда внутренняя энергия уменьшается при расширении в изоэнтальпийном процессе, а границами нейтральной устойчивости в пространстве термодинамических переменных являются линии уровня производной внутренней энергии по объему $\varepsilon_V|_w$.

## 5. НЕЙТРАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДАРНЫХ ВОЛН И ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД ПЕРВОГО РОДА

### 5.1. Двухфазные состояния за фронтом ударной волны

Для ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазового перехода ($p = p_s(T)$ и $p_V|_T = 0$, где $p_s$ — давление на линии насыщения) условие (24) принимает вид

$$\frac{c_V}{R} > \theta\left(\theta/(1 - I^{-1}) - 1\right) Z, \qquad (35)$$

где

$$Z = \frac{pV}{RT}$$

— коэффициент сжимаемости,

$$\theta = \frac{d(\ln p_s)}{d(\ln T)}$$

— функция температуры, характеризующая наклон кривой фазового равновесия в плоскости переменных $(p, T)$, $I = p/p_0$ — перепад давления на фронте ударной волны. Необходимое условие реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн, соответствующее пределу ударных волн бесконечной интенсивности, есть

$$\frac{c_V}{R} > \theta\,(\theta - 1)\, Z. \qquad (36)$$

Из (36) следует безусловная (независимо от $c_V$) реализуемость нейтральной устойчивости сильных ударных волн при $0 < \theta < 1$. Ударная волна в этом случае является нейтрально устойчивой при перепаде давления на фронте $I > (1 - \theta)^{-1}$. В случае $\theta < 0$ и $\theta > 1$ реализуемость таких ударных волн определяется величиной изохорной теплоемкости. Фазовому переходу жидкость–газ для широкого круга веществ соответствует случай $\theta > 1$.

Значение $\theta$ в критической точке является параметром подобия термодинамических свойств различных веществ (параметр Риделя, $\alpha = (d(\ln p)/d(\ln T))_c$) и в рамках закона соответственных состояний аппроксимируется зависимостью

$$\alpha = 4.919\omega + 5.811,$$

где $\omega$ — ацентрический фактор Питцера, что с учетом корреляции для сжимаемости

$$Z_c = 0.291 - 0.080\omega$$

дает

$$(\theta\,(\theta - 1)\, Z)_c \approx 8.135 + 12.97\omega.$$

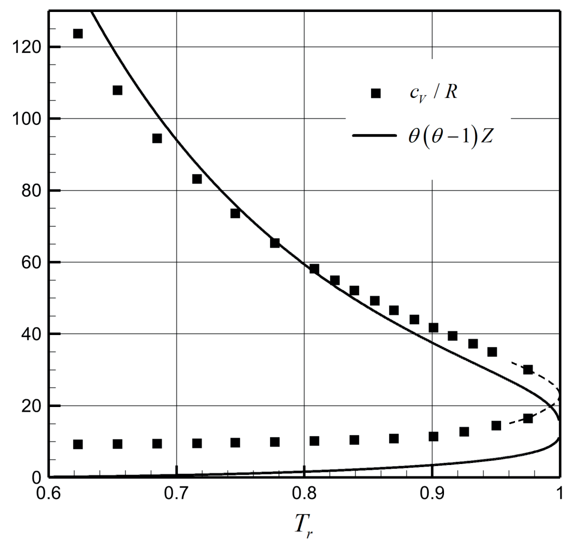


**Рис. 1.** Левая и правая части (36) для $H_2O$ на границе двухфазной области в зависимости от приведенной температуры

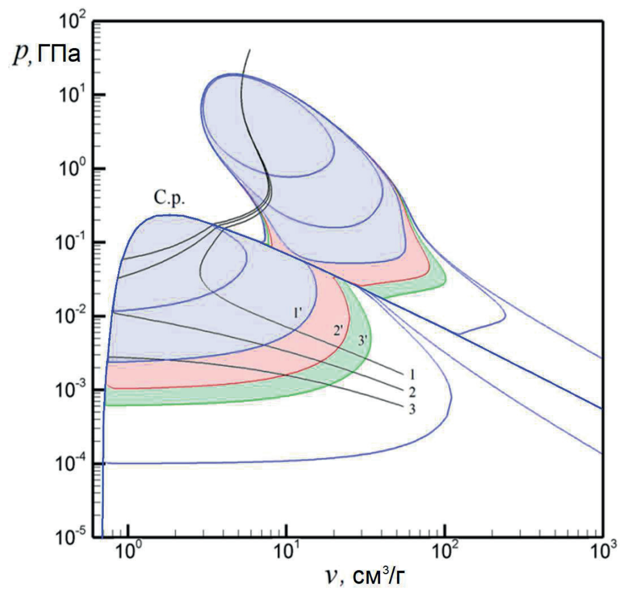


**Рис. 2.** Линии уровня $\varepsilon_V|_w$ для магния, $k'$ — граница нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_k)}$, где $p_k$ — начальное давление ударной адиабаты $k$, C.p. — критическая точка

На границе двухфазной области со стороны насыщенной жидкости и насыщенного пара правая часть (36) является функцией температуры. Эти зависимости, следующие из закона соответственных состояний для ацентрического фактора воды $\omega = 0.344$ [27], показаны на рис. 1, где также представлены данные о теплоемкости жидкой воды и пара на границе двухфазной области со стороны двухфазных состояний [28]. Правая и левая части (36) внутри двухфазной области на изотерме являются линейными функциями удельного объема, следовательно, выполнения неравенства на границах двухфазной области со стороны жидкости и газа достаточно, чтобы оно выполнялось во всех внутренних точках. Из рис. 1 следует, что (36) выполняется в околокритической области при температуре, превышающей приблизительно 0.78, при всех значениях удельного объема. При меньшей приведенной температуре появляются двухфазные состояния с преобладающей долей пара, для которых (36) не выполняется. Похожая картина имеет место и для других веществ. В [7] на основе широкодиапазонного уравнения состояния показана аналогичная картина нейтральной устойчивости ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области металлов. На рис. 2 для широкодиапазонного уравнения состояния магния (см. [7]) показаны области нейтральной устойчивости ударных волн, построенные как линии уровня $\varepsilon_V|_w$. Обозначение $k'$ соответствует границе области $\partial\Omega^{(p_k)}$, где $p_k$ — начальное давление ударной адиабаты $k$. Каждая из показанных ударных адиабат имеет участки нейтральной устойчивости на пересечении с соответствующей областью $\Omega^{(p_k)}$ как в двухфазной, так и в однофазной области.

### 5.2. Однофазные состояния за фронтом ударной волны

Рассмотрим следствия (23) для ударных волн с конечным состоянием в однофазной области фазового перехода при положительном наклоне кривой фазового равновесия в критической точке $\theta_c > 0$. Из непрерывности $p_V|_T$ при переходе через критическую точку из двухфазной области в однофазную следует, что между бинодалью фазового перехода и кривой Бойля (определяемой условием $(pV)_V|_T = 0$) в переменных $(V, p)$ выполняется $(pV)_V|_T > 0$. Из непрерывности производной $p_T|_V$ в критической точке (соотношение Планка–Гиббса $(p_T|_V)_c = (dp_s/dT)_c$, означающее, что в критической точке наклон линии насыщения в координатах $(T, p)$ равен наклону критической изохоры) следует непрерывность $\varepsilon_V|_T$, а из тождества

$$(\partial(\varepsilon_V|_T)/\partial T)|_V = (\partial c_V/\partial V)|_T$$

— ограниченность ее производной по температуре. Заметим, что модели, в которых теплоемкость при постоянном объеме зависит только от температуры, приводят к постоянству $\varepsilon_V|_T$ на изохоре. Следовательно, если наклон кривой фазового равновесия в плоскости переменных $(T, p)$ заключен в интервале $0 < \theta_c < 1$, в окрестности критической точки со стороны однофазных состояний существует пересечение областей $(pV)_V|_T > 0$ и $\varepsilon_V|_T < 0$, соответствующее безусловной реализуемости (независимо от теплоемкости $c_V$) нейтральной устойчивости ударных волн.

Граница нейтральной устойчивости на $(V, p)$-диаграмме в этом случае расположена между кривой Бойля и кривой $\varepsilon_V|_T = 0$ и проходит через точки их пересечения, если такие имеются. Если наклон кривой фазового равновесия удовлетворяет условию $\theta_c > 1$, то в окрестности критической точки со стороны однофазных состояний выполняются условия $(pV)_V|_T > 0$ и $\varepsilon_V|_T > 0$. Фазовый переход жидкость–газ соответствует этому случаю. Пусть $\varepsilon_V|_T$ сохраняет знак во всей области над бинодалью, как это имеет место для рассмотренных ниже моделей реального газа. Тогда, в зависимости от величины изохорной теплоемкости, нейтральная устойчивость ударных волн возможна только для состояний за фронтом ударной волны, заключенных между бинодалью и кривой Бойля. Так как предел большой теплоемкости соответствует выполнению условия нейтральной устойчивости ударных волн для всех состояний между бинодалью и кривой Бойля, а предел низкой теплоемкости — его невыполнению (в этом пределе (23) принимает вид $-\varepsilon_V|_T > 0$), существует пороговое значение теплоемкости, при котором нейтрально устойчивые ударные волны становятся возможны. Оценим этот порог на основе термодинамического критерия нейтральной устойчивости ударных волн для некоторых моделей реального газа.

### 5.3. Влияние теплоемкости

Пусть состояние жидкости и газа описывается единым уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon(p, V)$, как в случае уравнения Ван дер Ваальса. Из (29) заключаем, что граница $\partial\Omega^{(p_0)}$ области нейтральной устойчивости проходит через точки пересечения прямой $p = p_0$ и границы гиперболичности, определяемой условием $c = 0$, где $c$ — адиабатическая скорость звука. Эти точки расположены на плоскости $(V, p)$ ниже спинодали и соответствуют термодинамически неустойчивым состояниям. Рассмотрим уравнение состояния общего вида:

$$p = r(V)RT - A(V), \tag{37}$$

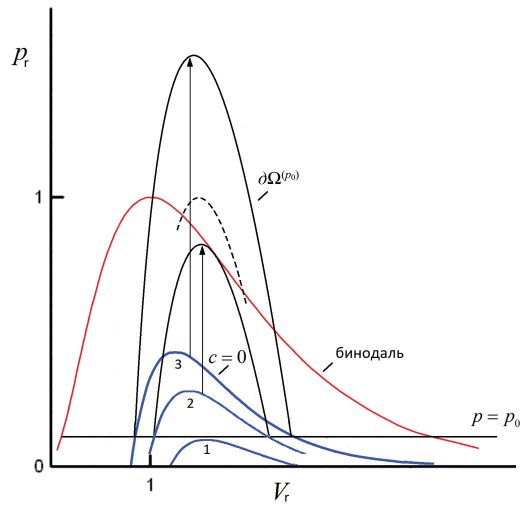


**Рис. 3.** Схема, показывающая зависимость области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ в реальных газах от изохорной теплоемкости. Кривые *1–3* — адиабатическая спинодаль для трех значений теплоемкости $c_{V3} > c_{V2} > c_{V1}$. $\Omega^{(p_0)}$ для каждого значения $c_V$ определяется неравенством (43)

где $r(V)$, $A(V)$ — функции удельного объема. Зависимость (37) обобщает уравнение состояния газа Ван дер Ваальса, второе уравнение Дитеричи, различные приближения модели твердых сфер, уточняющие функцию $r(V)$, и модели члена притяжения $A(V)$. Для оценки реализуемости нейтральной устойчивости ударной волны в однофазной области слабую температурную зависимость этого члена, которая учитывается в полуэмпирических уравнениях состояния, можно линеаризовать в окрестности бинодали. При известной зависимости изохорной теплоемкости от температуры вида $\varepsilon_T|_V = c_V(T)$ фундаментальное уравнение такого газа записывается в параметрической форме:

$$\varepsilon(V,T) = \varepsilon_0 + \int\limits_0^T c_V(t')dt' + \int\limits_\infty^V A(v')dv',$$
$$s(V,T) = s_0 + \int\limits_0^T \frac{c_V(t')}{t'}dt' + R\int\limits_\infty^V r(v')dv'. \tag{38}$$

Квадрат адиабатической скорости звука в такой среде есть

$$c^2 = V^2\left(\left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r}\right)(p+A) + A'\right), \tag{39}$$
$$r' = dr/dV, \quad A' = dA/dV.$$

Используя (39), выразим квадрат скорости звука через давление при $c = 0$, представив его как функцию объема $p|_{c=0} = \mathcal{H}(V, c_V)$:

$$c^2 = V^2\left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r}\right)(p - \mathcal{H}(V,c_V)), \tag{40}$$

$$\mathcal{H}(V,c_V) = -A' \Big/ \left(\frac{rR}{c_V} - \frac{r'}{r}\right) - A. \tag{41}$$

Для данной среды

$$e_p|_V = \frac{1}{V}\frac{\varepsilon_T|_V}{p_T|_V} = \frac{1}{rV}\frac{c_V}{R}. \tag{42}$$

Подстановка (40) и (42) в (32) приводит к условию нейтральной устойчивости ударной волны:

$$p - p_0 < \lambda(\mathcal{H}(V,c_V) - p_0), \tag{43}$$

$$\lambda = V\left(\frac{r'}{r} - \frac{R}{c_V}r\right) \Big/ \left(1 + V\frac{r'}{r}\right). \tag{44}$$

В случае газа с постоянной изохорной теплоемкостью кривая $p = \mathcal{H}(V, c_V)$ — адиабатическая спинодаль. Граница области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ в плоскости переменных $(V, p)$, в соответствии с (43), есть образ адиабатической спинодали при растяжении относительно прямой $p = p_0$ в направлении оси $p$ с коэффициентом, зависящим от объема и теплоемкости. Это дает простую качественную картину положения области нейтральной устойчивости относительно бинодали, показанную на рис. 3, из которой следует, что если $p_0$ превышает максимум давления на адиабатической спинодали (кривая *1*), (18) не выполняется даже в области метастабильных и нестабильных состояний. При повышении теплоемкости адиабатическая спинодаль смещается в область более высоких давлений и при некотором значении теплоемкости $\partial\Omega^{(p_0)}$ выходит в область термодинамически стабильных однофазных состояний (кривая *2*). При дальнейшем увеличении теплоемкости становятся возможными сверхкритические давления за фронтом нейтрально устойчивой ударной волны (показана штриховой линией). При еще большей теплоемкости $\partial\Omega^{(p_0)}$ проходит через критическую точку фазового перехода и становятся возможными нейтрально устойчивые ударные волны со сверхкритической плотностью за фронтом ударной волны (кривая *3*). Чтобы показать чувствительность пороговых значений теплоемкости к параметру $\theta_c$, который согласно (36) играет важную роль в вопросе реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн в околокритической области, количественные оценки пороговых значений теплоемкости приведем для газов Ван дер Ваальса и Дитеричи. Согласно уравнению Ван дер Ваальса параметр подобия Риделя $\theta_c = 4$, в то время как для уравнения Дитеричи $\theta_c = 5$, что существенно ближе к экспериментальным значениям. Для газов Ван дер Ваальса и Дитеричи

$$r(V) = (V-b)^{-1}, \quad A(V) = \frac{a}{V^n},$$

и условие (43) имеет простой вид

$$\begin{aligned} p - p_0 &< \gamma \frac{V}{b}(\mathcal{H}(V, c_V) - p_0), \\ \mathcal{H}(V, c_V) &= \frac{a}{\gamma V^n}(n - \gamma - nb/V), \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$\gamma = 1 + R/c_V.$$

Согласно (45) максимум давления на границе нейтральной устойчивости составляет

$$\max_{\partial\Omega^{(0)}}(p) = \frac{a}{b^n}\frac{(n-\gamma)^n(n-1)^{n-1}}{n^{2n-1}}. \tag{46}$$

С учетом параметров критической точки

$$V_c = \frac{n+1}{n-1}b, \quad p_c = \frac{a}{b^n}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \theta_c = \frac{2n}{n-1},$$
$$\frac{RT_c}{p_c V_c} = \frac{4n}{(n-1)(n+1)}$$

максимум давления на $\partial\Omega^{(0)}$, отнесенный к давлению в критической точке, есть

$$\max_{\partial\Omega^{(0)}}(p/p_c) = \frac{(n-\gamma)^n(n+1)^{n+1}}{(n-1)^2 n^{2n-1}}. \tag{47}$$

Согласно (47) граница нейтральной устойчивости ударных волн выходит в область сверхкритических давлений при условии

$$\gamma < n - \frac{(n-1)^{2/n} n^{(2n-1)/n}}{(n+1)^{(n+1)/n}}, \tag{48}$$

что дает

$$\gamma < 2 - (2/3)^{3/2} \approx 1.455$$

для газа Ван дер Ваальса ($n = 2$) и

$$\gamma < 5/3(1 - 5^{2/5}/2^{18/5}) \approx 1.405$$

для газа Дитеричи ($n = 5/3$).

Условие достижения в нейтрально устойчивой ударной волне сверхкритических плотностей получим, подставив в (45) параметры критической точки

$$\gamma < \left(\frac{2n}{n-1} - \frac{n-1}{n+1}(1-p_0)\right) \Big/ \left(p_0 + \frac{n+1}{n-1}\right). \tag{49}$$

Для уравнений состояния Ван дер Ваальса и Дитеричи имеем $\gamma < 1.222$ и $\gamma < 1.187$ соответственно. Следует отметить близость этих значений к условию реализуемости нейтрально устойчивых ударных волн с начальным состоянием в однофазной области. Согласно [13] реализация таких ударных волн становится возможной при $\gamma \approx 1.215$ и $\gamma \approx 1.199$ соответственно. Это условие отвечает касанию границы области нейтральной устойчивости $\partial\Omega^{(p_0)}$ ударной адиабатой с начальной точкой на бинодали фазового перехода при давлении $p_0$.

Полученные оценки согласуются с общей тенденцией, вытекающей из (24) и непрерывности $\theta$ при переходе через критическую точку: чем выше значение параметра подобия Риделя для фазового перехода, тем выше пороговые значения изохорной теплоемкости, при которых реализуются нейтрально устойчивые ударные волны. Поскольку экспериментальные значения параметра Риделя ($\theta_c \approx 5.8$) превышают значения для уравнения Дитеричи ($\theta_c = 5$) и уравнения Ван дер Ваальса ($\theta_c = 4$), для реальных веществ можно ожидать еще более жестких ограничений, чем дают эти модели. В этом случае теплоемкости поступательных и вращательных степеней свободы молекул недостаточно для реализации нейтрально устойчивых ударных волн с конечным состоянием в однофазной области. Необходимо наличие термодинамических факторов, связанных с возбуждением внутренних степеней свободы, что привело бы к повышению теплоемкости или иных термодинамических факторов (поправок на неидеальность), приводящих к уменьшению величины изоэнтальпийной производной внутренней энергии по удельному объему.

Модели сред, в которых до настоящего времени рядом авторов констатировалось выполнение условия нейтральной устойчивости ударных волн, дают представление о таких факторах. Для нейтрально устойчивых ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазовой диаграммы таким фактором являются фазовые превращения. И здесь мы сталкиваемся со следующей проблемой.

Линейная теория устойчивости ударных волн с использованием метода нормальных мод или в рамках исследования корректности смешанной задачи для возмущений рассматривает ударную волну как поверхность разрыва, за которой выполняются условия локального термодинамического равновесия. В то же время факторы, которые приводят к выполнению условия нейтральной устойчивости, такие как возбуждение внутренних степеней свободы молекул, фазовые переходы в многофазной среде, ионизация с установлением равновесия между электронной и ионной подсистемой и т. д., предполагают, что к узкой градиентной зоне с преимущественно вязкой структурой, которую можно рассматривать как ударно-волновой разрыв, примыкает протяженная зона релаксации среды к термодинамическому равновесию. При этом на вязком скачке в приближении замороженности процессов релаксации условие нейтральной устойчивости не выполняется. Ожидается, что взаимодействие ударно-волнового разрыва с зоной релаксации приведет к тем свойствам длинноволновых двумерных возмущений, которые предсказывает линейная теория, а именно: изменение закона затухания возмущений ударной волны по сравнению с тем случаем, когда ударная волна устойчива в линейном приближении; вынужденное (или спонтанное) излучение звука ударной волной. Здесь мы сошлемся на результат недавних работ [29, 30], в которых для ударной волны, удовлетворяющей условию (2), выполнен линейный анализ устойчивости с учетом релаксационной структуры и показано, что взаимодействие ударной волны и примыкающей к ней зоны релаксации согласуется с выводом классической теории об излучении звука ударной волной.

Вместе с тем линейный анализ не позволяет определить факт устойчивости или неустойчивости ударной волны при выполнении условия Дьякова–Конторовича и определить закон затухания (или роста) возмущений, который в этом случае определяется нелинейными членами разложения по амплитуде возмущений. Фактически выполнение этого условия просто сигнализирует о смене закона затухания возмущений по сравнению с устойчивой в рамках линейной теории ударной волной. Поэтому в следующем разделе мы рассмотрим влияние неравновесности внутренних степеней свободы на скорость затухания возмущений в рамках нелинейной задачи.

## 6. ВЛИЯНИЕ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

В качестве простой модели нейтрально устойчивой ударной волны рассматривается ударная волна с конечным состоянием в однофазной околокритической области фазового перехода жидкость–газ в газе с уравнением состояния

$$\begin{aligned} p(\rho,T) &= \frac{\rho R T}{1-b\rho} - a\rho^2, \\ \varepsilon(\rho,T) &= c_V^0 T - a\rho + N\frac{R\,\Theta}{e^{\Theta/T}-1}, \end{aligned} \tag{50}$$

где характеристическая температура $\Theta$ одинакова для $N$ гармонических осцилляторов, приходящихся на одну частицу. Считается, что при изменении температуры система приходит в равновесие в течение характерного времени $\tau$. Модельная кинетика постулировалась в виде

$$\tau d\Upsilon/dt = \Upsilon^{eq} - \Upsilon,$$

где

$$\Upsilon^{-1} = c_V^0/R + N\frac{\Theta/T}{e^{\Theta/T}-1}. \tag{51}$$

Приведенная к безразмерному виду с использованием параметров критической точки фазового перехода система, описывающая течение такого газа, есть

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0, \\ &\frac{\partial\rho\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{I}p) = 0, \\ &\frac{\partial(e+\frac12\rho\mathbf{v}^2)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\left(e+\tfrac12\rho\mathbf{v}^2+p\right)\mathbf{v}\right) = 0, \\ &p = \frac{\Upsilon(e+3\rho^2)}{1-\rho/3} - 3\rho^2, \\ &\frac{\partial\rho\Upsilon}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}\Upsilon) = \rho\tau^{-1}(\Upsilon^{eq}(p,\rho)-\Upsilon), \\ &\Upsilon^{eq}(p,\rho) = \left(c_V^0/R + \frac{N}{x(e^{1/x}-1)}\right)^{-1}, \\ &x = \frac{\left(p+3\rho^2\right)\left(\rho^{-1}-1/3\right)}{(3/8)\Theta}, \end{aligned} \tag{52}$$

где $e = \rho\varepsilon$ — плотность внутренней энергии, $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Для данной системы рассматривается задача об эволюции начального периодического возмущения фронта нейтрально устойчивой ударной волны.

Течение рассматривается в пространственной области

$$(x,y) \in [-l, L] \times [0, \Lambda]$$

в системе отсчета, в которой невозмущенная ударная волна неподвижна. Начальное возмущение задано искривлением формы ударно-волнового разрыва

$$x = f(y),$$

где

$$f(y) = (1/5)\Lambda\cos(\pi y/\Lambda),$$

$\Lambda$ — полупериод возмущения. Начальные данные, соответствующие нейтрально устойчивой ударной волне:

$$\begin{aligned} (p,V) = (0.1, 20) \quad &\text{при} \quad x < f(y); \\ p = 1.2 \quad &\text{при} \quad x > f(y). \end{aligned}$$

Оставшиеся параметры определялись из соотношений на невозмущенном ударно-волновом разрыве в условиях равновесия внутренних степеней свободы $\Upsilon = \Upsilon^{eq}$.

На границах $y = 0$ и $y = \Lambda$ заданы условия симметрии. Условие на участке границы $x = -l$ фиксирует параметры течения перед ударной волной, на удаленной границе при $x = L$ ставились неотражающие граничные условия.

Выбирались следующие параметры модели, обеспечивающие выполнение условия нейтральной устойчивости ударной волны при заданных параметрах начального состояния и конечного давления:

$$c_V^0/R = 3/2, \quad N = 12, \quad \Theta = 3.$$

Затухание возмущений ударной волны определяется зависимостью от времени усредненных пульсаций давления на контуре $C$ за ее фронтом. Контур усреднения расположен в зоне релаксации за ударно-волновым разрывом с постоянным смещением относительно его текущего положения, см. рис. 4. На рис. 5 показаны результаты расчета для трех значений полуширины зоны релаксации $\Delta$, определяемой как расстояние от ударно-волнового разрыва, на котором разность $\Upsilon - \Upsilon^{eq}$ уменьшается в два раза по сравнению с максимальным значением. Масштаб времени $t_\Lambda$ — время, за которое ударная волна проходит расстояние, равное половине пространственного периода возмущения $\Lambda$. Представленные расчеты показывают изменение характера затухания возмущений в зависимости от соотношения ширины зоны релаксации и пространственного периода возмущения. При $\Delta/\Lambda = 0.3$ наблюдается закон затухания, близкий к экспоненциальному, характерному для устойчивых ударных волн. При $\Delta/\Lambda = 0.005$ закон затухания изменяется на более слабый, который можно аппроксимировать степенной зависимостью.

Изменение закона затухания по сравнению с устойчивой ударной волной является вполне ожидаемым для нейтрально устойчивых в рамках линейного анализа ударных волн. Стабилизирующее влияние конечной ширины зоны релаксации проявляется в большей степени для коротковолновых возмущений. Следует отметить, что это влияние является достаточно сильным: уже при отношении длины волны возмущения к характерной ширине зоны релаксации порядка 20 мы видим существенное изменение в скорости затухания возмущений.

Из расчетов, представленных на рис. 5, можно заключить, что в отношении скорости затухания возмущений диапазон нейтральной устойчивости ударных волн остается выделенным при учете неравновесной структуры ударной волны. При этом практическая значимость будет определяться шириной релаксационной зоны и спектром возмущений в конкретной задаче.

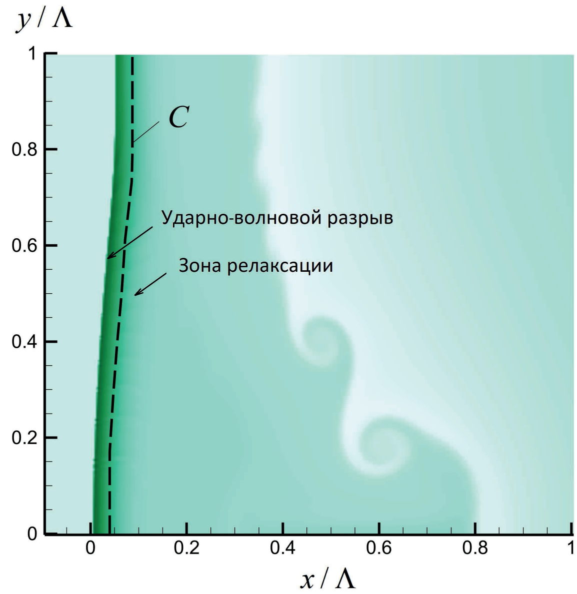


**Рис. 4.** Положение контура $C$, на котором вычисляются среднеквадратичные пульсации давления за фронтом ударной волны

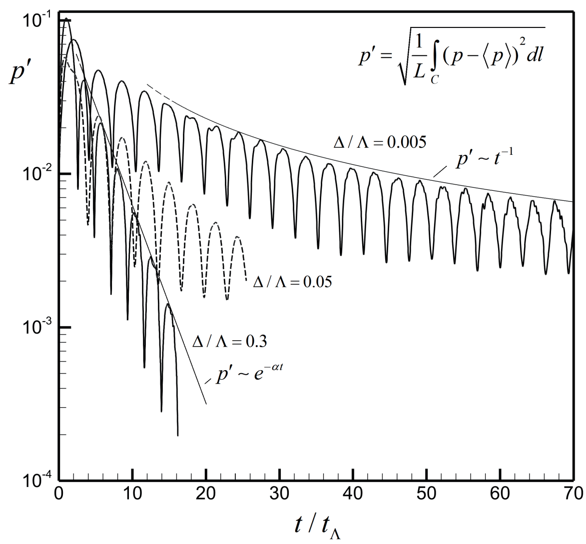


**Рис. 5.** Влияние зоны релаксации на затухание возмущений нейтрально устойчивой ударной волны; $\Lambda$ — полупериод возмущения, $\Delta$ — полуширина зоны релаксации, $t_\Lambda$ — время, за которое ударная волна проходит расстояние $\Lambda$

Учет влияния структуры ударной волны, как известно, корректирует выводы линейной теории устойчивости ударных волн, рассматривающей ударную волну как поверхность разрыва. В частности, в диапазоне параметров (1), в котором линейная теория предсказывает развитие двумерной неустойчивости, вязкие ударные волны не реализуются, а сжатие вещества происходит в комбинированной волне [31–35]. В среде с фазовым переходом такая комбинированная волна сжатия может иметь двухволновую структуру, в которой предвестник соответствует сжатию вещества в исходной фазе, а следующая за ней ударная волна является волной фазового превращения. Теоретический пример дает ударное сжатие ядерной материи в условиях кварк-адронного фазового перехода [25]. Из термодинамической формулировки критерия нейтральной устойчивости (18) следует, что при распаде нейтрально устойчивой ударной волны вследствие структурной неустойчивости замыкающая ударная волна в комбинированной волне сжатия сохраняет свойство нейтральной устойчивости, если интенсивность предвестника не превышает порогового значения

$$\delta p < -(\varepsilon_V|_w + p_0).$$

В этом отношении влияние структурного фактора также является условным.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Термодинамическая формулировка критерия нейтральной устойчивости ударной волны совпадает для релятивистских и нерелятивистских ударных волн и сводится к простому условию на производную внутренней энергии по удельному объему при постоянной энтальпии: $p > -\varepsilon_V|_w > p_0$, где индекс «0» соответствует начальному состоянию. Такая формулировка критерия позволяет рассматривать реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн в средах с различными термодинамическими свойствами отдельно от анализа ударных адиабат. В частности, определяющее влияние на реализуемость нейтрально устойчивых ударных волн в среде с фазовым переходом первого рода оказывает наклон кривой фазового равновесия в плоскости $(p, T)$. При значениях параметра Риделя $\theta_c = d(\ln p_s)/d(\ln T)$, характерных для фазового перехода жидкость–газ, выполнение условия нейтральной устойчивости для ударных волн с конечным состоянием в однофазной области требует высокой теплоемкости среды, превышающей теплоемкость идеального газа с учетом вращательных и поступательных степеней свободы молекул. Результаты для модельного уравнения состояния, обобщающего уравнения состояния Ван дер Ваальса и Дитеричи, показали, что при увеличении параметра Риделя пороговое значение теплоемкости, при котором становится возможна нейтральная устойчивость ударных волн, увеличивается. Выполнению условия нейтральной устойчивости для ударных волн с конечным состоянием в двухфазной области фазового перехода жидкость–газ способствует высокая изохорная теплоемкость, обусловленная теплотой фазового перехода. Рассмотрение термодинамических факторов, которые приводят к выполнению условия нейтральной устойчивости ударных волн, на основе термодинамического критерия и по литературным данным о случаях его выполнения, говорит о том, что условие нейтральной устойчивости выполняется в результате влияния зоны релаксации среды к локальному термодинамическому равновесию за фронтом ударной волны, поскольку вязкий скачок с возбуждением поступательных и вращательных степеней свободы не удовлетворяет этому условию. В неравновесной зоне протекают процессы, уменьшающие величину изоэнтальпийной производной внутренней энергии по удельному объему. На основе простой модели релаксации внутренних степеней свободы молекул для ударной волны с конечным состоянием в околокритической области фазового перехода жидкость–газ показано влияние зоны релаксации на скорость затухания возмущений ударной волны.

**Финансирование.** Работа поддержана министерством науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № 075-01129-23-00).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Преобразуем правую часть термодинамического тождества

$$w_\varepsilon|_V \, \varepsilon_V|_w = -w_V|_\varepsilon \tag{53}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} -w_V|_\varepsilon &= -p - V p_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V p_S|_V \, S_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V \frac{p_T|_V}{S_T|_V} S_V|_\varepsilon = \\ &= -p - V p_V|_S - V \frac{p_T|_V}{\varepsilon_T|_V} p = hc^2 - p\, w_\varepsilon|_V . \end{aligned}$$

После подстановки в (53) и перегруппировки

$$w_\varepsilon|_V(\varepsilon_V|_w + p) = hc^2, \tag{54}$$

где

$$w_\varepsilon|_V = 1 + \Gamma = 1 - \bar{V}_e/\bar{V}_p,$$

$\Gamma = V p_\varepsilon|_V$ — параметр Грюнайзена, определение безразмерных параметров $\bar{V}_e$ и $\bar{V}_p$ дано в (9). В нерелятивистском пределе, $h \to \rho$, (54) принимает вид

$$w_\varepsilon|_V(\varepsilon_V|_w + p) = \rho c^2. \tag{55}$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. S. P. D'yakov, *The Stability of Shockwaves: Investigation of the Problem of Stability of Shock Waves in Arbitrary Media*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **27**, 288 (1954).
2. V. M. Kontorovich, *Concerning the Stability of Shock Waves*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **33**, 1525 (1957).
3. J. J. Erpenbeck, *Stability of Step Shocks*, Phys. Fluids **5**, 1181 (1962); DOI:10.1063/1.1706503.
4. V. M. Kontorovich, *Stability of Shock Waves in Relativistic Hydrodynamics*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **34**, 186 (1958).
5. P. V. Tytarenko and V. I. Zhdanov, *Existence and Stability of Shock Waves in Relativistic Hydrodynamics with General Equation of State*, Phys. Lett. A **240**, 295 (1998); DOI:10.1016/S0375-9601(97)00973-0.
6. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, and P. R. Levashov, *Shock Wave Stability in Metals*, AIP Conf. Proc. **505**, 85 (2000); DOI:10.1063/1.1303427.
7. I. V. Lomonosov, V. E. Fortov, K. V. Khishchenko, and P. R. Levashov, *Theoretical Investigation of Shock Wave Stability in Metals*, AIP Conf. Proc. **706**, 91 (2004); DOI:10.1063/1.1780191.
8. I. V. Lomonosov and N. A. Tahir, *Theoretical Investigation of Shock Wave Stability in Metals*, Appl. Phys. Lett. **92**, 101905 (2008).
9. M. Mond and I. M. Rutkevich, *Spontaneous Acoustic Emission from Strong Ionizing Shocks*, J. Fluid Mech. **275**, 121 (1994).
10. M. Mond and I. M. Rutkevich, *Spontaneous Acoustic Emission from Strong Shocks in Diatomic Gases*, J. Fluid Mech. **14**, 1468 (2002); DOI:10.1063/1.1458005.
11. G. Russo, *Some Remarks on the Stability of Shock Waves*, Meccanica **25**, 83 (1990); DOI:10.1007/BF01566206.
12. J. Bates and D. Montgomery, *The D'yakov–Kontorovich Instability of Shock Waves in Real Gases*, Phys. Rev. Lett. **84**, 1180 (2000); DOI:10.1103/PhysRevLett.84.1180.
13. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, V. E. Fortov, S. I. Anisimov, and A. M. Oparin, *On the Neutral Stability of a Shock Wave in Real Media*, JETP Lett. **90**, 18 (2009); DOI:10.1134/S0021364009130050.
14. N. Wetta, J.-C. Pain, and O. Heuzé, *D'yakov–Kontorovitch Instability of Shock Waves in Hot Plasmas*, Phys. Rev. E **98** , 033205 (2018); DOI:10.1103/PhysRevE.98.033205.
15. C. Huete and M. Vera, *D'Yakov–Kontorovich Instability in Planar Reactive Shocks*, J. Fluid Mech. **879**, 54 (2019); DOI:10.1017/jfm.2019.942.
16. C. Huete, F. Cobos-Campos, E. Abdikamalov, and S. Bouquet, *Acoustic Stability of Nonadiabatic High-Energy-Density Shocks*, Phys. Rev. Fluids **5**, 113403 (2020); DOI:10.1103/PhysRevFluids.5.113403.
17. G. R. Fowles, *Stimulated and Spontaneous Emission of Acoustic Waves from Shock Fronts*, Phys. Fluids **24**, 220 (1981); DOI:10.1063/1.863369.
18. A. M. Anile and G. Russo, *Linear Stability for Plane Relativistic Shock Waves*, Phys. Fluids **30**, 1045 (1987); DOI:10.1063/1.866302.
19. G. Russo and A. M. Anile, *Stability Properties of Relativistic Shock Waves: Basic Results*, Phys. Fluids **30**, 2406 (1987).
20. G. Russo, *Stability Properties of Relativistic Shock Waves: Applications*, Astrophys. J. **334**, 707 (1988); DOI:10.1086/166872.
21. A. H. Taub, *Relativistic Rankine–Hugoniot Equations*, Phys. Rev. **74**, 328 (1948); DOI:10.1103/PhysRev.74.328.
22. J. L. Synge, *The Relativistic Gas*, Series in Physics, North-Holland Publ. Comp. (1957).
23. K. A. Bugaev and M. I. Gorenstein, *Relativistic Shocks in Baryonic Matter*, J. Phys. G: Nucl. Phys. **13**, 1231 (1987).
24. K. A. Bugaev, M. I. Gorenstein, B. Kämpfer, and V. I. Zhdanov, *Generalized Shock Adiabatics and Relativistic Nuclear Collisions*, Phys. Rev. D **40**, 2903 (1989); DOI:10.1103/PhysRevD.40.2903.

**25**. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, and V. E. Fortov, *Behavior of Relativistic Shock Waves in Nuclear Matter*, High. Temp. **53**, 622 (2015); DOI:10.1134/S0018151X15050181.

**26**. J. Cleymans, R. V. Gavai, and E. Suhonen, *Quarks and Gluons at High Temperatures and Densities*, Phys. Rep. **130**, 217 (1986); DOI:10.1016/0370-1573(86)90169-9.

**27**. B. E. Poling, J. M. Prausnitz, and J. P. O'Connell, *Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill Education (2001).

**28**. М. Д. Вайсман, *Термодинамика парожидкостных потоков*, Энергия. Ленинградское отделение, Москва (1977).

**29**. A. G. Kulikovskii, A. T. Il'ichev, A. P. Chugainova, and V. A. Shargatov, *On the Structure Stability of a Neutrally Stable Shock Wave in a Gas and on Spontaneous Emission of Perturbations*, J. Exp. Theor. Phys. **131**, 481 (2020); DOI:10.1134/s1063776120090186.

**30**. A. G. Kulikovskii, A. T. Il'ichev, A. P. Chugainova, and V. A. Shargatov, *Spontaneously Radiating Shock Waves*, Doklady Physics **64**, 293 (2019); DOI:10.1134/s1028335819070036.

**31**. C. S. Gardner, *Comment on Stability of Step Shocks*, Phys. Fluids **6**, 1366 (1963); DOI:10.1063/1.1706917.

**32**. N. M. Kuznetsov, *The Theory of Shock-Wave Stability*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **88**, 470 (1985).

**33**. N. M. Kuznetsov, *Stability of Shock Waves*, Sov. Phys. Usp. **32**, 993 (1989); DOI:10.1070/PU1989v032n11ABEH002777.

**34**. G. R. Fowles and A. F. P. Houwing, *Instabilities of Shock and Detonation Waves*, Phys. Fluids **27**, 1982 (1984); DOI:10.1063/1.864853.

**35**. A. V. Konyukhov, A. P. Likhachev, V. E. Fortov, S. I. Anisimov, and A. M. Oparin, *Stability and Ambiguous Representation of Shock Wave Discontinuity in Thermodynamically Nonideal Media*, JETP Lett. **90**, 25 (2009); DOI:10.1063/1.3295149.