

УДК 539.3

ТЕПЛОВОЕ СОСТОЯНИЕ ОБЛАСТИ С ТЕРМОИЗОЛИРОВАННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

© 2023 г. Э. М. Карташов*

МИРЭА—Российский технологический университет
(Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова), Москва, Россия

*E-mail: professor.kartashov@gmail.com

Поступила в редакцию 12.12.2022 г.

После доработки 12.07.2023 г.

Принята к публикации 24.07.2023 г.

Разработаны математически модельные представления температурного эффекта в областях с термоизолированной движущейся границей. Сформулированы граничные условия теплоизоляции движущейся границы как для локально равновесных процессов теплопереноса в рамках классической феноменологии Фурье, так и для более сложных локально-неравновесных процессов в рамках феноменологии Максвелла—Каттанео—Лыкова—Вернотта, учитывающих конечную скорость распространения теплоты. Рассмотрена прикладная задача теплопроводности и теории теплового удара для области с движущейся термоизолированной границей, свободной от внешних и внутренних воздействий. Получено точное аналитическое решение сформулированных математических моделей для уравнений гиперболического типа. Использованы методы и теоремы операционного исчисления, контурные интегралы Римана—Меллина при вычислении оригиналов сложных изображений с двумя точками ветвления. Предложен математический аппарат эквивалентности функциональных конструкций для оригиналов полученных операционных решений. Показано, что наличие термоизолированной движущейся границы приводит к появлению в области градиента температуры и, следовательно, к появлению в области температурного поля и соответствующих ему термодинамических напряжений, имеющих волновой характер. Приведен численный эксперимент и показана возможность перехода от одной формы аналитического решения температурной задачи к другой эквивалентной форме. Описанный эффект проявляется как для уравнений параболического типа на основе классической феноменологии Фурье, так и для уравнений гиперболического типа на основе обобщенной феноменологии Максвелла—Каттанео—Лыкова—Вернотта.

DOI: 10.31857/S004036442305006X

ВВЕДЕНИЕ

Автор впервые столкнулся с излагаемым ниже эффектом возникновения градиента концентрации в области с движущейся во времени непроницаемой границей при изучении явления адсорбционного понижения прочности и долговечности хрупких полимеров в поверхностно-активных средах [1]. Изучение литературы показало, что данное явление затрагивает многие области науки и техники и по существу до настоящего времени в печати практически не описано. Применительно к тепловым процессам будет показано, что в области с движущейся термоизолированной границей, несмотря на отсутствие внутренних и внешних источников теплоты, возникает градиент температуры. Стохастический анализ данного эффекта для среднего значения температуры на основе анализа соответствующей дисперсии показал подобие поведения дисперсии поведению среднего значения возникших в области температурных напряжений, создающих риски возникновения трещин и возможного начала разрушения материала [2].

Остановимся кратко на температурных задачах в областях с движущимися во времени границами. Круг вопросов, при рассмотрении которых приходится сталкиваться с краевыми задачами нестационарной теплопроводности в областях типа $[0, y(t)]$, $t > 0$ или $[y(t), \infty)$, $t > 0$, где $y(t)$ — непрерывная функция, весьма широк.

Подобные проблемы возникают при теоретическом изучении процессов переноса энергии, связанных с изменением агрегатного состояния вещества, в теории прочности, теории плотин, механике почв, термике нефтяных пластов, электродинамических задачах, задачах фильтрации, теории зонной очистки материалов, кинетической теории роста кристаллов, термомеханике при изучении теплового удара и т.д. [3].

С математической точки зрения, краевые задачи переноса в области с движущимися границами принципиально отличны от классических. Вследствие зависимости границы области от времени к этому типу задач неприменимы классические методы уравнений математической физики, так как,

оставаясь в рамках этих методов, не удастся согласовать решение уравнения теплопроводности с движением границы области. Этим объясняется тот факт, что в теории теплопроводности к настоящему времени рассмотрены лишь простейшие случаи с равномерно движущейся границей или частично с корневой зависимостью.

Пусть $\bar{\Omega}_t$ – нецилиндрическая область, сечение которой плоскостью-характеристикой $t = \text{const} \geq t_0 > 0$, есть выпуклая область D_t изменения $M(x, y, z)$ с границей S_t , зависящей от времени $t \geq 0$; $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к S_t , вектор, непрерывный в точках S_t , так что $\bar{\Omega}_t = \{M \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$. Пусть $T(M, t)$ – температурная функция, удовлетворяющая условиям задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \Delta T(M, t) + f(M, t), \quad M \in D_t, \quad t > 0; \\ T(M, t)|_{t=0} &= \Phi_0(M), \quad M \in \bar{D}_{t=0}; \\ \beta_1 \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} + \beta_2 T(M, t) &= \varphi(M, t), \quad M \in S_t, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f(M, t) &\in C^0(\bar{\Omega}_t); \quad \Phi_0(M) \in C^1(\bar{\Omega}_t); \\ \varphi(M, t) &\in C^0(S_t, t \geq 0); \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0. \end{aligned}$$

Искомое решение: $T(M, t) \in C^2(\Omega_t) \cap C^0(\bar{\Omega}_t)$, $\text{grad}_M T(M, t) \in C^0(\bar{\Omega}_t)$.

Граничное условие (1) включает случаи температурного нагрева, теплового нагрева, нагрева средой (или охлаждения во всех трех случаях). Если $\bar{D}$ – каноническая область с неподвижной границей S (упругое полупространство, бесконечная пластина, цилиндр, шар и т.д.), то условие теплоизоляции границы S области D записывается в виде

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S} = 0, \quad t > 0$$

и является классическим граничным условием в теплопроводности при постановке соответствующих задач для уравнений параболического типа. Однако наличие движущейся границы принципиально меняет вид граничного условия ее теплоизоляции и это обстоятельство не учитывается в печати в различного рода приложениях, связанных с теплоизоляцией движущейся границы.

Для вывода указанного условия рассмотрим область $\Omega_t = (0 < z < y(t), t > 0)$, где $y(t)$ – непрерывно-дифференцируемая функция, $v(t) = dy(t)/dt$ – скорость перемещения границы, $T(z, t)$ – температурное поле в Ω_t , $F(z, t)$ – непрерывно распределенный в Ω_t нестационарный источник теплоты ($F(z, t)/cp = f(z, t)$). Имеем для Ω_t :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + f(z, t), \quad (z, t) \in \Omega_t. \quad (2)$$

Запишем уравнение теплового баланса в момент времени $(t + \Delta t)$, считая границу $z = y(t)$ теплоизолированной:

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} \Delta t + cp \Delta t \int_0^{y(t)+\Delta y} f(z, t) dz = \\ = cp \int_0^{y(t)} [T(z, t + \Delta t) - T(z, t)] dz + \\ + cp \int_{y(t)}^{y(t)+\Delta y} T(z, t + \Delta t) dz. \end{aligned}$$

Ко второму интегралу справа применим теорему о среднем:

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} \Delta t + \Delta t \int_0^{y(t)+\Delta y} f(z, t) dz = \\ = \int_0^{y(t)} [T(z, t + \Delta t) - T(z, t)] dz + \\ + T(z, t + \Delta t)|_{z=y+\theta \Delta y} \Delta y, \end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$. Разделив обе части равенства на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial T(0, t)}{\partial z} + \int_0^{y(t)} f(z, t) dz = \\ = \int_0^{y(t)} \frac{\partial T}{\partial t} dz + v(t) T(z, t)|_{z=y(t)}. \end{aligned}$$

Подставим под знак интеграла вместо $\partial T/\partial t$ правую часть уравнения теплопроводности (2), произведем интегрирование и приведем подобные члены. В результате окончательно получаем условие

$$\left. \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right|_{z=y(t)} + \frac{v(t)}{a} T(z, t)|_{z=y(t)} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

которое и представляет собой условие тепловой изоляции для подвижной границы. Если скорость движения границы $v(t) = 0$, то приходим к условию $(\partial T/\partial n)|_S = 0$, означающему теплоизоляцию неподвижной граничной поверхности.

С конца 60-х гг. прошлого столетия появляются систематические публикации по гиперболическим моделям переноса с учетом конечной скорости распространения теплоты [4–18]. Сейчас популярно выделять большой класс моделей, основанных на уравнении

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M, t)}{\partial t^2}, \\ (M, t) \in \Omega_t, \end{aligned} \quad (4)$$

где τ_r – время релаксации теплового потока, связанное со скоростью распространения теплоты соотношением $v_r = \sqrt{a/\tau_r}$. Краевыми задачами для уравнения (4) описываются высокоинтенсивный теплообмен в устройствах импульсной и лазерной техники; лазерная обработка металлов; процессы плазменного напыления; процессы, происходящие в энергетических каналах ядерных реакторов и в псевдоожигенном слое, в дисперсных системах и зернистых материалах, в слоистых полупроводниковых структурах; при описании электронной теплопроводности и в высокотемпературной плазме; математическом моделировании фронтовых процессов терморазложения; в кристаллах катализаторов и при выращивании гомоэпитаксиальных пленок германия, возникающих в ходе экзотермических химических реакций и др. В [19] изучены вопросы корректной постановки краевых задач для уравнений (4): показано, что запись граничных условий второго и третьего родов существенно отличается от (1) для уравнений параболического типа. Однако вопрос о теплоизоляции движущейся границы для уравнения (4) до сих пор остается открытым. С этой целью рассмотрим феноменологическое соотношение Максвелла–Каттанео–Лыкова–Вернотта [4, 6, 7]

$$\mathbf{q}(M, t) = -\lambda \nabla T(M, t) - \tau_r \frac{\partial \mathbf{q}(M, t)}{\partial t},$$

лежащее в основе аналитической теории локально-неравновесных процессов переноса теплоты в нецилиндрической области. Запишем это равенство в виде

$$\left(1 + \tau_r \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{q}(M, t) = -\lambda \nabla T(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (5)$$

или

$$\mathbf{q}(M, t + \tau_r) = -\lambda \nabla T(M, t), \quad M \in D, \quad t > 0, \quad (6)$$

используя разложение в ряд Маклорена (5) функции $\mathbf{q}(M, t + \tau_r)$ в окрестности точки $\tau_r = 0$. Соотношение (6) можно переписать в виде

$$\mathbf{q}(M, t) = -\lambda \nabla T(M, t - \tau_r), \quad M \in D_{t-\tau_r}, \quad t > \tau_r. \quad (7)$$

Используя уравнение энергии

$$\frac{c\rho \partial T(M, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}[\mathbf{q}(M, t)]$$

и соотношение (7), уравнение (4) можно записать в виде

$$\frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = a \Delta T(M, t - \tau_r), \quad M \in D_{t-\tau_r}, \quad t > \tau_r. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь исследуемую область $z > y(t)$, $t > 0$, в которой (8) имеет вид

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(z, t - \tau_r)}{\partial z^2}, \quad z > y(t - \tau_r), \quad t > \tau_r. \quad (9)$$

При постоянных начальных условиях, отсутствии внутренних источников теплоты и внешних условий нагрева, при теплоизоляции движущейся границы справедливо условие

$$c\rho \int_{y(t-\tau_r)}^{\infty} T(z, t) dz = \text{const}, \quad t > \tau_r. \quad (10)$$

Дифференцируя обе части (10) по t и используя уравнение (9), приходим к соотношению

$$\left[\frac{\partial T(z, t - \tau_r)}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{dy(t - \tau_r)}{dt} T(z, t) \right]_{z=y(t-\tau_r)} = 0, \quad t > \tau_r,$$

которое можно переписать в виде

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v(t)}{a} T(z, t + \tau_r) \right]_{z=y(t)} = 0, \quad t > 0. \quad (11)$$

Выражение (11) является условием теплоизоляции движущейся границы для локально-неравновесных процессов переноса теплоты, описываемых уравнениями гиперболического типа. В частных случаях (локально-равновесные процессы, $\tau_r = 0$) или для области цилиндрического типа ($v(t) = 0$) приходим к условиям теплоизоляции, рассмотренным выше.

ЭФФЕКТ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ В ОБЛАСТИ С ТЕПЛОИЗОЛИРОВАННОЙ ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Граничные условия (3), (11) в соответствующих модельных представлениях нестационарной теплопроводности приводят к возникновению градиента температуры в области и, как следствие, появлению соответствующих термоупругих напряжений, несмотря на отсутствие внешнего и внутреннего тепловых воздействий. Формально возникает представление о невозможности проявления указанного эффекта, однако аналитические решения модельных задач показывают обратное. В связи с этим рассмотрим упругое полупространство $z > l + vt$, $t > 0$ с равномерно движущейся теплоизолированной границей при отсутствии внешних и внутренних тепловых нагрузок в постановке тепловой задачи для уравнения гиперболического типа:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad z > l + vt, \quad t > 0; \quad (12)$$

$$T(z, t) \Big|_{t=0} = T_0, \quad \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq l; \quad (13)$$

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v}{a} T(z, t + \tau_r) \right]_{z=l+vt} = 0, \quad t > 0; \quad (14)$$

$$|T(z, t)| < \infty, \quad z \geq l + vt, \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Граничное условие (14) можно записать в виде

$$\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} + \frac{v}{a} T(z, t) + \frac{v\tau_r}{a} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \right]_{z=l+vt} = 0, \quad (16)$$

$$t > 0.$$

Введем безразмерные переменные

$$z' = \frac{z-l}{l}, \quad \tau = \frac{at}{l^2}, \quad v_0 = \frac{vl}{a},$$

$$\tau_0 = \frac{a\tau_r}{l^2}, \quad T^*(z', \tau) = \frac{1}{T_0} [T(z, t) - T_0]$$

и подвижную систему координат $\xi = z' - v_0\tau$, $\tau > 0$, полагая $T^*(z', \tau) = W(\xi, \tau)$.

Соотношения (12)–(16) теперь получают вид

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = (1 - \tau_0 v_0^2) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + v_0 \frac{\partial W}{\partial \xi} +$$

$$+ 2v_0 \tau_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau} - \tau_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0; \quad (17)$$

$$W(\xi, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} =$$

$$= v_0 \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \geq 0; \quad (18)$$

$$(1 - \tau_0 v_0^2) \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} =$$

$$= -v_0 \left[W(\xi, \tau) + \tau_0 \frac{\partial W(\xi, \tau)}{\partial \tau} + 1 \right]_{\xi=0}, \quad \tau > 0; \quad (19)$$

$$|W(\xi, \tau)| < \infty, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0. \quad (20)$$

В пространстве изображений по Лапласу

$$\bar{W}(\xi, p) = \int_0^\infty W(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$$

операционное решение преобразованной задачи (17)–(20)

$$(1 - \tau_0 v_0^2) \frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} + v_0 (1 + 2\tau_0 p) \frac{d\bar{W}}{d\xi} -$$

$$- p(1 + \tau_0 p) \bar{W} = 0, \quad \xi > 0;$$

$$(1 - \tau_0 v_0^2) \frac{d\bar{W}}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = -v_0 \left[(1 + \tau_0 p) \bar{W} + \frac{1}{p} \right]_{\xi=0},$$

$$|\bar{W}(\xi, p)| < \infty, \quad \xi \geq 0,$$

запишем в виде

$$\bar{W}(\xi, p) = \bar{\Psi}_1(\xi, p) \bar{\Psi}_2(\xi, p). \quad (21)$$

Здесь

$$\bar{\Psi}_1(\xi, p) = \left[\frac{v_0}{(-v_0/2) + \sqrt{\tau_0} \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)}} \right] \times$$

$$\times \exp \left[-\frac{(v_0/2)\xi}{1 - \tau_0 v_0^2} \right], \quad (22)$$

$$\bar{\Psi}_2(\xi, p) = \frac{1}{p} \times$$

$$\times \exp \left\{ -\left[\frac{\xi \sqrt{\tau_0}}{1 - \tau_0 v_0^2} \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)} + \frac{\tau_0 v_0 \xi}{1 - \tau_0 v_0^2} p \right] \right\}, \quad (23)$$

$$\alpha = \frac{1}{4\tau_0} (1 + \sqrt{1 - \tau_0 v_0^2}), \quad \beta = \frac{1}{4\tau_0} (1 - \sqrt{1 - \tau_0 v_0^2}).$$

Для нахождения оригиналов изображений (22), (23) рассмотрим предварительно преобразования операционного исчисления, представляющие интерес при рассмотрении гиперболических моделей переноса. В [3] приведен оригинал изображения

$$\frac{1}{p} \exp \left[-\xi \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)} \right] \leftarrow$$

$$\leftarrow \left[\exp(-\rho\xi) + \sigma\xi \int_{\xi}^t \exp(-\rho\tau) \frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2 - \xi^2})}{\sqrt{\tau^2 - \xi^2}} d\tau \right] \times$$

$$\times \eta(t - \xi) = W_1(\xi, t) \eta(t - \xi), \quad (24)$$

где $\sigma = \alpha - \beta$, $\rho = \alpha + \beta$, $I_1(z)$ – модифицированная функция Бесселя, $\eta(z)$ – функция Хевисайда. В то же время, вычисляя оригинал изображения слева в (24) с помощью контурного интеграла Римана–Меллина с двумя точками ветвления по методике, развитой в [3], находим

$$\frac{1}{p} \exp \left[-\xi \sqrt{(p + 2\alpha)(p + 2\beta)} \right] \leftarrow$$

$$\leftarrow \left\{ \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta}) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{\sin \xi \sqrt{y(2\sigma - y)}}{y + 2\beta} \times \right.$$

$$\times \exp[-(y + 2\beta)t] dy \Big\} \eta(t - \xi) = W_2(\xi, t) \eta(t - \xi). \quad (25)$$

Покажем, что $W_1(\xi, t) = W_2(\xi, t)$.

Имеем

$$W_1(\xi, t) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\int_{\xi}^t \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2 - \xi^2}) d\tau \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\int_{\xi}^t \exp(-\rho\tau) J_0(\sigma\sqrt{\xi^2 - \tau^2}) d\tau \right]. \quad (26)$$

Продифференцируем обе части (26) по t :

$$[W_1(\xi, t)]'_t = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\exp(-\rho t) J_0(\sigma\sqrt{\xi^2 - t^2}) \right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[-\exp(-2\beta t) \exp(-\sigma t) J_0(\sigma\sqrt{\xi^2 - t^2}) \right].$$

Воспользуемся далее достаточно редким интегралом [3]

$$\int_0^a \frac{\exp(-px)}{\sqrt{ax-x^2}} \cos c\sqrt{ax-x^2} dx = \pi \exp(-ap/2) J_0\left(\frac{a}{2}\sqrt{c^2-p^2}\right).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} [W_1(\xi, t)]'_t = \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \sin \xi \sqrt{y(2\sigma-y)} \exp[-(y+2\sigma)t] dy. \end{aligned} \quad (27)$$

Интегрируя обе части (27) по t и используя для нахождения постоянной интегрирования теорему о конечном значении $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\bar{f}(p)$, дающую в (25) $C = \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta})$, получаем окончательно

$$\begin{aligned} W_1(\xi, t) = \exp(-2\xi\sqrt{\alpha\beta}) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{\sin \xi \sqrt{y(2\sigma-y)}}{y+2\beta} \times \\ \times \exp[-(y+2\beta)t] dy = W_2(\xi, t). \end{aligned}$$

Таким образом, находим оригинал

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \exp\left[-\frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1-\tau_0\nu_0^2} \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right] \leftarrow \\ \leftarrow \left\{ \exp\left[-\frac{(v_0/2)\xi}{1-\tau_0\nu_0^2}\right] - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{1}{y+2\beta} \times \right. \\ \left. \times \sin \frac{\xi\sqrt{\tau_0}\sqrt{y(2\sigma-y)}}{1-\tau_0\nu_0^2} \exp[-(y+2\beta)\tau] dy \right\} \times \\ \times \eta\left(\tau - \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1-\tau_0\nu_0^2}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь, используя (28), получаем оригинал изображения $\bar{\Psi}_2(\xi, p)$ (28):

$$\begin{aligned} \Psi_2(\xi, \tau) = \left\{ \exp\left[-\frac{(v_0/2)\xi}{1-\tau_0\nu_0^2}\right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\sigma} \frac{1}{y+2\beta} \sin \frac{\xi\sqrt{\tau_0}\sqrt{y(2\sigma-y)}}{1-\tau_0\nu_0^2} \times \right. \\ \left. \times \exp\left[-(y+2\beta)\left(\tau - \frac{\tau_0\nu_0\xi}{1-\tau_0\nu_0^2}\right)\right] dy \right\} \times \\ \times \eta\left(\tau - \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1-\tau_0\nu_0^2}\right). \end{aligned}$$

Оригинал изображения $\bar{\Psi}_1(\xi, p)$ (22) имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_1(\xi, \tau) = \exp\left[-\frac{(v_0/2)\xi}{1-\tau_0\nu_0^2}\right] \times \\ \times \left[\frac{\nu_0\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2\beta}{(v_0^2/4)+\tau_0(2\alpha-y)(y-2\beta)}}^{2\alpha} \sqrt{(2\alpha-y)(y-2\beta)} \exp(-y\tau) dy \right]. \end{aligned}$$

Искомый оригинал изображения $\bar{W}(\xi, p)$ (26) теперь будет иметь вид

$$\begin{aligned} W(\xi, \tau) = \left[\int_{\frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1-\tau_0\nu_0^2}}^{\tau} \Psi_1(\xi, \tau-\tau') \Psi_2(\xi, \tau') d\tau' \right] \times \\ \times \eta\left(\tau - \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1-\tau_0\nu_0^2}\right). \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 1 приведены кривые зависимости температурной функции (29) от τ в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$ для различных ν_0 . Кривые на рис. 1 наглядно показывают особенности тепловой реакции области для локально-неравновесных процессов (в аналитическом решении (29) присутствует функция Хевисайда, объясняющая задержку начала распространения теплоты в фиксированном сечении).

ТЕРМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ ОБЛАСТИ НА ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ (29)

Следующий шаг – исследование термической реакции области $\bar{\Omega}_t = (z \geq l + vt, t \geq 0)$ с движущейся термоизолированной границей в рамках модельной задачи (12)–(15). Рассматривается, как и выше, упругое полупространство, что

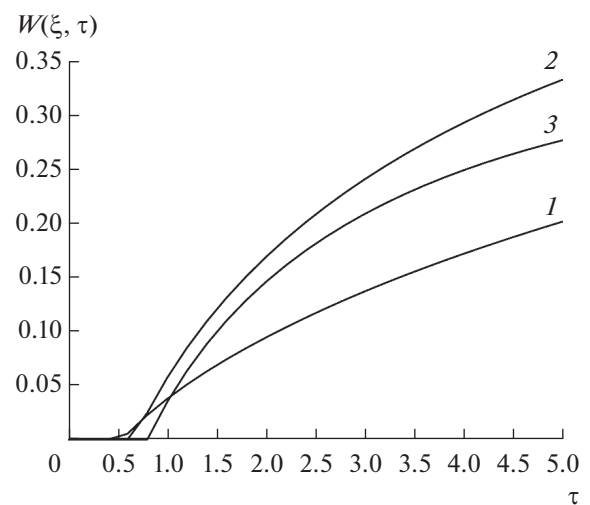


Рис. 1. Зависимости температурной функции $W(\xi, \tau)$ (29) от τ в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$ для различных ν_0 : 1 – 0.16, 2 – 0.5, 3 – 0.75.

представляет практический интерес для многих направлений науки и техники, описанных в [19, 20]. Запишем определяющие соотношения динамической термоупругости для области $\bar{\Omega}_t = \{M(x, y, z) \in \bar{D}_t = D_t + S_t, t \geq 0\}$ с температурной функцией $T(M, t)$. Пусть T_0 – начальная температура, при которой область находится в недеформированном и ненапряженном состоянии; $\sigma_{ij}(M, t)$, $\varepsilon_{ij}(M, t)$, $U_i(M, t) (i = x, y, z)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [19, 20]:

$$\sigma_{ij,j}(M, t) = \rho \ddot{U}_i(M, t), \quad (30)$$

$$\varepsilon_{ij}(M, t) = (1/2)[U_{i,j}(M, t) + U_{j,i}(M, t)], \quad (31)$$

$$\sigma_{ij}(M, t) = 2\mu\varepsilon_{ij}(M, t) + [\lambda\varepsilon_{ii}(M, t) - (3\lambda + 2\mu)\alpha_T(T(M, t) - T_0)]\delta_{ij}. \quad (32)$$

Здесь ρ – плотность; $\mu = G$, G – модуль сдвига; $\lambda = 2G\nu/(1 - 2\nu)$ – изотермические коэффициенты Ламе; ν – коэффициент Пуассона; $2G(1 + \nu) = E$, E – модуль Юнга; α_T – коэффициент линейного теплового расширения; δ_{ij} – символ Кронекера; $\varepsilon_{ii}(M, t) = \bar{\varepsilon}(M, t) = U_{i,i}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\bar{\sigma}(M, t) = \sigma_{nn}(M, t) (n = x, y, z)$ соотношением

$$\bar{\varepsilon}(M, t) = \frac{1 - 2\nu}{E} \bar{\sigma}(M, t) + 3\alpha_T [T(M, t) - T_0]. \quad (33)$$

Для случая одномерного движения $M = M(z, t)$, $z > l + vt$, $t > 0$ имеем из (30)–(33)

$$\begin{aligned} U_x = U_y = 0, \quad U_z = U_z(z, t), \quad \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0, \\ \varepsilon_{zz}(z, t) = \partial U_z(z, t) / \partial z = [1/(1 - \nu)] \times \\ \times \{[(1 - 2\nu)/(2G)]\sigma_{zz}(z, t) + (1 + \nu)\alpha_T [T(z, t) - T_0]\}, \\ \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 U_z(z, t)}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее соотношение по z и подставляя значение $\partial U_z(z, t) / \partial z$, приходим к уравнению вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial t^2} = \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T \rho \times \\ \times \frac{\partial^2 [T(z, t) - T_0]}{\partial t^2}, \quad z > l + vt, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (34)$$

с краевыми условиями

$$\sigma_{zz}(z, t)|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}(z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad z \geq l; \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(z, t)|_{z=l+vt} = 0, \quad t > 0, \\ |\sigma_{zz}(z, t)| < \infty, \quad z \geq l + vt, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (36)$$

В (34) $v_p = \sqrt{2G(1 - \nu)/[\rho(1 - 2\nu)]} = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука. Остальные компоненты тензора напряжения, отличные от нуля, согласно (30)–(32), имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(z, t) = \sigma_{yy}(z, t) = \\ = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_{zz}(z, t) - \frac{E\alpha_T [T(z, t) - T_0]}{1 - \nu}. \end{aligned}$$

При этом

$$\varepsilon_{zz}(z, t) = \frac{1 - 2\nu}{2G(1 - \nu)} \sigma_{zz}(z, t) + \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \alpha_T [T(z, t) - T_0].$$

Функция $T(z, t)$ в (34)–(36) удовлетворяет условиям (12)–(15). Для решения задачи (34)–(36) перейдем в систему координат (z', τ) по приведенным выше соотношениям, полагая при этом

$$\alpha_0 = v_p l / a, \quad S_T = \alpha_T (3\lambda + 2\mu) = \frac{\alpha_T E}{(1 - 2\nu)},$$

$$\sigma_{z'z'}(z', \tau) = \frac{\sigma_{zz}(z, t)}{S_T T_0}.$$

Опуская промежуточные выкладки перехода, введем далее подвижную систему координат $\xi = z' - v_0 \tau$, полагая $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \sigma_{z'z'}(z', \tau)$, $T^*(z', \tau) = W(\xi, \tau)$. Соотношения (34)–(36) теперь записываются в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 - v_0^2) \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi^2} + 2v_0 \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 \sigma_{\xi\xi}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} - \\ - 2v_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \tau} + v_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}, \quad \xi > 0, \quad \tau > 0; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \frac{\partial \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, & \xi \geq 0, \\ \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)|_{\xi=0} = 0, & \tau > 0, \quad |\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)| < \infty, \\ \xi \geq 0, & \tau \geq 0. \end{cases} \quad (38)$$

В пространстве изображений по Лапласу $\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \int_0^\infty \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) \exp(-p\tau) d\tau$ соотношения (37), (38) представляются в виде

$$\begin{aligned} (\alpha_0^2 - v_0^2) \frac{d^2 \bar{\sigma}_{\xi\xi}}{d\xi^2} + 2v_0 p \frac{d \bar{\sigma}_{\xi\xi}}{d\xi} - p^2 \bar{\sigma}_{\xi\xi} = \\ = \frac{p(p + v_0^2)}{1 - \tau_0 v_0^2} \bar{W} - \frac{v_0(v_0^2 + 2p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \frac{d \bar{W}}{d\xi}, \quad \xi > 0; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)|_{\xi=0} = 0, \quad |\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p)| < \infty, \quad \xi \geq 0. \quad (40)$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{d^2 \bar{W}}{d\xi^2} = \frac{p(1 + \tau_0 p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \bar{W} - \frac{v_0(1 + 2\tau_0 p)}{1 - \tau_0 v_0^2} \frac{d \bar{W}}{d\xi},$$

вытекающее из операционной формы уравнения (17). Для уменьшения громоздкости при решении задачи (39), (40) примем во внимание тот факт, что инерционные эффекты в (34) действуют на времена микросекундной длительности. Тогда входящее в общее решение (21) выражение $\sqrt{\tau_0 p^2 + p + v_0^2/4}$ можно записать в виде $\sqrt{\tau_0 p^2 + p + v_0^2/4} \approx p\sqrt{\tau_0}(1 + 1/(2\tau_0 p))$ и решение (21) принимает форму

$$\bar{W}(\xi, p) = \frac{v_0/\sqrt{\tau_0}}{p[p + (1 - v_0\sqrt{\tau_0})/(2\tau_0)]} \times \exp\left[-\frac{(2\tau_0 p + 1)\xi}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0\sqrt{\tau_0})}\right].$$

Искомое напряжение в пространстве изображений теперь следующее:

$$\bar{\sigma}_{\xi\xi}(\xi, p) = \bar{F}(p) \times \left\{ \exp[-\bar{\gamma}(p)\xi] - \exp\left(-\frac{\xi}{\alpha_0 - v_0} p\right) \right\}, \quad (41)$$

$$\bar{F}(p) = \left[\frac{A_{11}}{(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} + \frac{A_{12}}{p(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} + \frac{A_{13}}{p^2(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{12})} \right] - \left[\frac{A_{21}}{(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} + \frac{A_{31}}{p(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} + \frac{A_{32}}{p^2(p + \gamma_{11})(p + \gamma_{13})} \right],$$

$$A_{11} = \frac{v_0(\alpha_0 - v_0)(1 + 2\tau_0 - v_0\sqrt{\tau_0})}{2\alpha_0\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)(1 - \tau_0 v_0^2)},$$

$$A_{12} = A_{11} \left[v_0^2 + (1 + \tau_0 v_0^2)/(2\tau_0) \right],$$

$$A_{13} = \frac{v_0^3(\alpha_0 - v_0)}{4\alpha_0\sqrt{\tau_0}(1 - \tau_0 v_0^2)(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)},$$

$$A_{21} = \frac{v_0(\alpha_0 + v_0)(1 + 2\tau_0 - v_0\sqrt{\tau_0})}{2\alpha_0\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)(1 - \tau_0 v_0^2)},$$

$$A_{31} = A_{21} \left[v_0^2 + (1 + \tau_0 v_0^2)/(2\tau_0) \right],$$

$$A_{32} = \frac{v_0^3(\alpha_0 + v_0)}{4\alpha_0\sqrt{\tau_0}(1 - \tau_0 v_0^2)(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)},$$

$$\gamma_{11} = \frac{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}{2\tau_0}, \quad \gamma_{12} = \frac{\alpha_0 - v_0}{2\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} - 1)},$$

$$\gamma_{13} = \frac{\alpha_0 + v_0}{2\sqrt{\tau_0}(\alpha_0\sqrt{\tau_0} + 1)}, \quad \bar{\gamma}(p) = \frac{2\tau_0 p + 1}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0\sqrt{\tau_0})},$$

Теперь из (41) находим для искомого напряжения: при $\alpha_0\sqrt{\tau_0} = v_p/v_T > 1$

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0, & \tau < \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}; \\ \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0} < \tau < \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}; \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}; \end{cases} \quad (42)$$

при $\alpha_0\sqrt{\tau_0} = v_p/v_T < 1$

$$\begin{cases} \sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0, & \tau < \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}; \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau), & \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}} < \tau < \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}; \\ \sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) + \sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau), & \tau > \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}. \end{cases}$$

Здесь

$$\sigma_{\xi\xi}^{(1)}(\xi, \tau) = F\left(\tau - \frac{\xi\sqrt{\tau_0}}{1 - v_0\sqrt{\tau_0}}\right) \exp\left[-\frac{\xi}{2\sqrt{\tau_0}(1 - v_0\sqrt{\tau_0})}\right];$$

$$\sigma_{\xi\xi}^{(2)}(\xi, \tau) = -F\left(\tau - \frac{\xi}{\alpha_0 - v_0}\right);$$

$$F(\tau) =$$

$$= \left[B_{11} \exp(-\gamma_{11}\tau) + B_{12} \exp(-\gamma_{12}\tau) + \frac{A_{13}\tau}{\gamma_{11}\gamma_{12}} + B_{13} \right] - \left[B_{21} \exp(-\gamma_{11}\tau) + B_{31} \exp(-\gamma_{13}\tau) + \frac{A_{32}\tau}{\gamma_{11}\gamma_{13}} + B_{32} \right];$$

$$B_{11} = \frac{\gamma_{11}^2 A_{11} - \gamma_{11} A_{12} + A_{13}}{\gamma_{11}^2(\gamma_{12} - \gamma_{11})},$$

$$B_{12} = \frac{A_{12}\gamma_{12} - A_{11}\gamma_{12}^2 - A_{13}}{\gamma_{12}^2(\gamma_{12} - \gamma_{11})},$$

$$B_{13} = \frac{A_{12}}{\gamma_{11}\gamma_{12}} - \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{12})A_{13}}{\gamma_{11}^2\gamma_{12}^2},$$

$$B_{21} = \frac{\gamma_{11}^2 A_{21} - \gamma_{11} A_{31} + A_{32}}{\gamma_{11}^2(\gamma_{13} - \gamma_{11})},$$

$$B_{31} = \frac{\gamma_{13} A_{31} - \gamma_{13}^2 A_{21} - A_{32}}{\gamma_{13}^2(\gamma_{13} - \gamma_{11})},$$

$$B_{32} = \frac{A_{31}}{\gamma_{11}\gamma_{13}} - \frac{(\gamma_{11} + \gamma_{13})A_{32}}{\gamma_{11}^2\gamma_{13}^2}.$$

На рис. 2 приведен график зависимости динамического температурного напряжения (42) от безразмерного времени в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$, $\alpha_0 = 3$ ($\alpha_0\sqrt{\tau_0} = v_p/v_T = 1.5 > 1$; для металлов $v_p/v_T > 1$, для полимерных стекол $v_p/v_T < 1$)

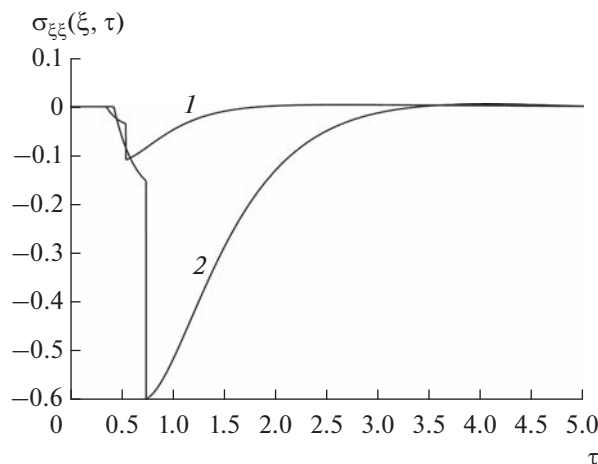


Рис. 2. Зависимость напряжения $\sigma_{\xi\xi}(\xi, \tau)$ (42) от τ в сечении $\xi = 1$ при $\tau_0 = 0.25$, $\alpha_0 = 3$ и $\nu_0 = 0.16$ (1) и 0.65 (2).

для значений $\nu_0 = 0.16, 0.65$. Для локально-неравновесных процессов учет конечной скорости распространения теплоты приводит к существенно изменению картины напряжений по сравнению с соответствующими кривыми в рамках классической феноменологии Фурье [21]. Возьмем произвольную точку (сечение $\xi = \text{const}$). Вначале напряжения в ней равны нулю. В момент времени $\tau = \xi/(\alpha_0 - \nu_0)$ (где $t = (z - l)/v_p$) к этой точке подходит продольная упругая волна напряжения, фронт которой движется со скоростью v_p . Напряжение сжатия меняется скачком и далее убывает (возрастает по абсолютной величине). В момент времени $\tau = \xi\sqrt{\tau_0}/(1 - \nu_0\sqrt{\tau_0})$ к этой точке (сечению) подходит тепловая волна, фронт которой движется со скоростью v_T ; напряжение меняется скачком и далее приближается к значению, близкому к квазистатическому.

Таким образом, в массивном твердом теле (упругое полупространство с движущейся термоизолированной границей) распространяются две волны — тепловая и упругая, причем фронт упругой волны предшествует фронту тепловой волны. Проведенные исследования влияния теплоотдачи на движущейся границе области показали, что с уменьшением теплоотдачи с поверхности полупространства динамические температурные напряжения уменьшаются. Если в классическом случае [21] наличие конечной теплоотдачи с поверхности границы полупространства приводит к исчезновению разрывов температурных напряжений, то в случае обобщенной динамической задачи термоупругости [20] характер напряжений остается таким же, как и при бесконечно большом значении коэффициента теплоотдачи (граничное условие первого рода). Эту часть исследований, весьма объемную по своему содержанию, предполагается опубликовать в дальнейшем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные модельные представления дают основание для следующего утверждения. Описан следующий эффект в теории теплопроводности и в термомеханике: в области с движущейся термоизолированной границей, несмотря на отсутствие внешних и внутренних источников теплоты, возникает градиент температуры, приводящий к появлению температурного поля и соответствующих ему температурных напряжений. Данный эффект проявляется как в классической феноменологии Фурье (уравнения параболического типа), так и в обобщенной феноменологии для локально-неравновесных процессов (уравнения гиперболического типа).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э.М.* Тепловое разрушение полимерных волокон в теории временной зависимости прочности // Тонкие химические технологии. 2021. Т. 16. № 6. С. 526.
2. *Карташов Э.М., Соловьев И.А.* Стохастический анализ эффекта возникновения градиента температуры при теплоизолированной движущейся границе // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2017. № 1. С. 1.
3. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: URSS, 2017. 1090 с.
4. *Vernott P.* Les paradoxes de la theorie continue de l' equation de la chaleur // Comptes Rendus. 1958. V. 246(22). P. 3154.
5. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
6. *Cattaneo C.* Sur une forme de l' equation de la chaleur eliminant le paradoxe d' une propagation instantanee // Comptes Rendus. 1958. V. 247(4). P. 431.
7. *Лыков А.В.* Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // ИФЖ. 1965. Т. 9. № 3. С. 287.
8. *Баумейстер К., Хамилл Т.* Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112.
9. *Соболев С.Л.* Локально-неравновесные модели процессов переноса // УФН. 1997. Т. 167(10). С. 1095.
10. *Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж.* Расширенная необратимая термодинамика. М.—Ижевск: Институт комплексных исследований, 2006. 528 с.
11. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Получение и анализ точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности для плоской стенки // ТВТ. 2012. Т. 50. № 1. С. 118.
12. *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты // ТВТ. 2013. Т. 51. № 2. С. 301.
13. *Кирсанов Ю.А.* Моделирование теплофизических процессов. СПб.: Политехника, 2022. 230 с.
14. *Еремин А.В.* Исследование быстрорелаксирующих температурных возбуждений, вызываемых сверхкороткими лазерными импульсами // Современная наука. Естественные и технические науки. 2019. № 8. С. 47.

15. *Еремин А.В.* Об одном методе математического моделирования процесса переноса теплоты в твердых телах // *Перспективы науки.* 2019. Т. 7(118). С. 101.
16. *Еремин А.В.* Методология моделирования тепло-массопереноса, упругих колебаний и электромагнитных волн с учетом пространственно-временной нелокальности. Автореферат дис. ... докт. техн. наук. Самара, 2021. 30 с.
17. *Жуков В.В.* Исследование внутренних механизмов переноса тепла, массы, импульса с учетом релаксационных явлений. Автореферат дис. ... канд. техн. наук. Самара, 2021. 18 с.
18. *Формалев В.Ф.* Уравнения математической физики. М.: URSS, 2020. 648 с.
19. *Карташов Э.М.* Аналитические решения гиперболических моделей переноса // *ИФЖ.* 2014. Т. 87. № 5. С. 1072.
20. *Карташов Э.М., Кудинов В.А.* Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. М.: URSS, 2012. 650 с.
21. *Карташов Э.М.* Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты // *Российский технологический журнал.* 2023. № 11(3). С. 70.