

УДК 532.526.3:533.6.011.6

ОЦЕНКА КОНВЕКТИВНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ ДЛЯ МЕТЕОРОИДНЫХ ТЕЛ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

© 2023 г. Д. Н. Минюшкин*, И. С. Фролов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
г. Долгопрудный, Россия

*E-mail: minyushkin.dn@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.06.2022 г.

После доработки 23.01.2023 г.

Принята к публикации 11.05.2023 г.

В данной работе предложен модифицированный метод эффективной длины для расчета тепловых потоков в сложных геометриях в трехмерной постановке при движении в атмосфере с высокими скоростями и описана его программная реализация. Метод, с одной стороны, не требует огромных вычислительных затрат для получения результата, а с другой, демонстрирует устойчивую работу в сложных геометриях.

DOI: 10.31857/S0040364423040099

ВВЕДЕНИЕ

Быстро движущиеся в атмосфере метеориты или летательные аппараты испытывают не только аэродинамическое сопротивление среды, но и радиационный [1] и аэродинамический нагрев. При сверхзвуковых скоростях возникают ударные волны, за фронтом которых газ сильно разогревается, нагревая поверхность метеорита. При моделировании движения в подобных условиях необходимо оценивать величину аэродинамического нагрева. Для расчета тепловых потоков в сложных геометриях в трехмерной постановке при движении в атмосфере с высокими скоростями в настоящее время широко используется численное решение уравнений Навье–Стокса. Однако даже при современном уровне доступности вычислительных мощностей подобные расчеты все же являются ресурсозатратными. В работе [2] пример подобного расчета приведен в осесимметричной постановке на основе решения уравнений Навье–Стокса. В случае необходимости рассчитывать изменяющуюся форму метеорита в результате разрушения материала расчет конвективных тепловых потоков становится массовой операцией: необходимо для каждой новой полученной формы метеорита искать новое поле тепловых потоков. Таким образом, массовость расчета конвективных потоков в трехмерной постановке радикально усложняет задачу расчета формы метеорита в результате аэродинамического нагрева.

Одним из часто используемых способов оценки аэродинамического нагрева является метод эффективной длины. Метод предложен В.С. Авдеевским [3–5] и основан на предположении, что тепловой поток через пограничный слой определяется локальными значениями параметров газа на

внешней границе пограничного слоя и толщиной пограничного слоя, а локальная толщина пограничного слоя обусловлена предысторией течения от точки растекания. В сложных трехмерных геометриях локально могут возникать течения, в которых метод эффективной длины применять нельзя: течения в кавернах, на уступах, отрывы и вихри.

Целью работы является разработка модифицированного метода эффективной длины, устойчиво работающего на геометрически сложных поверхностях с изломами, кавернами и выбоинами.

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ЭФФЕКТИВНОЙ ДЛИНЫ

Математически метод сводится к определению тепловых потоков в точке растекания на поверхности тела и интегрированию вдоль линии тока, как схематически показано на рис. 1. Значения на внешней границе пограничного слоя являются входными параметрами расчета и получают из решения уравнений Эйлера или по методу Ньютона, что и обуславливает существенно более высокую скорость получения результата по отношению к решению уравнений Навье–Стокса. Для расчета теплового потока в области торможения для всех подобных геометрий предлагается использовать следующие соотношения [6]:

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0.332 \text{Pr}^{-2/3} \sqrt{2\rho_* \mu_* \text{div} \mathbf{U}},$$

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p} (H_e - h_w), \quad (1)$$

$$H_e = h_\delta + \frac{1}{2} \text{Pr}^{1/2} U_\delta^2.$$

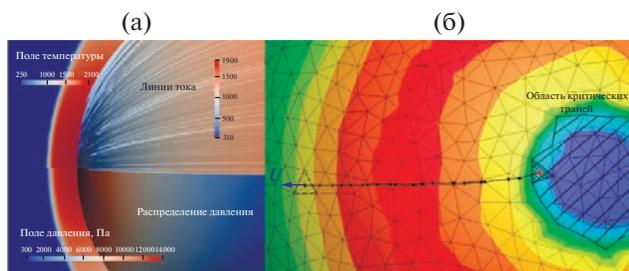


Рис. 1. Схема определения линии тока на поверхностной триангулированной сетке, предложенная в [5], на примере сферы: (а) – распределение газодинамических полей, полученное при решении уравнений Эйлера; (б) – область критических граней и линия тока, вдоль которой вычисляются криволинейные интегралы в (3).

Здесь α/c_p – коэффициент теплообмена; q_w – конвективный тепловой поток на стенке; h_w – энтальпия на поверхности тела; H_e – адиабатическая энтальпия; h_δ – энтальпия на внешней границе пограничного слоя; Pr – число Прандтля; U_δ – модуль скорости на внешней границе пограничного слоя; ρ_* , μ_* – плотность и вязкость газа, рассчитанные по значению давления и эккертской энтальпии [6]:

$$h_* = 0.5h_w + 0.22H_e + 0.28h_\delta.$$

В методе эффективной длины, предложенном в [6], коэффициенты теплообмена вне области торможения вычисляются интегрированием вдоль линии тока (рис. 1). Соотношения для интегрирования [6] следующие:

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_l = 0.332Pr^{-2/3} \frac{r_{\text{eff}} \rho_* \mu_* U_\delta}{z_l^{1/2}}; \tag{2}$$

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_t = 0.0296Pr^{-0.6} \frac{r_{\text{eff}}^{1/4} \rho_* \mu_*^{1/4} U_\delta}{z_t^{1/5}};$$

$$z_l = \int_0^S B_l dS, \quad B_l = r_{\text{eff}}^2 \rho_* \mu_* U_\delta; \tag{3}$$

$$z_t = \int_0^S B_t dS, \quad B_t = r_{\text{eff}}^{5/4} \rho_* \mu_*^{1/4} U_\delta.$$

Здесь S – длина дуги вдоль линии тока; r_{eff} – радиус эквивалентного осесимметричного тела; индексы l, t – параметры ламинарного и турбулентного режимов течения.

Соотношения для ламинарного теплообмена определяются на основе решения задачи Блазиуса о структуре пограничного слоя на пластине, формула для расчета турбулентного теплового потока получена на основе обобщения экспериментальных данных [6].

В данном случае интеграл z_i ($i = l, t$) является функцией от S и его можно записать в виде дифференциала z_i как

$$\frac{dz_i}{dS} = B_i. \tag{4}$$

Обратный переход дает

$$\tilde{z}_i = \int_0^S B_i dS + \text{const}. \tag{5}$$

В настоящей постановке для любой линии тока $\text{const} = 0$, потому что на границе критической области интегралы z_i и \tilde{z}_i равны значению интеграла в критической области.

Интегрировать вдоль линии тока можно двумя способами. Первый, описанный в работе [5], предполагает вычисление линии тока из каждой точки на поверхности до границы точки растекания. Модификация метода эффективной длины, предложенная в данной работе, основана на втором способе [6].

Идея разработанного метода заключается в переходе от вычисления интеграла вдоль линии тока к эквивалентной краевой задаче, сформулированной на поверхности тела вне области торможения, с граничным условием первого рода на границе области торможения. Используя соотношения [7]

$$\frac{dz_i}{dS} = \text{grad}(z_i) \cdot \mathbf{e},$$

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{U}}{\|\mathbf{U}\|},$$

$$\text{div}(z_i \mathbf{e}) = \text{grad}(z_i) \cdot \mathbf{e} + z_i \text{div}(\mathbf{e}),$$

можно преобразовать (4) к виду

$$\text{div}(z_i \mathbf{e}) - z_i \text{div}(\mathbf{e}) = B_i. \tag{6}$$

Граничное условие

$$z_i|_{\partial\Omega} = f(\mathbf{r}) \tag{7}$$

(\mathbf{r} – радиус-вектор точки в пространстве), заданное на границе области торможения $\partial\Omega$, обеспечивает равенство $\text{const} = 0$ в соотношении (5). Таким образом, сформулированная краевая задача (6), (7) эквивалентна исходной задаче.

Аналогичный подход может быть применен при решении уравнения для эффективного радиуса. Согласно определению [5]:

$$\frac{d \ln(r_{\text{eff}})}{dS} = \text{div}(\mathbf{e}).$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, можно показать, что задача поиска $\ln(r_{\text{eff}})$ эквивалентна краевой задаче с уравнением

$$\text{div}(\ln(r_{\text{eff}}) \mathbf{e}) - \ln(r_{\text{eff}}) \text{div}(\mathbf{e}) = \text{div}(\mathbf{e}) \tag{8}$$

и граничным условием

$$r_{\text{eff}}|_{\partial\Omega} = g(\mathbf{r}). \quad (9)$$

Выбор граничных значений в соотношениях (7), (9) рассмотрен при описании численного метода.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД И ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЧЕТА

Метод эффективной длины имеет ограничение – он не может применяться в областях, где пограничный слой разрушается. Например, в течении перед уступом, в донной области. Однако на практике во многих случаях оценка теплового потока нужна в теплонапряженных местах: областях в районе точки растекания, присоединения ударных волн, на наветренной стороне. Таким образом, требования по устойчивости к методу можно сформулировать следующим образом: расчет методом эффективной длины должен давать результат на теплонапряженных участках и оставаться устойчивым в местах, где он не дает корректного результата.

Предполагается, что есть неструктурированная поверхностная сетка, состоящая из ячеек произвольной формы, и в каждой ячейке заданы параметрами внешнего обтекания: скорость U , давление p , температура T . Численный алгоритм состоит из следующих шагов:

- 1) выделение критической области;
- 2) вычисление значений основных величин в критической области с помощью аналитических соотношений;
- 3) вычисление эффективного радиуса тела в каждой ячейке;
- 4) интегрирование по полю с заданными граничными условиями.

Рассмотрим подробнее каждый шаг алгоритма.

1. Выделение критической области. На данном этапе необходимо выделить точку растекания и прилегающую к ней область. Для этого используется набор критериев:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_i\| &< \alpha \max_i \|\mathbf{U}_i\|, \\ p_i &> (1 - \alpha) \max_i (p_i), \\ \text{div} \mathbf{e}_i &> 0, \quad \mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{U}_i}{\|\mathbf{U}_i\|}, \end{aligned}$$

где $\alpha \in (0, 1)$. Рекомендуемые значения $\alpha = 0.05, 0.1$.

Таким образом, ячейки сетки, удовлетворяющие всем критериям, формируют критическую область. Здесь и далее нижний индекс i у величин означает, что используется значение в ячейке, соответствующей данному индексу.

2. Вычисление значений основных величин в критической области с помощью аналитических соотношений. На данном этапе вычисляются значения величин $\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_i$, $\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_i$, z_i , z_i , r_{eff} в критической области.

Для вычисления r_{eff} используется приближенная формула

$$r_{\text{eff}} = \|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_0\|, \quad \mathbf{R}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i, \quad (10)$$

справедливая в малой окрестности точки растекания.

Здесь \mathbf{r}_i – радиус-вектор центра ячейки с номером i , \mathbf{R}_0 – барицентр критической области. Суммирование в формуле (10) проводится по всем ячейкам критической области.

Для вычисления z_i нужно выразить эту величину из соотношения (2):

$$z_i = \left(\frac{0.332 \text{Pr}^{\frac{-2}{3}} r_{\text{eff}} \rho_* \mu_* \|\mathbf{U}\|}{\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_i} \right)^2. \quad (11)$$

Так как рассматривается граница области торможения, то $\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_i$ вычисляется по формулам (1) (данный подход неприменим, поскольку в рассматриваемой модели $\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_i = 0$ в области торможения).

Для вычисления z_i используется соотношение (3). Разложим функцию B_i в ряд Маклорена по S и оставим первый ненулевой член этого ряда. Кроме того, считая размер области растекания малым, примем $r_{\text{eff}} \approx S$. В результате получаем

$$z_i \approx \int_0^S x^2 \rho_{*0}^{\frac{1}{4}} \mu_{*0}^{\frac{1}{4}} c dx. \quad (12)$$

Здесь ρ_{*0} , μ_{*0} – значения соответствующих величин в точке растекания (при $S = 0$), $c = \frac{dU}{dS}$. После интегрирования из (12) получаем

$$z_i \approx \frac{4}{13} r_{\text{eff}}^{\frac{13}{4}} \rho_{*0}^{\frac{1}{4}} \mu_{*0}^{\frac{1}{4}} c. \quad (13)$$

Соотношения (10), (11), (13) используются как внутри области торможения, так и на ее границе для аппроксимации граничных условий (7), (9).

3. Вычисление эффективного радиуса тела в каждой ячейке. На данном этапе производится численное решение краевой задачи (8), (9) мето-

дом релаксации. Для повышения устойчивости расчета в уравнение также добавляется вязкий член $\Delta(D_S \ln(r_{\text{eff}}))$, где D_S – искусственная вязкость. Таким образом, уравнение (8) после добавления вязкого члена при решении методом релаксации принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(r_{\text{eff}})}{\partial t} + \text{div}(\ln(r_{\text{eff}})\mathbf{e}) - \Delta(D_S \ln(r_{\text{eff}})) = \\ = \text{div}(\mathbf{e}) + \ln(r_{\text{eff}})\text{div}(\mathbf{e}). \end{aligned}$$

4. Интегрирование по полю с заданными граничными условиями. Численное решение краевой задачи (6), (7) производится методом релаксации. После добавления вязкого слагаемого при решении методом релаксации уравнение (6) записывается как

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} + \text{div}(z_i \mathbf{e}) - \Delta(D_S z_i) = B_i + z_i \text{div}(\mathbf{e}). \quad (14)$$

Дискретизация производится с помощью метода конечного объема. Производная по времени $\frac{\partial z_i}{\partial t}$ аппроксимируется с помощью схемы Эйлера. Конвективное слагаемое $\text{div}(z_i \mathbf{e})$ аппроксимируется неявно с помощью схемы первого или второго порядка точности. Вязкий член $\Delta(D_S z_i)$ аппроксимируется неявно с помощью схемы Гаусса с линейной интерполяцией на грани ячеек. Слагаемые в правой части уравнения (14) аппроксимируются явно. В ячейках критической области значения z_i фиксируются.

При численном решении уравнения на каждой итерации проверяются значения z_i во всех ячейках. Если в какой-либо ячейке вне критической области значение z_i меньше максимального в критической области значения $\max_{\text{stag}} z_i$, то в этой ячейке устанавливается $z_i = \max_{\text{stag}} z_i$.

ВАЛИДАЦИЯ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ЭФФЕКТИВНОЙ ДЛИНЫ И РАСЧЕТ СЛОЖНОГО МЕТЕОРОИДНОГО ТЕЛА

Для валидации метода выбраны два типа экспериментальных данных: для обтекания сферы и обтекания цилиндра с различными радиусами закругленной кромки. Первый валидационный тест показывает адекватность расчета тепловых потоков на затупленных по сфере телах, таких как метеороидное тело, а второй тест – возможности метода для расчета вероятных ребер на поверхности.

Сравнение для сферы проведено с результатами расчета из [5]. Сфера радиусом $R = 1$ м помещена в сверхзвуковой поток. Параметры набегающего потока: давление $P = 300$ Па, температура $T = 250$ К, молярная масса газа $M_g = 0.029$ кг/моль (параметры атмосферы на высоте 40 км, где скорость полета составляет примерно $M = 6$ [8]). В рас-

четах принималась температура стенки $T_w = 300$ К. Результаты расчета приведены на рис. 2, 3 – ламинарные и турбулентные тепловые режимы соответственно. На рисунках представлены зависимости теплового потока от угла на сфере. Приведены результаты нескольких расчетов: для разных характерных размеров ячеек, для схем первого и второго порядка аппроксимации конвективного члена. Коэффициент k определяется как отношение характерного размера ячейки к радиусу сферы.

Для валидационного расчета теплового потока на ребре цилиндра экспериментальные данные взяты из работы [9]. Расчет проводился в трехмерной постановке: трехмерная модель цилиндра помещена в набегающий сверхзвуковой поток. Параметры набегающего потока: давление – 12.46 МПа, темпе-

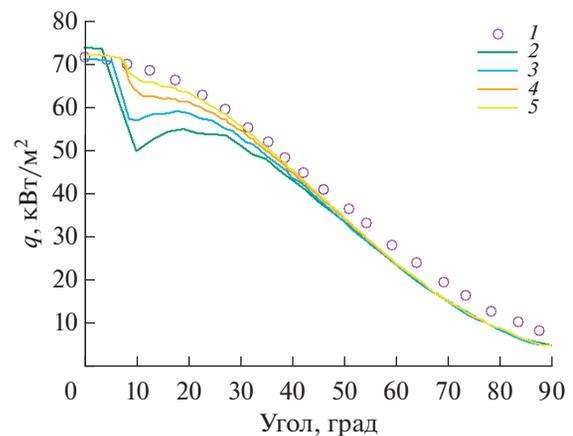


Рис. 2. Распределение ламинарного теплового потока на сфере радиусом 1 м в зависимости от характерного размера ячеек для первого и второго порядков аппроксимации конвективного члена в сравнении с данными [5] (1): 2 – первый порядок аппроксимации, $k = 0.07$; 3 – 0.05; 4 – 0.03; 5 – второй порядок, 0.03.

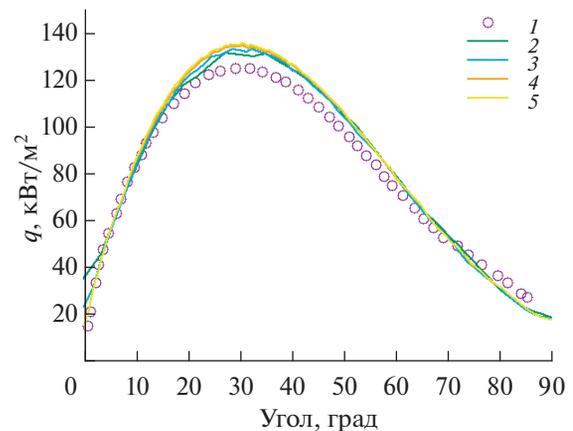


Рис. 3. Распределение турбулентного теплового потока на сфере радиусом 1 м в зависимости от характерного размера ячеек для первого и второго порядков аппроксимации конвективного члена в сравнении с данными [5] (1): 2 – первый порядок аппроксимации, $k = 0.07$; 3 – 0.05; 4 – 0.03; 5 – второй порядок, 0.03.

ратура – 1160 К, число Маха $M = 10.5$. Результаты расчетов для разных радиусов скругления приведены на рис. 4. Расчеты выполнены со вторым порядком аппроксимации конвективного члена с коэффициентом $k = 0.02$ (k – отношение характерного размера ячейки к радиусу цилиндра). Здесь q_l – ламинарный тепловой поток, $q_l^{(0)}$ – ламинарный тепловой поток в точке растекания, s – длина линии тока от точки растекания до заданной точки на поверхности цилиндра.

Для демонстрации устойчивости работы метода проведен расчет тела сложной геометрии, в которой присутствуют впадины, выщербины, выпуклости и т.п. Форма сложного метеороидного тела показана на рис. 5. Параметры внешнего набегающего потока: давление – 12.46 МПа, температура – 1160 К, число Маха – 10.5. Результаты расчета ламинарного и турбулентного потоков представлены на рис. 6. Количество ячеек в расчетной сетке – около 15×10^3 , расчет проводился со вторым порядком аппроксимации конвективного члена по пространству, время расчета на одном ядре процессора Intel® Xeon® E5530 2.4 GHz составило примерно 2 мин.

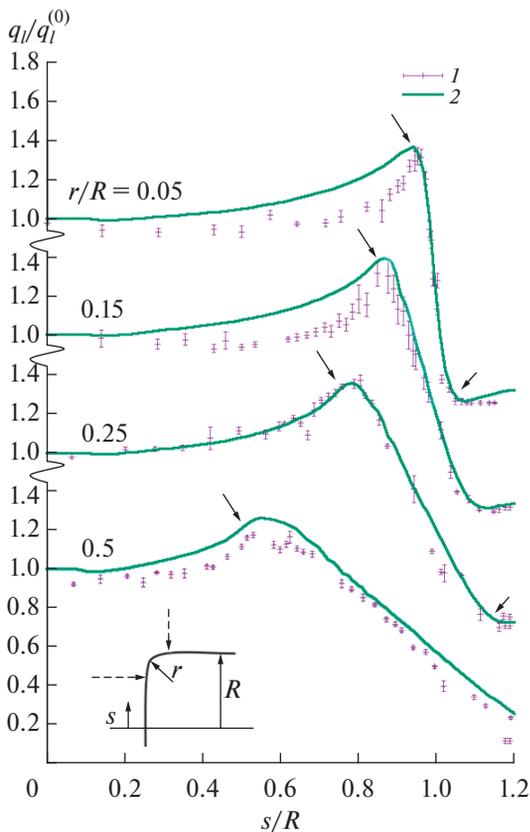


Рис. 4. Распределение ламинарных тепловых потоков по диску со скругленными углами точками при различных значениях соотношения r/R (числа у кривых): 1 – данные [9], 2 – результаты расчета; стрелки – начало и конец скругления.

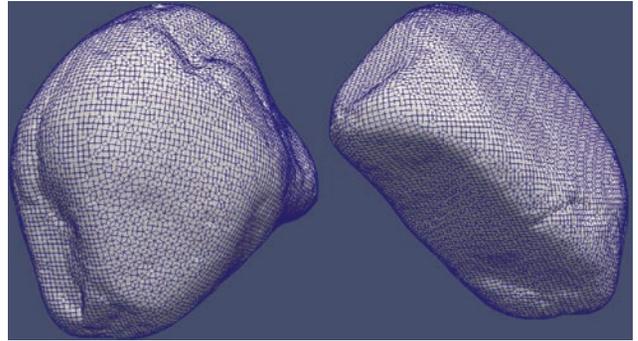


Рис. 5. Форма сложного метеороидного тела.

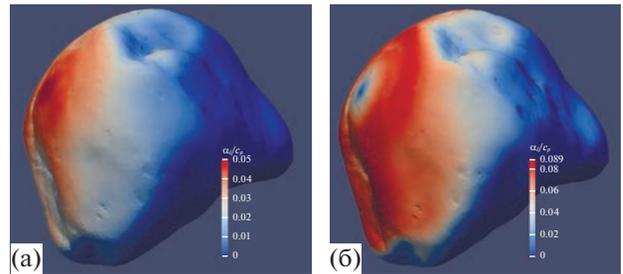


Рис. 6. Распределение ламинарного (а) и турбулентного (б) коэффициентов теплообмена по поверхности сложного метеороидного тела.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

На рис. 2 представлены результаты расчета ламинарного теплового потока на сфере в трехмерной постановке. Видно, что при уменьшении характерного размера ячеек качество решения в окрестности точки растекания улучшается. Качество решения также повышается при увеличении порядка аппроксимации конвективного члена $\text{div}(z_i \mathbf{e})$ в уравнении (14), как видно на рис. 2, кривая 5. Для интегрирования вдоль линии тока подобный эффект – улучшения качества решения при уменьшении размера расчетной сетки – подробно исследован в работе [5]. Надо только заметить, что и модифицированный метод эффективной длины имеет сходные свойства. Таким образом, можно сформулировать рекомендацию: для улучшения качества решения для ламинарного теплового потока необходимо повышать порядок аппроксимации конвективного члена в уравнении (14) и уменьшать размеры ячейки в окрестности критической точки.

На рис. 3 представлены результаты расчета турбулентного теплового потока на сфере в зависимости от характерного размера ячеек. Качество решения не сильно зависит от размера ячеек и порядка аппроксимации конвективного члена.

На рис. 4 показаны результаты расчета теплового потока для цилиндра с закругленными кром-

ками при различных радиусах скругления. Видно, что в окрестности точки растекания распределение теплового потока отклоняется от экспериментальных данных и довольно хорошо моделирует тепловой поток на кромках.

В целом можно сказать, что и на сфере, и на цилиндре со скругленными кромками можно оценивать тепловые потоки с точностью до 20% при значении коэффициента $k = 0.03$ и использовании второго порядка аппроксимации конвективного члена. Показано, что при уменьшении характерного размера ячеек (т.е. увеличении их числа и, соответственно, ресурсозатратности вычислений) можно повысить качество расчета ламинарного теплового потока в окрестности критической точки.

На рис. 5, 6 представлены результаты оценки тепловых нагрузок при аэродинамическом нагреве тела сложной формы, похожего на метеороидное тело. Рис. 5 показывает сложность геометрии: видны сложные складки, впадины и бугры. На рис. 6 представлено поле ламинарных и турбулентных тепловых потоков.

Необходимо отметить, что на наветренной стороне метеороидного тела, т.е. там, где может быть применен метод эффективной длины, выполняется расчет теплового потока. На уступах и впадинах, там, где метод эффективной длины непригоден для оценки теплового потока, проводится устойчивый расчет. Это свойство модифицированного метода эффективной длины является очень значимым на практике. Нет необходимости специально выделять области расчета, готовить геометрию тела для применения метода эффективной длины. Модифицированный метод эффективной длины дает оценку конвективных тепловых потоков на наветренной стороне и устойчиво работает в местах проблемной геометрии — с выбоинами, буграми и кавернами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе представлен модифицированный метод эффективной длины. Отличительной особенностью метода является работоспособность для сложных геометрий обтекаемого тела. Входными данными для расчета являются поля внешнего невязкого обтекания, которые могут быть получены любым внешним решателем. Это обстоя-

тельство является преимуществом при использовании расчетного кода в рамках вычислительных программных комплексов.

Продемонстрированы результаты валидационных расчетов в типовых геометриях, которые показали удовлетворительное совпадение с эталонными. Показано, что модифицированный метод эффективной длины позволяет оценить тепловые аэродинамические нагрузки на тела сложных форм за приемлемое время, с использованием ограниченных вычислительных ресурсов.

Показана устойчивая работа метода при расчете трехмерной сложной геометрии на примере метеороидного тела при наличии впадин и выступов. Данный результат позволяет не проводить подготовку геометрии тела для расчета (например, вручную исключать донную область или сглаживать выступы и выбоины). Модифицированный метод эффективной длины дает оценку тепловых потоков в частях тела со сложной геометрией — с выбоинами, буграми и кавернами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суржиков С.Т.* Радиационная газовая динамика спускаемых космических аппаратов больших размеров // ТВТ. 2010. Т. 48. № 6. С. 956.
2. *Минюшкин Д.Н., Крюков И.А.* Расчет прогрева и уноса теплозащитного материала в осесимметричной постановке // ТВТ. 2020. Т. 58. № 2. С. 244.
3. *Авдеевский В.С., Галицкий Б.М., Глебов Г.А. и др.* Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Учеб. М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
4. *Власов В.И., Горшков А.Б., Землянский Б.А. и др.* Численное моделирование теплообмена при входе в атмосферу Земли спускаемых аппаратов типа "Клипер" // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 1. С. 30.
5. *Журин С.В.* Методика численного моделирования конвективного теплообмена на телах сложной формы с использованием метода эффективной длины. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МФТИ, 2009.
6. Конвективный теплообмен летательных аппаратов / Под ред. Землянского Б.А. М.: Физматлит, 2014.
7. *Дымарский Я.М.* Лекции по математическому анализу. Учеб. пособ. В 3-х ч. Ч. 3. М.: МФТИ, 2020. 69 с.
8. *Лунёв В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. М.: Физматлит, 2007. 760 с.
9. *Marvin J.G., Sinclair A.R.* Convective Heating in Regions of Large Favorable Pressure Gradient // AIAA J. 1967. V. 5. № 11. P. 1940.