

Том 69, Номер 12

ISSN 0033-8494

Декабрь 2024



# РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА



НАУКА

— 1727 —

---

# СОДЕРЖАНИЕ

---

Том 69, номер 12, 2024

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

Простая модель расчета параметров излучения однонаправленного плоского раскрыва  
*В. Е. Остаев* 1139

Поверхностные электромагнитные поля оболочечных мод  
бессердцевинных волоконных световодов  
*М. А. Абельмас, О. В. Иванов* 1150

## АНТЕННО-ФИДЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

О синтезе анизотропных линз люнебурга  
*В. А. Калошин, Буй Ван Чунг* 1162

## ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Первеанс кубической цепи, содержащей в ребрах диоды Чайльда—Ленгмюра  
*А. Е. Дубинов* 1170

## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

Влияние анизотропии четвертого порядка на прецессию положения  
равновесия намагниченности в условиях ориентационного перехода  
*В. С. Власова, В. Г. Шавров, В. И. Щеглов* 1175

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Нейроморфное декодирование выборочных представлений изображений  
методом согласованной с границами интерполяции  
*В. А. Кершнер* 1183

## НАНОЭЛЕКТРОНИКА

Особенности неравновесного пиннинга волны зарядовой плотности  
в соединениях  $\text{HoTe}_3$  и  $\text{TmTe}_3$   
*Д. М. Ворopaев, А. В. Фролов, А. П. Орлов, А. А. Синченко* 1191

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

Проектирование и изготовление фрактальных элементов  
на основе резистивно-емкостной среды  
*А. Х. Гильмутдинов, К. О. Максимов, П. А. Ушаков* 1198

---

## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 621.371-373

### ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО ПЛОСКОГО РАСКРЫВА

© 2024 г. В. Е. Осташев

Объединенный институт высоких температур РАН,  
Ижорская ул., 13, стр. 2, Москва, 125412 Российская Федерация

E-mail: ostashev@ihed.ras.ru

Поступила в редакцию 07.08.2023 г.

После доработки 14.02.2024 г.

Принята к публикации 20.04.2024 г.

Описана модель расчета параметров излучения плоского апертурного раскрыва в дальней зоне свободного пространства. Электромагнитное поле на апертуре задано полем первичной поляризованной волны, исходящей из точки возбуждения. Излучающая система представлена элементами Гюйгенса. Верификация достоверности результата расчетов проведена на уровне согласования с фундаментальными физическими принципами, с аналитическими расчетами, а также с результатами эксперимента. При возбуждении антенны произвольным электрическим импульсом время расчета параметров излучения во временной, пространственной и в частотной области составляет единицы минут. Расчетная модель снабжена интерфейсом в стиле MS Windows.

**Ключевые слова:** расчетная модель, апертурная антенна, однонаправленный плоский раскрыв, элементы Гюйгенса, сверхкороткие видеоимпульсы

**DOI:** 10.31857/S0033849424120017, **EDN:** HNGIKG

#### ВВЕДЕНИЕ

Распространенным типом антенн направленного излучения являются апертурные антенны. Интерес к ним в последние 20 лет активизировался в связи с потребностью излучения сверхкоротких видеоимпульсов.

В рамках классической апертурной теории расчет параметров поля антенны в произвольной точке наблюдения выполняется по заданному распределению электрического либо магнитного токов по поверхности излучающей системы (апертуры раскрыва) при учете различия расстояний от точек на поверхности апертуры до точки наблюдения [1].

Аналитические расчеты параметров излучения в дальней зоне и во временной области представлены в [2–4].

В [2] вычислена временная зависимость поля излучения в любой точке переднего полупространства апертуры с использованием ее импульсной переходной характеристики. Использована аппроксимация апертурной теории, в которой каждая точка апертуры излучает импульс вида дельта-функции. В [3] описан метод аналитического расчета поля излучения плоской круглой апертуры с различным начальным распределением поля по ее поверхности. Показано, что напряженность импульсного поля излучения во многих случаях

может быть выражена в тригонометрических функциях во всем полупространстве перед апертурой. На основе полученных решений представлены характерные особенности импульсов излучения в разных точках наблюдения. В [4] представлена аналитическая формула для расчета диаграммы направленности (ДН) элементарной антенны. Формула построена на описании излучения плоской металлической поверхности любой формы с бесконечной проводимостью, которая возбуждается падающей плоской электромагнитной волной с фиксированной поляризацией. Полученные результаты верифицированы на результатах численного моделирования.

Детализация процессов формирования и приема излучения проводится с использованием программ электродинамического 3D-моделирования [5, 6].

Широко распространенные программы CST Microwave Studio [5] и Altair FEKO [6] решают краевую задачу в частотной области методом конечных элементов и методом моментов соответственно. Характерная продолжительность непрерывного процесса последовательных вычислений составляет десятки часов на современных ПК с объемом оперативной памяти 32...64 Гб. Поэтому при использовании таких программ необходимо контролировать погрешность выполняемых вычислений,

анализировать непротиворечивость получаемых физических результатов.

Цель данной работы состояла в создании инструмента для быстрых вычислений (единицы минут) параметров излучения плоской апертурной антенны (прямоугольной, круглой), возбуждаемой произвольным электрическим импульсом неодномерно и не синхронно.

Расчетная модель формирования излучения в дальней зоне свободного изотропного пространства построена в оптическом приближении и во временной области. В ней плоская излучающая система (ИС) представлена элементами Гюйгенса [1, 7], которые возбуждаются не синхронно и не равноамплитудно. Практическая потребность в создании такой модели состояла в том, чтобы оперативно, на уровне первого приближения, отвечать на вопросы, связанные с проектированием параметров излучателя как средства доставки электромагнитной энергии определенного качества в заданную область физического и частотного пространства. Модель верифицирована на соответствие результатов вычислений фундаментальным физическим принципам, аналитическим и экспериментальным данным [1]. Модель использована при проведении исследований, результаты которых опубликованы в [8, 9].

## 1. ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ИЗЛУЧЕНИЯ

Блок-схема функциональных подсистем излучателя с указанием энергии в отдельных точках тракта ее преобразования представлена на рис. 1.

Схема включает генератор (Г), фидер (Ф), антенну (А), поверхность ИС, которая представляет собой область пространства, заполненную токами, возбуждающими электромагнитные волны [1]. Введены следующие обозначения:  $Q_{\Gamma}$  и  $Q_a$  – энергия электрического импульса генератора и электромагнитного импульса на апертуре антенны,  $Q_{изл}$  – полная энергия излучения,  $Q_{изл}(\varphi)$  – энергия излучения внутри телесного угла с раскрытием

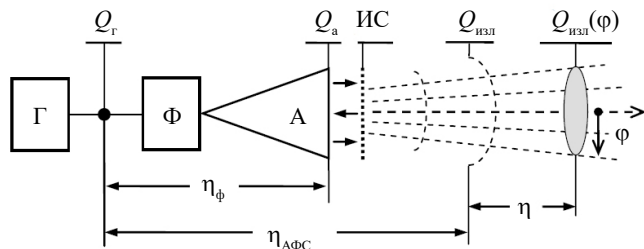


Рис. 1. Блок-схема преобразования энергии электрического импульса в излучение: Г – генератор, Ф – фидер, А – антенна.

$\pm\varphi$  и осью, совпадающей с главной осью излучения антенны,  $\eta = Q_{изл}(\varphi)/Q_{изл}$  – доля энергии излучения,  $\eta_{\phi} = Q_a/Q_{\Gamma}$  и  $\eta_{АФС} = Q_{изл}/Q_{\Gamma}$  – энергетическая эффективность фидера и антенно-фидерной системы излучателя.

Рассмотрим схему возбуждения плоской апертуры и формирования излучения (рис. 2). Поместим аперттуру в плоскости  $YZ$  декартовой системы координат. Ограничим аперттуру прямоугольной формы симметричными границами  $\pm A_y/2$  и  $\pm A_z/2$  по осям  $Y$  и  $Z$  соответственно. На схеме представлены:  $A(-R_{воз}, 0, 0)$  – точка, из которой осуществляется возбуждение апертуры,  $B(0, y, z)$  – точка на ее поверхности,  $\alpha$  и  $\beta$  – направление наблюдения точки  $B(0, y, z)$  из точки  $A$ ,  $\gamma$  – угол между направлением векторов  $\vec{r}_{воз}$  и  $\vec{r}$ ,  $T(R, \varphi)$  – точка наблюдения параметров излучения в плоскости  $y=0$ .

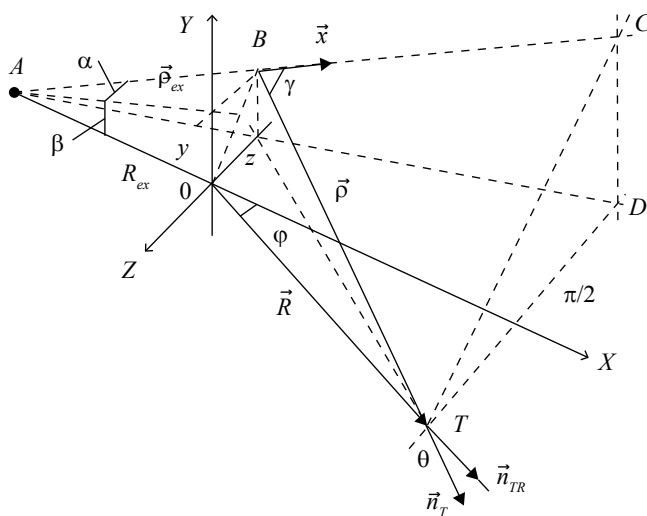


Рис. 2. Геометрия области формирования излучения.

Пусть пространственное распределение плотности потока энергии (ППЭ) возбуждения апертуры симметрично относительно оси  $X$ , тогда и пространственное распределение ППЭ излучения в его дальней зоне также симметрично. В этом случае при вычислении параметров излучения в точке  $T$  достаточно рассмотреть половину апертуры (например, при  $y \geq 0$ ) и ограничить область изменения угла  $\varphi$  пределами  $[0, \pi]$ .

Пусть из точки  $A$  к апертуре распространяется поперечная электромагнитная (ЭМ) волна, поляризованная в плоскости, ортогональной поверхности  $y = 0$ . Пусть эта волна ограничена пределами пирамиды, основанием которой является аперттура антенны, а поверхности двух граней пирамиды, которые симметричны относительно поверхности  $y = 0$ , электропроводны. Такая схема представляет собой модель регулярного

*ТЕМ*-рупора с волновым импедансом  $Z_a = \text{const}$ . Значение  $Z_a$  может быть вычислено в микрополосковом приближении или принято в соответствии с [10], где также показано, что значение импеданса устанавливается на квазистационарном уровне при длине  $R_{\text{воз}}$  более  $5\lambda$ .

Представим плоскую апертуру непересекающимся множеством элементов Гюйгенса (ЭГ) [1, 7]. В соответствии с определением, ЭГ – гипотетический излучатель, соответствующий бесконечно малому элементу поверхности сферического фронта волны с линейной поляризацией. Главная ось ДН излучения каждого ЭГ,  $\vec{x}$  ( $|\vec{x}| = 1$ ), совпадает с направлением вектора  $\vec{\rho}_{\text{воз}}$ .

Пусть  $n_B(t, \rho)$  – ППЭ излучения ЭГ<sub>B</sub> на расстоянии  $\rho$  по оси  $\vec{x}$ . ППЭ излучения ЭГ<sub>B</sub> в точке  $T$  равна

$$\vec{n}_T(t, \rho, \gamma) = \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho} \right) n_B(t, \rho) \left( \frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^2, \quad (1)$$

а в направлении вектора  $\vec{R}$  –

$$n_{TR} = \left( \vec{n}_T(t, \rho, \gamma) \cdot \frac{\vec{R}}{R} \right) = n_B(t, \rho) \left( \frac{1 + \cos \gamma}{2} \right)^2 \cos \theta. \quad (2)$$

В соответствии с принятым направлением поляризации первичной ЭМ-волны вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}_{TR}$ , соответствующий ППЭ  $n_{TR}$  в дальней зоне излучения, ортогонален поверхности  $y = 0$ . Поле излучения от двух ЭГ, расположенных на апертуре зеркально по отношению к плоскости  $y = 0$ , удваивается, поэтому напряженность этого поля равна

$$E_{TR}(t, \rho) = \sqrt{n_{TR} Z_0} = (1 + \cos \gamma) E_B(t, \rho) \sqrt{\cos \theta}. \quad (3)$$

Здесь  $Z_0 = 120\pi$ , Ом – волновой импеданс свободного пространства,  $E_B(t, \rho)$  – напряженность поля излучения ЭГ<sub>B</sub> на расстоянии  $\rho$  по оси  $\vec{x}$ .

Пусть  $(\Delta\alpha\Delta\beta)_B$  – телесный угол, в пределах которого ЭГ<sub>B</sub> наблюдается из точки  $A$  вдоль вектора  $\vec{\rho}_{\text{воз}}$ ,  $S_B = \rho_{\text{воз}}^2 (\Delta\alpha\Delta\beta)_B$  – площадь поверхности ЭГ<sub>B</sub>, ортогональная вектору  $\vec{\rho}_{\text{воз}}$ ,  $I_B(t)$  – электрический ток возбуждения ЭГ<sub>B</sub>, протекающий вдоль его поверхности в плоскости поляризации,  $U_B = I_B Z_0$  – соответствующее напряжение возбуждения ЭГ<sub>B</sub>. Тогда

$$\begin{aligned} E_B(t - \rho / c, \rho) &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\sqrt{S_B}}{\rho} \frac{dI_B(t)}{dt} = \\ &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\rho_{\text{воз}}}{\rho} \sqrt{(\Delta\alpha\Delta\beta)_B} \frac{dU_B(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть  $P_\Gamma$  – мощность источника энергии возбуждения антенны, исходящей из точки  $A$ ,  $\Omega = \sum_i (\Delta\alpha\Delta\beta)_i$  – телесный угол, в границах которого апертура антенны видна из этой точки. Поскольку ППЭ ЭМ-волны, исходящей из точки  $A$ ,

не зависит от направления вектора  $\vec{\rho}_{\text{воз}}$ , то энергия с мощностью  $P_B = P_\Gamma (\Delta\alpha\Delta\beta)_B / \Omega$  направлена к ЭГ<sub>B</sub>.

Апертура антенны есть граница раздела двух волновых сред с импедансом  $Z_a$  и  $Z_0$ . Будем полагать, что коэффициент прохождения ЭМ-энергии через эту границу не зависит от положения точки  $B$  и в пределах рабочей полосы частот антенны равен  $4Z_0 Z_a / (Z_0 + Z_a)^2$ . Тогда мощность возбуждения ЭГ<sub>B</sub> в ограниченном частотном диапазоне, в котором антенна является частотно-независимой системой, равна

$$P_B = P_\Gamma \frac{(\Delta\alpha\Delta\beta)_B}{\Omega} \frac{4Z_a Z_0}{(Z_a + Z_0)^2}. \quad (5)$$

Мощность возбуждения антенны равна  $P_\Gamma = U_\Gamma^2 / Z_a$ , а  $\text{ЭГ}_B - P_B = U_B^2 / Z_0$ . Откуда следует, что в пределах частотной полосы пропускания антенны напряжение  $U_\Gamma$  связано с  $U_B$  зависимостью

$$U_B = U_\Gamma \frac{2Z_0}{Z_a + Z_0} \sqrt{\frac{(\Delta\alpha\Delta\beta)_B}{\Omega}}. \quad (6)$$

Если допустить, что  $U_\Gamma(t)$  имеет форму импульса включения, то поле излучения ЭГ<sub>B</sub>, вычисленное в соответствии с (4), будет иметь форму униполярного импульса, что противоречит фундаментальному условию  $E_B(\omega = 0) = 0$ . В [11] на примере регулярного *ТЕМ*-рупора показано, что напряжение возбуждения ИС есть результат высокочастотной (ВЧ) фильтрации первого порядка напряжения  $U_B$ . Обозначим это напряжение  $U_B^{\text{ВЧ}}(t)$ . Оно определяется из уравнения

$$\frac{dU_B^{\text{ВЧ}}}{dt} + \frac{U_B^{\text{ВЧ}}}{\tau_{\text{ВЧ}}} = \frac{dU_B}{dt}, \quad (7)$$

где  $\tau_{\text{ВЧ}}$  – электрическая длина рупора. Из формул (3), (4), (6), (7) следует, что напряженность поля излучения в плоскости  $y = 0$  от двух ЭГ<sub>B</sub>, симметричных по отношению к этой плоскости, равна

$$\begin{aligned} E_{TR}(t - \rho / c, \rho) &= \frac{(1 + \cos \gamma) \sqrt{\cos \theta}}{\pi c} \times \\ &\times \frac{\rho_{\text{воз}}}{\rho} \frac{(\Delta\alpha\Delta\beta)_B}{\sqrt{\Omega}} \frac{Z_0}{(Z_a + Z_0)} \frac{dU_B^{\text{ВЧ}}(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вектор  $\vec{E}_{TR}$  ортогонален плоскости  $y = 0$ . ВЧ-фильтр исключает постоянную составляющую сигнала  $E_{TR}(t)$ , поэтому  $E_{TR}(\omega = 0) = 0$ .

Определим параметры, входящие в (8). Разместим плоскую апертуру равномерной прямоугольной сеткой с ячейкой  $(\Delta A_y, \Delta A_z)$ . Центр ЭГ<sub>B</sub> наблюдается из точки  $A$  под углами

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctg \left( z / \sqrt{R_{\text{воз}}^2 + y^2} \right) \text{ и} \\ \beta &= \arctg \left( y / \sqrt{R_{\text{воз}}^2 + z^2} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Угол  $\alpha$  расположен в плоскости, ортогональной плоскости  $z = 0$ ,  $\beta$  – в плоскости, ортогональной



плоскости  $y = 0$ ,  $R_{\text{вoз}}$  – расстояние от точки возбуждения до центра апертуры (см. рис. 2). При перемещении конца вектора  $\vec{\rho}_{\text{вoз}}$  к соседнему ЭГ изменение углов  $\alpha$  и  $\beta$  выражается значениями

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \frac{\Delta A_z}{\rho_{\text{вoз}}} \sqrt{1 - (z / \rho_{\text{вoз}})^2}, \\ \Delta\beta &= \frac{\Delta A_y}{\rho_{\text{вoз}}} \sqrt{1 - (y / \rho_{\text{вoз}})^2}.\end{aligned}\quad (10)$$

Значения  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\beta$  инвариантны при замене  $y$  на  $-y$  и  $z$  на  $-z$ , что является следствием симметрии поверхности апертуры относительно ортогональных плоскостей  $z = 0$  и  $y = 0$ .

Возбуждение плоской апертуры не является однородным (равноамплитудным), поскольку мощность возбуждения ЭГ уменьшается от центра апертуры к ее границам вследствие уменьшения как ППЭ ( $\sim \rho_{\text{вoз}}^{-2}$ ), так и телесного угла обзора ЭГ ( $\Delta\alpha\Delta\beta \sim \rho_{\text{вoз}}^{-2}$ ).

Максимальная разница времени от начала возбуждения центра апертуры до возбуждения ее границы равна

$$\Delta\tau = R_{\text{вoз}} \left( \sqrt{1 + (A_y / 2R_{\text{вoз}})^2 + (A_z / 2R_{\text{вoз}})^2} - 1 \right) / c,$$

а характерное время изменения напряжения возбуждения равно

$$\tau_x = (\Delta U_r)_{\text{max}} / (\dot{U}_r)_{\text{max}}$$

( $\dot{U}_r$  вычисляется на интервале  $\Delta U_r$ ). Значение  $\Delta\tau / \tau_x$  характеризует относительную погрешность синхронизации возбуждения поверхности апертуры. Исходя из допустимого значения  $\Delta\tau / \tau_x$  выбирается

соотношение размеров антенны ( $R_{\text{вoз}}$ ,  $A_y$ ,  $A_z$ ) с учетом того, что отношение  $A_z / A_y$  определяет значение волнового импеданса  $Z_a$ .

Из прямоугольных треугольников  $A0B$  и  $zBT$  определим

$$\rho_{\text{вoз}} = \sqrt{R_{\text{вoз}}^2 + y^2 + z^2} \text{ и}$$

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2 + R^2 - 2Rz \sin \varphi}.$$

При любом  $\varphi \in [0, \pi]$  из треугольников  $B0T$  и  $ABT$  по теореме косинусов находим

$$\cos \theta = \frac{\rho^2 + R^2 - (y^2 + z^2)}{2\rho R} = \frac{R - z \sin \varphi}{\rho} \quad (11)$$

и

$$\cos \gamma = \frac{R_{\text{вoз}}}{\rho_{\text{вoз}}} \frac{R}{\rho} \left[ \cos \varphi - \frac{1}{R_{\text{вoз}}} \left( \frac{y^2 + z^2}{R} - z \sin \varphi \right) \right]. \quad (12)$$

Таким образом, задача определения параметров, входящих в (8), решена полностью.

Важнейшей частью решения задачи является суммирование импульсов излучения ЭГ с учетом времени прихода этих импульсов к точке наблюдения  $T$ . В качестве начала отсчета времени прием точку  $A$ . По траектории  $ABT$  сигнал проходит за время  $(\rho_{\text{вoз}} + \rho)/c$ . Первым в точке  $T$  будет сигнал, путь которого от  $A$  до  $T$  самый короткий (обозначим его  $\rho_{\text{min}}$ ). Поэтому отсчет времени процесса формирования излучения в точке  $T$  будем вести от момента времени  $\rho_{\text{min}}/c$ .

Минимальная длина пути  $ABT$  равна

$$\rho_{\text{min}} = \begin{cases} \sqrt{R^2 + R_{\text{вoз}}^2 + 2RR_{\text{вoз}} |\cos \varphi|}, & \text{если } R \sin \varphi \leq \frac{A_z}{2} \left( 1 + \frac{R}{R_{\text{вoз}}} |\cos \varphi| \right) \\ \sqrt{R_{\text{вoз}}^2 + A_z^2 / 4 +} \\ + \sqrt{R^2 + A_z^2 / 4 - RA_z \sin \varphi}, & \text{если } R \sin \varphi > \frac{A_z}{2} \left( 1 + \frac{R}{R_{\text{вoз}}} |\cos \varphi| \right) \end{cases} \quad (13)$$

(в первом случае от  $A$  до  $T$  по прямой линии, а во втором, по ломаной – от точки  $A$  до точки  $(0, A_z/2, 0)$  и от нее до  $T$ ). Выражение для  $\rho_{\text{min}}$  справедливо как для прямоугольной, так и для круглой апертуры.

Если  $\rho_{\text{max}}$  – максимальная длина пути  $ABT$ , то длительность импульса излучения будет больше длительности импульса возбуждения на время  $(\rho_{\text{max}} - \rho_{\text{min}})/c$ . Для прямоугольной апертуры

$$\begin{aligned}\rho_{\text{max}} &= \sqrt{R_{\text{вoз}}^2 + (A_y^2 + A_z^2) / 4 +} \\ &+ \sqrt{R^2 + (A_y^2 + A_z^2) / 4 + RA_z \sin \varphi},\end{aligned}\quad (14)$$

а для круглой –

$$\rho_{\text{max}} = \sqrt{R_{\text{вoз}}^2 + A_z^2 / 4 + \sqrt{R^2 + A_z^2 / 4 + RA_z \sin \varphi}}. \quad (15)$$

Время  $(\rho_{\text{max}} - \rho_{\text{min}})/c$  минимально при  $\varphi = 0$  и  $\pi$ , а максимально при  $\varphi = \pi/2$ .

Представленные соотношения позволяют вычислить напряженность поля излучения плоской апертуры в дальней зоне излучения при углах отклонения от оси  $X$  в интервале  $[0, \pi]$ . Вклад эффектов дифракции на краях апертуры антенны в модели не учитывался.

Входными параметрами расчета являются: форма и размер апертуры, телесный угол обзора апертуры из точки ее возбуждения  $A$ , длительность фронта переходной характеристики антенны и ее электрическая длина, координата точки наблюдения  $T(R, \varphi)$ , импульс возбуждения антенны  $U_r(t)$  произвольной амплитудно-временной формы.

Алгоритм вычисления  $E(t, \varphi, R)$  следующий. В цикле расчета по поверхности апертуры определяется длительность распространения сигнала между точками  $(A, B(y, z), T)$ , напряженность поля излучения соответствующего ЭГ<sub>В</sub> во временной области и суммарное поле всех ЭГ в точке наблюдения.

Выходными данными расчета являются:

- мощность электрического импульса возбуждения антенны (пиковая  $P_r$ , импульсная) и энергия этого импульса  $Q_r$ ;
- энергия импульса возбуждения ИС  $Q_{ИС}$ ;
- напряженность поля импульса излучения  $E(t, R, \varphi)$  в дальней зоне;
- распределение плотности частотного спектра импульса  $E(t, R, \varphi)$  и его энергетический спектр;
- изотропно-излучаемая (эффективная) мощность импульса и его энергия соответственно

$$P_{эф}(t, \varphi) = (ER)^2/30 \text{ (Вт)}; Q_{эф}(\varphi) = \int P_{эф}(t, \varphi) dt;$$

- коэффициенты усиления антенны по пиковой мощности излучения и по энергии

$$G_m = [P_{эф}(\varphi=0)]_{\max}/P_r; G_{\varphi} = Q_{эф}(\varphi=0)/Q_r;$$

- нормированные ДН антенны по мощности и по энергии

$$\text{МДН}(\varphi) = [P_{эф}(\varphi)]_{\max}/[P_{эф}(0)]_{\max};$$

$$\text{ЭДН}(\varphi) = Q_{эф}(\varphi)/Q_{эф}(0);$$

- угловые параметры направленности излучения  $(\Delta\varphi_m, \Delta\varphi_{\varphi})$ , определяемые из условия

$$\text{МДН}(\pm\Delta\varphi_m) = \text{ЭДН}(\pm\Delta\varphi_{\varphi}) = 0.5.$$

В случае игольчатой ДН антенны вычисляются:

- полная энергия излучения  $Q_{изл}$ ;
- эффективность антенно-фидерной системы  $\eta_{АФС} = Q_{изл}/Q_r$ ;
- энергетический коэффициент направленного действия (ЭКНД) антенны  $D_{\varphi} = Q_{эф}(\varphi=0)/Q_{изл}$ ;
- доля энергии излучения  $\eta(\varphi) = Q_{изл}(\varphi)/Q_{изл}$  внутри конического телесного угла с раскрытием  $\pm\varphi$  и осью, совпадающей с осью ДН антенны;
- энергетическая эффективность главных лепестков МДН ( $\eta(\pm\Delta\varphi_m)$ ) и ЭДН ( $\eta(\pm\Delta\varphi_{\varphi})$ ), а также угол раскрытия телесного угла  $\pm\Delta\varphi_{\eta}$  внутри

которого локализована половина энергии излучения,  $\eta(\pm\Delta\varphi_{\eta}) = 0.5$ .

## 2. ВЕРИФИКАЦИЯ МОДЕЛИ РАСЧЕТА

Верификация достоверности расчетной модели и ее вычислительного алгоритма проведена по следующим критериям.

### А. Фундаментальные:

– результат расчета  $E(t, R, \varphi)$  инвариантен по отношению к перестановке  $R_{\text{воз}} \Leftrightarrow R$  при любом импульсе возбуждения  $U_r(t)$  и значении угла  $\varphi \in [0, \pi]$ , т.е. выполняется теорема взаимности;

– при однородном и синхронном возбуждении апертуры четность функции  $E(t, \varphi)$  противоположна четности функции  $U_r(t)$  при любом значении  $\varphi$ ;

– амплитуда поля  $E(t)$  по оси ДН антенны не зависит от формы апертуры (прямоугольник, квадрат, круг), если ее площадь фиксирована, а возбуждение синхронно и однородно;

– в любых режимах расчета  $Q_r \geq Q_a > Q_{ИС} > Q_{изл}$ .

### Б. На качественном уровне:

– при отклонении от оси ДН антенны и при синхронном возбуждении апертуры длительность импульса  $E(t, \varphi)$  больше, чем импульса  $U_r(t)$ , на интервал времени между приходом импульса излучения к точке наблюдения от самой близкой и от самой удаленной точки на апертуре;

– при уменьшении длины антенны  $R_{\text{воз}}$  и фиксированном размере апертуры форма импульса  $E(t)$  изменяется, а его длительность увеличивается вследствие возрастающей несинхронности возбуждения апертуры;

– при не синхронном и неоднородном возбуждении апертуры, квадратной и круглой той же площади, угловая расходимость излучения круглой апертуры меньше;

– вычисляемое значение ЭКНД антенны всегда меньше, чем предельное значение  $D_0 = (8R_{\text{воз}}/d)^2$  для круглой апертуры с диаметром  $d$  [12];

– нет обратного излучения в дальней зоне по оси ДН антенны.

### В. На количественном уровне:

– при синхронном и однородном возбуждении апертуры импульсом любой формы результат вычисления  $E(t)$  по оси ДН антенны в дальней зоне соответствует аналитическому расчету;

– вычисляемые коэффициенты направленности излучения антенны находятся в согласии с каноническим соотношением  $G_{\varphi} = \eta_{АФС} D_{\varphi}$ ;

– при синхронном и однородном возбуждении круглой апертуры сигналом вида  $\sin(2\pi ct/\lambda)$  вычисляемое значение КНД в точности равно  $4\pi S/\lambda^2$ , где  $S$  – площадь апертуры;

– при возбуждении апертуры синусоидальным сигналом диаграммы МДН( $\varphi$ ) и ЭДН( $\varphi$ ) совпадают, а энергетическая направленность излучения антенны соответствует условию

$$\eta(\pm\Delta\varphi_m) = \eta(\pm\Delta\varphi_\varphi) = \eta(\pm\Delta\varphi_\eta) = 0.5;$$

– значение полного коэффициента использования поверхности оптимальной апертуры не зависит от длины антенны  $R_{\text{воз}}$  [1] (апертура оптимальна, если при фиксированной  $R_{\text{воз}}$  длине антенны достигнут максимум  $Q_{\text{эф}}$ );

– при синхронном и однородном возбуждении апертуры, квадратной ( $A_y = A_z$ ) или круглой, вписанной в квадрат ( $d = A_y$ ), расчетные значения ширины луча излучения, определенные по уровню  $-3$  дБм, соотносятся как 51/59, причем для импульса возбуждения любой формы. В соответствии с [1] угловая ширина луча при квадратной апертуре равна  $51^\circ\lambda/A$ , а при круглой  $59^\circ\lambda/d$ .

В дополнение представим сравнение результатов расчета по представленной модели и эксперимента, проведенного с использованием макета излучателя сверхширокополосных (СШП) импульсов.

Антенна макета излучателя создана на основе пассивной синхронной антенной решетки из четырех экранированных регулярных ТЕМ-рупоров [13]. Волновой импеданс каждого рупора  $\approx 200$  Ом, угол раскрытия электродов  $28^\circ$  (рис. 3). Рупоры присоединены к генератору электрических импульсов возбуждения гибкими отрезками волновых линий равной длины с импедансом  $\approx 200$  Ом, поэтому входной импеданс антенны равен 50 Ом. Все элементы антенны, приведенные на рис. 3, электропроводны. Форма импульса возбуждения на электрической нагрузке 50 Ом приведена на рис. 4.

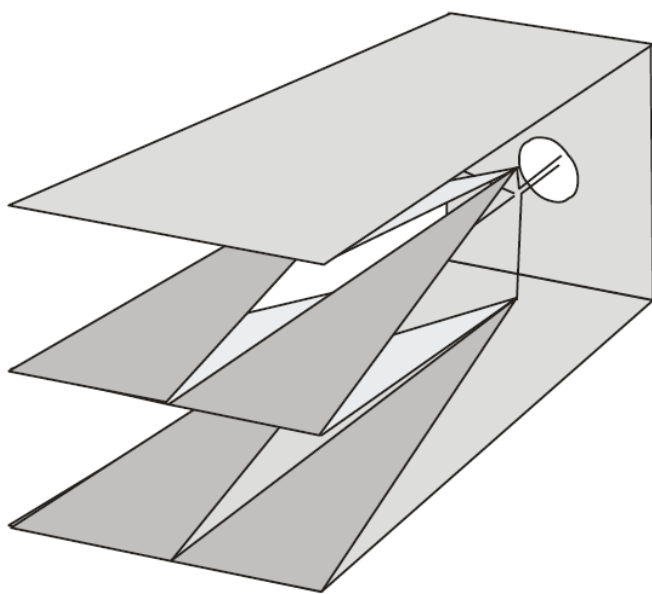


Рис. 3. Схема макета апертурной антенны.

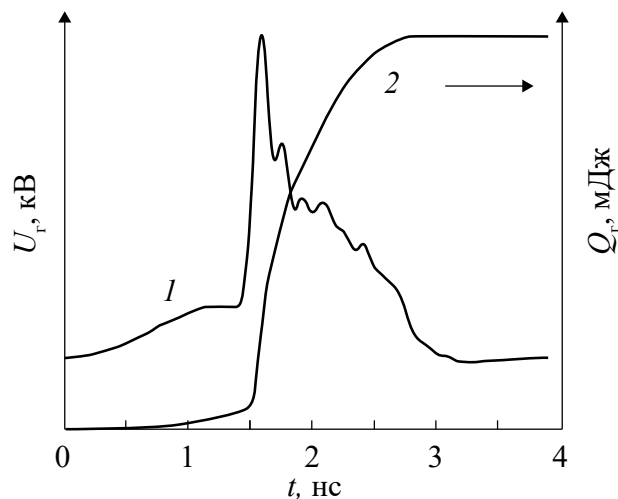


Рис. 4. Импульс возбуждения антенны (1) и энергия импульса (2).

На рис. 5 представлены расчетные и экспериментальные зависимости  $E(t, \varphi)$  в  $H$ -плоскости антенны. Измерения проведены при условии  $R = \text{const}$  в дальней зоне излучения, где произведение  $E(R)R = \text{const}$ . Расчетные ДН( $\varphi$ ) макета антенны в  $H$ -плоскости также находятся в удовлетворительном согласии с результатом обработки данных прямых измерений  $E(t, \varphi)$  (рис. 6).

Представленные данные по верификации расчетной модели излучения антенны с плоской апертурой показывают, что результаты расчетов не противоречат базовым физическим принципам и вполне достоверны при моделировании излучения при углах отклонения от оси ДН до  $30...40^\circ$ .

### 3. СВОЙСТВА МОДЕЛИ РАСЧЕТА

Рассмотрим некоторые свойства модели расчета при возбуждении плоской апертуры как синусоидальным, так и СШП-сигналами. Сравним полученные результаты с известными данными.

А. В общем случае критерием дальней зоны излучения в свободном пространстве является условие  $E(R)R = \text{const}$ . Для плоской круглой синхронной апертуры, возбуждаемой радиоимпульсом, граница дальней зоны излучения находится на расстоянии  $R^* = 2d^2/\lambda$  от излучателя [2]. Например, при  $\lambda = 0.1$  м,  $d = 0.5$  м ( $2\pi d/\lambda \approx 30$ ) расстояние  $R^* = 5$  м.

Пусть апертура антенны наблюдается из точки ее возбуждения в пределах угла раскрытия  $\beta$ . Вычислим значения зависимости  $\xi(\beta) = E(R^*)R^*/(E(R)R)$ , где  $R \gg R^*$ . Результат расчета показывает, что правило  $R^* = 2d^2/\lambda$  не является универсальным (табл. 1).

Б. При синхронном возбуждении круглой апертуры радиоимпульсом (несущая частота  $F_\lambda = 3$  ГГц) расчет показывает (рис. 7), что диаграммы МДН( $\varphi$ )



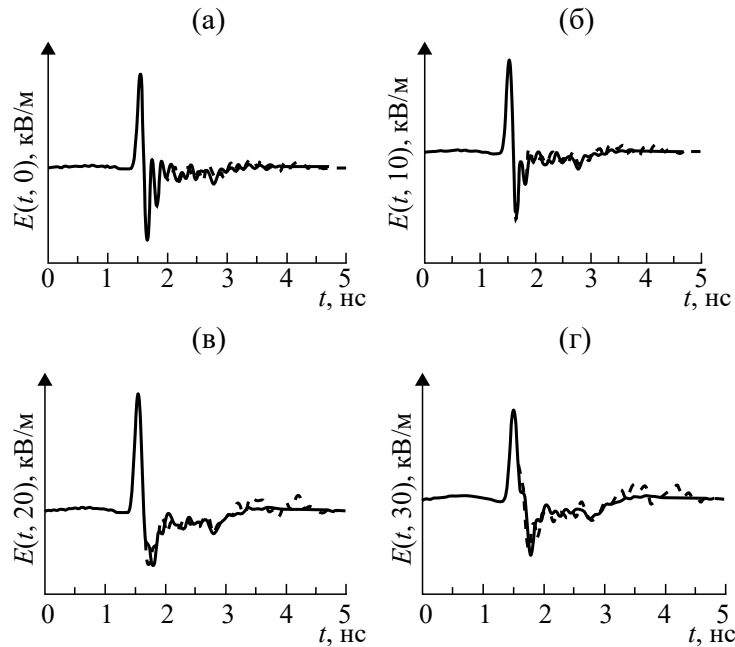


Рис. 5. Напряженность электрического поля импульса излучения в  $H$ -плоскости раскрыва при углах отклонения от оси ДН антенны 0 (а), 10 (б), 20 (в) и 30 град (г): сплошная линия – расчет, штриховая – эксперимент.

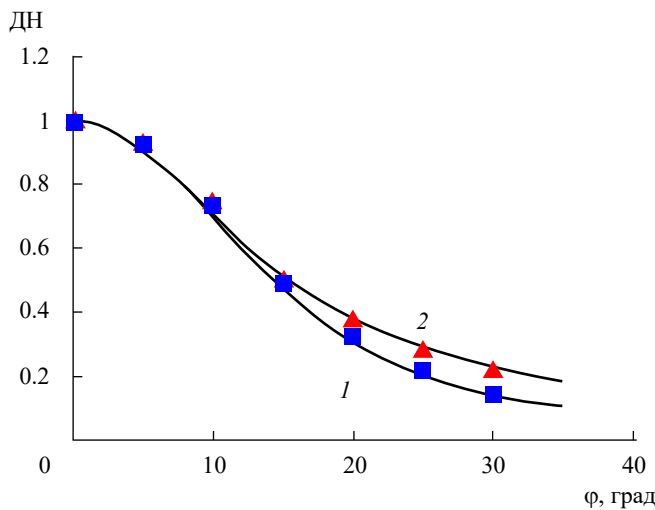


Рис. 6. Нормированные ДН макета антенны: 1 – МДН; 2 – ЭДН (сплошная линия – расчет, маркеры – эксперимент).

Таблица 1. К определению границы дальней зоны излучения апертурной антенны

| $\beta$ , град | $E(R)R$ ,<br>отн. ед. | $E(R^*)R^*$ ,<br>отн. ед. | $\xi$          |
|----------------|-----------------------|---------------------------|----------------|
| 0 (синхронная) | 573                   | 568                       | $\approx 0.99$ |
| 20             | 523                   | 493                       | $\approx 0.94$ |
| 40             | 386                   | 341                       | $\approx 0.88$ |

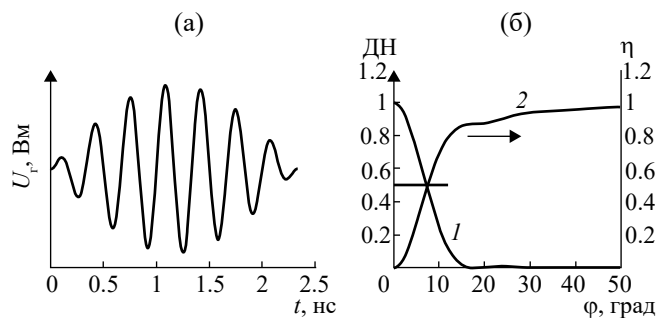


Рис. 7. Импульс возбуждения (а), ДН круглой синхронной апертуры (б, кривая 1), доля энергии излучения  $\eta(\varphi)$  внутри конуса с углом раскрыва  $\pm\varphi$  (б, кривая 2).

и ЭДН( $\varphi$ ) совпадают, а угловая и энергетическая направленности плоской апертуры соответствуют условиям

$$\text{МДН}(\pm\Delta\varphi_m) = \text{ЭДН}(\pm\Delta\varphi_s) = \eta(\pm\Delta\varphi_h) = 0.5$$

и

$$\eta(\pm\Delta\varphi_m) = \eta(\pm\Delta\varphi_s) = 0.5.$$

Полученный результат находится в согласии с каноническим представлением о направленности излучения плоской апертуры, возбуждаемой синусоидальным сигналом синхронно и однородно.

В. Пусть та же апертура наблюдается из точки возбуждения  $A$  в пределах угла  $\beta = 30^\circ$ , т.е. ее возбуждение радиоимпульсом не синхронно и неоднородно. Результат вычисления параметров направленности антенны представлен на рис. 8.

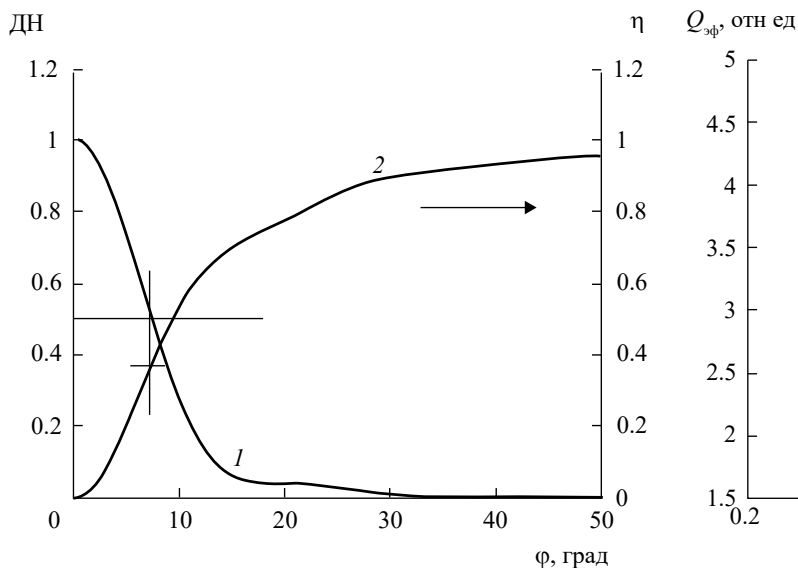


Рис. 8. Диаграмма направленности антенны (1) и доля энергии излучения  $\eta(\varphi)$  внутри конуса с углом раскрытия  $\pm\varphi$  (2).

Расчет показывает, что в этом случае угловые параметры направленности излучения изменяются следующим образом: диаграммы МДН и ЭДН по-прежнему совпадают, но теперь энергетическая эффективность главного лепестка ДН  $\eta(\pm\Delta\varphi_3)$  составляет  $\approx 37\%$ , а половина энергии излучения находится внутри телесного угла  $\pm\Delta\varphi_\eta$ , который шире, чем главный лепесток ДН ( $\Delta\varphi_\eta > \Delta\varphi_3$ ). Таким образом, при несинхронном возбуждении плоской апертуры синусоидальным сигналом нарушается согласование угловых и энергетических параметров направленности, увеличивается уровень бокового излучения.

Г. Фиксируем длину  $R_{\text{воз}}$  базы возбуждения апертуры. Вычислим зависимость эффективной энергии излучения  $Q_{\text{эф}}$  от размера апертуры при ее возбуждении радиоимпульсом ( $F_\lambda = 3$  ГГц) (рис. 9).

Апертура, при которой достигается максимум  $Q_{\text{эф}}$  при условии, что  $R_{\text{воз}} = \text{const}$ , называется оптимальной. Увеличение  $Q_{\text{эф}}$  обусловлено возрастанием площади апертуры, а спад — возрастающей несинхронностью возбуждения ее поверхности. Результат расчета находится в согласии с тем, что коэффициент использования поверхности (КИП) оптимальной апертуры не зависит от  $R_{\text{воз}}$ , а площадь ее поверхности пропорциональна  $R_{\text{воз}}$  [2].

Отметим, что вычисленное по обсуждаемой модели значение КИП оптимальной квадратной апертуры при ее возбуждении радиоимпульсом равно  $\approx 0.58$ , а КИП оптимального квадратного пирамидального СВЧ-рупора в [2, с. 422] «...грубо оценивается значением 0.52». Различие этих значений связано с тем, что ТЕМ- и СВЧ-рупоры по-разному формируют параметры возбуждения

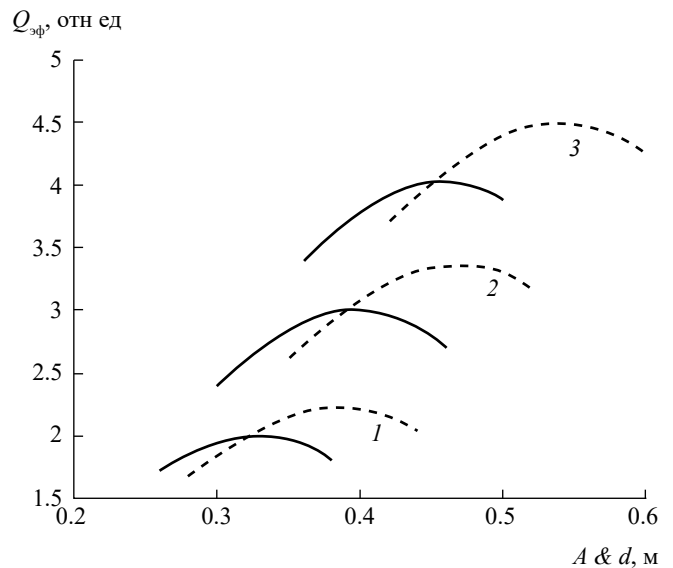


Рис. 9. Нормированная зависимость энергии  $Q_{\text{эф}}$  от размера апертуры при  $R_{\text{воз}} = 0.5$  (1), 0.75 (2) и 1 м (3): сплошная линия — апертура квадратная, пунктир — круглая.

апертуры, а также с тем, что модель расчета не учитывает затекание токов на внешнюю поверхность реальных электродов.

При  $R_{\text{воз}} = 0.75$  м и заданном импульсе возбуждения вычисленный диаметр оптимальной круглой апертуры равен  $d_{\text{опт}} \approx 0.47$  м. Запоздывание времени начала возбуждения между центром апертуры и ее границей составляет  $\approx d_{\text{опт}}^2 / (8cR_{\text{воз}}) \approx 122$  пс, тогда как половина периода колебания импульса  $U_r(t)$  равна 166 пс. Отношение этих времен равно  $\approx 0.74$ , что соответствует значению отношения фазовой ошибки на краю оптимальной апертуры ( $135^\circ$ ) к половине ширины синусоидального импульса возбуждения ( $135^\circ/180^\circ = 0.75$ ) [2].

Д. Сравним излучение плоской апертуры при возбуждении антенны радиоимпульсом ( $F_\lambda = 3$  ГГц) и СШП-импульсами моноцикла и Гаусса (рис. 10). Параметры импульсов  $U_r(t)$  нормированы так, что равны максимальные скорости изменения напряжения и длительности полного перепада напряжения.

Результат расчета эффективной энергии излучения  $Q_{\text{эф}}(d)$  круглой апертуры, возбуждаемой с расстояния  $R_{\text{воз}} = 0.75$  м, представлен на рис. 11. Нормированные зависимости  $Q_{\text{эф}}(d)$  качественно подобны. При биполярном возбуждении максимум  $Q_{\text{эф}}(d)$  достигается при меньшем значении  $d$ , чем при униполярном. Слабое отличие зависимостей, представленных кривыми 1 и 2, объясняется тем, что радиоимпульс является последовательностью импульсов моноцикла, следующих непосредственно друг за другом.

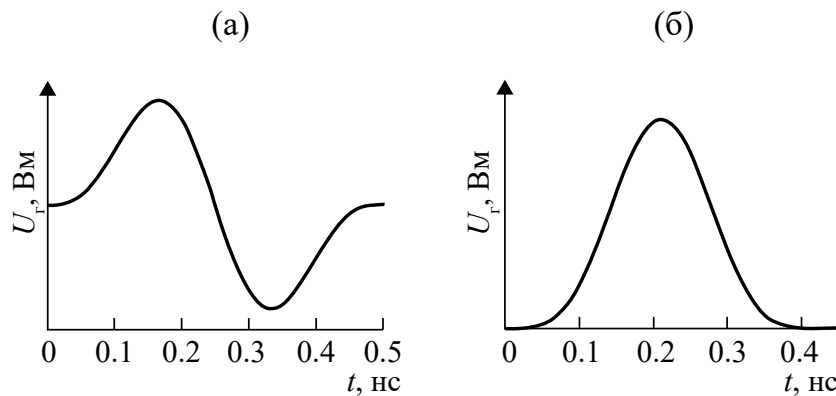


Рис. 10. Импульс возбуждения антенны в форме моноцикла (а) и Гаусса (б).

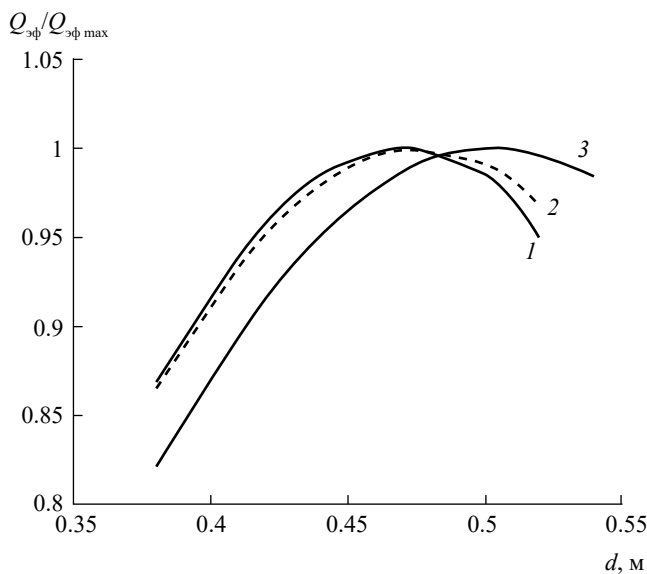


Рис. 11. Нормированная зависимость энергии  $Q_{эф}$  для круглой апертуры, возбуждаемой с расстояния  $R_{ex} = 0.75$  м радиоимпульсом (1), импульсом моноцикла (2) и Гаусса (3).

**Е.** Рассмотрим особенность направленного излучения плоской апертуры при ее возбуждении СШП-импульсом. На рис. 12 и в табл. 2 представлены расчетные параметры направленности излучения круглой апертуры ( $d = 0.5$  м), возбуждаемой синхронно и однородно импульсом Гаусса, и оптимальной апертуры того же диаметра. В обоих примерах диаграммы МДН и ЭДН не совпадают, в первом – ЭДН шире, чем МДН, во втором – наоборот. Угловая ширина лепестков МДН(ф) и ЭДН(ф),  $\pm\Delta\varphi_m$  и  $\pm\Delta\varphi_3$ , значительно меньше, чем угол  $\pm\Delta\varphi_n$ , внутри которого сосредоточено 50% энергии излучения. Как результат, энергетическая эффективность главных лепестков МДН и ЭДН примерно в 1.7 и 2.5 раза меньше их предельного значения (50%).

Таблица 2. Параметры направленности излучения плоской апертуры

| Параметры                      | Раскрыв |       |
|--------------------------------|---------|-------|
|                                | (а)     | (б)   |
| $D_3$                          | 107     | 61    |
| $\pm\Delta\varphi_m$ , град    | 5.51    | 9.82  |
| $\pm\Delta\varphi_3$ , град    | 6.44    | 8.22  |
| $\pm\Delta\varphi_n$ , град    | 12.63   | 16.76 |
| $\eta(\pm\Delta\varphi_m)$ , % | 19      | 27.8  |
| $\eta(\pm\Delta\varphi_3)$ , % | 23.9    | 21.8  |

Примечание:  $D_3$  – энергетический коэффициент направленного действия.

**Ж.** Рассмотрим, какая часть энергии возбуждения ИС излучается. Эта часть зависит от того, в каком соотношении находятся размер апертуры и длина моноцикла импульса ее возбуждения  $L_{имп}$ . На рис. 13 представлен результат расчета зависимости  $Q_{изл}/Q_{ИС}$  от  $d/L_{имп}$ , полученный для круглой апертуры, которая возбуждалась радиоимпульсом ( $L_{имп} = \lambda = 0.1$  м), импульсом моноцикла ( $L_{имп} = 0.15$  м) и Гаусса ( $L_{имп} = 0.126$  м). Импульсы были нормированы по критерию  $(dU_{ИС}/dt)_{max} = const$ , при этом длительность полного перепада напряжения для всех импульсов была одинакова ( $\approx 100$  пс).

Из расчета следует, что для биполярных импульсов зависимости  $Q_{изл}/Q_{ИС}$  различаются слабо. Более 92% энергии синхронного возбуждения апертуры излучается уже при  $d/L_{имп} > 2$ , более 97% – при  $d/L_{имп} > 4$ . Энергия унipoлярного импульса возбуждения не может быть излучена полностью при любом  $d$ . При возбуждении той же апертуры, но в пределах угла ее наблюдения из точки  $A$ , равного  $30^\circ$ , доля излучаемой энергии уменьшается во всех случаях (маркеры на рис. 13).

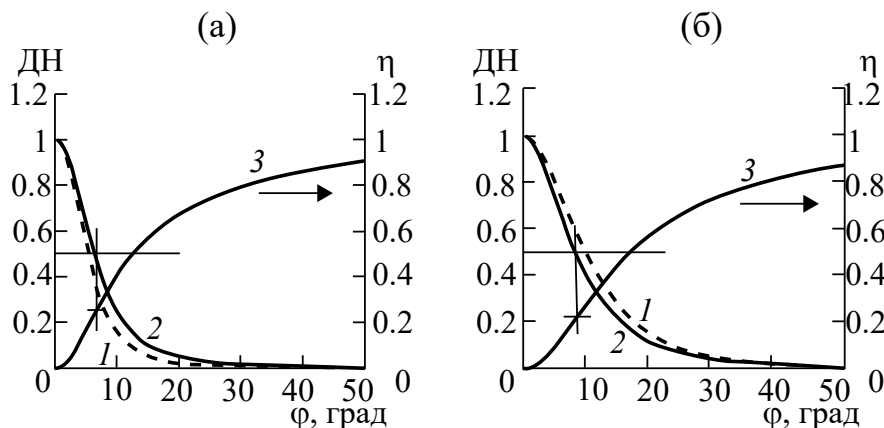


Рис. 12. Параметры направленности излучения синхронной (а) и оптимальной апертуры (б) одного диаметра: 1 и 2 – нормированные диаграммы МДН и ЭДН; 3 – доля энергии излучения внутри телесного угла с раскрытием  $\pm\varphi$ .

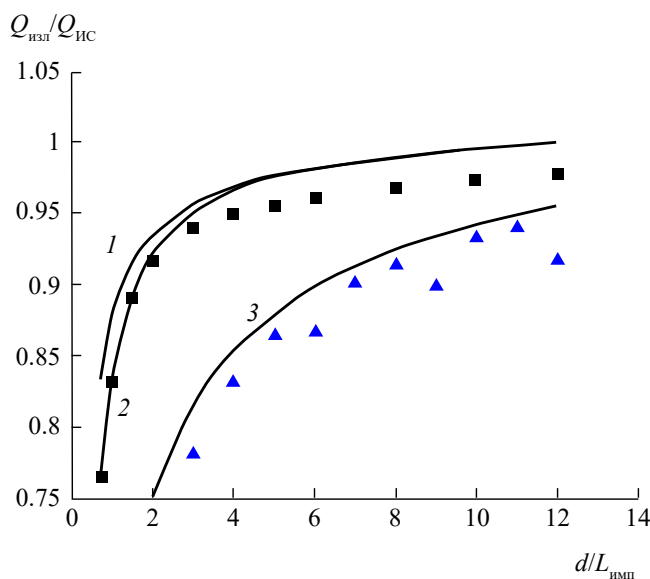


Рис. 13. Доля энергии возбуждения ИС, излучаемая в пространство: 1 – возбуждение апертуры радиоимпульсом, 2 – импульсом моноцикла, 3 – импульсом Гаусса; сплошные линии – возбуждение синхронное; маркеры – возбуждение апертуры импульсами вида 2 и 3 несинхронное и неоднородное (из точки А в пределах угла наблюдения апертуры  $30^\circ$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлена простая модель расчета параметров излучения плоской апертуры, возбуждаемой сигналом произвольной формы не синхронно и неоднородно. Расчет параметров излучения проводится во временной, частотной и в пространственной области.

Результаты расчетов находятся в согласии с базовыми законами сохранения, с аналитическими расчетами при синусоидальном возбуждении, с основными свойствами излучения плоской апертуры,

а также с результатами эксперимента на макете апертурной антенны.

С использованием модели расчета проведено сравнение параметров угловой  $\Delta\varphi$  и энергетической направленности излучения антенны  $\eta(\Delta\varphi)$  при ее возбуждении синусоидальным и сверхширокополосным сигналами. Показано, что излучение, инициированное широкополосным импульсом возбуждения, не может быть эффективно локализовано в физическом пространстве: угловая ширина главных лепестков диаграмм МДН( $\varphi$ ) и ЭДН( $\varphi$ ) меньше раскрытия телесного угла  $\pm\varphi_\eta$ , внутри которого сосредоточено 50% энергии излучения.

В программу вычисления параметров излучения встроен блок учета сигнала отражения от плоской «зеркальной» поверхности диэлектрического полупространства [14], а также блок оценки дальности функционального поражения электронных устройств, стойкость которых к широкополосному излучению приведена в стандарте [15].

Расчетная модель снабжена интерфейсом в стиле MS Windows. Время одного варианта расчета на персональном компьютере составляет единицы минут.

## БЛАГОДАРНОСТИ

Автор благодарит коллегу В. М. Федорова за полезные советы в процессе подготовки статьи.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 075-15-2020-790).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марков Г. Т., Сазонов Д. М. Антенны. М.: Энергия, 1975.
2. Skulkin S. P., Turchin V. I. // IEEE Trans. 1999. V. AP-47. № 5. P. 929.
3. Skulkin S. P., Lysenko N. A., Uskov G. K., Kascheev N. I. // IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett. 2019. V. 18. № 5. P. 1036.  
<http://doi.org/10.1109/LAWP.2019.2908455>
4. Skulkin S. P., Lysenko N. A., Uskov G. K., Bobreshov A. M. // IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett. 2020. V. 19. № 9. P. 1516.  
<http://doi.org/10.1109/LAWP.2020.3008116>
5. Курушин А. А., Пластиков А. Н. Проектирование СВЧ устройств в среде CST Microwave Studio. М.: МЭИ, 2011.
6. Банков С. Е., Курушин А. А. Расчет излучаемых структур с помощью FEKO. М.: НПП «Родник», 2008.
7. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. 2-е изд. М.: Радио и связь, 1988.
8. Остаев В. Е., Ульянов А. В., Федоров В. М. // РЭ. 2020. Т. 65. № 3. С. 234.
9. Остаев В. Е., Ульянов А. В. // РЭ. 2021. Т. 66. № 11. С. 1.
10. Lee R. T., Smith G. S. // IEEE Antennas and Propagation Magazin. 2004. V. 46. № 1. P. 86.
11. Остаев В. Е., Ульянов А. В. // РЭ. 2023. Т. 68. № 12. С. 1149.
12. Авдеев В. Б. // Радиотехника. 1999. № 6. С. 96.
13. Fedorov V. M., Efano M. V., Ostashev V. Ye. et al. // Electronics. 2021. V.10. № 9. Article No. 1009101. <https://doi.org/10.3390/electronics10091011>
14. Введенский Б. А., Аренберг А. Г. Распространение ультракоротких радиоволн. М.: Сов. радио, 1938.
15. MIL-STD-464C «Electromagnetic Environmental Effects Requirements for Systems». Wright-Patterson: AFB, 2010. 165 p. [http://everyspec.com/MIL-STD/MIL-STD-0300-0499/MIL-STD-464C\\_28312](http://everyspec.com/MIL-STD/MIL-STD-0300-0499/MIL-STD-464C_28312).

## SIMPLE MODEL FOR CALCULATION OF RADIATION PARAMETERS OF A UNIDIRECTIONAL FLAT OPENINGV

V. E. Ostashev

Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences,  
Izhorskaya str., 13, Bild. 2, Moscow, 125412 Russian Federation  
E-mail: [ostashev@ihed.ras.ru](mailto:ostashev@ihed.ras.ru)

Received August 07, 2023, revised February, 14, 2024, accepted April 20, 2024

A model for calculating the radiation parameters of a flat aperture in the far zone of free space is described. The electromagnetic field on the aperture is specified by the field of the primary polarized wave emanating from the excitation point. The radiating system is represented by Huygens elements. Verification of the reliability of the calculation result is carried out at the level of agreement with fundamental physical principles, with analytical calculations, and with the experimental results. When the antenna is excited by an arbitrary electric pulse, the calculation time of the radiation parameters in the time, space, and frequency domains is a few minutes. The calculation model is equipped with an interface in the style of MS Windows.

**Keywords:** calculation model, aperture antenna, unidirectional flat aperture, Huygens elements, ultrashort video pulses



## ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

УДК 535.92

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ОБОЛОЧЕЧНЫХ МОД БЕССЕРДЦЕВИННЫХ ВОЛОКОННЫХ СВЕТОВОДОВ

© 2024 г. М. А. Абельмас<sup>а, \*</sup>, О. В. Иванов<sup>б</sup>

<sup>а</sup>Ульяновский государственный технический университет,  
ул. Северный Венец, 32, Ульяновск, 432027 Российская Федерация

<sup>б</sup>Ульяновский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Гончарова, 48/2, Ульяновск, 432011 Российская Федерация

\*E-mail: abelmax1998@mail.ru

Поступила в редакцию 01.05.2024 г.

После доработки 06.09.2024 г.

Принята к публикации 25.09.2024 г.

Рассчитаны точные гибридные моды бессердцевинного оптического волокна. Получены пространственные распределения электромагнитных полей вблизи поверхности оболочки. Проведено сравнение радиальных, азимутальных и продольных компонент поля вблизи поверхности оболочки для гибридных точных мод и приближенных линейно-поляризованных (*LP*) мод. Исследованы поляризационные характеристики мод с учетом продольной компоненты поля в зависимости от типа гибридных мод и модовых чисел. Комбинация гибридных мод формирует моды, подобные *LP*-модам, имеющие почти однородную линейную поляризацию внутри волокна вдали от поверхности оболочки. Показано, что под поверхностью оболочки поляризация *LP*-подобных мод также линейна, однако существенно неоднородна по азимутальному углу с отклонением угла поляризации на величину до 21° от основного направления поляризации моды. Кроме того, значительно возрастает роль продольной компоненты поля вблизи поверхности оболочки, где ее величина может превышать величины поперечных компонент.

**Ключевые слова:** оптическое волокно, волоконная мода, оболочечная мода, поверхностное поле, гибридные моды

**DOI:** 10.31857/S0033849424120022, **EDN:** HNGGBK

#### ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия разработаны волоконно-оптические датчики, находящие применение для измерения деформаций, температуры, показателя преломления и других физических параметров [1–4]. Работа чувствительных элементов некоторых из этих датчиков основана на взаимодействии поверхностного электромагнитного поля оптических мод волокон с внешней средой [5–12]. Такое взаимодействие определяется величиной и характеристиками поверхностного поля, которое может проникать во внешнюю среду из сердцевинки волокна при удалении оболочки волокна [13, 14] или при использовании оболочечных мод [15–17], возбуждаемых, например, длиннопериодными волоконными решетками [18–26] или наклонными брэгговскими решетками [27–32].

Примером датчика, использующего взаимодействие поверхностных полей, является волоконно-оптический датчик на основе двух

длиннопериодных решеток в соприкасающихся волокнах и их связи через моды оболочки [2, 33]. Два волокна находятся в тесном контакте, и свет из сердцевинки первого волокна через длиннопериодную волоконную решетку в первом волокне проходит в решетку второго волокна и его сердцевину [34–39]. Поверхностное поле при этом распространяется через область физического контакта между двумя волокнами и возбуждает моду оболочки во втором волокне [17, 40, 41].

При анализе распространения оболочечных волоконных мод в оптических волокнах таких структур, как правило, используется приближение линейно-поляризованных мод (*LP*-приближение), в котором учитываются только поперечные составляющие полей и не учитываются продольные [11, 39, 42, 43]. Причем считается, что поперечное поле направлено одинаково в разных точках по сечению волокна, а задача сводится к нахождению распределения скалярной амплитуды поля. Возможность использования такого приближения для

мод сердцевины обусловлена тем, что разница показателей преломления сердцевины и оболочки невелика, сердцевина волокна является слабонаправляющим волноводом и продольная составляющая поля на два-три порядка меньше поперечных составляющих. При рассмотрении оболочечных мод вместо  $LP$ -приближения можно перейти к параксиальному приближению, заключающемуся в рассмотрении мод с малыми модовыми числами, распространяющимися вдоль волокна под малыми углами к оси волокна. В параксиальном приближении поле внутри оболочки так же, как и в  $LP$ -приближении, можно считать поперечным и линейно-поляризованным.

Однако при анализе работы чувствительных элементов волоконно-оптических датчиков возникает необходимость нахождения поверхностных полей на внешней границе оболочки волокна, где разница показателей преломления составляет около 0.44, и применение приближенных методов требует дополнительных обоснований, проверки сравнением с точным расчетом.

В данной работе сделан точный расчет гибридных  $HE$ ,  $EH$ ,  $TE$  и  $TM$  оболочечных мод бессердцевинного оптического волокна с учетом продольных составляющих электромагнитных полей и возможного различия между двумя поперечными компонентами, что может привести к эллиптичности поляризации и неоднонаправленному распределению эллипса поляризации по сечению волокна. Найдены постоянные распространения различных гибридных мод, профили распределения поперечных и продольных электрических полей внутри оболочки, под и над ее поверхностью. Исследовано распределение эллипса поляризации поля около поверхности оболочки волокна.

## 1. РАСЧЕТ МОД ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

Получим решения для мод бессердцевинного оптического волокна, представляющего собой цилиндр неограниченной длины и радиусом 62.5 мкм из плавленного кварца. Будем считать, что волокно расположено в воздухе и показатель преломления внешней среды равен 1. Для выявления общих отличий точного решения от приближенных ограничимся в данной работе рассмотрением оптического волокна без сердцевины. Отсутствие сердцевины существенно влияет на поведение полей в области, прилегающей к оси волокна, однако оказывает меньшее влияние на поля вблизи поверхности оболочки.

Для нахождения точного решения уравнений Максвелла для цилиндрического однослойного волновода со ступенчатым профилем показателя преломления представим электромагнитное поле волокна в виде разложения по базисному набору гибридных цилиндрических мод ( $HE$ - и  $EH$ -мод). Тогда решение сводится к задаче отыскания

собственных значений и собственных векторов матрицы, описывающей преобразование поля на границе оболочки и внешней среды с учетом граничных условий для поля на границах соседних областей [44]. Собственные значения дадут постоянные распространения мод, а собственные векторы — амплитуды электромагнитных полей: продольной, поперечной и азимутальной составляющих как внутри, так и за поверхностью оболочки волокна. Электрические и магнитные поля представляются в виде функций Бесселя первого и второго рода внутри волокна и модифицированных функций Бесселя снаружи волокна.

В качестве исходных данных примем следующие:

- радиус оболочки  $a = 62.5$  мкм
- показатель преломления волокна  $n_1 = 1.444$
- показатель преломления внешней среды  $n_2 = 1$
- длина волны излучения  $\lambda = 1.55$  мкм.

Характеристическое уравнение для гибридных волоконных мод может быть записано в следующем виде [45]:

$$\left( \frac{1}{u} \frac{J'_v(u)}{J_v(u)} + \frac{1}{w} \frac{K'_v(w)}{K_v(w)} \right) \left( \frac{J'_v(u)}{u J_v(u)} + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \frac{K'_v(w)}{w K_v(w)} \right) = \left[ \frac{\beta v}{n_1 k_0} \left( \frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \right]^2, \quad (1)$$

где  $J_v(u)$  и  $K_v(w)$  — функции Бесселя,  $J'_v(u)$  и  $K'_v(w)$  — их производные,  $u = a \sqrt{(n_1 k_0)^2 - \beta^2}$  — коэффициент для оболочки волокна,  $w = a \sqrt{\beta^2 - (n_2 k_0)^2}$  — коэффициент для внешней среды,  $\beta = k_0 n_{\text{эф}}$  — постоянная распространения,  $k_0 = 2\pi / \lambda$  — волновое число,  $n_{\text{эф}}$  — эффективный показатель преломления моды,  $v$  — азимутальное модовое число. Численно решая уравнение (1), можно найти постоянные распространения мод  $\beta$ . Будем рассматривать прежде всего моды с малыми азимутальными числами  $v = 0, \pm 1$ , и  $\pm 2$ . Знак перед азимутальным числом соответствует право- и левоциркулярно поляризованным модам. Постоянные распространения для право- и левоциркулярно поляризованных мод совпадают, что можно увидеть из независимости уравнения (1) от знака  $v$ .

Приведенное уравнение было решено численно в программной среде Matlab, что позволило получить зависимость  $n_{\text{эф}}$  от длины волны  $\lambda$  для различных мод волокна. Для заданного значения азимутального числа существует конечное число корней уравнения (1), нумерация которых задается индексом  $m$ . Значение этого индекса задает число экстремумов в распределении поля вдоль радиуса. Рассчитанные дисперсионные зависимости представлены на рис. 1.

Из представленных зависимостей видно, что эффективные показатели преломления

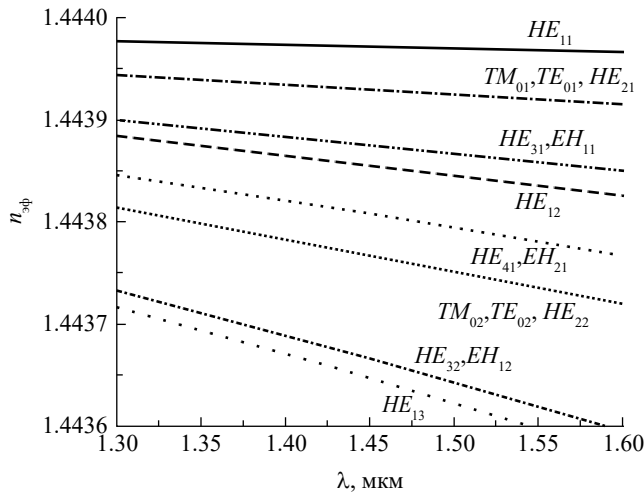


Рис. 1. Зависимости эффективных показателей преломления различных мод от длины волны.

оболочечных волоконных мод спадают почти линейно при увеличении длины волны в рассматриваемом диапазоне от 1.3 до 1.6 мкм. Эффективные показатели преломления для мод  $HE_{2m}$ ,  $TM_{0m}$  и  $TE_{0m}$  практически совпадают. То же самое наблюдается для групп мод  $HE_{vm}$  и  $EH_{v-2,m}$ , где  $v \geq 2$ . Для мод с большими радиальным модовым числом  $m$  и азимутальным модовым числом  $v$  эффективный показатель преломления уменьшается с увеличением длины волны быстрее.

## 2. ПРОФИЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МОД

Электрические и магнитные поля для рассматриваемой структуры в зависимости от координат  $z$ ,  $r$ ,  $\theta$ , и времени  $t$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta, z, t) &= \vec{E}(r) \exp[i(\beta z + v\theta - \omega t)], \\ \vec{H}(r, \theta, z, t) &= \vec{H}(r) \exp[i(\beta z + v\theta - \omega t)], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\omega$  — круговая частота электромагнитной волны.

Радиальные, азимутальные и продольные составляющие полей внутри и снаружи волокна можно выразить через функции Бесселя. Внутри оболочки волокна ( $r \leq a$ ):

$$E_r = A \frac{\beta}{u/a} J'_v \left( \frac{ur}{a} \right) - B \frac{\omega \mu_0}{(u/a)^2} \frac{v}{r} J_v \left( \frac{ur}{a} \right), \quad (3)$$

$$E_\theta = i \left[ -A \frac{\beta}{(u/a)^2} \frac{v}{r} J_v \left( \frac{ur}{a} \right) + B \frac{\omega \mu_0}{u/a} J'_v \left( \frac{ur}{a} \right) \right], \quad (4)$$

$$E_z = iA J_v \left( \frac{ur}{a} \right), \quad (5)$$

где  $\mu_0$  — магнитная проницаемость вакуума,  $A$  и  $B$  — константы, задающие амплитуды полей

внутри волокна. Значения этих констант определяются из граничных условий.

Для магнитных полей записываются аналогичные выражения:

$$H_r = i \left[ A \frac{\omega \epsilon_1}{(u/a)^2} \frac{v}{r} J_v \left( \frac{ur}{a} \right) + B \frac{\beta}{u/a} J'_v \left( \frac{ur}{a} \right) \right], \quad (6)$$

$$H_\theta = A \frac{\omega \epsilon_1}{u/a} J'_v \left( \frac{ur}{a} \right) - B \frac{\beta}{(u/a)^2} \frac{v}{r} J_v \left( \frac{ur}{a} \right), \quad (7)$$

$$H_z = B J_v \left( \frac{ur}{a} \right), \quad (8)$$

где  $\epsilon_1 = n_1^2$  — диэлектрическая проницаемость волокна.

Во внешней среде ( $r \geq a$ ):

$$E_r = -C \frac{\beta}{w/a} K'_v \left( \frac{wr}{a} \right) + D \frac{\omega \mu_0}{(w/a)^2} \frac{v}{r} K_v \left( \frac{wr}{a} \right), \quad (9)$$

$$E_\theta = i \left[ C \frac{\beta}{(w/a)^2} \frac{v}{r} K_v \left( \frac{wr}{a} \right) + D \frac{\omega \mu_0}{w/a} K'_v \left( \frac{wr}{a} \right) \right], \quad (10)$$

$$E_z = iCK_v \left( \frac{wr}{a} \right), \quad (11)$$

где  $C$  и  $D$  — константы, задающие амплитуды полей снаружи волокна.

Для магнитных полей

$$H_r = i \left[ -C \frac{\omega \epsilon_2}{(w/a)^2} \frac{v}{r} K_v \left( \frac{wr}{a} \right) + D \frac{\beta}{w/a} K'_v \left( \frac{wr}{a} \right) \right], \quad (12)$$

$$H_\theta = -C \frac{\omega \epsilon_2}{w/a} K'_v \left( \frac{wr}{a} \right) - D \frac{\beta}{(w/a)^2} \frac{v}{r} J_v \left( \frac{wr}{a} \right), \quad (13)$$

$$H_z = DK_v \left( \frac{wr}{a} \right), \quad (14)$$

где  $\epsilon_2 = n_2^2$  — диэлектрическая проницаемость внешней среды.

Приведенные выражения задают зависимости электрических и магнитных полей от радиальной координаты. Наличие мнимой единицы в радиальных и азимутальных компонентах указывает на их фазовый сдвиг на  $\pi/2$  относительно продольных компонент. Внутри волокна зависимости полей описываются функциями Бесселя первого рода  $J_v$ , а снаружи функциями Бесселя второго рода  $K_v$ . Право- и левовращающиеся поляризованные моды имеют положительные и отрицательные азимутальные индексы соответственно.

При переходе от оболочки ко внешней среде тангенциальные компоненты полей, т.е. азимутальные и продольные, должны быть непрерывны. Приравняв значения полей на границе оболочки, можно получить следующее уравнение для четырех неизвестных констант:

$$\begin{pmatrix} J_v(u) & 0 & -K_v(w) & 0 \\ -\frac{i\beta}{(u/a)^2} \frac{v}{a} J_v(u) & \frac{j\omega\mu_0}{u/a} J'_v(u) & -\frac{i\beta}{(w/a)^2} \frac{v}{a} K_v(w) & \frac{i\omega\mu_0}{w/a} K'_v(w) \\ 0 & J_v(u) & 0 & -K_v(w) \\ \frac{i\omega\varepsilon_1}{u/a} J'_v(u) & \frac{i\beta}{(u/a)^2} \frac{v}{a} J_v(u) & -\frac{i\omega\varepsilon_2}{w/a} K'_v(w) & \frac{i\beta}{(w/a)^2} \frac{v}{a} K_v(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = 0. \quad (15)$$

Для того чтобы решение приведенного уравнения существовало при ненулевых коэффициентах, определитель матрицы  $4 \times 4$  должен быть равен нулю. Этот определитель фактически записан в уравнении (1). После численного решения уравнения (1) и нахождения постоянных распространения  $\beta$  можно найти значения констант  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  с точностью до произвольного общего множителя, определяющего амплитуду моды. Для удобства эти константы можно нормировать так, чтобы поток энергии в каждой моде был равен единице.

### 3. ЛИНЕЙНО-ПОЛЯРИЗОВАННЫЕ МОДЫ

Собственными модами волоконного световода являются циркулярно поляризованные волны и их произвольные комбинации. Полученные в разд. 2 решения представляют собой право- и левоциркулярно поляризованные моды.

Рассмотрим, что происходит с полями мод при смене знака  $v$  и направления циркулярной поляризации. Для функций Бесселя выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_{-v}(x) &= (-1)^v J_v(x), \\ \frac{d}{dx} J_{-v}(x) &= (-1)^v \frac{d}{dx} J_v(x), \end{aligned} \quad (16)$$

и аналогичные соотношения выполняются для функций Бесселя  $K_v$ . Из уравнений (3)–(14) видно, что некоторые компоненты полей будут менять знаки в зависимости от знака  $v$  и ее четности, а какие-то не будут. Структура волокна является зеркально симметричной. Следовательно, если для полей (3)–(14) найдено некоторое решение, то решение, в котором для всех компонент поля знаки изменены на противоположные, также будет удовлетворять уравнениям Максвелла. Поэтому у нас есть свобода в выборе одного знака в найденном решении. Будем считать, что компонента  $E_r$  не меняет знак при смене знака  $v$ . Тогда из (3) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} A(-v) &= (-1)^v A(v), \\ B(-v) &= (-1)^{v+1} B(v), \\ C(-v) &= (-1)^v C(v), \\ D(-v) &= (-1)^{v+1} D(v), \end{aligned} \quad (17)$$

а из (3)–(14), что

$$\begin{aligned} E_r(-v) &= E_r(v), & H_r(-v) &= -H_r(v), \\ E_\theta(-v) &= -E_\theta(v), & H_\theta(-v) &= H_\theta(v), \\ E_z(-v) &= E_z(v), & H_z(-v) &= -H_z(v). \end{aligned} \quad (18)$$

Запишем в явном виде зависимость электрических полей право- (+) и левоциркулярно (–) поляризованных мод от азимутального угла:

$$\vec{E}^+(r, \theta) = (E_r, iE_\theta, iE_z) \exp(i|\nu|\theta), \quad (19)$$

$$\vec{E}^-(r, \theta) = (E_r, -iE_\theta, iE_z) \exp(-i|\nu|\theta),$$

$$\vec{H}^+(r, \theta) = (iH_r, H_\theta, H_z) \exp(i|\nu|\theta), \quad (20)$$

$$\vec{H}^-(r, \theta) = (-iH_r, H_\theta, -H_z) \exp(-i|\nu|\theta).$$

Здесь в скобках через запятую записаны радиальная, азимутальная и продольная компоненты вектора поля. Как видно из уравнений, при изменении направления циркулярной поляризации происходит изменение знака азимутальной компоненты электрического поля и знака перед  $|\nu|$ .

Стандартный подход к описанию распространения света в оптическом волокне состоит в использовании приближения линейно поляризованных мод с линейным и однонаправленным распределением поляризации моды по сечению волокна. Поэтому мы также будем искать отличие точных решений от  $LP$ -приближения.

Линейно поляризованные моды могут быть получены как точная суперпозиция двух, трех или четырех гибридных мод параксиального приближения нулевого порядка. В общем случае линейно поляризованная мода есть сумма двух правоциркулярно поляризованных и двух левоциркулярно поляризованных гибридных мод:

$$\begin{aligned} LP_{\lambda m} &= HE_{\lambda+1 m} + HE_{-(\lambda+1) m} + \\ &+ EH_{\lambda-1 m} + EH_{-(\lambda-1) m}. \end{aligned} \quad (21)$$

Моды  $LP_{0m}$  и  $LP_{1m}$  являются особыми случаями:

$$\begin{aligned} LP_{0m} &= HE_{1m} + HE_{-1m}, \\ LP_{1m}^{(a)} &= HE_{2m} + HE_{-2m} + TE_{0m}, \\ LP_{1m}^{(b)} &= HE_{2m} + HE_{-2m} + TM_{0m}. \end{aligned} \quad (22)$$



#### 4. ПОЛЯРИЗАЦИЯ $LP_{0m}$ -ПОДОБНЫХ МОД

Как видно из соотношений (21) и (22), для того чтобы получить моды, подобные  $LP$ -модам, в первую очередь необходимо найти сумму двух право- и левациркулярно поляризованных мод, имеющих противоположные знаки  $v$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\vec{E}^+(r, \theta) + \vec{E}^-(r, \theta)) = \\ & = (E_r \cos(|v|\theta), -E_\theta \sin(|v|\theta), iE_z \cos(|v|\theta)). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь поле записано в цилиндрической системе координат. Из полученного соотношения видно, в этой сумме обе поперечные компоненты являются действительными величинами, т.е. их фазы совпадают. Отсюда следует, что в плоскости поперечной оси волокна поляризация моды является линейной. Продольная компонента является чисто мнимой, т.е. она сдвинута по фазе на  $\pi/2$  по отношению к поперечным компонентам. Переходя к декартовой системе координат с использованием соотношений

$$\begin{aligned} E_x(r, \theta) &= E_r(r, \theta) \cos \theta - E_\theta(r, \theta) \sin \theta, \\ E_y(r, \theta) &= E_r(r, \theta) \sin \theta + E_\theta(r, \theta) \cos \theta, \end{aligned} \quad (24)$$

можно получить для поперечных компонент

$$\begin{aligned} E_x(r, \theta) &= E_r \cos(|v| - 1)\theta + \Delta E \sin \theta \sin(|v|\theta), \\ E_y(r, \theta) &= E_\theta \sin(|v| - 1)\theta - \Delta E \cos \theta \sin(|v|\theta), \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\Delta E = E_\theta - E_r$  — разница между азимутальной и радиальной компонентами поля одной моды. Эти две компоненты в  $LP$ -приближении равны друг другу, и  $\Delta E = 0$ .

Для  $LP_{0m}$ -подобной моды  $|v| = 1$ . Подставив это значение в (25) получим

$$\begin{aligned} E_x(r, \theta) &= E_r \left( 1 + \frac{\Delta E}{E_r} \sin^2 \theta \right), \\ E_y(r, \theta) &= -\frac{\Delta E}{2} \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (26)$$

Для любых азимутальных углов поляризация является линейной, что следует из равенства фаз компонент поля по  $x$  и  $y$ . При  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  вектор поляризации направлен вдоль оси  $x$ .

При других азимутальных углах поляризация отклоняется от оси  $x$ , а его величина определяется отношением

$$\frac{E_y}{E_x} = -\frac{\Delta E}{2E_r} \frac{\sin 2\theta}{1 + \frac{\Delta E}{E_r} \sin^2 \theta}. \quad (27)$$

#### 5. ПОЛЯРИЗАЦИЯ $LP_{1m}$ -ПОДОБНЫХ МОД

Для  $LP_{1m}$ -подобной моды азимутальное модовое число  $|v| = 2$ . Сумма двух право- и левациркулярно

поляризованных мод  $HE_{2m}$  и  $HE_{-2m}$ , имеющих противоположные знаки  $v$ , имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\vec{E}_{2m}^+(r, \theta) + \vec{E}_{2m}^-(r, \theta)) = \\ & = (E_r \cos(2\theta), -E_\theta \sin(2\theta), iE_z \cos(2\theta)). \end{aligned} \quad (28)$$

Повернем профиль моды на  $45^\circ$ , тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\vec{E}_{2m}^+(r, \theta) + \vec{E}_{2m}^-(r, \theta)) = (E_r \sin(2\theta), \\ & E_\theta \cos(2\theta), iE_z \sin(2\theta)). \end{aligned} \quad (29)$$

Для  $TE_{0m}$ -моды

$$\vec{E}_{0m}(r, \theta) = (0, E_\theta^{(TE)}, 0). \quad (30)$$

Чтобы найти поле для мод  $LP_{1m}^{(a)}$ , вычтем (30) из (29) и поделим на 2, откуда получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= \frac{1}{2} \left( E_r \sin(2\theta), \right. \\ & \left. E_\theta \cos(2\theta) - E_\theta^{(TE)}, iE_z \sin(2\theta) \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Так же, как и для  $LP_{0m}$  мод, фазы поперечных компонент здесь совпадают и поляризация моды является линейной в поперечной плоскости, а продольная компонента сдвинута по фазе на  $\pi/2$ . Переходя к декартовой системе координат, найдем для поперечных компонент  $LP_{1m}^{(a)}$ -подобных мод

$$\begin{aligned} E_x(r, \theta) &= E_r \sin \theta + \frac{1}{2} \left( E_\theta^{(TE)} - \right. \\ & \left. - E_r \right) \sin \theta - \frac{1}{2} \Delta E \cos 2\theta \sin \theta, \\ E_y(r, \theta) &= \frac{1}{2} \left( E_r - E_\theta^{(TE)} \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \Delta E \cos 2\theta \cos \theta. \end{aligned} \quad (32)$$

Для  $TM_{0m}$ -моды

$$\vec{E}_{0m}(r, \theta) = (E_r^{(TM)}, 0, E_z^{(TM)}). \quad (33)$$

Чтобы найти поле для мод  $LP_{1m}^{(b)}$ , суммируем (33) и (28) и поделим на 2, откуда получим

$$\begin{aligned} \vec{E}(r, \theta) &= \frac{1}{2} \left( E_r \cos(2\theta) + \right. \\ & \left. + E_r^{(TM)}, -E_\theta \sin(2\theta), iE_z \cos(2\theta) \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Переходя к декартовой системе координат, найдем для  $LP_{1m}^{(b)}$ -подобных мод

$$\begin{aligned} E_x(r, \theta) &= E_r \cos \theta + \frac{1}{2} \left( E_r^{(TM)} - \right. \\ & \left. - E_r \right) \cos \theta + \frac{1}{2} \Delta E \sin 2\theta \sin \theta, \end{aligned}$$



$$E_y(r, \theta) = \frac{1}{2} \left( E_r^{(TM)} - E_r \right) \sin \theta - \frac{1}{2} \Delta E \sin 2\theta \cos \theta. \quad (35)$$

В случае, когда  $E_\theta^{(TE)} \approx E_\theta$ , что, как мы покажем далее, справедливо в параксиальном приближении, для  $LP_{lm}^{(a)}$ -подобных мод имеем

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\Delta E}{2E_r} \frac{\sin 2\theta}{1 + \frac{\Delta E}{E_r} \sin^2 \theta}. \quad (36)$$

Аналогичное соотношение, но с противоположным знаком, можно получить для  $LP_{lm}^{(b)}$ -подобных мод. Соотношение (32) с точностью до знака совпадает с выражением (27) для мод  $LP_{0m}$ . Соответственно, для любых азимутальных углов поляризация является линейной, а при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  вектор поляризации направлен строго вдоль оси  $x$ .

## 6. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДЛЯ $LP_{01}$ -ПОДОБНОЙ МОДЫ

Для расчета полей в программной среде Matlab по найденным ранее постоянным распространения из уравнения (15) были вычислены коэффициенты  $B$ ,  $C$ ,  $D$  при заданном коэффициенте  $A = 1$ . Используя эти коэффициенты, были получены три компоненты вектора электрического поля  $E_r$ ,  $E_\theta$  и  $E_z$ .

На рис. 2 показаны зависимости амплитуд трех компонент электрического поля от радиуса для правоциркулярно поляризованной моды  $HE_{11}$  по всему сечению волокна (а) и вблизи границы (б).

Видно, что амплитуды поперечных компонент  $E_r$  и  $E_\theta$  спадают по мере приближения к границе оболочки  $r = 62.5$  мкм. Внутри оболочки эти две

компоненты практически совпадают. На границе оболочки компонента  $E_r$  увеличивается скачком до значения  $E_\theta$ , в то время как переход  $E_\theta$  через границу оболочки переходит непрерывно, что соответствует стандартным граничным условиям для тангенциальных и нормальных компонент. За границей оболочки спад компонент поля продолжается экспоненциально. В центре волокна продольная компонента  $E_z$  равна нулю. По мере приближения к границе оболочки она увеличивается до значений, сопоставимых со значениями поперечных полей, после чего экспоненциально спадает за границей оболочки. Для левоциркулярно поляризованных мод зависимости имеют аналогичный вид, но с противоположным знаком азимутальной компоненты.

Из рис. 2а видно, что внутри основной части оболочки продольная составляющая электрического поля  $E_z$  меньше радиальной  $E_r$  и азимутальной  $E_\theta$  составляющих поля на два-три порядка, что хорошо известно [45]. Однако вблизи границы оболочки волокна с внешней средой, на расстояниях порядка длины волны от границы внутрь волокна, и во внешней среде вплоть до бесконечности продольная составляющая  $E_z$  соизмерима с поперечными составляющими поля (рис. 2б).

Численное моделирование показывает, что внутри волокна вдали от поверхности и во внешней среде над поверхностью оболочки  $E_r \approx E_\theta$ . На поверхности радиальная компонента  $E_r$  испытывает скачок в  $\epsilon = n_2^2$  раз, а азимутальная компонента  $E_\theta$  непрерывна. Поэтому под поверхностью  $E_r \approx \frac{1}{\epsilon} E_\theta$ , откуда можно получить, что  $\Delta E / E_r = \epsilon - 1$ . С учетом этого из соотношения (27) можно найти, что угол отклонения максимален примерно при  $\theta = \pm 35^\circ$  и равен  $21^\circ$ .

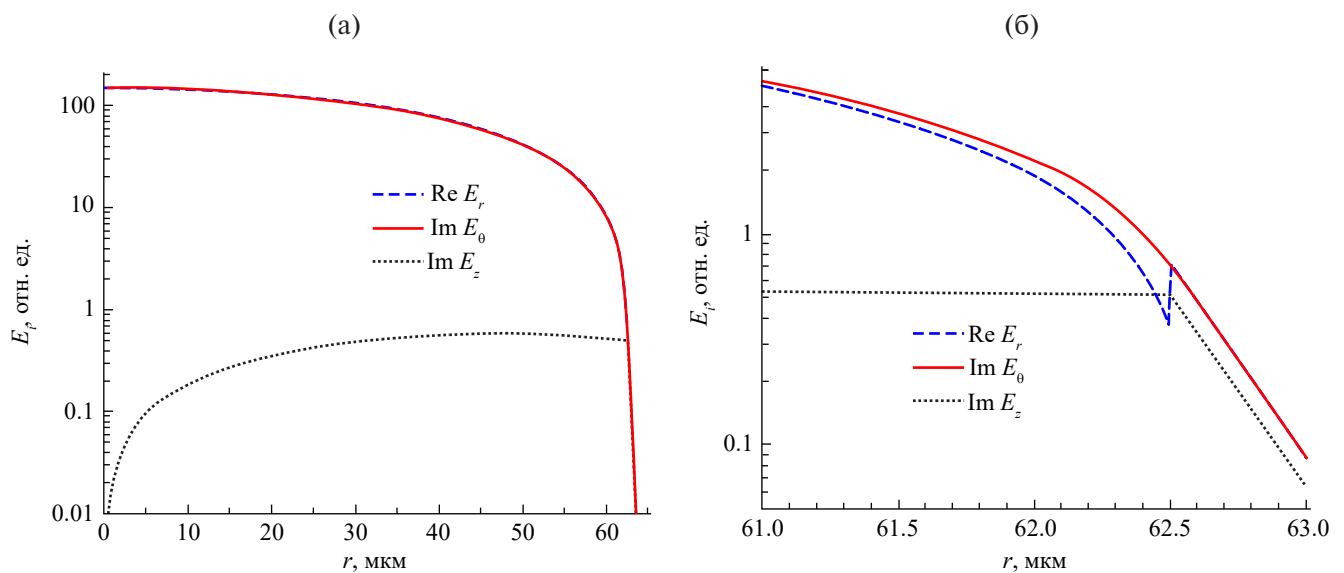
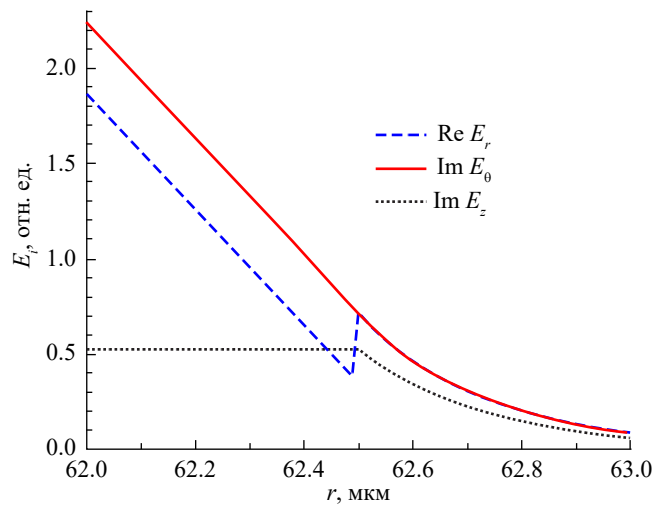


Рис. 2. Зависимость амплитуд поперечных и продольной компонент электрического поля моды  $HE_{11}$  от радиуса для  $\lambda = 1550$  нм в логарифмическом масштабе по всему сечению волокна (а) и вблизи границы (б).

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд поперечных и продольных полей моды  $HE_{11}$  вблизи оболочки волокна от радиуса в линейном масштабе.

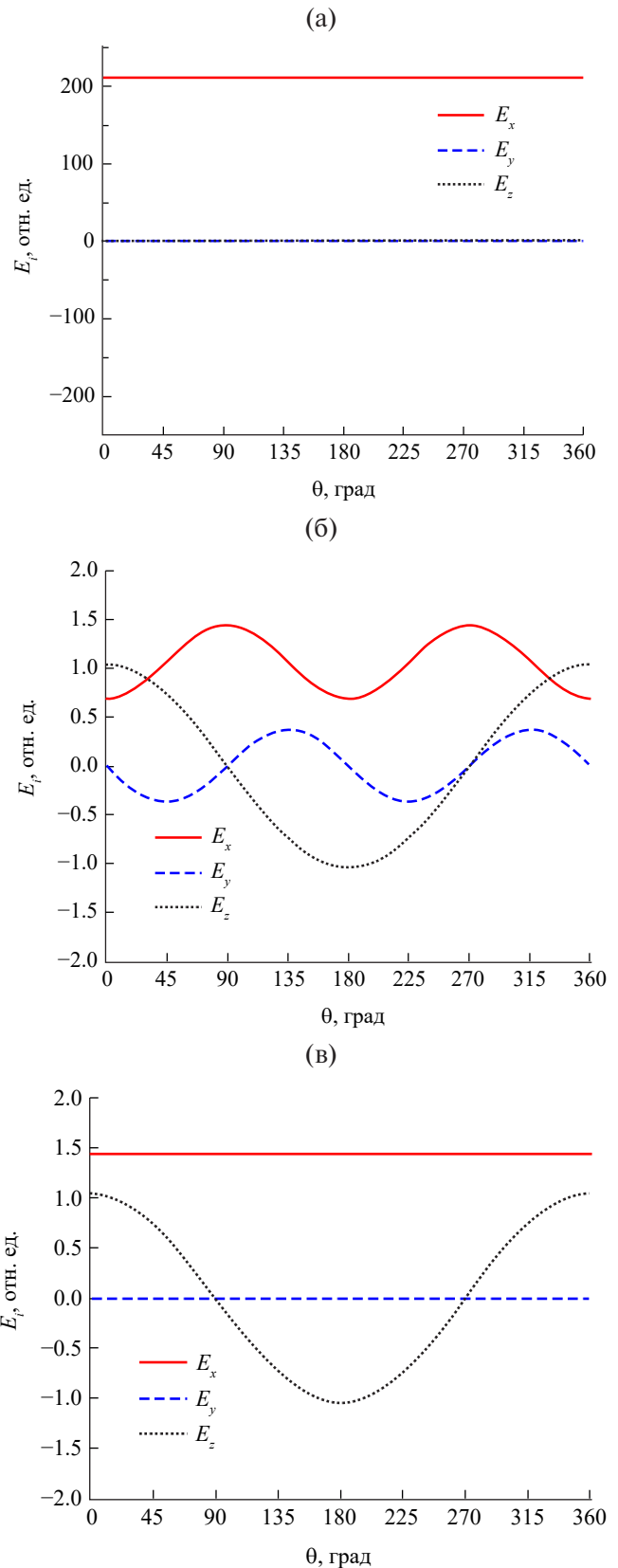


**Рис. 3.** Зависимость амплитуд поперечных и продольной компонент электрического поля моды  $HE_{11}$  от радиуса вблизи границы в линейном масштабе.

Из рисунка видно, что под поверхностью волокна радиальная компонента  $E_r$  меньше азимутальной  $E_\theta$  на постоянную величину  $\Delta E = E_r(\epsilon - 1)$ , но на границе радиальная компонента  $E_r$  совершает скачок по амплитуде в  $\epsilon = n_2^2$  раз и далее начинает совпадать с азимутальной компонентой  $E_\theta$ . Кроме того, видно, что над границей оболочки амплитуда продольной компоненты  $E_z$  оставляет примерно 70% от значения амплитуды поперечных компонент  $E_r$  и  $E_\theta$ , а внутри оболочки на расстоянии до 0.06 мкм от границы даже превышает азимутальную компоненту.

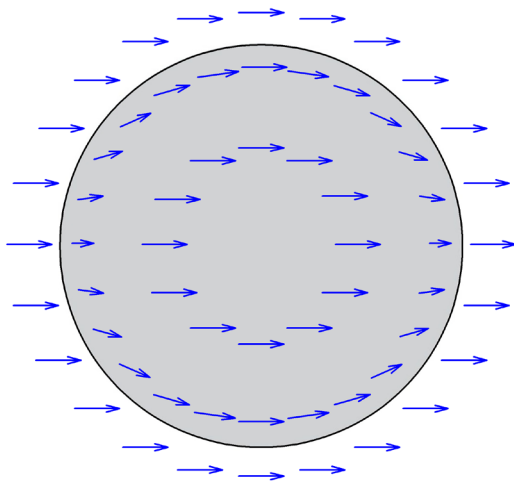
На рис. 4 показаны угловые зависимости амплитуд декартовых компонент электрического поля моды, подобной горизонтально поляризованной моде  $LP_{01}$ .

Как видно из рис. 4а, внутри оболочки составляющая  $E_x$  при изменении угла практически постоянна, а  $E_y$  и  $E_z$  пренебрежимо малы по сравнению с  $E_x$ . Под поверхностью оболочки (рис. 4б) амплитуды компонент осциллируют, причем  $E_x$  имеет экстремумы при углах, кратных  $90^\circ$ ,  $E_y$  — при углах  $45^\circ, 135^\circ, 225^\circ, 315^\circ$  град, а  $E_z$  при  $0$  и  $180^\circ$ . При этом вблизи поверхности величина продольной компоненты сравнима по величине с поперечной компонентой. Над поверхностью оболочки амплитуды компонента  $E_x$  практически постоянна,  $E_y$  пренебрежимо мала, а продольная компонента такая же, как под поверхностью.



**Рис. 4.** Угловые зависимости компонент электрического поля  $LP_{01}$ -подобной моды: внутри волокна для  $r = 30$  мкм (а), под поверхностью (б) и над поверхностью оболочки волокна (в).

Используя угловые зависимости, представленные на рис. 4, было построено распределение векторов поперечного поля внутри и около поверхности волокна (рис. 5).



**Рис. 5.** Распределение вектора поперечного электрического поля  $LP_{01}$ -подобной моды внутри оболочки, под и над поверхностью оболочки волокна.

Как видно из рис. 5, внутри оболочки и над поверхностью волокна поперечное электрическое поле направлено практически параллельно оси  $X$ . Под поверхностью оболочки поле направлено к оси абсцисс под углом. Максимальное отклонение угла поляризации под поверхностью от направления поляризации моды внутри оболочки составляет  $21^\circ$  для направлений азимутального угла  $\theta = 35, 145, 215$  и  $325$  град. Значительный угол отклонения поляризации от горизонтальной объясняется тем, что под поверхностью оболочки амплитуда компоненты  $E_y$  оказывается соизмерима с амплитудой компоненты  $E_x$ .

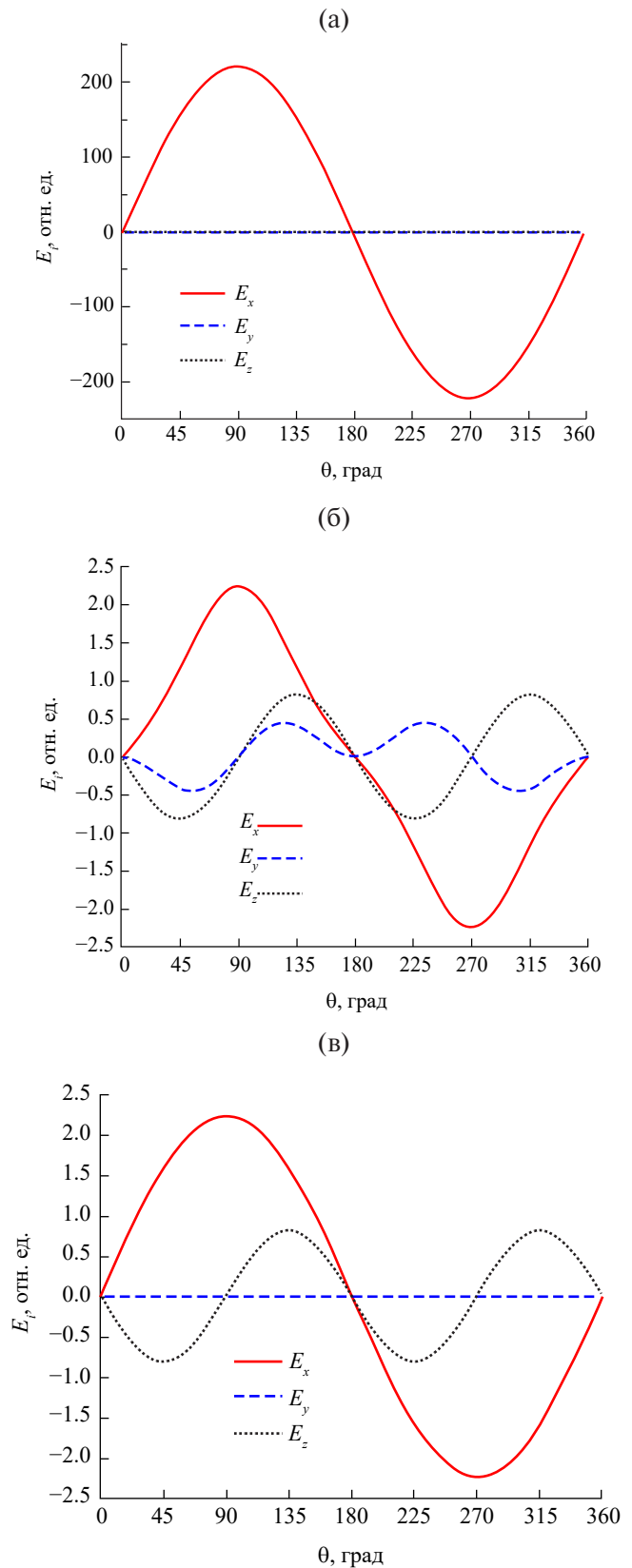
## 7. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДЛЯ $LP_{11}$ -ПОДОБНЫХ МОД

Проведем численный расчет для моды, подобной моде  $LP_{11}$ , аналогично расчету в разд. 6. Угловые зависимости распределения электрического поля моды типа

$$LP_{11}^{(a)} = HE_{21} + TE_{01}$$

представлены на рис. 6.

Как видно из рисунка, внутри оболочки составляющая  $E_x$  при изменении угла амплитуды компонент поля имеет экстремумы при  $90$  и  $270$  град, а  $E_y$  и  $E_z$ , как и в случае моды  $LP_{01}$ , — пренебрежимо малы по сравнению с  $E_x$ . Так же, как и в моде  $LP_{01}$ , под поверхностью оболочки амплитуды компонент



**Рис. 6.** Угловые зависимости компонент электрического поля моды  $LP_{11}^{(a)} = HE_{21} + TE_{01}$ : внутри волокна для  $r = 30$  мкм (а), под поверхностью оболочки волокна (б), над поверхностью оболочки волокна (в).

осциллируют, причем компонента  $E_x$  имеет такие же экстремумы,  $E_y$  имеет экстремумы при углах 0, 55, 125, 180, 235, 305 град, а  $E_z$  имеет экстремумы при 45, 135, 225 и 315 град. Над поверхностью оболочки угловая зависимость для компоненты  $E_x$  имеет такую же форму, как внутри оболочки. При этом под и над поверхностью, как и в случае моды  $LP_{01}$ , продольная компонента сравнима по величине с поперечными компонентами.

С использованием угловых зависимостей, представленных на рис. 6, построено распределение векторов поперечного поля внутри и на поверхности волокна (рис. 7). Основное направление поляризации поля ориентировано вдоль линии, разделяющей две доли. Из рисунка видно, что особенности векторного распределения поля моды  $LP_{11}^{(a)}$  аналогичны тем, которые были показаны для поля моды  $LP_{01}$ . Максимальное отклонение угла поляризации от оси абсцисс под поверхностью также составляет  $21^\circ$ .

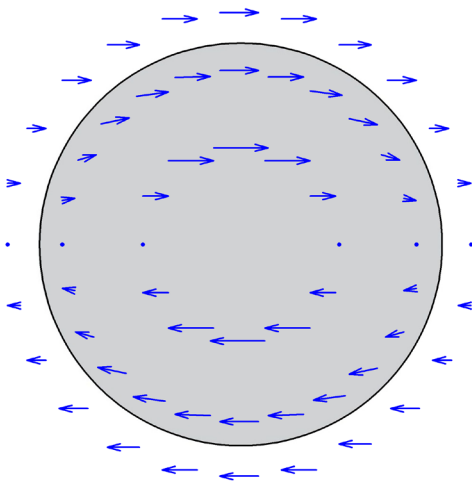


Рис. 7. Распределение вектора поперечного электрического поля  $LP_{11}^{(a)}$ -подобной моды внутри оболочки, под и над поверхностью оболочки волокна.

На рис. 8 представлены угловые зависимости распределения электрического поля моды типа

$$LP_{11}^{(b)} = HE_{21} + TM_{01}.$$

Внутри оболочки (см. рис. 6а) поляризация линейная и направлена вдоль оси  $x$ . Под поверхностью оболочки поведение поперечных компонент аналогично случаю моды  $LP_{11}^{(a)}$ . Продольная же компонента на границе в отличие от случая моды  $LP_{11}^{(a)}$  не меняет знак в зависимости от угла.

На рис. 9 построено распределение векторов поперечного поля внутри и около поверхности волокна. Основное направление поляризации поля ориентировано перпендикулярно линии, разделяющей

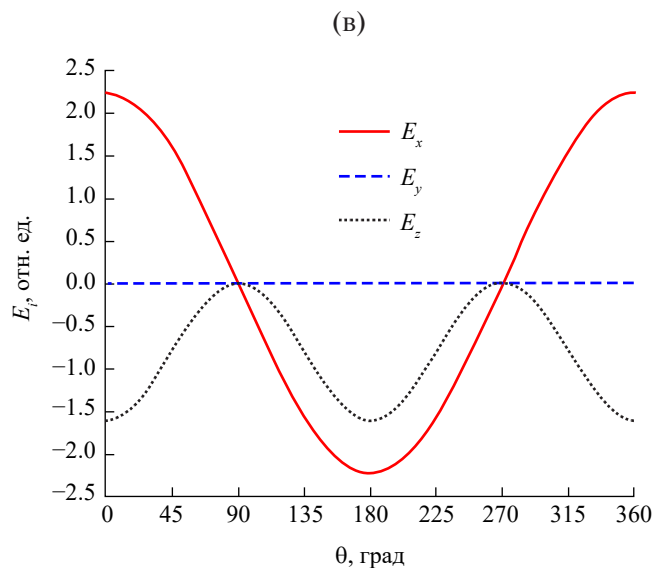
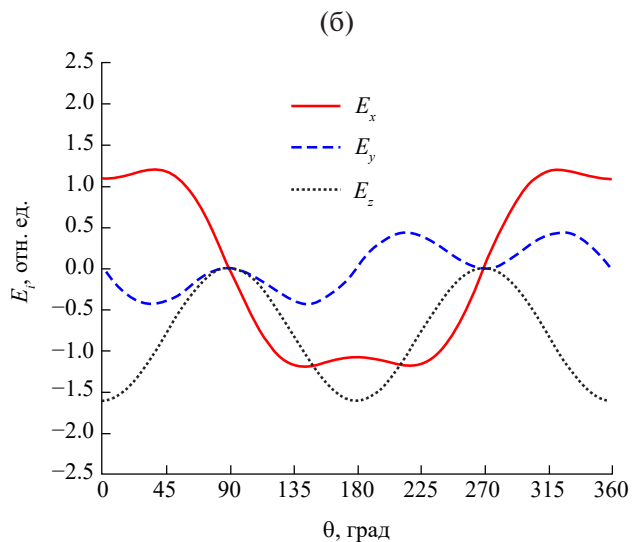
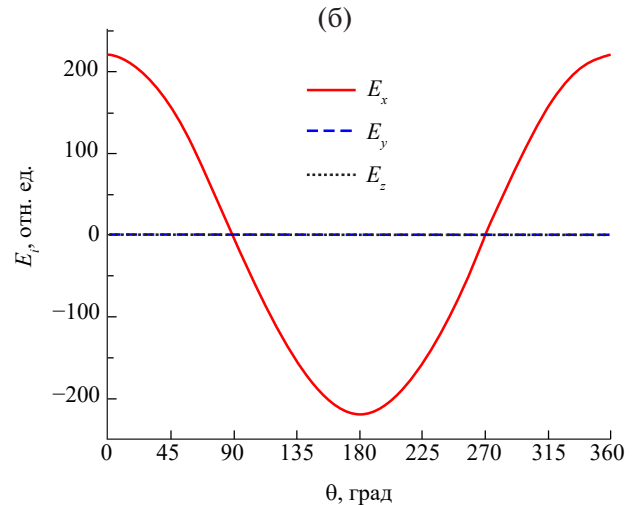


Рис. 8. Угловые зависимости компонент электрического поля моды  $LP_{11}^{(b)} = HE_{21} + TM_{01}$ : внутри волокна для  $r = 30$  мкм (а), под поверхностью оболочки волокна (б), над поверхностью оболочки волокна (в).

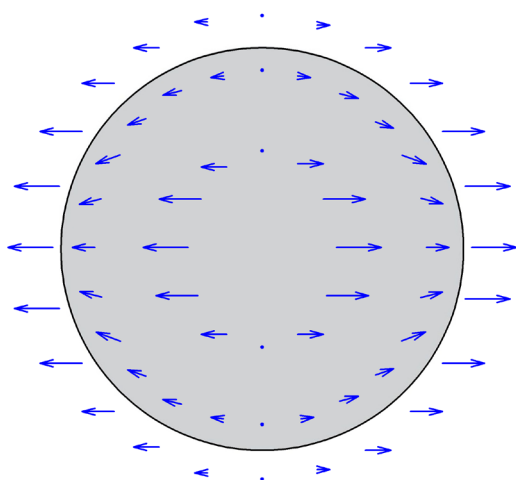


Рис. 9. Распределение вектора поперечного электрического поля  $LP_{11}^{(b)}$ -подобной моды внутри оболочки, под и над поверхностью оболочки волокна.

две доли. Максимальный угол отклонения поляризации моды  $LP_{11}^{(b)}$  под поверхностью оболочки, такой же, как в предыдущих случаях, и составляет  $21^\circ$ .

Расчет приповерхностных полей особенно важен для задач, в которых рассматривается взаимодействие волокон, соприкасающихся своими оболочками или обнаженными сердцевинами [10, 16, 37]. В этом случае коэффициент передачи мощности излучения из одного волокна в другое определяется коэффициентом связи мод, распространяющихся по соприкасающимся параллельным волокнам [6, 11, 43]. Коэффициент связанных мод зависит от их интеграла перекрытия, который вычисляется интегрированием произведения электрических полей двух мод с учетом распределения показателя преломления в области соприкосновения [46].

Таким образом, коэффициент связанных мод в значительной степени зависит от поверхностного электрического поля вблизи границы оболочки волокон. Зная коэффициент связанных мод, решением уравнений связанных мод можно найти коэффициент передачи из одного волокна в другое, который будет зависеть от постоянных распространения и длины области связи волокон. В связи с этим учет продольной компоненты, а также отклонение вектора поляризации поля под поверхностью волокна должны вносить значимый вклад в величину коэффициента связанных мод.

Результаты расчетов, приведенные выше, получены для мод оптического волокна без сердцевины, тогда как в реальных волокнах сердцевина присутствует и оказывает существенное влияние на распределение электромагнитного поля оболочечных мод внутри сечения волокна [47]. Однако в том, что касается постоянных распространения оболочечных мод и, тем более, полей вблизи поверхности оболочки

волокна, влияние сердцевины несущественно и им можно пренебречь. Основные особенности поверхностных полей оболочечных мод можно исследовать без учета сердцевины, что позволяет использовать полученные ранее аналитические выражения для электромагнитных полей и упрощает их изучение. Вместе с тем в будущем планируем расширить точный анализ на случай волокон с сердцевиной и, кроме того, рассмотреть влияние надоболочечных покрытий на поля вблизи поверхности волокна.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Произведен точный расчет гибридных мод бессердцевинного оптического волокна. Найдены распределения радиальной, азимутальной и продольной составляющих полей по сечению волокна, в том числе вблизи поверхности оболочки волокна. Полученные решения сравнены с решениями в  $LP$ -приближении. Показано, что вблизи поверхности оболочки волокна  $LP$ -приближение дает неточное описание направления поляризации поля мод. Также показано, что продольная составляющая поля является значимой по сравнению с поперечными компонентами. За границей оболочки ее величина составляет примерно 0.7 от величин поперечных компонент, а внутри оболочки на расстоянии порядка длины волны излучения от границы может даже превышать поперечные компоненты.

Проведен точный аналитический анализ поляризованных характеристик поверхностного поля. Показано, что поперечная составляющая поля  $LP$ -подобных мод поляризована линейно, а продольная компонента сдвинута по фазе на  $\pi/2$ . Обнаружено, что под поверхностью волокна направление поляризации отклоняется от основного направления поляризации поля внутри оболочки.

Получены численные решения для распределения поверхностных полей. Построены угловые зависимости для компонент электрического поля внутри волокна, под и над поверхностью оболочки для  $LP_{01}$ - и  $LP_{11}$ -подобных мод. Представлены распределения для направления поляризации в рассмотренных модах. Установлено, что под поверхностью оболочки волокна радиальная и азимутальная компоненты электрического поля существенно различаются, но при этом имеют одинаковую амплитуду внутри и над поверхностью волокна. В результате поле под поверхностью оболочки волокна направлено непараллельно основной оси поляризации моды, и присутствует ортогональная компонента. Максимальный угол отклонения от основного направления поляризации составляет  $21^\circ$ . Результаты численных расчетов подтверждают аналитический анализ.

Точный учет поверхностных полей у внешней границы оптических волокон позволит получить правильные значения коэффициентов связи и решения для задачи о взаимодействии соприкасающихся



волокон в датчиках и других устройствах, основанных на передаче энергии через поверхностные поля.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волоконно-оптические датчики / Под ред. Э. Удда. М.: Техносфера, 2008.
2. Chiang K. S., Liu Y., Liu Q., Rao Y. // Photonic Sensors. 2011. V. 1. № 3. P. 204.
3. Wu Z., Liu B., Zhu J., Liu J. et al. // Chinese Opt. Lett. 2020. V. 18. № 6. P. 061201.
4. Tripathi S. M., Kumar A., Varshney R. K. et al. // J. Lightwave Technol. 2009. V. 27. № 13. P. 2348.
5. Kogelnik H., Schmidt R. // IEEE J. Quantum Electronics. 1976. V. 12. № 7. P. 396.
6. Chiang K. S., Ng M. N., Liu Y., Li S. // Proc. Lasers Electro-Opt. Soc. 2000 Ann. Meeting, 15–16 Nov. Rio Grande. 2000. P. 836.
7. Chan F. Y. M., Chiang K. S. // J. Lightwave Technol. 2006. V. 24. № 2. P. 1008.
8. Kim M. J., Jung Y. M., Kim B. H. et al. // Opt. Express. 2007. V. 15. № 17. P. 10855.
9. Jung Y., Brambilla G., Murugan G. S., Richardson D. J. // Appl. Phys. Lett. 2011. V. 98. № 2. 021109.
10. Hong Z., Li X., Zhou L. et al. // Opt. Express. 2011. V. 19. № 5. P. 3854.
11. Wu Q., Semenova Y., Ma Y. // J. Lightwave Technol. 2011. V. 29. № 24. P. 3683.
12. Baiad M. D., Gagné M., Lemire-Renaud S. et al. // Opt. Express. 2013. V. 21. № 6. P. 6873.
13. Cai Z., Liu F., Guo T. et al. // Opt. Express. 2015. V. 23. № 16. P. 20971.
14. Schlangen S., Bremer K., Zheng Y. et al. // P. Soc. Photo-opt. Ins. 2018. V. 10681. 1068116.
15. Zhang W., Huang L., Gao F. et al. // Opt. Lett. 2012. V. 37. P. 1241.
16. Zhang C., Chiang K. S. // Opt. Eng. 2012. V. 51. № 7. 075001.
17. Иванов О. В., Никитов С. А., Гуляев Ю. В. // Успехи физ. наук. 2006. Т. 49. № 2. С. 167.
18. Lam P. K., Stevenson A. J., Love J. D. // Electron. Lett. 2000. V. 36. № 11. P. 967.
19. Bachim B. L., Ogunsola O. O., Gaylord T. K. // Opt. Lett. 2005. V. 30. № 16. P. 2080.
20. Chan F. Y. M., Kim M. J., Lee B. H. // J. Opt. Soc. Korea. 2005. V. 9. № 4. P. 135.
21. Yukun B., Kin S. C. // J. Lightwave Technol. 2005. V. 23. № 12. P. 4363.
22. Liu Y., Chiang K. S., Rao Y. J. et al. // Opt. Express. 2007. V. 15. № 26. P. 17645.
23. Xue W., Lu M., Jun Y., Yuan L. // Acta Optica Sinica. 2010. V. 30. № 12. P. 3391.
24. Abrishamian F., Morishita K. // IEICE T. Electron. 2015. V. 98. № 7. P. 512.
25. Юсупова Л. И., Иванов О. В. // Радиотехника. 2019. № 9. С. 74.
26. Xu X., Ouyang X., Zhou A. // Opt. Commun. 2019. V. 445. P. 1.
27. Бутков О. В., Топышев К. А., Нечепуренко И. А. // Успехи физ. наук. 2022. Т. 192. С. 1385.
28. Топышев К. А., Е. И. Долженко Е. В., Бутков О. В. // Квант. электроника. 2021. Т. 51. № 12. С. 1113.
29. Tomyshev K. A., Tazhetdinova D. K., Manuilovich E. S., Butov O. V. // J. Appl. Phys. 2018. V. 124. № 113106.
30. Tomyshev K. A., Tazhetdinova D. K., Manuilovich E. S., Butov O. V. // Phys. Status Solidi. A. 2018. № 1800541.
31. Tomyshev K. A., Manuilovich E. S., Tazhetdinova D. K. // Sens. Actuators, A. 2020. V. 308. № 112016.
32. Manuilovich E. S., Tomyshev K. A., Butov O. V. // Sensors. 2019. V. 19. № 4245.
33. Liu Y., Chiang K. S., Liu Q. // Opt. Express. 2007. V. 15. № 10. P. 6494.
34. Kim M. J., Chan F. Y. M., Paek U. C., Lee B. H. // Proc. Optical Fiber Comm. Conf. and National Fiber Optic Engineers Conf. 5–10 March. 2006. Anaheim. P. 3.
35. Han Y. G., Lee S. B., Kim C. S., Jeong M. Y. // Opt. Lett. 2006. V. 31. № 6. P. 703.
36. Lo Y. L. // Opt. Eng. 2006. V. 45. № 12. P. 125001.
37. Kritzing R., Meyer J., Burger J. // S. Afr. J. Sci. 2011. V. 107. № 5/6. P. 703.
38. He Y. J., Chen X. Y. // IEEE Trans. 2013. V. NANO-12. № 3. P. 460.
39. Fang L., Jia H. // Opt. Express. 2014. V. 22. № 10. P. 16621.
40. Dong X. W., Feng S. C., Lu S. H. et al. // Acta Physica Sinica. 2007. V. 56. № 12. P. 7039.
41. Liu Q., Chiang K. S., Liu Y. // J. Lightwave Technol. 2008. V. 26. № 18. P. 3277.
42. Chiang K. S., Chan F. Y. M., Ng M. N. // J. Lightwave Technol. 2004. V. 22. № 5. P. 1358.
43. Zhang W., Huang L., Gao F., Bo F. // Opt. Express. 2013. V. 21. № 14. P. 1358.
44. Kawano K., Kitoh T. Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell's Equations and the Schrodinger Equation N. Y.: Wiley. 2001.
45. Iizuka K. Elements of the Photonics / N. Y.: Wiley. 2002.
46. Huang W. P. // J. Opt. Soc. Amer. A. 1994. V. 11. № 3. P. 963.
47. Erdogan T. // J. Opt. Soc. Amer. A. 1997. V. 14. № 8. P. 1760.

# **SURFACE ELECTROMAGNETIC FIELDS OF CLADDING MODES OF CORELESS OPTICAL FIBERS**

**M. A. Abel'mas<sup>a, \*</sup>, O. V. Ivanov<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Ulyanovsk State Technical University,*

*32 Severny Venets St., Ulyanovsk, 432027 Russian Federation*

<sup>b</sup>*Ulyanovsk Branch Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics RAS,*

*48/2 Goncharova St., Ulyanovsk, 432011 Russian Federation*

*\*E-mail: abelmax1998@mail.ru*

Received May 01, 2024, revised September 06, 2024, accepted September 25, 2024

The exact hybrid modes of a coreless optical fiber are calculated. Spatial distributions of electromagnetic fields near the cladding surface are obtained. A comparison of radial, azimuthal, and longitudinal field components near the cladding surface is performed for the hybrid exact modes and approximate linearly polarized (*LP*) modes. The polarization characteristics of the modes are studied taking into account the longitudinal field component depending on the type of hybrid modes and mode numbers. The combination of hybrid modes forms modes similar to *LP* modes, which have an almost uniform linear polarization inside the fiber far from the cladding surface. It is shown that under the cladding surface the polarization of *LP*-like modes is also linear, but significantly non-uniform in azimuthal angle with a deviation of the polarization angle by up to 21° from the main direction of mode polarization. In addition, the role of the longitudinal field component near the cladding surface increases significantly, where its value can exceed the values of the transverse components.

*Keywords:* optical fiber, fiber mode, cladding mode, surface field, hybrid modes

УДК 621.376.67

## О СИНТЕЗЕ АНИЗОТРОПНЫХ ЛИНЗ ЛЮНЕБУРГА

© 2024 г. В. А. Калошин<sup>a, \*</sup>, Буй Ван Чунг<sup>b</sup><sup>a</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация<sup>b</sup>Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская обл., 141700 Российская Федерация

\*E-mail: vak@cplire.ru

Поступила в редакцию 25.03.2024 г.

После доработки 25.03.2024 г.

Принята к публикации 24.04.2024 г.

Предложены две методики синтеза линз Люнебурга на основе неоднородного анизотропного диэлектрика: с использованием итерационной процедуры и модели градиентной среды, а также с использованием рекуррентной процедуры и модели слоистой среды. В качестве примера применения предложенных методик проведен синтез двух вариантов цилиндрической линзы Люнебурга на основе кольцевой диэлектрической структуры. Показано, что методика на основе итерационной процедуры неустойчива при небольших величинах радиуса. С использованием численного моделирования методом конечных элементов проведен анализ двух вариантов линзовых антенн на основе цилиндрических линз Люнебурга, синтезированных с использованием слоистой модели и рекуррентной процедуры.

**Ключевые слова:** линза Люнебурга, анизотропный диэлектрик, геометроптический синтез

**DOI:** 10.31857/S0033849424120036, **EDN:** HNDHKP

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время возрос интерес к многолучевым антеннам на основе линз Люнебурга [1–14]. Этот интерес обусловлен двумя обстоятельствами. Первое связано с появлением новых технологий, в том числе аддитивных, изготовления неоднородных диэлектриков, в том числе искусственных диэлектриков на основе диэлектрических и металлических периодических структур. Второе обстоятельство связано с необходимостью разработки широкополосных многолучевых антенн для базовых станций мобильной связи новых поколений.

Следует отметить, что искусственные диэлектрики на основе одномерно и двумерно квазипериодических структур обладают анизотропией, пространственной и частотной дисперсией. Неучет этих свойств при синтезе линзы приводит к фазовым aberrациям в ее апертуре, что ограничивает электрический диаметр линзы и, соответственно, коэффициент усиления линзовой антенны.

В работе [15] решение задачи синтеза анизотропной линзы Люнебурга ось сведено к функциональному уравнению в предположении известности закона изменения отношения компонентов тензора коэффициента преломления внутри линзы. Однако при

реализации конкретной конструкции анизотропной линзы этот закон, как правило, неизвестен.

В случае, когда вектор электрического поля ортогонален оси тензора диэлектрической проницаемости задача синтеза анизотропной цилиндрической линзы сводится к синтезу к синтезу изотропной линзы [16].

В данной работе рассмотрена задача синтеза анизотропной линзы Люнебурга, когда вектор электрического поля не ортогонален оси тензора диэлектрической проницаемости и без предположения об известности закона изменения отношения компонентов тензора коэффициента преломления внутри линзы.

1. СИНТЕЗ ЛИНЗЫ  
МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ

Рассмотрим задачу синтеза линзы Люнебурга радиусом  $R_L$  из неоднородного анизотропного диэлектрика, которая преобразует поле точечного источника, находящего в фокусе  $F$  вне или на поверхности линзы, в фокус  $F_1$  вне линзы (рис. 1).

Задача синтеза заключается в определении зависимостей компонент тензора коэффициента преломления  $n_r(R)$  и  $n_\phi(R)$  для  $0 < R < R_0$ , причем

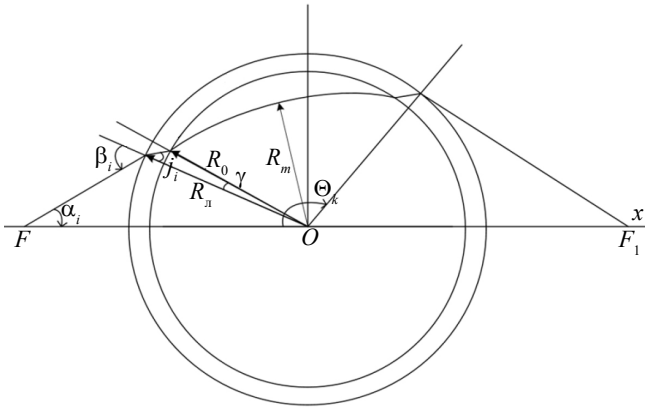


Рис. 1. Геометрия луча в линзе.

внутри оболочки ( $R_0 < R < R_l$ ) эти величины предполагаются заданными. Все размеры в задаче будем нормировать на радиус линзы  $R_l$ , поэтому без ограничения общности далее полагаем  $R_l = 1$ .

В работе [15] решение задачи синтеза получено в виде

$$n_r(R) = \rho(R)/R, \quad (1)$$

при этом функция  $\rho(R)$  определяется из функционального уравнения

$$\varphi(R) = f(\rho), \quad (2)$$

где

$$\varphi(R) = \int_{R_0}^R \frac{m(r)dr}{r}, \quad f(\rho) = \ln(\rho) + \Omega(\rho) - \Psi(\rho),$$

$$\Omega(\rho) = \frac{2}{\pi} \int_{R_0}^1 \arctg \sqrt{\frac{1-\rho^2}{N_r^2(r)-1}} \frac{m(r)dr}{r},$$

$$\Psi(\rho) = \omega(\rho, F) + \omega(\rho, F_1),$$

$$\omega(\rho, F) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arcsin(h/F)}{\sqrt{h^2 - \rho^2}} dh,$$

$h = F \sin(\alpha)$  – лучевой параметр,  $\alpha$  – угол выхода луча из источника (см. рис. 1), а функция  $m(R) = n_\varphi(R)/n_r(R)$  предполагается заданной. Однако при реализации конкретной конструкции линзы эта функция, как правило, неизвестна.

В случае изотропной линзы  $m(R) = 1$ ,  $\varphi(R) = \ln(R/R_0)$  и уравнение (2) имеет явное решение

$$R/R_0 = \rho \exp(\Omega(\rho) - \Psi(\rho)). \quad (3)$$

Уравнения (1), (3) в параметрической форме описывают решение для закона изменения коэф-

фициента преломления  $n(R)$ , которое совпадает с известным решением Моргана для изотропной линзы Люнебурга с оболочкой [17].

Рассмотрим в качестве примера анизотропной линзы Люнебурга цилиндрическую линзу в виде квазипериодической кольцевой диэлектрической структуры с постоянным периодом, но меняющейся толщиной колец в зависимости от их радиуса (рис. 2).

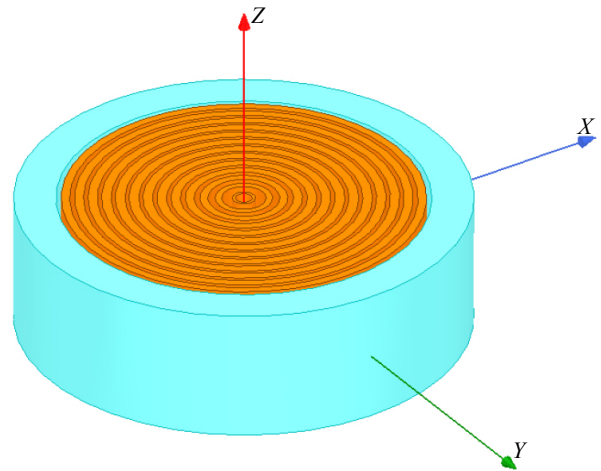


Рис. 2. Цилиндрическая линза Люнебурга.

В общем случае линза содержит оболочку с заданным законом изменения компонент тензора коэффициента преломления. Такая конструкция планарной линзы Люнебурга была предложена в работе [18] и в частном случае синтезирована и исследована в работе [16]. Однако синтез и анализ в [16] был проведен только для поляризации электрического поля параллельной оси симметрии линзы (оси X на рис. 2). При этом лучи внутри линзы являются «обыкновенными» и решение задачи синтеза сводится к решению для изотропной линзы (1), (3).

Рассмотрим задачу синтеза цилиндрической линзы Люнебурга на основе кольцевой диэлектрической структуры для поляризации электрического поля, ортогональной оси симметрии линзы. В этом случае внутри линзы распространяются «необыкновенные» лучи, уравнение которых в полярной системе координат  $(r, \theta)$  имеет вид [19]

$$\theta = \int \frac{m(r)dr}{r \sqrt{n_r^2(r)r^2 - h^2}}. \quad (4)$$

Ограничимся случаем формирования на выходе линзы плоского фронта (при этом фокусное расстояние  $F_1 = \infty$  и, соответственно,  $\omega(\rho, F_1) = 0$ )

и оболочкой из изотропного диэлектрика с постоянным значением коэффициента преломления ( $N_r(r) = N_\phi(r) = n_0$ ).

Зададим коэффициент преломления в оболочке  $n_0 = 1.15$  и рассмотрим вариант линзы с оболочкой максимальной толщины ( $R_0 = 1/n_0$ ). Нетрудно показать, что из требования полного использования апертуры следует  $F = 1/\sin(\alpha) \approx 1.16$ .

Будем полагать, что компоненты тензора коэффициента преломления среды в виде кольцевой диэлектрической структуры для поляризации электрического поля параллельной и ортогональной поверхности колец совпадают с соответствующими компонентами тензора коэффициента преломления соответствующей плоскостной среды. Формулы для компонентов тензора плоскостной среды, описывающие частотную и пространственную дисперсию получены в работе [20]. Однако в данной работе ограничимся более простыми формулами, полученными в статическом приближении в работе [21]. В результате получаем

$$n_\phi = n_\parallel = \sqrt{1 + c(\varepsilon_d - 1)}, \quad n_r = n_\perp = \sqrt{\frac{\varepsilon_d}{(1 - c)\varepsilon_d + c}}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_d$  — диэлектрическая проницаемость материала колец, а  $c = t/T$  — коэффициент заполнения ( $t$  — толщина колец,  $T$  — период структуры).

Из соотношений (5) следует, что

$$m(R) = \frac{n_\phi(R)}{n_r(R)} = \frac{\sqrt{n_r^2(R)(1 + \varepsilon_d)}}{n_r^2(R)}. \quad (6)$$

Подставляя выражение (6) для  $m(R)$  в выражение для функции  $\varphi(R)$  в уравнение (2), находим

$$\varphi(R) = \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{n_r^2(r)(1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d}}{n_r^2(r)r} dr. \quad (7)$$

В результате получаем систему уравнений (1), (8) для определения функции  $n_r(R)$

$$\rho = \rho \left( \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{n_r^2(r)(1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d}}{n_r^2(r)r} dr \right), \quad (8)$$

где функция  $\rho(f)$  — обратная к функции  $f(\rho)$ , которая определена уравнением (2).

Будем решать эту систему итерационным методом, вычислив предварительно функцию  $\rho(f)$  и представив ее в виде сплайна.

В качестве нулевого приближения для  $n_r(R)$  используем известное решение для изотропной линзы

(1), (3). Подставляя это решение для  $n_r(R)$  в (8), находим  $\rho(R)$ . Подставляя найденную функцию  $\rho(R)$  в уравнение (1), находим новую функцию  $n_r(R)$ , и т.д.

Результаты расчета функции  $n_r(R)$  для параметров  $\varepsilon_d = 2.5$ ,  $n_0 = 1.15$  с использованием четырех итераций представлены на рис. 3. Как видно из рисунка, итерационная процедура сходится не для всех  $R$ , при малых  $R$  происходит раскачка.

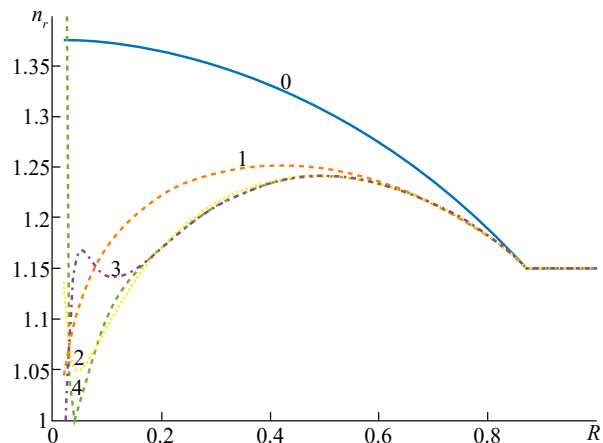


Рис. 3. Зависимость от радиуса компоненты  $n_r$  тензора коэффициента преломления; цифры на кривых — номер итерации.

## 2. РЕКУРРЕНТНЫЙ СИНТЕЗ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЛОИСТОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим другую методику синтеза анизотропной линзы Лüneбурга, которая использует разбиение линзы на слои. Такая методика синтеза изотропных слоистых линз Лüneбурга с постоянными значениями коэффициента преломления внутри слоев предложена и исследована в работе [22]. При этом, как показано в упомянутой работе, точность определения закона изменения коэффициента преломления при использовании этой методики падает при приближении к центру и периферии линзы. Во избежание этого эффекта в данной работе будем использовать параболический закон изменения радиальной компоненты тензора коэффициента преломления внутри слоев  $n_r$ , причем индекс  $r$  далее будем опускать, т.е. полагаем  $n_r(R) = n(R)$ ,

$$n^2(R_{i-1}) = A_{i-1} + B_i R_{i-1}^2, \quad (9)$$

где индекс  $i = 1, 2, \dots, k$  соответствует номеру слоя, а соотношение  $A_i = n^2(R_{i-1}) - B_i R_{i-1}^2$  между коэффициентами выбрано из условия непрерывности закона  $n(R)$  на границах слоев:

$$n^2(R_i) = n^2(R_{i-1}) - B_i (R_{i-1}^2 - R_i^2). \quad (10)$$



Таким образом, решение задачи синтеза рекуррентным методом сводится к последовательному нахождению коэффициентов  $B_i$ , начиная со слоя, ближайшего к оболочке ( $i = 1$ ).

Учитывая, что во втором фокусе (рис. 1)  $\theta = \pi$ , из геометрии луча в линзе получаем уравнение

$$\theta_k + \arcsin(h_k) = \pi, \quad (11)$$

где  $k$  — число слоев, пройденных лучом,

$$\theta_k = \int_1^{F_1} \frac{h_k DR}{R\sqrt{R^2 - h_k^2}} + 2 \int_{R_0}^1 \frac{h_k dR}{R\sqrt{R^2 n_0^2}} + 2 \sum_{i=1}^k \int_{R_i}^{R_{i-1}} \frac{h_k m(R) dR}{R\sqrt{R^2 n^2(R_i) - h_k^2}}. \quad (12)$$

Рассмотрим сначала случай изотропной линзы, полагая в уравнении луча (4)  $m(R) = 1$  и подставляя в него выражение для  $n(R)$  внутри слоев (10). В результате для угловой координаты точки выхода луча из линзы получаем

$$\begin{aligned} \theta_k = & 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n_0^2 - h_k^2}}{h_k} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n_0^2 R_0^2 - h_k^2}}{h_k} + \\ & + \arcsin h_k - \arcsin \frac{h_k}{F} + \\ & + \arcsin \frac{(n^2(R_{i-1}) - B_i R_{i-1}^2) R_{i-1}^2 - 2h_k^2}{R_{i-1}^2 \sqrt{(n^2(R_{i-1}) - B_i R_{i-1}^2)^2 + 4B_i h_k^2}} + \frac{\pi}{2} + \\ & + \sum_{i=2}^k \left( \arcsin \frac{(n^2(R_{i-2}) - B_{i-1} R_{i-2}^2) R_{i-2}^2 - 2h_k^2}{R_{i-2}^2 \sqrt{(n^2(R_{i-2}) - B_{i-1} R_{i-2}^2)^2 + 4B_{i-1} h_k^2}} - \right. \\ & \left. - \arcsin \frac{(n^2(R_{i-1}) - B_{i-1} R_{i-1}^2) R_i^2 - 2h_k^2}{R_i^2 \sqrt{(n^2(R_{i-1}) - B_{i-1} R_{i-1}^2)^2 + 4B_{i-1} h_k^2}} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где  $k = 2, 3, \dots$

Минимальное расстояние  $R_{mk}$  можно найти из теоремы Клеро [23]:  $h_k = R_{mk} n(R_{mk})$ . Подставляя это соотношение в (10), находим

$$\begin{aligned} R_{mk} = & \\ = & \sqrt{\frac{B_k R_{k-1}^2 - n(R_{k-1}) + \sqrt{(B_k R_{k-1}^2 - n^2(R_{k-1}))^2 + 4B_k h_k^2}}{2B_k}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Далее для определения траекторий лучей зададим последовательность углов выхода луча из фокуса

$$\alpha_i = \alpha_0 - i \frac{\alpha_0}{k},$$

где  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\alpha_0 = \arcsin(1/F)$ . Подставляя  $h_1$ ,  $n_0$ ,  $R_0$  в уравнение (11), находим  $B_1$ . Подставляя  $B_1$  в (14), находим  $R_{m1}$  и  $n(R_{m1}) = h_1/R_{m1}$ . Далее находим параметры следующего слоя ( $R_2$ ,  $n(R_2)$ ) и т.д.

Для нахождения зависимости коэффициента преломления от радиуса вместо требования параллельности лучей можно использовать равенство эйконалов от источника до выходного плоского фронта:

$$L_k + 1 - \cos(\beta) = L_0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} L_k = & \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{2R_0 n_0 \sin(\gamma)}{\sin(j)} + \\ & + 2 \sum_{i=1}^k \int_{R_i}^{R_{i-1}} \frac{m(R) R n^2(R_i) dR}{\sqrt{R^2 n^2(R_i) - h_k^2}}, \end{aligned}$$

$L_0 = R_0 \cos(\alpha_0) + 2n_0 \cos(j_0) + 1$  — эйконал крайнего луча, углы  $\beta, j, \gamma$  показаны на рис. 1.

Подставляя выражение для коэффициента преломления внутри слоев (10) в выражение для  $L_k$  в формуле (15), получим

$$\begin{aligned} L_k = & \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{2R_0 n_0 \sin(\gamma)}{\sin(j)} + \\ & + \int_{R_{mk}}^{R_{i-1}} \frac{2R(n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2)) dR}{\sqrt{R^2(n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2)) - h_k^2}} + \end{aligned}$$

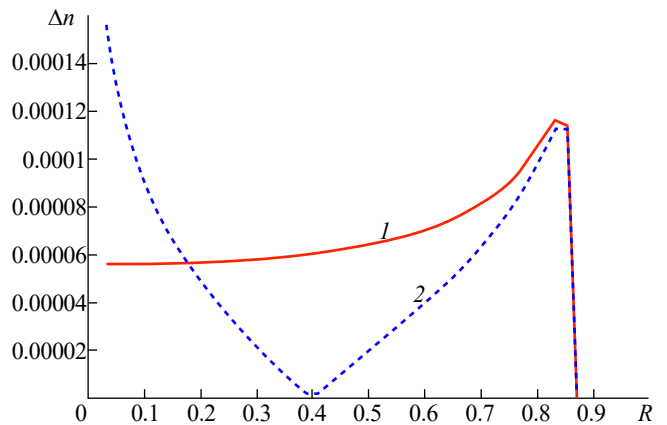


Рис. 4. Модуль разности точной величины коэффициента преломления в изотропной линзе и приближенной величины, полученной из уравнения луча (1) и из уравнения эйконала (2).

$$+2 \sum_{i=2}^k \int_{R_{i-1}}^{R_{i-2}} \frac{R \left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) dR}{\sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) - h_k^2}}. \quad (16)$$

Последовательно решая уравнение (15) для слоев, начиная с первого, находим коэффициенты  $B_k$ . Подставляя их в (14), находим  $R_{mk}$  и  $n(R_{mk}) = h_k / R_{mk}$ .

На рис. 4 приведены графики модуля разности коэффициентов преломления в зависимости от

радиуса для параметров  $n_0^2 = 1.5$ ,  $F \approx 1.06$ ,  $k = 50$ , найденных по изложенной методике и по точному решению для изотропной линзы (1), (3). Из рисунка видно, что максимальная погрешность определения зависимости  $n(R)$  из уравнения луча меньше, чем при использовании уравнения эйконала.

Для случая анизотропной линзы, угловая координата точки выхода из линзы луча, прошедшего через  $k$  слоев, определяется формулой

$$\begin{aligned} \theta_k = & 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n_0^2 - h_k^2}}{h_k} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{n_0^2 R_0^2 - h_k^2}}{h_k} + \arcsin h_k - \arcsin \frac{h_k}{F} + \\ & + 2 \int_{R_{mk}}^{R_{i-1}} \frac{h_k \sqrt{\left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) (1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{R \left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) \sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) - h_k^2}} + \\ & + 2 \sum_{i=2}^k \int_{R_{i-1}}^{R_{i-2}} \frac{h_k \sqrt{\left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) (1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{R \left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) \sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) - h_k^2}}, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $k = 1, 2, \dots$

Решая это уравнение так же, как в случае изотропной линзы, находим значения  $R_{mk}$ ,  $n(R_{mk})$ , начиная со слоя, ближайшего к оболочке.

Подставляя выражение для радиальной компоненты тензора коэффициента преломления внутри слоев (10) в выражение для  $L_k$  в формуле (15), получаем

$$\begin{aligned} L_k = & \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{2R_0 n_0 \sin(\gamma)}{\sin(j)} + \int_{R_{mk}}^{R_{i-1}} \frac{2R \sqrt{\left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) (1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{\sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) - h_k^2}} + \\ & + 2 \sum_{i=2}^k \int_{R_{i-1}}^{R_{i-2}} \frac{R \sqrt{\left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) (1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{\sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2) \right) - h_k^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Последовательно решая уравнение (15) для каждого слоя, начиная с первого, мы определяем коэффициенты  $B_k$ . Затем, подставляя их в уравнение (14), находим значения  $R_{mk}$  и  $n(R_{mk})$ .

Рассмотрим вариант синтеза анизотропной линзы без оболочки, при этом выражение для  $\theta_k$  в формуле (11) имеет вид

$$\theta_k = \int_1^{F_1} \frac{h_k dR}{R \sqrt{R^2 - h_k^2}} + 2 \sum_{i=1}^2 \int_{R_i}^{R_{i-1}} \frac{h_k m(R) dR}{R \sqrt{R^2 n^2(R_i) - h_k^2}}. \quad (19)$$

В случае, когда фокус находится на поверхности линзы ( $F = 1$ ), из формулы (19) следует

$$\theta_k = 2 \int_{R_{mk}}^{R_{i-1}} \frac{h_k \sqrt{\left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) (1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{R \left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) \sqrt{R^2 \left( n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2) \right) - h_k^2}} +$$

$$+ 2 \sum_{i=2}^k \int_{R_{i-1}}^{R_{i-2}} + \frac{h_k \sqrt{n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2)(1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{R(n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2)) \sqrt{R^2(n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2)) - h_k^2}}. \quad (20)$$

Из формулы (11) можно найти параметры  $R_{mk}$  и  $n(R_{mk})$  каждого слоя так же, как и в случае линзы с оболочкой.

Выражение для  $L_k$  в формуле (15) для линзы без оболочки можно записать в виде

$$L_k = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha)} + 2 \sum_{i=1}^k \int_{R_i}^{R_{i-1}} \frac{m(R) R n^2(R_i) dR}{\sqrt{R^2 n^2(R_i) - h_k^2}}. \quad (21)$$

При  $F = 1$  из формулы (12) получаем

$$L_k = \int_{R_{mk}}^{R_{i-1}} \frac{h_k \sqrt{n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2)(1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{\sqrt{R^2(n^2(R_{i-1}) - B_i(R_{i-1}^2 - R^2)) - h_k^2}} + \\ + 2 \sum_{i=2}^k \int_{R_{i-1}}^{R_{i-2}} + \frac{h_k \sqrt{n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2)(1 + \varepsilon_d) - \varepsilon_d} dR}{\sqrt{R^2(n^2(R_{i-2}) - B_{i-1}(R_{i-2}^2 - R^2)) - h_k^2}}. \quad (22)$$

Поставляя выражение для  $L_k$  в формулу (15), находим закон изменения радиальной компоненты коэффициента преломления  $n(R_{mk})$ .

Зависимости радиальной компоненты коэффициента преломления  $n_r(r)$  для линзы с  $\varepsilon_d = 2.5$  без оболочки при  $F = 1$  и с оболочкой при  $F \approx 1.06$ ,  $n_0^2 = 1.5$  представлены на рис. 5, а погрешность синтеза линзы  $\Delta L$  (отличие эйконала в апертуре линзы от постоянной величины) – на рис. 6.

Как видно из рис. 6, при увеличении числа слоев погрешность решения задачи синтеза при использовании как уравнения луча, так и уравнения эйконала монотонно уменьшается. При этом максимальная погрешность наблюдается вблизи границы линзы.

Далее с использованием метода конечных элементов в программной среде ANSYS HFSS был проведен анализ антенны (рис. 7) на основе синтезированных вариантов анизотропной линзы Люнебурга, которая возбуждается  $H$ -секториальным рупором с корректирующей однородной диэлектрической линзой из пенопласта с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 1.5$ .

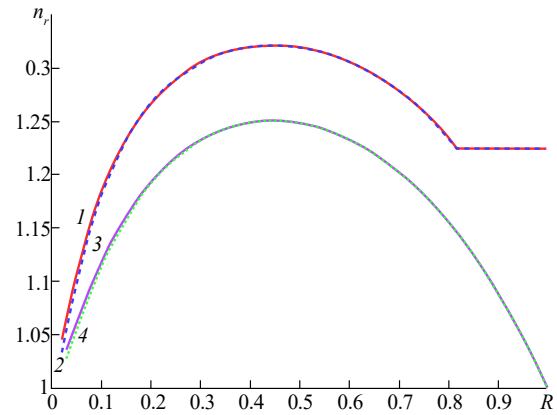


Рис. 5. Зависимость от радиуса компоненты  $n_r$  тензора коэффициента преломления анизотропной линзы с оболочкой (1, 2) и без оболочки (3, 4), полученных из уравнения эйконала (1, 3) и из уравнения луча (2, 4).

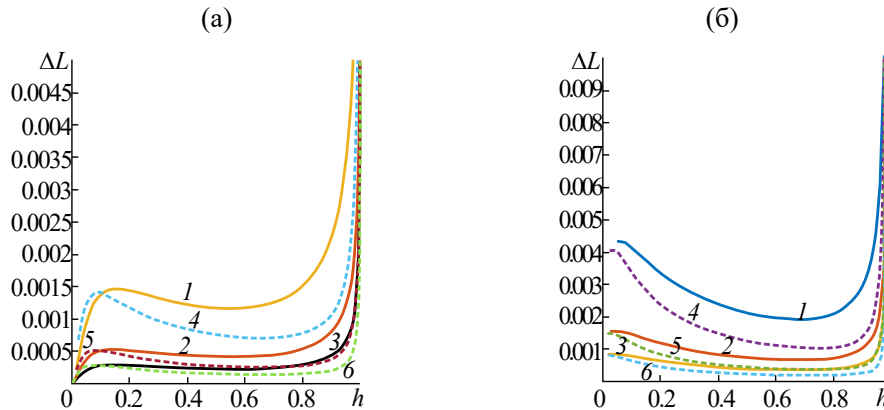


Рис. 6. Зависимости погрешности синтеза линзы ( $\Delta L$ ) от лучевого параметра: а – из уравнения эйконала, б – из уравнения луча; линза без оболочки (1–3), линза с оболочкой (4–6); число слоев: 50 (1, 4), 100 (2, 5), 150 (3, 6).

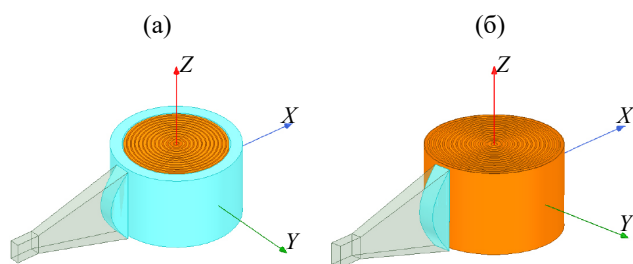


Рис. 7. Линзовая антенна с оболочкой (а) и без оболочки (б).

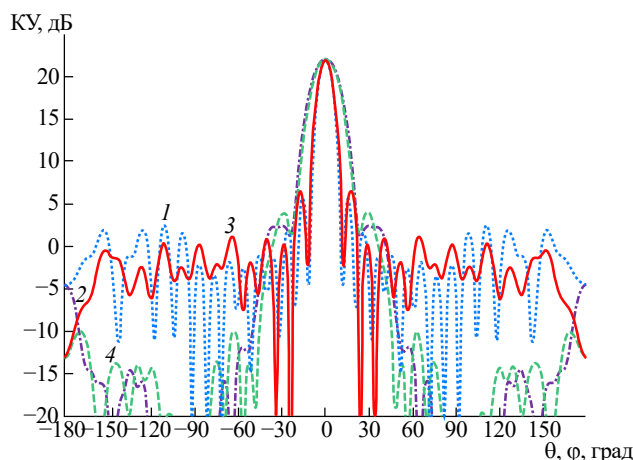


Рис. 8. Диаграммы направленности на частоте 15 ГГц антенны на основе анизотропной линзы Люнебурга с оболочкой (1, 2) и без оболочки (3, 4):  $E$ -плоскость (1, 3),  $H$ -плоскость (2, 4).

На рис. 8 приведены диаграммы направленности антенн на основе двух синтезированных вариантов линзы Люнебурга на частоте 15 ГГц.

На рис. 9 показаны частотные зависимости коэффициента усиления (КУ) и величины КИП. Как видно из рисунка, КУ и КИП линзовой антенны с оболочкой немного больше, чем у линзовой антенны без оболочки. Уменьшение величины КИП антенн при увеличении частоты можно объяснить уменьшением ширины ДН облучателя, а также увеличением фазовой ошибки, возникающей из-за неточности синтеза и частотной дисперсии кольцевой диэлектрической структуры.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

1. Рекурсивный метод с использованием слоистой модели обеспечивает монотонное уменьшение погрешности решения задачи синтеза ани-

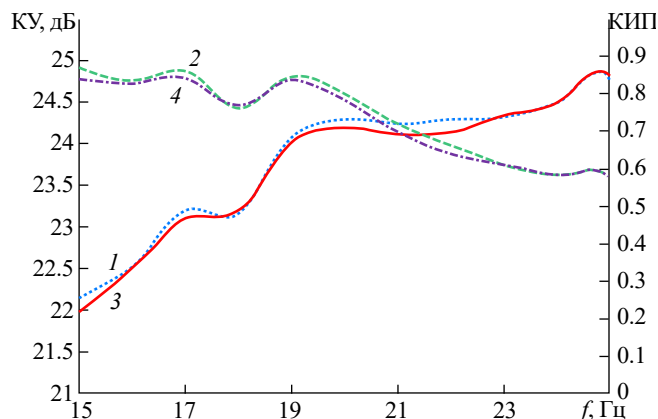


Рис. 9. Зависимости от частоты коэффициента усиления и величины КИП антенны на основе анизотропной линзы Люнебурга с оболочкой (1, 2) и без оболочки (3, 4): КУ (1, 3), КИП (2, 4).

зотропной линзы Люнебурга при увеличении числа слоев при использовании как уравнения луча, так и уравнения эйконала. При этом максимальная погрешность наблюдается вблизи границы линзы.

2. Антенны на основе синтезированных цилиндрических анизотропных линз Люнебурга в виде кольцевой диэлектрической квазипериодической структуры с рупорно-линзовым облучателем обеспечивают КИП более 0.8 в полосе частот более 28% и более 0.6 — в полосе частот 50%.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ryazantsev R.O., Salomatov Y.P., Panko V.S., Sugak M.I. // Proc. 2016 Int. Siberian Conf. Control and Commun. (SIBCON). Tomsk. 14–16 May. N.Y.: IEEE, 2016. Paper No.7491863.
2. Ratajczak P. // Proc. 2019 13th Eur. Conf. Antennas and Propagation (EuCAP). Krakow. 31 Mar.— 05 Apr. N.Y.: IEEE, 2019. Paper No. 8739897.
3. Захаров Е.В., Ильинский А.С., Медведев Ю.В. и др. // Журн. радиоэлектроники. 2020. № 2. <http://jre.cplire.ru/jre/feb20/3/text.pdf>
4. Denisov D.V., Shabunin S.N., Kusaykin D.V., Klevakin M.A. // 2021 XV Int. Sci-Techn. Conf. Actual Problems of Electronic Instrument Engineering (APEIE). Novosibirsk. 19–21 Nov. N.Y.: IEEE, 2021. P. 260.
5. Qu B., Yan S., Zhang A. et al. // IEEE Antenna and Wireless Propagation Lett. 2021. V. 20. № 6. P. 878.

6. Guo Y.J., Ansari M., Ziolkowski R.W., Fonseca N.J.G. // IEEE Open J. Antennas and Propagation. 2021. V. 2. P. 807.
7. Ansari M., Jones B., Zhu H. et al. // IEEE Trans. 2021. V. AP-69. № 7. P. 3758.
8. Taskhiri M. M. // IEEE Trans. 2021. V. AP-69. № 10. P. 6294.
9. Ansari M., Jones B., Shariati N., Guo Y.J. // Proc. 2021 15th Eur. Conf. Antennas and Propagation. (EuCAP). Dusseldorf. 22–26 Mar. N.Y.: IEEE, 2021. Article No. 9411005.
10. Liu J., Lu H., Dong Z. et al. // IEEE Trans. 2022. V. AP-70. № 1. P. 697.
11. Венецкий А. С., Калошин В. А., Чан Туен Тханг // РЭ. 2022. Т. 67. № 8. С. 754.
12. Perez-Quintana D., Bilitos C., Ruiz-Garcia J. et al. // IEEE Trans. 2023.V. AP-71. № 4. P. 2930.
13. Prince T.J., Elmansouri M.A., Filipovic D.S. // IEEE Trans. 2023. V. AP-71. № 10. P. 7924.
14. Lian J.W., Ansari M., Hu P. et al. // IEEE Trans. 2023.V. AP-71. № 4. P. 3193.
15. Калошин В. А., Щербенков В. Я. // РЭ. 1973. Т. 18. № 1. С. 26.
16. Ахияров В. В., Калошин В. А., Никитин Е. А. // Журн. радиоэлектроники 2014. № 1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/18/text.pdf>
17. Morgan S. P. // J. Appl. Phys. 1958. V. 29. № 9. P. 1358.
18. Калошин В. А. Метод ключевых задач в асимптотической теории волноведущих и излучающих систем с кромками // Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: ИРЭ АН СССР, 1989. 250 с.
19. Найдя О. Н. // Изв. вузов. Радиофизика. 1969. Т. 12. № 4. С. 569.
20. Калошин В. А., Стоянов С. В. // РЭ. 1989. Т. 35. № 12. С. 2640.
21. Рытов С. М. // ЖЭТФ. 1955. Т. 2. № 3. С. 605.
22. Венецкий А. С., Калошин В. А. // Журн. радиоэлектроники [электрон. журн.]. 2008. № 5.
23. Мохов О. И. Классическая дифференциальная геометрия. Курс лекций. М: МГУ им. М. В. Ломоносова, 2018.  
<https://teach-in.ru/file/synopsis/pdf/differential-geometry-M.pdf>

## ON THE SYNTHESIS OF ANISOTROPIC LUNEBURG LENSES

V. A. Kaloshin<sup>a, \*</sup>, Bui Van Chung<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Kotelnikov Institute of radioengineering and Electronics RAS,  
st. Mokhovaya, 11, building 7, Moscow, 125007 Russian Federation  
<sup>b</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),  
Institutsky per., 9, Dolgoprudny, Moscow region, 141700 Russian Federation  
\*E-mail: vak@cplire.ru

Received March 25, 2024, revised March 25, 2024, accepted April 25, 2024

Two methods for synthesizing Luneburg lenses based on an inhomogeneous anisotropic dielectric are proposed: using an iterative procedure and a gradient medium model, as well as using a recurrent procedure and a layered medium model. As an example of the application of the proposed methods, a synthesis of two variants of a cylindrical Luneburg lens based on a ring dielectric structure was carried out. It is shown that the method based on the iterative procedure is unstable at small values of the radius. Using numerical modeling by the finite element method, an analysis of two versions of lens antennas based on cylindrical Luneburg lens synthesized using a layered dielectric model and a recurrent procedure is carried out.

**Keywords:** Luneburg lens, anisotropic dielectric, geometric optical synthesis



## ТЕОРИЯ РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

УДК 621.385.014.14

### ПЕРВЕАНС КУБИЧЕСКОЙ ЦЕПИ, СОДЕРЖАЩЕЙ В РЕБРАХ ДИОДЫ ЧАЙЛЬДА–ЛЕНГМЮРА

© 2024 г. А. Е. Дубинов<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский  
научно-исследовательский институт экспериментальной физики,  
просп. Мира, 37, Саров, Нижегородская обл., 607188 Российская Федерация

<sup>b</sup>Саровский физико-технический институт — филиал Национального исследовательского  
ядерного университета «Московский инженерно-физический институт»,  
ул. Духова, 6, Саров, Нижегородская обл., 607189 Российская Федерация

E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.09.2023 г.

После доработки 21.11.2023 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Рассмотрена нелинейная электрическая цепь в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые диоды Чайльда–Ленгмюра. Проведена процедура декомпозиции цепи методом эквивалентных узлов. В результате выведена точная формула общего первеанса цепи. Формула может быть использована для оценки вольт-амперных характеристик тетрагональных цепей с кубическими элементарными ячейками, содержащими диоды Чайльда–Ленгмюра.

**Ключевые слова:** диод Чайльда–Ленгмюра, первеанс, кубическая цепь

DOI: 10.31857/S0033849424120046, EDN: HNCWZJ

#### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Закон Чайльда–Ленгмюра (закон ЧЛ), который часто еще называют законом “3/2”, является базовым законом физической электроники. Открытый более века назад [1, 2], он описывает зависимость максимально большой стационарной плотности тока электронов в плоском вакуумном диоде от напряжения, когда начальная скорость электронов на катоде равна нулю. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) ЧЛ имеет простой вид

$$I = PU^{3/2} = \frac{4}{9}\epsilon_0 \frac{S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} U_0^{3/2}, \quad (1)$$

где  $I$  — ток в диоде,  $U_0$  — напряжение на диоде,  $\epsilon_0$  — диэлектрическая постоянная,  $S$  — поперечная площадь диода,  $d$  — длина лиода,  $e$  — заряд электрона,  $m$  — его масса. Коэффициент пропорциональности  $P$  называется первеансом диода, первеанс измеряется в  $A/V^{3/2}$ .

Применения закона ЧЛ в физической электронике весьма разнообразны: расчет или оценка тока в межэлектродных промежутках электронных ламп [3], а также на некоторых участках в движении электронных пучков в СВЧ-генераторах различного типа [4–6], в ускорителях заряженных

частиц прямого действия [7, 8]. Применим закон ЧЛ и при рассмотрении ряда нелинейных явлений в плазме, таких как двойные слои при расширении плазмы в вакуум [9], разрывы электронного течения в плазменно-эрозионных размыкателях [10], режимы магнитной изоляции [11], приповерхностные заряженные слои в плазме [12–16] и т.п. Обзор 100-летней истории развития теории закона ЧЛ и физических приложений диодов ЧЛ представлен в [17].

Известно, что некоторые приборы твердотельной фотоники [18], термоэмиссионные преобразователи [19], светоизлучающие диоды [20], солнечные элементы [21, 22] и т.п. также имеют ВАХ вида (1). Их тоже можно называть диодами ЧЛ.

В [17] рассмотрены только обособленные диоды ЧЛ, подключенные к источнику напряжения, однако диоды ЧЛ могут быть элементами сложной электрической цепи или даже большой сети. В связи с этим представляет интерес рассмотреть особенности их совместной работы при различных схемах подключения. В этом направлении можно назвать лишь три исследования: в [23] рассмотрен диод ЧЛ, последовательно подключенный к резистору, в [24] — двухслойный диод ЧЛ, являющийся упрощенной моделью двух последовательно соединенных диодов ЧЛ, а в [25] получены соотношения для общего первеанса простых участков цепи, со-

державших последовательно или параллельно соединенные несколько диодов ЧЛ.

Твердотельные приборы фотоники, в том числе и имеющие ВАХ типа (1), входят в состав многоэлементных цепей, образующих в пространстве объемные сети. Как правило, сети имеют тетрагональную структуру с кубическими элементарными ячейками. Для оценки режимов питания всей сети важно знать, какова ВАХ большой цепи, в которых нелинейные диоды ЧЛ объединены в тетрагональную сеть, и, в частности, какова ВАХ каждой такой ячейки, т.е. каков их общий первеанс.

Цель данной работы – получение удобной формулы для расчета первеанса кубической ячейки с диодами ЧЛ, что является актуальной задачей.

Как отмечалось в [25], диоды ЧЛ, как правило, являются двусторонними, т.е. они могут пропускать ток в обоих направлениях. Тогда диод ЧЛ представляет собой двухполюсник, ВАХ которого подчиняется выражению

$$I = P_{\pm} |U|^{3/2} \text{sign} U, \quad (2)$$

где  $P_{\pm}$  – ветви первеанса диода ЧЛ при положительном и отрицательном напряжении соответственно. Двухсторонний диод ЧЛ может быть симметричным при  $P_{+} = P_{-}$  или асимметричным при  $P_{-} \neq P_{+}$ . Если одна из ветвей первеанса равна нулю, то такой диод ЧЛ в [25] называют односторонним.

В данной работе получена точная явная формула для первеанса цепи постоянного тока в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые односторонние диоды ЧЛ, хотя несложно распространить полученную формулу и для двусторонних диодов ЧЛ. Для получения этой формулы была использована процедура декомпозиции сложных электрических цепей методом эквивалентных узлов.

Укажем, что решение задачи о ВАХ цепи в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые линейные омические элементы (резисторы) с сопро-

тивлением  $R$ , хорошо известно:  $I = (6/5R)U_0$  [26–29], и даже обобщено на  $n$ -мерный куб [26, 30, 31].

## 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ТРЕХ ДИОДОВ ЧАЙЛЬДА–ЛЕНГМЮРА

Рассмотрим цепь постоянного тока в форме куба, в ребрах которого установлены одинаковые односторонние диоды ЧЛ, имеющие первеансы –  $P_1, \dots, 12 = P$  (рис. 1). Необходимо вывести формулу для ВАХ цепи между узлами  $A$  и  $G$ , когда узел  $A$  заземлен, а на узел  $G$  подан потенциал  $U_0$ .

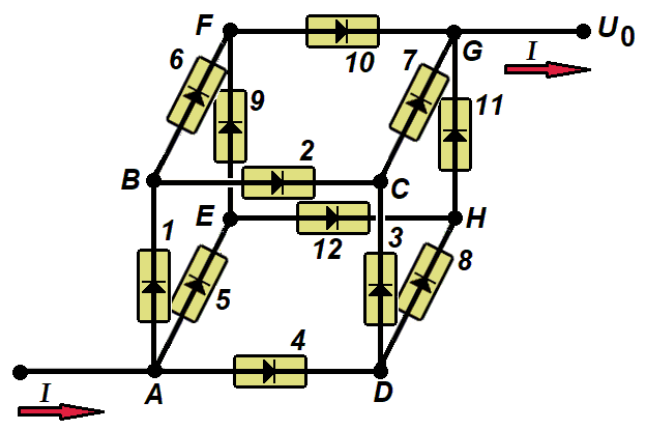


Рис. 1. Схема кубической цепи с диодами ЧЛ в ребрах:  $A, B, \dots, H$  – обозначения узлов цепи,  $1, \dots, 12$  – нумерация диодов ЧЛ, стрелки показывают направление тока.

Для решения поставленной задачи сначала выведем ВАХ участков цепи с параллельным и последовательным включениями трех, вообще говоря, различных диодов с первеансам  $P_{1,2,3}$  (рис. 2а, 2б).

Несложно записать выражение для общего тока между заземленным контактом и контактом с по-

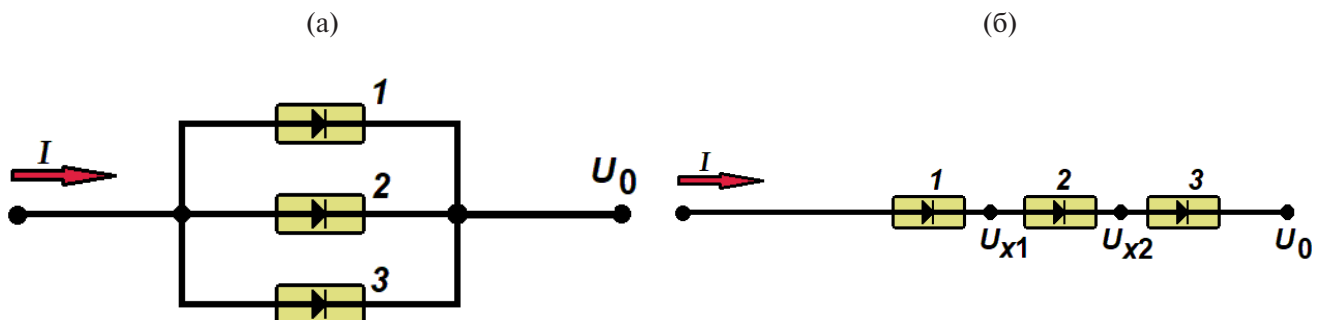


Рис. 2. Схемы параллельного (а) и последовательного (б) соединения участков цепи с тремя диодами ЧЛ:  $1, \dots, 3$  – диоды ЧЛ с первеансами  $P_{1,2,3}$ ;  $U_{x1}, U_{x2}, U_0$  – потенциалы узлов.

тенциалом  $U_0$  для параллельного соединения, представленного на рис. 2а:

$$I = P_1 U_0^{3/2} + P_2 U_0^{3/2} + P_3 U_0^{3/2} = (P_1 + P_2 + P_3) U_0^{3/2}. \quad (3)$$

Отсюда получаем, что первеанс параллельного соединения трех диодов ЧЛ равен сумме их первеансов:

$$P = P_1 + P_2 + P_3. \quad (4)$$

Этот вывод справедлив и в случае любого количества параллельно соединенных диодов ЧЛ.

Немного сложнее найти ВАХ для последовательного соединения (рис. 2б). Для этого сначала нужно найти выражение для потенциалов  $U_{x1}$  и  $U_{x2}$  в узлах соединения диодов ЧЛ. Для этого воспользуемся первым законом Кирхгофа, применяемого к этим узлам, в результате получим систему уравнений

$$P_1 U_{x1}^{3/2} = P_2 (U_{x2} - U_{x1})^{3/2} = P_3 (U_0 - U_{x2})^{3/2}. \quad (5)$$

Если возвести в степень  $2/3$  эти уравнения, то они становятся линейными относительно неизвестных  $U_{x1}$  и  $U_{x2}$ . В итоге система имеет единственное решение

$$U_{x1} = \frac{(P_2 P_3)^{2/3}}{(P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1)^{2/3}} U_0;$$

$$U_{x2} = \frac{(P_1^{2/3} + P_2^{2/3}) P_3^{2/3}}{(P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1)^{2/3}} U_0. \quad (6)$$

Тогда ВАХ последовательного соединения трех диодов ЧЛ запишется в виде

$$I = P_1 U_{x1}^{3/2} = \frac{P_1 P_2 P_3}{P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_1} U_0^{3/2}. \quad (7)$$

Отметим, что ВАХ (6) симметрична относительно перестановки индексов у коэффициентов  $P_i$ . Из этого следует, что при любой перестановке диодов ЧЛ в схеме рис. 2б выражение для ВАХ (6) не изменится.

### 3. КУБИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ

#### 3.1. Декомпозиция кубической цепи

Объемная цепь на рис. 1 не может быть изображена на плоскости в виде схемы без пересечения контактных линий. Для ее упрощения проведем известную процедуру ее декомпозиции методом эквивалентных узлов [32].

Следует отметить, что узлы  $B$ ,  $D$  и  $E$  на рис. 1 находятся в одинаковых условиях вследствие симметрии, так как первеансы всех элементов цепи одинаковы. Следовательно, электрические потенциалы этих узлов равны, и их без ущерба для работы всей цепи можно соединить общим проводником накоротко. Также можно соединить проводником и другую тройку узлов —  $C$ ,  $F$ ,  $H$ . В результате схему цепи, представленную на рис. 1, можно изобразить на плоскости (рис. 3).

#### 3.2. Вычисление ВАХ кубической цепи

Как видно, цепь состоит из трех последовательно соединенных фрагментов I...III. Во фрагментах I и III имеются по три параллельных диода ЧЛ, а в фрагменте II — шесть параллельных таких диодов. Следовательно, согласно (3)  $P_I = P_{III} = 3P$  и  $P_{II} = 6P$ . Подставив рассчитанные коэффициенты фрагментов в (7) и проведя несложные алгебраические вычисления, получим ВАХ кубической цепи, в ребрах которой установлены одинаковые нелинейные ЧЛ-элементы, в виде

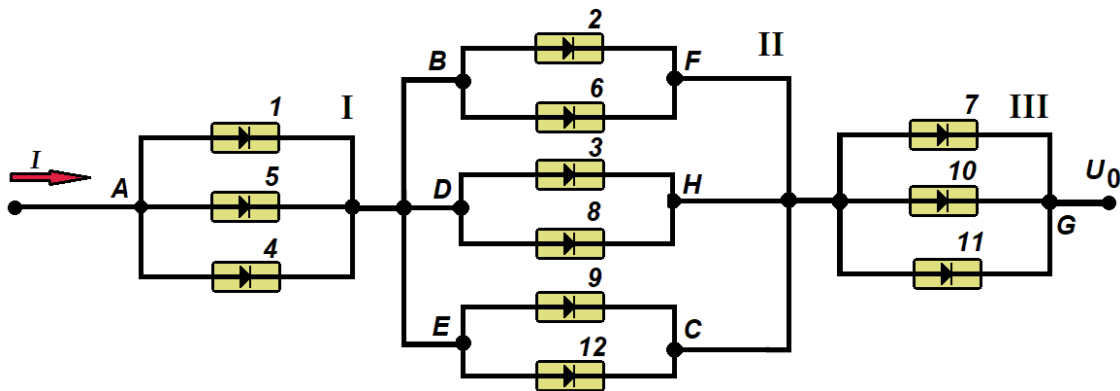


Рис. 3. Схема — результат декомпозиции кубической цепи: I...III — фрагменты цепи;  $A, B \dots H$  — узлы цепи, 1...12 — диоды ЧЛ (исходная схема на рис. 1).

$$I = \frac{6}{5} PU_0^{3/2} = 1.2 PU_0^{3/2}. \quad (8)$$

И окончательно получаем, что первеанс такого куба равен

$$P_{\Sigma} = \frac{6}{5} P.$$

Это значение — основной результат данной работы. Отметим, что формулы для первеанса (8) и для проводимости омической цепи из [26–29] оказались с одинаковым коэффициентом (множитель 6/5). Данное обстоятельство указывает на то, что множитель является универсальным для одного и того же графа цепи и не зависит от вида нелинейности ВАХ каждого отдельного элемента.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе выведена точная явная формула для ВАХ кубической цепи постоянного тока, в ребрах которого установлены одинаковые нелинейные диоды ЧЛ. Из формулы следует, что общий первеанс такого куба — 6/5 от первеансов диодов. Для получения этого значения использована процедура декомпозиции сложных электрических цепей методом эквивалентных узлов. Формула позволит легко оценивать электротехнические параметры (режимы электропитания) больших сетей, содержащих такие кубические ячейки с диодами ЧЛ любой другой природы. Для этого каждую кубическую ячейку в большой сети можно представлять эквивалентным нелинейным элементом, имеющим ВАХ (7).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Child C. D. // Phys. Rev. Ser. I. 1911. V. 32. № 5. P. 492.
2. Langmuir I. // Phys. Rev. 1913. V. 2. № 6. P. 450.
3. Bull C. S. // J. Inst. Electr. Engineers, Pt III: Radio and Comm. Eng. 1948. V. 95. № 33. P. 17.
4. Kompfner R. // J. British Inst. Radio Engineers. 1947. V. 7. № 3. P. 117.
5. Liu L., Li L. M., Zhang X. P. et al. // IEEE Trans. 2007. V. PS-35. № 2. P. 361.
6. Дубинов А. Е., Михеев К. Е., Селемир В. Д., Судовцов А. В. // Изв. вузов. Физика. 1999. Т. 42. № 6. С. 67.
7. Clark J. J., Linke S. // IEEE Trans. 1971. V. ED-18. № 5. P. 322.
8. Wittmaack K. // Nucl. Instrum. Meth. 1974. V. 118. № 1. P. 99.
9. Degond P., Parzani C., Vignal V. H. // Math. Comput. Modelling. 2003. V. 38. № 10. P. 1093.
10. Weber B. V., Boller J. R., Colombant D. G. et al. // Laser and Part. Beams. 1987. V. 5. № 3. P. 537.
11. Abdallah N. B., Degond P., Mehats F. // Phys. Plasmas. 1998. V. 5. № 5. P. 1522.
12. Sheridan T. E., Goree J. A. // IEEE Trans. 1989. V. PS-17. № 6. P. 884.
13. Farouki R. T., Dalvie M., Pavarino L. F. // J. Appl. Phys. 1990. V. 68. № 12. P. 6106.
14. Sheridan T. E. // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. № 9. P. 3507.
15. Benilov M. S. // Plasma Sources Sci. Technol. 2009. V. 18. № 1. P. 014005.
16. Lisovskiy V. A., Derevianko V. A., Yegorenkov V. D. // Vacuum. 2014. V. 103. № 1. P. 49.
17. Zhang P., Valfells A., Ang L. K. et al. // Appl. Phys. Rev. 2017. V. 4. № 1. P. 011304.
18. Tong C., Kozarsky E. S., Kim J. et al. // Mater. Sci. Semicond. Proc. 2018. V. 82. № 1. P. 92.
19. Chow K. K., Maddix H. S., Chorney P. // Appl. Phys. Lett. 1967. V. 10. № 9. P. 256.
20. Nath C., Kumar A. // J. Appl. Phys. 2012. V. 112. № 9. P. 093704.
21. Tan J. H., Anderson W. A. // Solar Energy Materials & Solar Cells. 2003. V. 77. № 3. P. 283.
22. Qasrawi A. F., Yaseen T. R., Eghbariy B., Gasanly N. M. // Acta Phys. Polonica A. 2012. V. 122. № 1. P. 152.
23. Guedes V. F., Nobrega K. Z., Ramos R. V. // IEEE Trans. 2022. V. ED-69. № 10. P. 5787.
24. Dubinov A. E., Kitayev I. N. // IEEE Trans. 2016. V. PS-44. № 10. P. 2376.
25. Дубинов А. Е. // Электричество. 2023. № 1. С. 57.
26. Narraway J. J. // Electr. Lett. 1994. V. 30. № 24. P. 2004.
27. Steenwijk van F. J. // Amer. J. Phys. 1998. V. 66. № 1. P. 90.
28. Beltrán R., Gómez F., Franco R. et al. // Lat. Am. J. Phys. Educ. 2013. V. 7. № 4. P. 621.
29. Perrier F., Girault F. // Results Phys. 2022. V. 36. № 1. P. 105443.
30. Yang Y. X., Low J. H. // IEE Proc.-Circuits Dev. Syst. 1997. V. 144. № 1. P. 51.
31. Pippenger N. // Math. Mag. 2010. V. 83. № 5. P. 331.
32. Хацет А. // Квант. 1972. № 2. С. 54.

## PERVEANCE OF CUBIC CIRCUIT CONTAINING CHILD-LANGMUIR DIODES IN ITS EDGES

A. E. Dubinov<sup>a, b</sup>

<sup>a</sup>*Russian Federal Nuclear Center All-Russian Research Institute of Experimental Physics,  
Prosp. Mira, 37, Sarov, Nizhny Novgorod oblast, 607188 Russia*

<sup>b</sup>*National Research Nuclear University Moscow Engineering Physics Institute (MEPhI),  
Sarov Physicotechnical Institute,  
Str. Dukhova, 6, Sarov, Nizhny Novgorod oblast, 607189 Russia  
E-mail: dubinov-ae@yandex.ru*

Received September 25, 2023, revised November 21, 2023, accepted January 25, 2024

A non-linear electric circuit in a cube-like form is studied. Similar Child–Langmuir diodes are connected in its edges. The procedure of the circuit decomposition by the method of equivalent nodes is carried out. As a result, an exact formula of the general circuit perveance was derived. The formula can be used to estimate volt-ampere characteristic (VAC) of tetragonal networks with cubic elementary cells containing Child–Langmuir diodes.

**Keywords:** Child–Langmuir diode, perveance, cubic circuit



## РАДИОФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ТВЕРДОМ ТЕЛЕ И ПЛАЗМЕ

УДК 537.874; 537.624

### ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ПРЕЦЕССИЮ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ В УСЛОВИЯХ ОРИЕНТАЦИОННОГО ПЕРЕХОДА

© 2024 г. В. С. Власов<sup>a</sup>, В. Г. Шавров<sup>b</sup>, В. И. Щеглов<sup>b, \*</sup>

<sup>a</sup>Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина,  
Октябрьский просп., 55, Сыктывкар, 167001 Российская Федерация

<sup>b</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, корп. 7, Москва, 125009 Российская Федерация

\*E-mail: vshcheg@cplire.ru

Поступила в редакцию 02.08.2022 г.

После доработки 05.04.2023 г.

Принята к публикации 23.05.2023 г.

Рассмотрена прецессия положения равновесия намагниченности в среде с одноосной анизотропией второго и четвертого порядков. В геометрии нормально намагниченной ферритовой пластины найдены условия ориентационного перехода, необходимые для возбуждения прецессии равновесия. Получены зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени. Построены прецессионные портреты для случаев анизотропии второго и четвертого порядков. Показано, что оба они имеют вид большого кольца, заполненного по образующей малыми кольцами. Показано, что при достаточно большой величине анизотропии четвертого порядка в распределении малых колец наблюдаются сгущения, соответствующие изломам зависимостей поперечных компонент намагниченности от времени.

**Ключевые слова:** прецессия намагниченности, анизотропия, ориентационный переход

**DOI:** 10.31857/S0033849424120056, **EDN:** HNCKIA

#### ВВЕДЕНИЕ

Магнитные кристаллы и пленки находят широкое применение в устройствах аналоговой обработки информации (СВЧ) диапазона [1–5]. Главным рабочим элементом таких устройств является образец феррита, намагниченный постоянным полем. Не все устройства способны работать на высоком уровне мощности, так как линейной полностью упорядоченной обработке сигнала мешает параметрическое возбуждение обменных спиновых волн [6–8]. Исключение такого возбуждения достигается выбором геометрии нормально намагниченной ферритовой пластины [9, 10].

Особый интерес представляет применение магнитостатических волн в случае, когда вектор намагниченности находится в условиях ориентационного перехода. Эти условия обеспечивают широкий диапазон рабочих частот — от сотен мегагерц до десятков гигагерц, причем волны могут иметь как прямой, так и обратный характер [11, гл. 12–14].

В работе [12, гл. 9, 10] было показано, что в условиях ориентационного перехода, т.е. когда

вектор намагниченности в стационарном состоянии отклонен от направления поля, вынужденная прецессия намагниченности приобретает характер прецессии положения равновесия, которая является как бы прецессией второго порядка по отношению к вектору намагниченности. Прецессионный портрет имеет вид большого кольца, заполненного по образующей малыми кольцами.

Магнитная анизотропия накладывает существенные особенности на такую прецессию, что проявляется в виде сгущений и разрежений малых колец на прецессионном портрете. Рассмотренные в цитированных работах случаи одноосной анизотропии касаются только анизотропии второго порядка, когда потенциал имеет конфигурацию квадратичной параболы. В то же время в ряде экспериментов по распространению магнитостатических волн в пленках с доменами проявляется одноосная анизотропия более высоких порядков, в первую очередь — четвертого [11, с. 296 и 304; 13–15].

Данная работа посвящена более подробному рассмотрению влияния одноосной анизотропии

четвертого порядка на прецессию положения равновесия в условиях ориентационного перехода.

## 1. ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

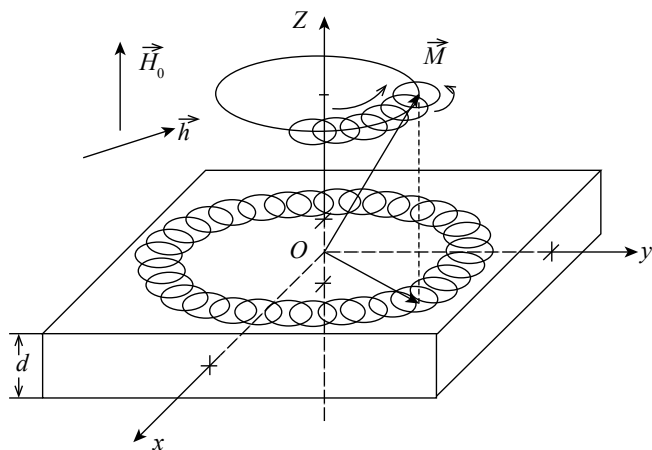


Рис. 1. Схема геометрии прецессии положения равновесия намагниченности.

Рассмотрим прецессию положения равновесия намагниченности в геометрии, совпадающей с приведенной в работах [12, гл. 9, 10; 16, рис. 1]. Схема геометрии представлена на рис. 1.

Магнитная пластина толщиной  $d$  намагничена по нормали постоянным полем  $\vec{H}_0$ . В плоскости пластины приложено переменное поле  $\vec{h}$ , имеющее круговую поляризацию. Плоскость  $Oxy$  декартовой системы координат  $Oxyz$  совпадает с плоскостью пластины. Внешнее поле  $\vec{H}_0$  предполагается меньшим поля размагничивания  $4\pi M_0$ , так что вектор намагниченности  $\vec{M}$  в равновесном положении отклонен от нормали к плоскости пластины, т.е. находится в условиях ориентационного перехода. Поляризованное по кругу поле  $\vec{h}$  заставляет вектор намагниченности прецессировать вокруг положения равновесия, которое само в свою очередь приходит в прецессионное движение по большому кругу. Получающийся в результате прецессионный портрет, представляющий собой большое кольцо, заполненное по образующей малыми кольцами, показан на рис. 1 в плоскости пластины.

Положим, что приложенное к пластине поле имеет вид

$$\vec{H}_e = \{h_x; h_y; H_z\}, \quad (1)$$

где  $H_z = H_0 - H_p + H_a$  — эффективное поле, действующее по нормали к плоскости пластины. Это поле состоит из внешнего поля  $H_0$ ,

поля размагничивания  $H_p$ , направленного против внешнего поля, а также поля анизотропии  $H_a$ , ориентированного соосно с внешним полем. Поле размагничивания стремится «уложить» вектор намагниченности в плоскость пластины, а поле  $H_0$  в сочетании с  $H_a$  — «вывернуть» вектор из этой плоскости. Если суммарной силы  $H_0$  и  $H_a$  не хватает, чтобы выстроить намагниченность точно вдоль своей оси (т.е.  $Oz$ ), то ориентационный переход вектора намагниченности от плоскости пластины к направлению поля остается незаконченным и равновесный вектор  $\vec{M}$  отклоняется от оси  $Oz$  на угол  $\theta$ , определяемый выражением

$$\theta_0 = \arccos \left( \frac{H_0 + H_a}{4\pi M_0} \right). \quad (2)$$

В таких условиях прецессия намагниченности определяется решением уравнения Ландау—Лифшица [1–5, 16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_x}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \left[ (m_y + \alpha m_x m_z) H_{ez} - \right. \\ & \left. - (m_z - \alpha m_y m_x) H_{ey} - \right. \\ & \left. - \alpha (m_y^2 + m_z^2) H_{ex} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_y}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \left[ (m_z + \alpha m_y m_x) H_{ex} - \right. \\ & \left. - (m_x - \alpha m_z m_y) H_{ez} - \right. \\ & \left. - \alpha (m_z^2 + m_x^2) H_{ey} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_z}{\partial t} = & -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \left[ (m_x + \alpha m_z m_y) H_{ey} - \right. \\ & \left. - (m_y - \alpha m_x m_z) H_{ex} - \right. \\ & \left. - \alpha (m_x^2 + m_y^2) H_{ez} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где  $m_{x,y,z}$  — компоненты нормированной на  $M_0$  намагниченности,  $\gamma$  — гиромагнитная постоянная ( $\gamma > 0$ ),  $\alpha$  — параметр затухания Гильберта.

## 2. ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ АНИЗОТРОПИИ

Будем полагать, что анизотропия является одноосной, ось которой совпадает с осью  $Oz$ . В общем случае плотность энергии одноосной анизотропии может быть записана в виде [12, с. 191]:

$$U_a = \alpha_2 m_z^2 + \alpha_4 m_z^4 + \dots + \alpha_{2n} m_z^{2n} + \dots, \quad (6)$$

где  $\alpha_{2n}$  — константы анизотропии порядка  $2n$ ,  $m_z$  — нормированная на  $M_0$  компонента намагниченности:  $m_z = M_z/M_0$ . В такой

записи присутствуют слагаемые только четных порядков, так как нечетные антисимметричны по поперечным осям. Ограничимся далее анизотропией только второго и четвертого порядков. С учетом того, что  $m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1$ , а также в силу симметрии полагая  $m_x = m_y$ , приведем (6) к виду

$$U_a = K_2 m_x^2 + K_4 m_x^4, \quad (7)$$

где  $K_2$  и  $K_4$  — константы анизотропии соответственно второго и четвертого порядков.

Как видим, оба слагаемых представляют собой параболы, ветви которых при увеличении  $m_x$  неограниченно возрастают (во всяком случае до  $m_x \rightarrow 1$ ). Если обе константы положительны, то потенциал  $U_a$  имеет единственный минимум, соответствующий  $m_x = 0$ , т.е. намагниченность в равновесии будет выстроена точно вдоль оси  $Oz$ . Однако если константа  $K_4$  положительна, а  $K_2$  отрицательна, то слагаемые потенциала действуют в противоположных направлениях, так что возможно существование двух минимумов, разделенных максимумом.

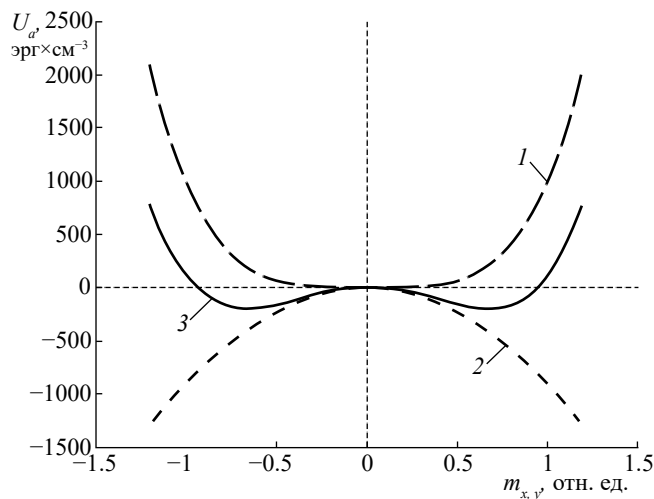


Рис. 2. Зависимость плотности энергии анизотропии различных порядков от нормированных поперечных компонент намагниченности (масштаб условный): 1 — четвертый порядок; 2 — второй порядок; 3 — сумма четвертого и второго порядков.

Такая ситуация представлена на рис. 2, где кривая 1 соответствует второму слагаемому потенциала (7) с положительной константой  $K_4$ , а кривая 2 — первому слагаемому (7) с отрицательной константой  $K_2$ . Кривая 3 соответствует сумме первых двух, так что на ней четко наблюдаются два минимума, разделенные максимумом.

Из рис. 2 видно, что при постоянном уровне потенциала, превышающем нулевое значение, ветви кривой 3 расходятся в стороны значительно

сильнее, чем кривой 1, а ниже нулевого уровня на кривой 3 имеются два минимума, на кривой 1 вообще отсутствующие. Таким образом, равновесный угол отклонения вектора намагниченности от оси  $Oz$  в условиях двух констант разных знаков может значительно превышать подобный угол при одной константе.

### 3. ПРЕЦЕССИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим теперь свойства прецессии положения равновесия при таком характере анизотропии. Будем использовать следующие параметры:  $4\pi M_0 = 280$  Гс,  $H_0 = 185$  Э,  $h_{x,y} = 3$  Э,  $F = 100$  МГц,  $\alpha = 0.3$ ,  $K_2 = 900$  эрг·см<sup>-3</sup>,  $K_4 = -1000$  эрг·см<sup>-3</sup>. Поле анизотропии второго порядка равно:  $H_{a2} = -2K_2/M_0$ , откуда при значениях  $K_2 = 900$  эрг·см<sup>-3</sup>,  $M_0 = 22.28$  Гс получаем  $H_{a2} = -80.8$  Э.

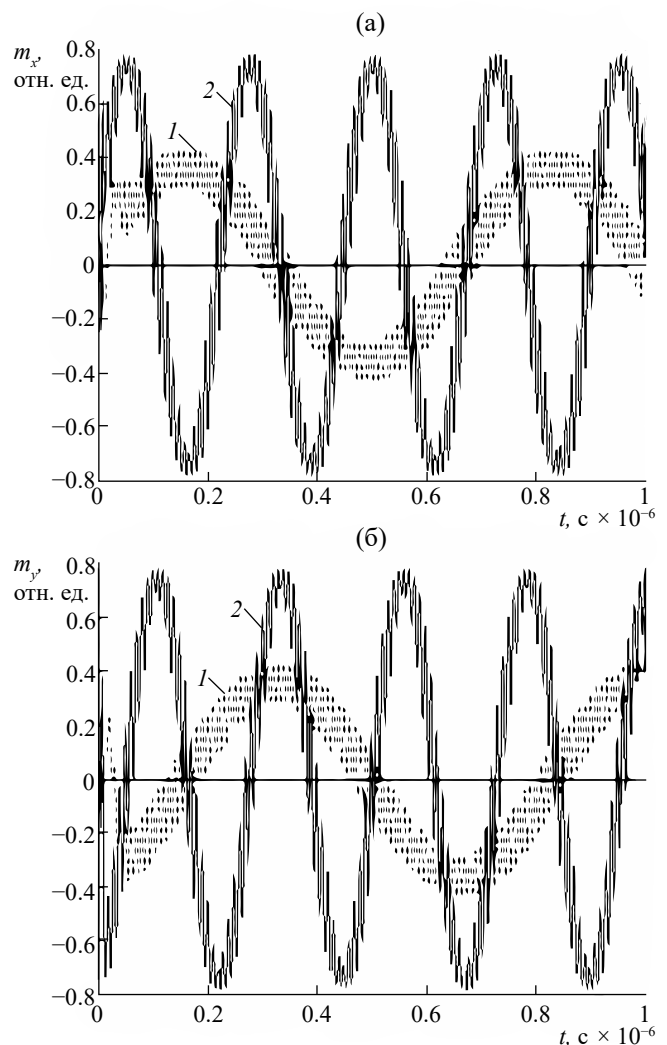


Рис. 3. Колебания компонент намагниченности  $m_x$  (а) и  $m_y$  (б) во времени при различных видах анизотропии: кривая 1 —  $K_2 \neq 0$ ,  $K_4 = 0$ ; кривая 2 —  $K_2 = 0$ ,  $K_4 \neq 0$ .

Развертки колебаний по времени показаны на рис. 3а ( $m_x$ ) и рис. 3б ( $m_y$ ). На этих рисунках рассмотрены два крайних случая: первый при наличии анизотропии обоих порядков (кривые 1), второй — когда оба вида анизотропии отсутствуют (кривые 2).

Из рисунка видно, что колебания обеих компонент в каждом из рассмотренных случаев имеют одинаковый вид с учетом сдвига по фазе на четверть периода, что соответствует круговому характеру поляризации прецессии намагниченности. Амплитуда колебаний в отсутствие анизотропии (кривые 2) значительно превышает амплитуду колебаний с анизотропией (кривые 1). Частота в отсутствие анизотропии также значительно выше, чем с анизотропией. Такое различие обусловлено тем, что в обоих случаях постоянное поле одно и то же (185 Э), тогда как анизотропия сильно различается. В работе [12, с. 400, рис. 9.7] показано, что период прецессии равновесия при увеличении постоянного поля вплоть до критического значения, когда намагниченность выстраивается вдоль поля, увеличивается, т.е. частота уменьшается. Критическое значение поля в отсутствие анизотропии составляет 280 Э. Поэтому уменьшение поля до принятой здесь величины 185 Э приводит к значительному увеличению частоты.

Вместе с тем уменьшение поля с 280 Э до принятого здесь значения 185 Э приводит к значительно большему отклонению намагниченности от нормали, чем наблюдалось в [12, рис. 9.2] (там — около  $15^\circ$ , здесь — около  $30^\circ$ ). Поэтому и размах колебаний здесь значительно больше (там — около 0.4, здесь — до 0.8). Однако из обоих рисунков видно, что введение анизотропии приводит зависимости к виду, как по частоте, так и по амплитуде, значительно более близкому к соответствующему полю 280 Э [12, рис. 9.2].

Таким образом, снижение поля с 280 до 185 Э приводит к увеличению как размаха, так и частоты колебаний, а введение анизотропии возвращает то и другое на место. Таким образом, введение анизотропии в значительной степени как бы компенсирует уменьшение поля. Такая компенсация происходит за счет уменьшения критического значения поля, связанного здесь с анизотропией. В отсутствие анизотропии критическое поле равно полю размагничивания  $4\pi M_0$ , т.е. 280 Э. Поле анизотропии второго порядка равно:  $H_{a2} = -2K_2/M_0$ , откуда при значениях  $K_2 = 900 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ ,  $M_0 = 22.3 \text{ Гс}$  получаем  $H_{a2} = -81 \text{ Э}$ . Поскольку поле анизотропии второго порядка действует в том же направлении, что и внешнее поле, то критическое поле уменьшается как раз на эту величину, откуда получаем значение 199 Э.

Таким образом, если в отсутствие анизотропии критическое поле равно 280 Э, то здесь оно составляет всего 199 Э. Контрольная проверка по критерию стремления периода к бесконечности

полностью подтверждает это значение. При этом промежуток между критическим значением поля и тем, при котором были получены зависимости, подобные приведенным на рис. 3 и 4, в отсутствие анизотропии составлял 15 Э, а в присутствии 14 Э, т.е. практически ту же самую величину, что и дало

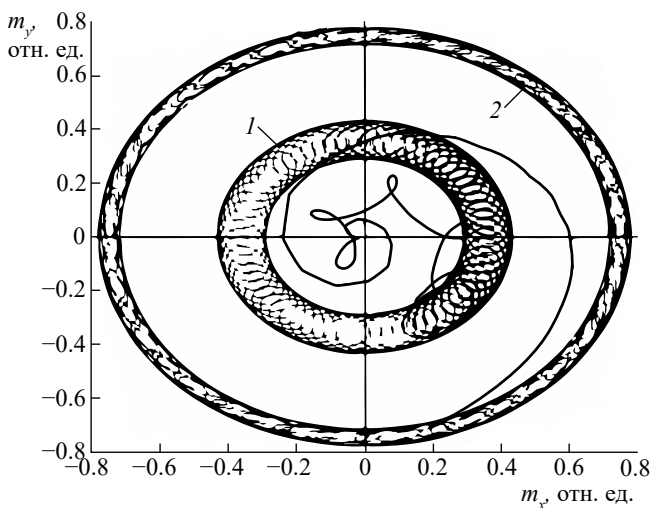


Рис. 4. Прецессионные портреты колебаний намагниченности при различных видах анизотропии: кривая 1 —  $K_2 \neq 0$ ,  $K_4 \neq 0$ ; кривая 2 —  $K_2 = 0$ ,  $K_4 = 0$ .

одинаковое отклонение равновесного положения намагниченности от нормали и, как следствие, уменьшение амплитуды и увеличение периода до практически той же величины.

На рис. 4 приведены прецессионные портреты колебаний намагниченности при различных видах анизотропии, построенные в соответствии с предыдущими рисунками.

Из рисунка видно, что оба портрета представляют собой правильные окружности, заполненные по периферии малыми кольцами. По всей длине образующих окружностей кольца распределены равномерно. Диаметр окружности 1 меньше диаметра окружности 2 в соответствии с соотношением амплитуд колебаний, приведенных на рис. 3а и 3б. Ширина образующих окружностей также полностью соответствует амплитуде высокочастотных колебаний на тех же рисунках. Таким образом, оба портрета имеют классический вид, так что наличие анизотропии проявляется только в количественных характеристиках, рассмотренных выше.

#### 4. ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Приведенные в предыдущем разделе данные соответствуют довольно малой величине константы



анизотропии четвертого порядка  $K_4$ , так что основной вид кривых определялся величиной константы второго порядка  $K_2$ . Рассмотрим теперь роль анизотропии четвертого порядка более подробно.

В предыдущих разделах константы полагались равными  $K_2 = 900 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ ,  $K_4 = -1000 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ . Теперь константу  $K_2$  оставим той же самой, а  $K_4$  увеличим до величины  $15000 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ . Провер-

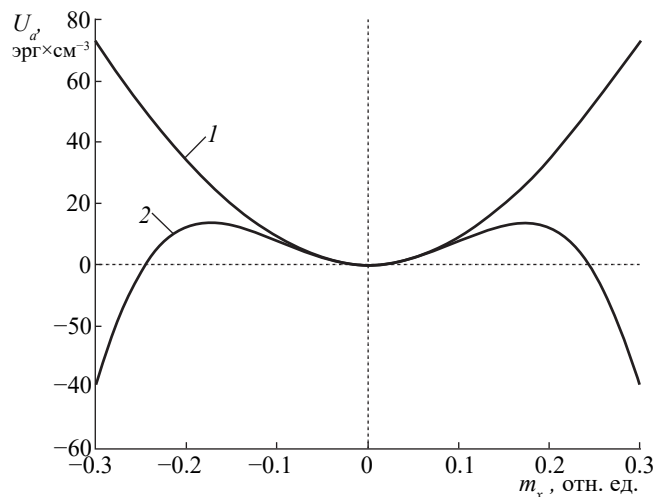


Рис. 5. Зависимости плотности энергии анизотропии обоих порядков от нормированной поперечной компоненты намагниченности  $m_x$  при различных значениях констант: кривая 1 —  $K_2 = 900 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ ,  $K_4 = -1000 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ ; кривая 2 —  $K_2 = 900 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ ,  $K_4 = -15000 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$ .

ка показывает, что при этом критическое значение поля остается равным 199 Э. Таким образом, в дальнейшем рассмотрении постоянное поле  $H_0$  зададим на уровне 190 Э.

На рис. 5 приведены зависимости плотности энергии анизотропии обоих порядков от нормированной поперечной компоненты намагниченности  $m_x$  при различных значениях констант.

Кривая 1 соответствует случаю, рассмотренному выше, кривая 2 — при увеличенном значении константы анизотропии четвертого порядка. Отметим, что здесь знаки констант обратные по сравнению с приведенными на рис. 2. То есть здесь в любом случае кривая имеет только один минимум, однако при большом значении константы  $K_4$  (кривая 2) по обе стороны от минимума имеются два максимума, после чего зависимость уходит на минус бесконечность. Контрольная проверка показывает, что такой выбор знаков констант не является единственно возможным, так что при обоих обратных знаках (подобно выбору на рис. 3) описываемые далее явления также имеют место, хотя

и в несколько другом соотношении величин констант. Здесь такие знаки выбраны для большей наглядности, однако авторы полагают, что вопрос о знаках мог бы составить предмет для отдельного рассмотрения.

На рис. 6а показаны колебания компоненты намагниченности  $m_x$  во времени при двух различных значениях константы анизотропии четвертого порядка. Кривая 1 соответствует прежнему значению константы, кривая 2 — увеличенному. Амплитуда и период кривой 2 определяются теми же параметрами, что кривой 1 на рис. 3, однако здесь поле больше на 5 Э (там — 185, здесь 190 Э при том же значении критического поля), так что период увеличился в согласии с [12, рис. 9.7], а амплитуда осталась прежней.

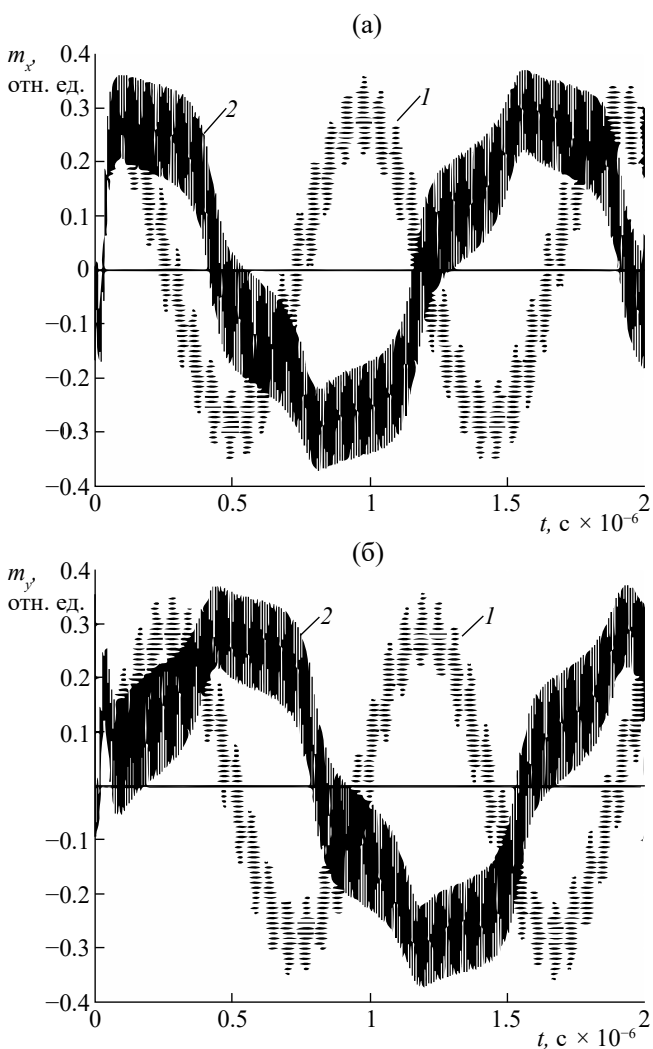


Рис. 6. Колебания компонент намагниченности  $m_x$  (а) и  $m_y$  (б) во времени при различных значениях константы анизотропии четвертого порядка:  $-1000$  (1) и  $-15000 \text{ эрг} \times \text{см}^{-3}$  (2); для наглядности полное время развертки по сравнению с рис. 3 увеличено в два раза.



На рис. 6б представлены колебания компоненты намагниченности  $m_x$  во времени при тех же условиях, что приняты при построении рис. 6а. Видно, что характер всех колебаний тот же, однако здесь, как и при сопоставлении рис. 3а и 3б, имеет место сдвиг по фазе на четверть периода, что также обусловлено круговым характером поляризации прецессии намагниченности.

Из рис. 6а и 6б видно, что введение анизотропии четвертого порядка сохраняет периодический характер колебаний, однако здесь период увеличивается примерно в два раза, хотя критическое поле остается тем же. То есть анизотропия четвертого порядка замедляет прецессию равновесного положения намагниченности. Характерным моментом является изломанный характер кривых 2 на обоих рисунках. Контрольная проверка показывает, что изломы обусловлены влиянием именно константы  $K_4$  и при изменении  $K_2$  остаются

всегда, когда прецессия намагниченности вообще имеет место. Из обоих рисунков можно видеть, что на каждом периоде кривых 2 наблюдаются четыре равномерно расставленных расширения и столько же сужений, что и дает рисунок изломов.

На рис. 7а и рис. 7б приведены прецессионные портреты для тех же двух случаев. Портрет на рис. 7а соответствует малому значению константы  $K_4$ , на рис. 7б — большому значению той же константы.

Из сравнения рис. 7а и 7б видно, что при малом значении константы  $K_4$  заполнение большого круга прецессии малыми кольцами полностью однородно, тогда как при большом значении той же константы на заполнении большого круга имеются четко наблюдаемые четыре сгущения малых колец. Из сопоставления рис. 6а и 6б видно, что сгущения как раз соответствуют изломанному характеру зависимостей компонент намагниченности от времени.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена прецессия положения равновесия намагниченности в среде с одноосной анизотропией второго и четвертого порядков. В геометрии нормально намагниченной ферритовой пластины найдены условия ориентационного перехода, необходимые для возбуждения прецессии равновесия. Получены уравнения движения намагниченности, учитывающие нелинейный характер явления.

Приведена плотность энергии анизотропии второго и четвертого порядков. Показано, что различие знаков констант того и другого порядков приводит к формированию потенциала, обладающего двумя минимумами, разделенными максимумом. Рассмотрена прецессия положения равновесия намагниченности в условиях преобладания константы второго порядка. Получены зависимости колебаний поперечных компонент намагниченности от времени. Отмечено, что такие зависимости имеют вид совокупности синусоиды с большим периодом, на которую наложены малоамплитудные колебания с периодом, соответствующим частоте возбуждения. Отмечен сдвиг по фазе колебаний компонент намагниченности по поперечным осям координат, соответствующий круговой поляризации прецессии. Установлено, что при одном и том же значении поля в отсутствие анизотропии амплитуда основной синусоиды прецессии значительно превышает амплитуду прецессии при наличии анизотропии. Показано, что такое соотношение амплитуд обусловлено уменьшением за счет анизотропии критического поля, соответствующего окончанию ориентационного перехода.

Построены прецессионные портреты для случаев отсутствия и наличия анизотропии второго порядка. Показано, что оба они имеют вид большого кольца, заполненного по образующей малыми кольцами, причем диаметр большого кольца

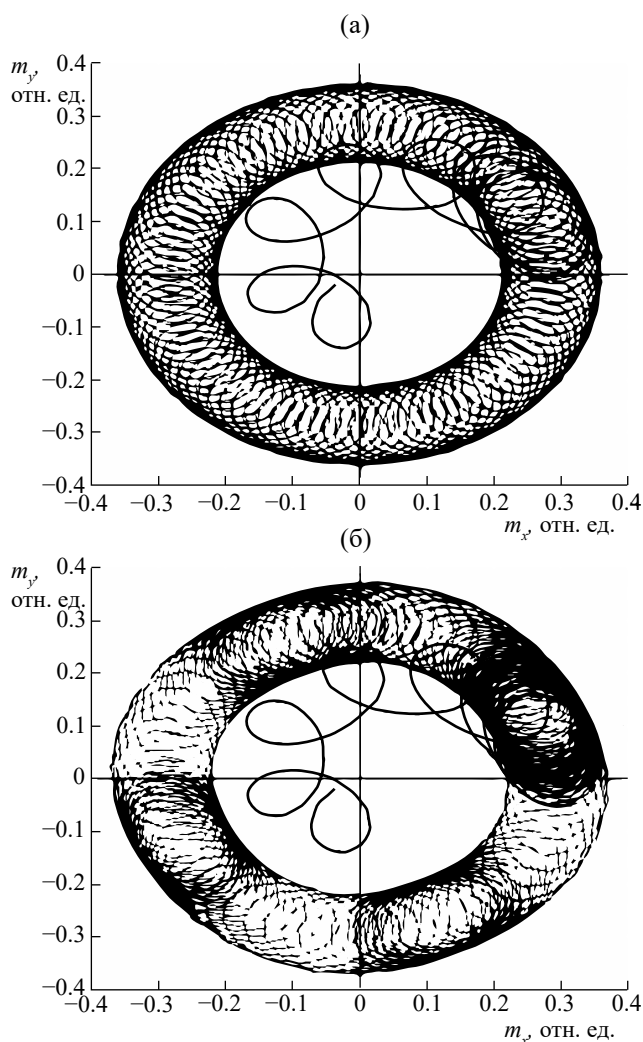


Рис. 7. Прецессионный портрет колебаний намагниченности при малом (а) и большом (б) значениях константы анизотропии четвертого порядка:  $K_4 = -1000$  (а) и  $-15000$  эрг·см<sup>-3</sup> (б).

в отсутствие анизотропии значительно превышает диаметр такого при ее наличии.

Рассмотрено влияние анизотропии четвертого порядка на характер прецессии равновесия. Показано, что анизотропия четвертого порядка приводит к возникновению изломов на зависимостях поперечных компонент намагниченности от времени.

Построены прецессионные портреты для малого и большого значения константы четвертого порядка. Показано, что в отсутствие анизотропии четвертого порядка заполнение большого кольца портрета малыми кольцами является полностью однородным, а при наличии анизотропии в распределении малых колец наблюдаются сгущения, соответствующие изломам зависимостей поперечных компонент намагниченности от времени. В расположении сгущений на портрете отмечена центральная симметрия четвертого порядка.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуревич А. Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1960.
2. Гуревич А. Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука, 1973.
3. Гуревич А. Г., Мелков Г. А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит, 1994.
4. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Магнитостатические волны в неоднородных полях. М.: Физматлит, 2016.
5. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах. М.: Физматлит, 2017.
6. Моносов Я. А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука, 1971.
7. Львов В. С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука, 1987.
8. Захаров В. Е., Львов В. С., Старобинец С. С. // Успехи физ. наук. 1974. Т. 114. № 4. С. 609.
9. Зильберман П. Е., Темиряев А. Г., Тихомирова М. П. // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 1. С. 281.
10. Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е., Темиряев А. Г., Тихомирова М. П. // ФТТ. 2000. Т. 42. № 6. С. 1062.
11. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Динамика намагниченности в условиях изменения ее ориентации. М.: Физматлит, 2019.
12. Шавров В. Г., Щеглов В. И. Ферромагнитный резонанс в условиях ориентационного перехода. М.: Физматлит, 2018.
13. Локк Э. Г. Магнитостатические волны в ферритовых пленках и структурах на их основе. Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: ИРЭ РАН, 2007. 280 с.
14. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. // ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 4. С. 1430.
15. Вашковский А. В., Локк Э. Г., Щеглов В. И. // ФТТ. 1999. Т. 41. № 11. С. 2034.
16. Власов В. С., Шавров В. Г., Щеглов В. И. // Журн. радиоэлектроники. 2021. № 3.  
<http://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.3.2>

## INFLUENCE OF FOURTH-ORDER ANISOTROPY ON PRECESSION OF THE MAGNETIZATION EQUILIBRIUM POSITION UNDER THE CONDITIONS OF ORIENTATIONAL TRANSITION

V. S. Vlasov<sup>a</sup>, V. G. Shavrov<sup>b</sup>, V. I. Shcheglov<sup>b, \*</sup>

<sup>a</sup>*Syktyvkar State University named after P. Sorokin,  
Oktyabrsky Prospekt, 55, Syktyvkar, 167001 Russian Federation*

<sup>b</sup>*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,  
Mokhovaya Str., 11, Build. 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

*\*E-mail: vshcheg@cplire.ru*

Received August 02, 2022, revised April 05, 2023, accepted May 23, 2023

The precession of the magnetization equilibrium position in a medium with uniaxial anisotropy of the second and fourth orders is considered. In the geometry of the normally magnetized ferrite plate the conditions of orientational transition necessary for excitation of precession of equilibrium are found. Time dependences of the fluctuations of the transverse components of the magnetization are obtained. Precession portraits for the cases of anisotropy of the second and fourth orders are constructed. It is shown that both of them have the form of a large ring filled along the formation by small rings. It is shown that at sufficiently large magnitude of the fourth-order anisotropy in the distribution of small rings, thickenings corresponding to fractures of the time dependences of the transverse magnetization components are observed.

*Keywords:* magnetization precession, anisotropy, orientational transition

## ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 004.932.1; 004.932.2; 004.942

# НЕЙРОМОРФНОЕ ДЕКОДИРОВАНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕТОДОМ СОГЛАСОВАННОЙ С ГРАНИЦАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

© 2024 г. В. А. Кершнер

*Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация*

*E-mail: vladkershner@mail.ru*

Поступила в редакцию 19.12.2023 г.

После доработки 20.05.2024 г.

Принята к публикации 25.05.2024 г.

Рассмотрены методы нейроморфного кодирования и декодирования больших объемов данных на основе моделирования известных нейромеханизмов восприятия информации. Исследованы известные механизмы зрительной системы, такие как агрегация отсчетов рецептивными полями, центрально-латеральное торможение и др. Разработана модель декодирования, реализующая функцию простых клеток первичной зрительной коры, отвечающих за пространственное восприятие контрастов стимулов. Предложена модель декодирования, позволяющая восстанавливать локальные границы объектов на изображении, улучшая при этом визуальное качество изображений в сравнении с качеством восстановления при классической билинейной интерполяции.

*Ключевые слова:* нейроморфные системы, выборочное представление, нейронное кодирование, система рецептивных полей, адаптивная интерполяция

**DOI:** 10.31857/S0033849424120064, **EDN:** HNBTVU

## ВВЕДЕНИЕ

Последние десятилетия из-за стремительного развития сети Интернет, многочисленных его сервисов и разработок в области искусственного интеллекта объем информации повышается экспоненциально. Вследствие такого роста также расширился арсенал механизмов по использованию этих данных. Однако вместе с этим появилось огромное число специфических проблем, связанных преимущественно с хранением, обработкой и передачей огромных объемов данных как между корпорациями, так и между людьми, что получило название проблема Больших данных.

Наиболее четко проблемы с Большими данными проявляются в отношении аудиовизуального контента, который является наиболее востребованным в сети Интернет — изображения в соцсетях, аудиоматериалы на сайтах электронных книг, видеоролики в видеохостингах и т.п. Согласно статистике, полученной за 2023 г., было сделано около 1.81 трлн цифровых изображений, что составляет около 5 млрд изображений в день. Стоит отметить, что большая часть этих изображений была создана с использованием мобильных устройств. Благодаря развитию CMOS-камер и увеличению памяти смартфонов среднестатистический пользователь

за 2023 г. создал и сохранил на своих устройствах порядка 3000 фотографий и видео. В свою очередь, развитие социальных сетей и мессенджеров привело к увеличению объемов обмена данными до уровня в 6.9 млрд изображений ежедневно [1].

Поскольку вопросы хранения данных в настоящее время достаточно эффективно решаются на основе достижений микроэлектроники, все большее внимание уделяется задаче эффективной их передачи между пользователями (устройствами). В данном вопросе в сравнении с прочими видами данных, видеоданные являются наиболее проблемными, поскольку подразумевают передачу большого объема информации по каналам, имеющим принципиально ограниченную пропускную способность. Данная проблема давно известна под названием эффект «бутылочного горлышка», когда отдельный элемент информационной системы ограничивает ее производительность в целом. Ограничение производительности приводит к увеличению времени передачи информации, что влечет дискомфорт пользователям системы. Отметим, что проблема была актуальной задолго до появления Больших данных и, по сути, стала основным стимулом при создании современной теории информации К. Шенноном и его коллегами. Следует отметить связанную с проблемой «бутылочного горлышка» теорию



скорости—погрешности (rate—distortion theory) [2]. К сожалению, на практике результаты этой теории дают только потенциально возможные характеристики производительности систем обмена информацией вместо реально достижимых.

К настоящему времени большинство способов решения отмеченной проблемы найдено на путях сжатия (возможно с потерями) данных. В частности, разработано огромное множество методов компрессии изображений, среди которых можно упомянуть арифметическое сжатие, метод Хаффмана, широко используемый JPEG (Joint Photographic Experts Group) и др., оперирующие пиксельным представлением изображения. Однако стоит отметить, что существуют и другие оптимальные практические решения проблемы пропускной способности информационных систем. Речь идет о нейросенсорных системах, представленных в первую очередь зрительной системой высших позвоночных животных и человека. Если сравнить эти системы с имеющимися искусственными, то можно выделить, что число рецепторов сетчатки глаза достигает порядка  $10^8$ , что аналогично количеству “байт” изображения, а число аксонов зрительного нерва, или емкости канала передачи информации, — около  $10^6$  [3], что указывает на стократную степень сжатия входных данных, полученных с сетчатки глаза, без заметных визуальных дефектов. Детальное обсуждение ряда вопросов по данной теме было представлено в работе [4], где приведены также многочисленные ссылки на материалы по теме.

Цель данной работы — анализ данных, полученных в области адаптации инспирированных механизмами зрительного восприятия процедур нейронного кодирования к проблемам оптимального кодирования и декодирования изображений, и создание нового метода по обработке графических данных.

## 1. ФОТООТСЧЕТНЫЕ ВЫБОРОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В основе предлагаемого метода лежит специальное представление изображений в виде набора фотоотсчетов, который моделирует результирующий поток случайных дискретных событий, зарегистрированных фоторецепторами сетчатки глаза, в ответ на воздействие непрерывно распределенной интенсивности излучения  $I(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Omega$ . Существующие системы формирования изображений, к примеру CMOS-камеры [5], формируют исходные изображения аналогичным образом, регистрируя отдельные фотоны и генерируя фототок в виде дискретных отсчетов. Представление сигналов в виде потоков событий и их статистическое описание с использованием двумерных точечных пуассоновских процессов можно найти в [6], в свою очередь, схожая модель таких сигналов

может быть получена с использованием разработанного в предыдущих наших работах понятия идеального устройства формирования изображения [4]. В основе представления лежит набор координат отсчетов — зарегистрированных событий  $X = \{\vec{x}_i\}$ , где  $\vec{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  — число случайных точек на светочувствительной поверхности устройства  $\Omega$ , причем количество зарегистрированных отсчетов  $N$  также является величиной случайной, заданной распределением Пуассона со средним значением

$$\bar{N} = \int_{\Omega} \alpha I(\vec{x}) d\vec{x},$$

где коэффициент  $\alpha = \eta(h\nu)^{-1}$  определяется в том числе квантовой эффективностью  $\eta$  идеального устройства формирования изображения [4].

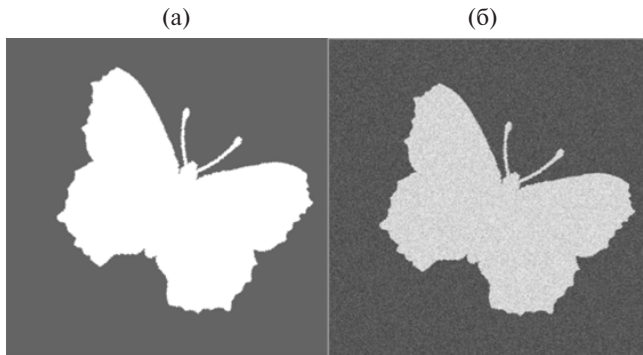
Собственно набор случайных отсчетов описывается распределением вероятностей случайного числа точек  $\{\vec{x}_i\}$  некоторого неоднородного точечного пуассоновского процесса с функцией интенсивности  $\alpha I(\vec{x})$  [6]. Поскольку количество отсчетов  $N$  является случайной величиной, то указанное описание представляется неудобным для практического использования, в частности при больших значениях  $N$ . Поэтому было предложено использовать представление точечных процессов в виде набора случайных точек, как в оригинальном пуассоновском процессе, однако общее число отсчетов фиксировано  $N_p \ll \bar{N}$ . Фиксированная выборка  $X_p = \{\vec{x}_j\}$  случайного размера  $N_p$ , полученная из  $X = \{\vec{x}_i\}$ , может быть задана плотностью распределения [7] следующего вида:

$$\begin{aligned} \rho(X_p = \{\vec{x}_j\}, | I(\vec{x})) &= \prod_{j=1}^{N_p} \rho(\vec{x}_j | I(\vec{x})), \\ \rho(\vec{x}_j | I(\vec{x})) &= I(\vec{x}_j) / \int_{\Omega} I(\vec{x}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Представление изображений с использованием фиксированных выборок  $X_p = \{\vec{x}_j\}$ ,  $j = 1, \dots, N_p$ , статистически определенных в (1), было предложено называть выборочным представлением изображений.

На рис. 1 приведен пример сформированного выборочного изображения на основе взятого из стандартной базы данных MPEG7 [8] изображения “butterfly-19”. Для формирования выборки  $X_p = \{\vec{x}_j\}$ , состоящей из  $N_p = 10\,000\,000$  отсчетов, исходное изображение размером  $429 \times 421$  пикселей, глубиной цвета  $v = 8$  бит было предварительно конвертировано в формат PNG с той же глубиной цвета, но размером  $s \times s = 1\,000 \times 1\,000$  пикселей. При этом в конечном варианте изображения использовались всего два оттенка серого — 100 и 255. Отсчеты генерировались методом отбраковки Монте-Карло с равномерным вспомогательным распределением  $u(\vec{x}) = s^{-2}$  и вспомогательной константой  $M = 2^v$ .





**Рис. 1.** Представление изображения по выборке отсчетов (выборочное представление): а – оригинальное изображение «butterfly-19» [8], б – выборочное представление размером 10 млн отсчетов.

## 2. МОДЕЛЬ РЕЦЕПТИВНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ОБРАБОТКИ ВЫБОРОЧНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

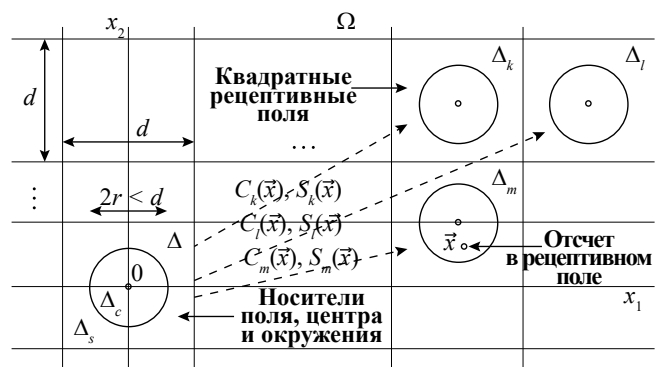
Предложенное выборочное представление  $X_p = \{\vec{x}_j\}$  наиболее точно описывает данные, полученные с рецепторов внешнего слоя сетчатки – палочек и колбочек. Эти данные генерируются при формировании изображений на основе регистрируемой интенсивности светового сигнала  $I(\vec{x})$ ,  $\vec{x} \in \Omega$ . Однако, как упоминалось ранее, посылаемые в кору головного мозга импульсы от нейронов внутреннего слоя сетчатки имеют существенное отличие от данных, зарегистрированных на фоторецепторных клетках. Благодаря многочисленным промежуточным интернейронам среднего и внутреннего слоев сетчатки, входной сигнал существенно преобразуется. В результате нейроны на выходе сетчатки передают агрегированные данные от десятков, а порой и тысяч фоторецепторов, расположенных в малых областях входного слоя сетчатки и образующих так называемые рецептивные поля (РП). Изучение систем РП и нейронного преобразования данных от входного слоя фоторецепторов в последовательность нейронных импульсов зрительного нерва обычно связывают с фундаментальными исследованиями Хьюбеля и Визеля [9]; современное представление строения зрительной системы и особенностях функционирования рецептивных полей можно найти, например, в [10].

Стоит отметить, что выходные нейроны сетчатки, представленные набором ганглиозных клеток, весьма разнообразны как по форме, так и по функциям – в сетчатке выделяются более 20 типов этих клеток. Соответственно, функции и строение различных РП значительно дифференцированы, поскольку определяются типами связанных с этими полями ганглиозных клеток, нейронов внутреннего слоя и соответствующих им фоторецепторов. В работе рассматривается только семейство карликовых клеток, основная функция которых – кодирование

пространственного распределения интенсивности  $I(\vec{x})$  по всей поверхности сетчатки  $\Omega$ . Отметим, что большинство РП обладает центро-антагонистической структурой, которая определяет реакцию на характер освещения либо затемнения. Так, ON-клетки РП возбуждаются при световой стимуляции центра поля и тормозятся при стимуляции его периферии, и наоборот, OFF-клетки возбуждаются при стимуляции РП-периферии и тормозятся при стимуляции центра [9]. Наличие двух типов клеток обусловлено особенностями нервного кодирования положительных/отрицательных перепадов в стимулах (ON-клетка активируется, когда стимуляция центра превышает среднюю стимуляцию по РП, OFF-клетка – наоборот).

Что касается структуры РП, то известно, что соседние ON- и OFF-клетки имеют значительно перекрывающиеся поля, а РП-клетки одинакового типа практически не перекрываются. При этом неперекрывающиеся РП каждого типа плотно прилегают друг к другу, образуя сетчатую структуру, покрывающую всю сетчатку глаза [11]. Если допустить пересечение ON-полей только с соседними OFF-полями и отсутствие пересечений с прочими ON-полями, при этом допуская соприкосновение их границ, можно окончательно формализовать пространственную геометрию РП. Аналогичное справедливо при взаимной замене ON-клеток на OFF-клетки, благодаря их симметрии. Формальное представление области  $\Omega$  квадратными РП с круглыми центрами, которое используется в дальнейшем для алгоритмических целей, представлено на рис. 2. (Подробнее о структуре РП см. в [12].)

Ввиду ранее упомянутого симметричного относительно друг друга расположения ON- и OFF-полей, можно рассмотреть систему РП гибридного типа, способную кодировать как положительные (по образу ON-полей), так и отрицательные (по образу OFF-полей) перепады интенсивности светового сигнала. На основе приведенных выше



**Рис. 2.** Разбиение поверхности изображения  $\Omega$  системой рецептивных ON-полей  $\{C_k(\vec{x}), S_k(\vec{x})\}$  с квадратными носителями  $\Delta_k, \Delta_s$ , расположенными в узлах регулярной квадратной решетки.

данных мы можем формализовать модель плотности вероятности отсчета  $\vec{x}_j$  на поверхности изображения  $\Omega - \rho(\vec{x}_j | I(\vec{x}))$  (1), как параметрическое семейство плотностей вероятностей  $\mathbb{P} = \{\rho(\vec{x}; \vec{\theta}) | \vec{\theta} \in \Theta\}$ , представляющих собой смеси  $K$  пар компонентов  $\{C_k(\vec{x}), S_k(\vec{x})\}$ ,  $k = 1, \dots, K$ :

$$\rho(\vec{x}; \vec{\theta}) = \sum_{k=1}^K w_k C_k(\vec{x}) + v_k S_k(\vec{x}), \quad (2)$$

где параметры  $\vec{\theta} = \{w_k, v_k\}$  модели  $\mathbb{P}$  представляют собой положительные веса смеси, а компоненты смеси  $C_k(\vec{x})$  и  $S_k(\vec{x})$  могут быть интерпретированы как наборы компонент центра и антагонистического окружения  $k$ -го РП соответственно. Причем компоненты центра и окружения задаются положительными, нормированными плотностями распределения вероятностей с компактными носителями  $\Delta_k^c = \{\vec{x} | C_k(\vec{x}) > 0\}$  и  $\Delta_k^s = \{\vec{x} | S_k(\vec{x}) > 0\}$ , которые составляют в объединении носители  $k$ -х РП  $\Delta_k = \Delta_k^c \cup \Delta_k^s$  (см. рис. 2):

$$\int_{\Delta_k^c} C_k(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Delta_k^s} S_k(\vec{x}) d\vec{x} = 1. \quad (3)$$

Учитывая тождественность плотности  $\rho(\vec{x}_j | I(\vec{x}))$  нормированной версии интенсивности сигнала  $I(\vec{x})$ , зафиксированную в (1), становится очевидным смысл введенных параметров  $\vec{\theta} \in \Theta$ . Уравнение (2), по существу, задает разложение интенсивности  $I(\vec{x})$  по системе локальных распределений с точностью до нормирующего множителя, как это принято в любом мультиразрешающем анализе [13]. При этом соотношениями (3) определена нормировка заданных функций.

Далее, если предположить, что носители центра  $\Delta_k^c$  и антагонистического окружения  $\Delta_k^s$   $k$ -го РП не имеют общих точек  $\Delta_k^c \cap \Delta_k^s = \emptyset$ , то можно добавить соотношения ортогональности в дополнение к приведенным соотношениям нормировки (3):

$$\int_{\Delta_k^c} S_k(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Delta_k^s} C_k(\vec{x}) d\vec{x} = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что множество носителей РП  $\{\Delta_k\}$  составляет точное мозаичное разбиение поверхности сетчатки, т.е. все они плотно покрывают все пространство  $\Omega$ , но при этом носители центра  $\Delta_k^c$  и окружения  $\Delta_k^s$  попарно не пересекаются, можно, так же как в мультиразрешающем анализе, выразить параметры  $\vec{\theta} = \{w_k, v_k\}$  модели через соответствующие интегралы плотности  $\rho(\vec{x}; \vec{\theta})$  (2) по соответствующим носителям РП:

$$\begin{aligned} w_k &= \int_{\Delta_k^c} \rho(\vec{x}; \vec{\theta}) d\vec{x}, \\ v_k &= \int_{\Delta_k^s} \rho(\vec{x}; \vec{\theta}) d\vec{x}, \end{aligned} \quad (5)$$

где параметры  $w_k, v_k$  могут быть интерпретированы как вероятности попадания отсчета  $\vec{x}_j$  в центр  $\Delta_k^c$  либо в окружение  $\Delta_k^s$   $k$ -го РП. Также можно представить параметры  $w_k, v_k$  (5) как средние значения

характеристических функций, для которых справедливы следующие утверждения:  $\Pi_k^c(\vec{x}) = 1$ , если  $\vec{x} \in \Delta_k^c$ , иначе  $\Pi_k^c(\vec{x}) = 0$ , и  $\Pi_k^s(\vec{x}) = 1$ , если  $\vec{x} \in \Delta_k^s$ , иначе  $\Pi_k^s(\vec{x}) = 0$  по всей поверхности  $\Omega$ .

Поскольку плотность  $\rho(\vec{x}; \vec{\theta})$  не известна, а в отношении ее известна только выборка  $X_p = \{\vec{x}_j\}$ , то связи (5) не могут быть использованы для нахождения  $w_k, v_k$ . Однако, используя стандартный прием из [16], с учетом асимптотики закона больших чисел можно заменить средние  $\Pi_k^c(\vec{x})$  и  $\Pi_k^s(\vec{x})$  их выборочными (эмпирическими) средними, что приводит к следующему представлению параметров:

$$\begin{aligned} w_k &= \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \Pi_k^c(\vec{x}_j) = \frac{n_k^c}{N_p}, \\ v_k &= \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} \Pi_k^s(\vec{x}_j) = \frac{n_k^s}{N_p}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $n_k^c$  и  $n_k^s$  — числа отсчетов соответственно в центре и в окружении  $k$ -го РП.

Стоит отметить, что приближенные значения параметров (6) не зависят от вида компонент  $C_k(\vec{x})$  и  $S_k(\vec{x})$ , а только от вида их носителей  $\Delta_k^c$  и  $\Delta_k^s$ . Отсюда следует, что для приближенной оценки плотности вероятности  $\rho(\vec{x}; \vec{\theta})$  (3) достаточны лишь числа  $n_k^c$  и  $n_k^s$  отсчетов в центрах и окружениях рецептивных полей. Другими словами, выборочное представление  $X_p = \{\vec{x}_j\}$  изображения может быть сокращено (сжато) в рассматриваемом случае до представления “числами заполнения”  $Y_p = \{n_k^c, n_k^s\}$ , которые в данном контексте являются достаточными статистиками выборочного представления.

### 3. КОДИРОВАНИЕ ВЫБОРОЧНЫХ ДАННЫХ, СЖАТЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ РЕЦЕПТИВНЫХ ПОЛЕЙ

Используя наборы чисел заполнения  $Y_{N_p} = \{n_k^c, n_k^s\}$ , оценим, каким образом эти данные можно закодировать для дальнейшей передачи на последующие этапы обработки. Для удобства можно считать систему рецептивных полей однородной на всем пространстве  $\Omega$ , то есть все поля идентичны друг другу по выполняемым функциям и по своему строению, как это показано на рис. 2. Типичное поле имеет площадь  $\sigma = |\Delta|$ , состоящую из компактного центра площади  $\sigma_c = |\Delta^c|$  и антагонистического окружения с площадью  $\sigma_s = |\Delta^s|$ , причем эти площади не пересекаются, откуда следует, что  $\sigma = \sigma_c + \sigma_s$ .

Каждое РП может определять общее число принадлежащих ему отсчетов  $n$ , состоящее из числа отсчетов в центре  $n_c$  и окружении  $n_s$ , причем количество отсчетов в окружении может быть определено в виде линейной комбинации  $an + bn_c$ . Коэффициенты  $a$  и  $b$  могут быть произвольными как

по величине, так и по знаку, что интерпретируется в данном случае, как возбуждающее либо тормозящее действие соответствующих областей поля. В частном случае эти коэффициенты могут принимать единичные значения, при которых справедлива зависимость  $n_s = n - n_c$ . Поскольку регистрация отсчетов имеет случайный характер, числа  $n$ ,  $n_c$  и  $n_s$  также являются случайными величинами, однако одновременно с этим являются взаимозависимыми. Для выборочных представлений  $X_p = \{\vec{x}_j\}$  данные числа являются пуассоновскими случайными величинами [4]. Учитывая статистическую независимость  $n_c$  и  $n_s$  ввиду того условия, что области центра и окружения отдельного РП являются непересекающимися, можно представить распределения вероятностей в следующем виде:

$$\begin{aligned} P_c(n_c|\lambda) &= \frac{(\sigma_c \lambda)^{n_c}}{n_c!} \exp\{-\sigma_c \lambda\}, \\ P_s(n_s|\mu) &= \frac{(\sigma_s \mu)^{n_s}}{n_s!} \exp\{-\sigma_s \mu\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  по сути представляют интенсивность отсчетов в центре и в окружении РП, которые можно представить следующим образом:

$$\lambda = \frac{\alpha}{\sigma_c} \int_{\Delta^c} I(x) dx, \quad \mu = \frac{\alpha}{\sigma_s} \int_{\Delta^s} I(x) dx. \quad (8)$$

Можно заметить, что средние значения распределений (7) связаны с (8) следующим образом:  $\bar{n}_c = \sigma_c \lambda$  и  $\bar{n}_s = \sigma_s \mu$ . Поэтому значения отсчетов в центре и в окружении РП  $n_c$  и  $n_s$  соответственно, являясь несмещенными оценками своих средних  $\bar{n}_c$  и  $\bar{n}_s$ , предоставляя также соответствующие им несмещенные оценки  $\bar{n}_c / \sigma_c$  и  $\bar{n}_s / \sigma_s$  значений интенсивностей отсчетов  $\lambda$  и  $\mu$ .

Путем обычного перемножения распределений (7) можно получить совместные распределения для отсчетов  $n_c$  и  $n_s$ . Если же от этих данных перейти сначала к значениям  $n_c$  в центре и  $n$  на всем РП и далее к  $\delta = n_c - (\sigma_c/\sigma)n$  и  $n$ , то после ряда преобразований с использованием аппроксимации биномиального распределения гауссовским и дальнейшим упрощением, можно перейти к следующей статистической модели данных:

$$\begin{aligned} P(\delta, n|\lambda, \mu) &= P(\delta|n, \lambda, \mu)P(n|\nu), \\ P(\delta|n, \lambda, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2}} \exp\left\{-\frac{(\delta - \varepsilon)^2}{2\gamma^2}\right\}, \\ \varepsilon &= \frac{\sigma_c \sigma_s}{\sigma^2} \left(\frac{\lambda - \mu}{\nu}\right)n, \quad \gamma^2 = \frac{\sigma_c \sigma_s}{\sigma_i^2} \frac{\lambda \mu}{\nu^2} n, \\ P(n|\nu) &= \frac{(\sigma \nu)^n}{n!} \exp\{-\sigma \nu\}, \quad \nu = \frac{\sigma_c}{\sigma} \lambda + \frac{\sigma_s}{\sigma} \mu. \end{aligned} \quad (9)$$

Однако для полного статистического описания модели рецептивного поля следует использовать априорное совместное распределение для значений интенсивностей отсчетов центра и окружения  $\lambda$  и  $\mu$ , которое можно выбрать, например, в виде:

$$\rho(\lambda|\mu) = \omega \delta(\lambda - \mu) + (1 - \omega) \wp(\lambda), \quad (10)$$

где  $\omega$  и  $(1 - \omega)$  представляют веса, которые можно трактовать как вероятность 0-гипотезы  $H_0$  о том, что интенсивности  $\lambda$  и  $\mu$  зависимы, либо наоборот, как вероятность независимости значений  $\lambda$  и  $\mu$ , т.е. альтернативы этой гипотезы. Следовательно,  $\wp(\lambda)$  является априорным безусловным распределением вероятностей каждой из интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$ .

Используя стандартные статистические методы, на основе статистической модели (9), (10) с помощью данных  $\delta$  и  $n$  могут быть получены апостериорные распределения интенсивностей  $\lambda$  и  $\mu$ , а также их оптимальные оценки, тесты проверки 0-гипотезы  $H_0$  и т.д. Выбрав для значений  $\lambda$  и  $\mu$  апостериорные распределения  $\rho(\lambda, \mu|n_c, n)$ , можно выразить первые моменты, которые могут представлять MAP (оценки апостериорного максимума) оценок  $\bar{\lambda}(\delta, n)$  и  $\bar{\mu}(\delta, n)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(\delta, n) &= \begin{cases} n / \sigma, & |\delta| \leq D\sqrt{n} \\ n_c / \sigma_c, & |\delta| > D\sqrt{n} \end{cases}, \\ \bar{\mu}(\delta, n) &= \begin{cases} n / \sigma, & |\delta| \leq D\sqrt{n} \\ n_s / \sigma_s, & |\delta| > D\sqrt{n} \end{cases}, \end{aligned} \quad (11)$$

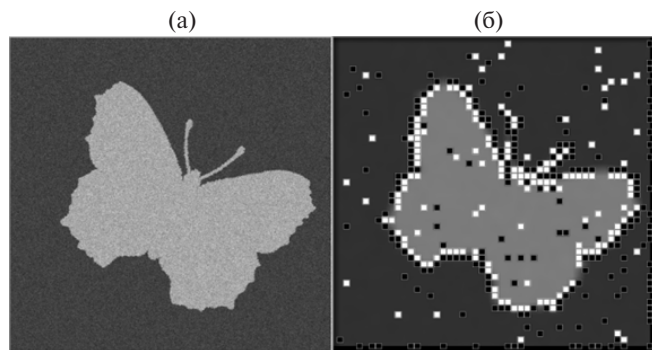
где  $D^2 = 2\sigma_c \sigma_s \ln\{\bar{\Lambda}_0\} / \sigma^2$  — пороговый коэффициент, представленный исключительно через параметры задачи, включая параметр априорного правдоподобия  $\bar{\Lambda}_0$ , который, при разумных предположениях, может быть задан следующим приближенным выражением

$$\bar{\Lambda}_0 = \frac{4\omega}{\pi(1-\omega)} \sqrt{\frac{\sigma_c \sigma_s \bar{n}}{\sigma^2}}, \quad (12)$$

где  $\bar{n} = \sigma \hat{\nu}$ ,  $\hat{\nu}$  — характерный масштаб априорного распределения вероятностей  $\wp(\lambda)$ . На рис. 3 представлено кодирование данных  $\delta$  и  $n$  в пороговые оценки  $\bar{\lambda}(\delta, n)$  и  $\bar{\mu}(\delta, n)$  на решетке  $50 \times 50$  рецептивных полей (исходное изображение было представлено на рис. 1).

Кодирование (11) можно интерпретировать как регрессию данных при их сжатии [14], если допустить, что  $n/\sigma$  является общей оценкой для значений  $\lambda$  и  $\mu$  на основе предиктора  $n/\sigma$  (при условии, что имеет место 0-гипотеза  $H_0$ ), а  $\delta/\sigma_c = n_c/\sigma_c - n/\sigma$ ,  $\delta/\sigma_s = n_s/\sigma_s - n/\sigma$  являются остатками для этой оценки. Если сравнить данный подход с методом регрессии данных LASSO (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator) [14], можно отметить зависимость общего числа отсчетов  $n$  на области  $\sigma$  отдельного РП





**Рис. 3.** Иллюстрация процедуры кодирования (11) на решетке рецептивных полей размером  $50 \times 50$  выборочного представления изображения «butterfly-19» [8] (см. рис. 1): а — выборочное представление, б — РП с ненулевыми значениями  $\delta$ , белым цветом выделены ON-ответы ( $\delta > 0$ ), черным — OFF-ответы ( $\delta < 0$ ).

и выражения порогового значения  $D\sqrt{n}$ . Причем количество отсчетов связано с зависимостью интенсивности  $I(\vec{x})$  сигнала изображения и пуассоновским шумом. Таким образом, (11) представляет собой нелинейный центрo-латеральный пороговый фильтр.

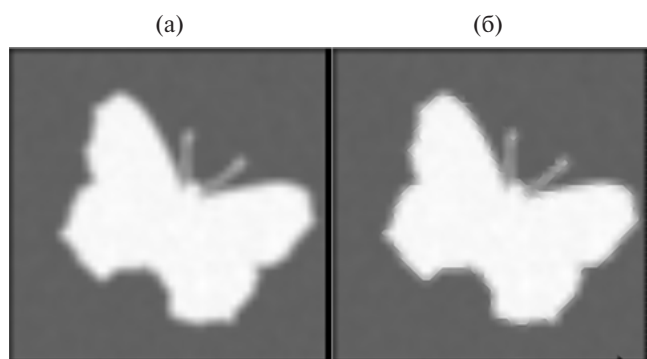
#### 4. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОГЛАСОВАННОЙ С ГРАНИЦАМИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Используя известные методы интерполяции изображений с низким разрешением, можно провести оценку эффективности предложенной процедуры кодирования (11). Среди таких методов можно выделить ряд широко используемых интерполяционных алгоритмов (билинейная интерполяция, бикубическая интерполяция и метод ближайшего соседа), алгоритмы регуляризации, спектральное представление. В данной работе был выбран простейший метод билинейной интерполяции, что, однако, не исключает возможность использования более эффективных в смысле точности методов, в частности связанных с нейронными сетями, используемыми для решения задачи формирования интерполяционных изображений.

Поскольку часть кода с числами отсчетов  $\{n_k\}$  по сути является выходом сглаживающего фильтра со скользящим окном площади  $\sigma$ , можно однозначно говорить о размытой форме искажений исходного изображения (рис. 4а). В свою очередь, декодирование, связанное с частью кода, представляющей так называемые «дефекты»  $\{\delta_k\}$ , реализуется ступенчатым фильтром, принимающим постоянные и положительные значения в области центра РП, и также постоянные, но уже отрицательные — в его окружении, причем полный интеграл отклика равен

нулю. Данный тип фильтров широко распространен в цифровой обработке изображений, и в частном случае полученный фильтр совпадает с фильтром COSO (center-ON-surround-OFF), предложенным в [15]. Последний был предложен в качестве имитации отклика LoG-фильтра (Laplacian of Gaussian) и использован Марром и Хилдертом в теории обнаружения границ на изображениях [16].

Коды  $\{\delta_k\}$  оказываются тесно связанными с оператором Лапласа, нули их линейной интерполяции вдоль ребер решетки РП представляют собой точки пересечения с ними границ изображений, поэтому для реконструкции изображений, сохраняющих содержательные детали, можно использовать многочисленные методы вдоль-реберной интерполяции (edge-directed interpolation) [17]. Стоит еще раз отметить, что подобные интерполяции



**Рис. 4.** Восстановленное (декодированное) изображение «butterfly-19» [8] (см. рис. 1), заданное выборочным представлением  $\{n_k^c, n_k^s\}$  на решетке  $50 \times 50$ : а — сглаженное изображение, декодированное только с использованием «плавной» части  $\{n_k\}$  кода, б — интерполяция вдоль ребер, заданных деталями  $\{\delta_k\}$ .

предоставляют на сегодняшний день наилучшее перцептивное качество реконструированных изображений.

Для иллюстрации реконструкции (декодирования) изображений была использована простейшая билинейная, согласованная с границами интерполяция для кодированного выборочного представления «butterfly-19» (см. рис. 1б). Область представления  $\Omega$  была покрыта набором из 2500 квадратных рецептивных полей, расположенных в узлах квадратной решетки  $50 \times 50$  (см. рис. 2 и детали в [12]). В каждом  $k$ -м узле вычислялись значения  $\{\delta_k, n_k\}$ , после чего  $\delta_k$  подвергалось цензуре с порогом  $D\sqrt{n_k}$ . Классическая билинейная интерполяция, показанная на рис. 4а, демонстрирует реконструкцию на основе только части данных  $\{n_k\}$ , интерполируя их сначала линейно вдоль вертикальных ребер решетки, а затем линейно по всем строкам всех

ячеек на основе уже интерполированных значений вертикальных ребер. Билинейная интерполяция, направленная вдоль детектированных границ изображения, показана на рис. 4б. В отличие от классической билинейной интерполяции, она дополнительно оперирует значениями дефектов  $\{\delta_k\}$ , которые представляют некоторое подобие оператора Лапласа. Если рассматривать величину дефекта  $\delta_k$  подробно, то он представляет собой более общее значение, чем лапласиан, что позволяет использовать его подобно оператору Марра в задачах обнаружения границ. В таком случае билинейная интерполяция также использует двухпроходную реконструкцию. При первом проходе значения  $\{n_k\}$  также интерполируются по всем вертикальным и горизонтальным ребрам решетки. Но в случае, когда в узлах данного ребра решетки значения  $\delta_i$  и  $\delta_j$  отличны от нуля и разных знаков, это ребро решетки рассматривается как пересекающее границу изображения, причем за точку пересечения принимается середина ребра решетки. В результате, если ребро решетки пересекается границей изображения, значения  $n_i$  и  $n_j$  в его узлах кусочно-постоянно продолжают вдоль ребра решетки до встречи ровно посередине. Если же ребро не пересекает границу изображения, для него производится линейная интерполяция  $n_i \leftrightarrow n_j$ , как и в классическом случае. На втором проходе значения в ячейках решетки линейно интерполируются по значениям на их ребрах. Если ни одно ребро ячейки не пересекает границы изображения, или таких ребер одно или более двух, то интерполяция производится по строкам ячеек, как при классической интерполяции. Если же в ячейке имеется ровно два ребра решетки пересекающихся с границами изображения, то, соединяя точки этих пересечений прямой линией, мы восстанавливаем фрагмент границы изображения в ячейке и проводим линейную интерполяцию по прямым, параллельным этой линии. Результат (см. рис. 4б) представляется обладающим лучшим визуальным качеством даже по сравнению с классической билинейной интерполяцией (см. рис. 4а).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были представлены методы кодирования и декодирования входных данных на основе нейроморфной модели, основанной на известных нейромеханизмах восприятия зрительной системы. В качестве данных для обработки было использовано формализованное ранее представление входных данных в виде пуассоновского набора случайных точек, представленного в виде выборочного представления. Исходное изображение было взято из стандартной базы данных MPEG7 [4] и предварительно обработано. Модель кодирования данных была формализована в контексте концепции рецептивных полей. Разработанная процедура порогового кодирования

информации была определена как сжатие данных, схожее с принципом нелинейного центрально-латерального порогового фильтра.

Предложенный метод восстановления данных был формализован в виде модели связанного ON-OFF-декодирования, как реконструкция ранее сжатого изображения на основе участков изменения пространственных контрастов. Оценка качества восстановленного изображения была произведена путем визуального сравнения с изображением, восстановленным с использованием алгоритма классической интерполяции. Преимуществом используемого метода оказалось более четкое выделение краевых областей на изображении.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена за счет бюджетного финансирования в рамках государственного задания в Институте радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН (AAAA-A 19-119041590070-1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lu Z., Huang D., Bai L. et al. // arXiv preprint arXiv:2304.13023. 2023.  
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2304.13023>
2. Pinkston J. T. // IEEE Trans. 1969. V. IT-15. № 1 P. 66.  
<https://doi.org/10.1109/TIT.1969.1054274>
3. Milner D., Goodale M. The Visual Brain in Action. Oxford: Univ. Press, 2006.  
<https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198524724.001.0001>
4. Antsiperov V., Kershner V. // Pattern Recognition Applications and Methods, ICPRAM 2021–2022. Lecture Notes in Computer Sci. P. 13822. Cham: Springer, 2023.  
[https://doi.org/10.1007/978-3-031-24538-1\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-24538-1_3)
5. Yang M., Sun X., Jia F. et al. // Polymers. 2022. V. 14. № 10. P. 2019.  
<https://doi.org/10.3390/polym14102019>
6. Keeler H. P. Notes on the Poisson Point Process. Technical Report. Berlin: Weierstrass Inst. 2016. 36 p.  
<https://hpaulkeeler.com/wp-content/uploads/2018/08/PoissonPointProcess.pdf>
7. Antsiperov V. // Proc. 11th Int. Conf. on Pattern Recognition Applications and Methods – ICPRAM. 3–5 Feb. 2022. Setúbal: SciTePress – Science and Technology Publ., 2022. P. 354.  
<https://doi.org/10.5220/0010836800003122>
8. Latecki L. J., Lakamper R., Eckhardt T. // Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition, CVPR-2000. Hilton Head Island. 15 Jun. N.Y.: IEEE, 2000. P. 424.



- <https://doi.org/10.1109/CVPR.2000.855850>
9. Hubel D. H., Wiesel T. N. Brain and Visual Perception: The Story of a 25-year Collaboration. Oxford: Univ. Press, 2004.  
[https://doi.org/10.1016/0001-6918\(64\)90136-2](https://doi.org/10.1016/0001-6918(64)90136-2)
  10. Keller A. J., Roth M. M., Scanziani M. // Nature. 2020. V. 582. № 7813. P. 545.  
<https://doi.org/10.1038/s41586-020-2319-4>
  11. Hoon M., Okawa H., Santina L. D., Wong R. O. // Progress in Retinal and Eye Research. 2014. V. 42. P. 44.  
<https://doi.org/10.1016/j.preteyeres.2014.06.003>
  12. Antsiperov V. // Proc. 12th Int. Conf. on Pattern Recognition Applications and Methods (ICPRAM 2023). Lisbon. 22–24 Feb. 2023. Setúbal: SciTePress – Science and Technology Publ., 2023. P. 517.  
<https://doi.org/10.5220/0011792800003411>
  13. Fish J., Wagner G. J., Keten S. // Nature Mater. 2021. V. 20. № 6. P. 774.  
<https://doi.org/10.1038/s41563-020-00913-0>
  14. Ranstam J., Cook J. A. // J. British Surgery. 2018. V. 105. № 10. P. 1348.  
<https://doi.org/10.1002/bjs.10895>
  15. Tam W. S., Kok C. W., Siu W. C. // J. Electron. Imaging. 2010. V. 19. № 1. P. 013011.  
<https://doi.org/10.1117/1.3358372>
  16. Marr D., Hildreth E. // Proc. Royal Society of London. Ser. B. Biol Sci. 1980. V. 207. № 1167. P. 187.  
<https://doi.org/10.1098/rspb.1980.0020>. PMID6102765.
  17. Yu S., Zhang R., Wu Sh. et al. // Biomedical Engineering Online. 2013. V. 12. P. 1.  
<https://doi.org/10.1186/1475-925X-12-102>

## NEUROMORPHIC DECODING OF SAMPLE IMAGE REPRESENTATIONS BY THE BOUNDARY-CONSISTENT INTERPOLATION METHOD

**V. A. Kershner**

*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences,  
Mokhovaya Str., 11, Build. 7, Moscow, 125009 Russian Federation  
E-mail: vladkershner@mail.ru*

Received December 19, 2023, revised May 20, 2024, accepted May 25, 2024

The paper discusses methods for encoding and decoding large amounts of data using a neuromorphic model based on known neuromechanisms for the perception of visual information. Known mechanisms of the visual system, such as aggregation of counts by receptive fields, central-lateral inhibition, etc., have been studied. A decoding model has been developed that implements the function of simple cells of the primary visual cortex responsible for spatial perception of stimulus contrasts. The proposed decoding model makes it possible to restore local boundaries of objects in an image, while improving the visual quality of images in comparison with the quality of restoration with classical bilinear interpolation.

**Keywords:** neuromorphic systems, sample representation, neural coding, receptive field system, adaptive interpolation

УДК 538.915

ОСОБЕННОСТИ НЕРАВНОВЕСНОГО ПИННИНГА ВОЛНЫ ЗАРЯДОВОЙ ПЛОТНОСТИ В СОЕДИНЕНИЯХ  $\text{HoTe}_3$  и  $\text{TmTe}_3$ © 2024 г. Д. М. Воропаев<sup>a, b, \*</sup>, А. В. Фролов<sup>a</sup>, А. П. Орлов<sup>a, c</sup>, А. А. Синченко<sup>a</sup><sup>a</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
ул. Моховая, 11, стр. 7, Москва, 125009 Российская Федерация<sup>b</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),  
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская обл., 141701 Российская Федерация<sup>c</sup> Институт нанотехнологий микроэлектроники РАН,  
ул. Нагатинская, 16а, стр. 11, Москва, 115487 Российская Федерация

\*E-mail: voropaev.dm@phystech.edu

Поступила в редакцию 05.12.2023 г.

После доработки 09.12.2023 г.

Принята к публикации 25.01.2024 г.

Исследовано сходство стекольных систем с пиннингом в соединениях с волной зарядовой плотности (ВЗП)  $\text{TmTe}_3$  и  $\text{HoTe}_3$ . Измерены дифференциальные вольт-амперные характеристики в микромостиковых структурах, ориентированных вдоль направления скольжения ВЗП, при многоступенчатом изменении температур. Продemonстрировано изменяющееся поведение порогового поля в процессе изотермической выдержки в системе со скользящей ВЗП, с характерной релаксацией в логарифмическом масштабе времени. Обнаружено свойство, присущее стекольным системам — эффект памяти, что позволяет утверждать о необычной стекольной природе системы центров пиннинга ВЗП в данных материалах.

**Ключевые слова:** волна зарядовой плотности, двумерные соединения, эффект памяти

**DOI:** 10.31857/S0033849424120078, **EDN:** HNBCTN

## ВВЕДЕНИЕ

Волной зарядовой плотности (ВЗП) называют периодическое перераспределение электронного, ионного и суммарных зарядов под воздействием малых периодических смещений ионов вблизи их положений равновесия в кристаллической решетке [1]. На протяжении многих лет ВЗП исследовали в квазиодномерных кристаллах [2, 3]. Относительно недавно ВЗП удалось наблюдать в квазидвумерных соединениях трителлуридов редкоземельных элементов  $\text{RTe}_3$  (R: La, Ce, Pr, Nd, Gd, Tb, Dy, Er, Tm) [4, 5]. В них сосуществуют два состояния ВЗП [6, 7]: с антиферромагнитными переходами [8, 9] и под давлением со сверхпроводимостью [10, 11]. В данных соединениях вдоль направления вектора ВЗП измерялись транспортные свойства, и при повышении электрического поля выше некоторого порогового значения  $E_{\text{пор}}$  путем повышения напряжения выше порогового напряжения  $V_{\text{пор}}$  удавалось наблюдать скольжение ВЗП.

Таким образом, при измерениях вольт-амперной характеристики (ВАХ) на эффект скольжения ВЗП

указывают изменения наклона на ВАХ или более заметный скачок сопротивления на дифференциальной ВАХ. Пороговое поле характеризуется пиннингом, т.е. сцеплением ВЗП с различными дефектами и примесями [2]. При изучении эволюции порогового поля было обнаружено, что закон, описывающий поведение порогового поля при изотермической выдержке, близок к логарифмическому [12], а также такие параметры как ток и температура оказывают влияние на эволюции данных систем [13–15]. Аналогичное поведение проявляют стекольные системы, в том числе очень похожая зависимость намагниченности от температуры, времени и магнитного поля наблюдается в системах спиновых стекол [16–18].

Стекольные системы имеют ряд характерных свойств, одним из которых является эффект памяти [16–18]. Как известно, стекольная система всегда находится в неравновесном состоянии и релаксирует в сторону метастабильного равновесного. Когда спиновое стекло охлаждается, память о процессе охлаждения запечатлевается в спиновой структуре. Эта память может быть проиллюстрирована в спиновых стеклах при измерении чувствительности

к переменному току при непрерывном нагреве. Например, если непрерывный процесс охлаждения периодически приостанавливается в течение определенного времени выдержки при некоторых промежуточных температурах, то следы предыдущей остановки (остановок) проявляются при непрерывном повторном нагреве образца. Однако если нагреть образец выше температуры старения, но при этом поддерживать ее ниже температуры стеклования  $T_g$ , то это сотрет память о термической истории. В данной статье через схожие циклы нагрева и охлаждения в спиновых стеклах будем изучать эффект памяти на исследуемых образцах трителлурида тулия ( $TmTe_3$ ) и трителлурида гольмия ( $HoTe_3$ ), представляющих систему с ВЗП.

Выявление эффекта памяти приблизило бы к пониманию систем с ВЗП. Помимо этого, системы спиновых стекол характеризуются релаксацией, описываемой логарифмическим законом. Было увеличено время релаксации по сравнению с работой [13], в которой высказывалось предположение о сходстве систем с ВЗП и спиновых стекол.

Цель данной работы — показать сходство систем с ВЗП и спиновых стекол.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТ

В работе были изучены транспортные свойства микромоистиков  $TmTe_3$  и  $HoTe_3$  в диапазоне температур 77...300 К. Образцы были изготовлены по следующей методике: от монокристаллов исследуемых материалов, выращенных методом self-flux [19], отщепляли с помощью скотча небольшую часть кристалла, переносили на сапфировую подложку и прикрепляли тонким слоем эпоксидного клея Stycast. Сапфировая подложка была выбрана, во-первых, из-за высокой теплопроводности, во-вторых, из-за возможности оптического контроля качества поверхности пленки с двух сторон. Возможность контролировать цвет образца помогала выявить, наступил ли процесс окисления. Кроме того, можно было контролировать толщину образца в разных местах при его просмотре на просвет. Полученные сегменты были полупрозрачными, их толщина была порядка десятков атомных слоев, соответственно толщина пленки была  $\sim 100$  нм, что на несколько порядков меньше других параметров, это указывает на его квазидвумерность (рис. 1).

После нахождения нужной тонкой области на нее накладывали маски и затем напыляли на непокрытую маской тонкую область образца золото (рис. 2).

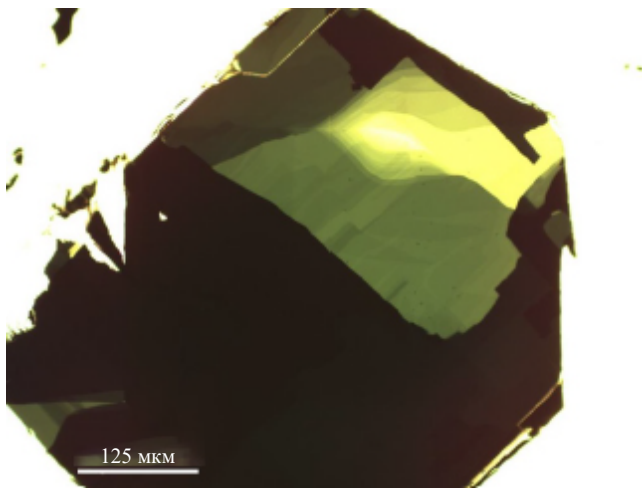


Рис. 1. Оптическая фотография на просвет тонкого кристалла  $TmTe_3$ .

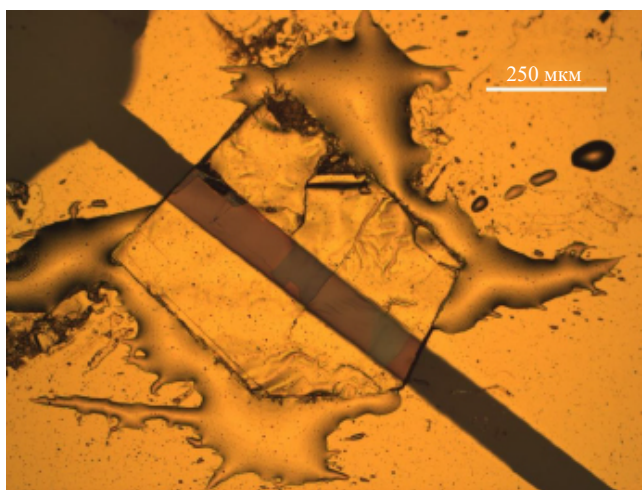
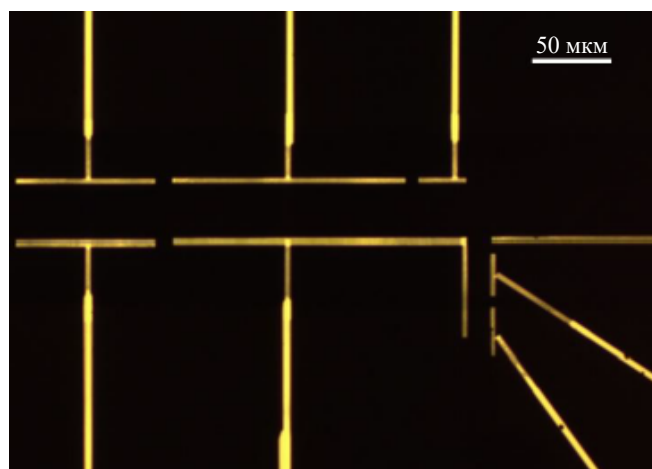


Рис. 2. Оптическая фотография кристалла на подложке с контактами из золота.

Для получения стабильных низкоомных электрических контактов была использована высоковакуумная установка лазерного напыления — лазерная абляция из золотой мишени. После снятия маски образовалась область с открытой частью поверхности кристалла и двумя массивными по площади электрическими контактами.

На следующем этапе из полученной пленки с контактами вырезали с помощью сфокусированного ионного пучка (ФИП) мостиковую структуру с раздельными токовыми и потенциальными контактами, в нужном направлении и геометрии (рис. 3).

В результате получали длинные мостики длиной 20–250 мкм, шириной 8–100 мкм с ровными краями и направлением с большой точностью ориентированно вдоль и поперек скольжения ВЗП. Наличие



**Рис. 3.** Оптическая фотография на просвет соединения  $\text{HoTe}_3$  многоконтактной мостиковой структуры, вырезанной при помощи ФИП в двух кристаллических направлениях.

двух видов мостиков (параллельных и перпендикулярных) дает возможность исследовать транспортные свойства пленок как вдоль, так и поперек направления движения ВЗП. Кроме того, такая структура позволяет исследовать образец в случае неверно выбранного направления скольжения ВЗП или использования структурно несовершенного кристалла с эффектом двойника (по толщине два разориентированных кристалла), где ВЗП может двигаться в двух направлениях, но при этом для срыва ВЗП требуются большие пороговые поля, что приводит к излишнему джоулеву нагреву.

После всех операций вытравливания мостиковой структуры ее покрывали тонким слоем полимера (т.е. инкапсулировали), поскольку исследуемые соединения окисляются достаточно быстро на воздухе и через пару часов можно наблюдать деградацию поверхности. В связи с этим после вскрытия ампулы для выращивания и хранения кристаллов и расщепления материала до нанометровых толщин эксперимент проводили в условиях низкого давления, например при вытравливании мостиков с помощью ФИП давление в камере составляло порядка  $10^{-5}$  Торр, а также при лазерном напылении поддерживалось низкое давление в системе. Это позволило сократить время контакта образца с воздухом до десятков минут. Причиной таких мер стало то, что образцы  $\text{TmTe}_3$  намного больше подвержены окислению на воздухе, чем  $\text{TbTe}_3$  и  $\text{HoTe}_3$  [12–15].

Исследование транспортных свойств образцов, в том числе определение ВАХ, проводилось с помощью четырехконтактного метода с использованием прецизионного источника тока Keysight B2912A

и нановольтметров Keysight 34420A. Из-за сильной подверженности образцов окислению измерения проводили в инертной атмосфере гелия (теплообменном газе) в специальной высоковакуумной криогенной установке с температурным контролем, находящейся в сосуде Дьюара с жидким азотом. Для подтверждения эффекта, который будет описан далее, было изготовлено и исследовано несколько образцов. На рис. 3 представлен типичный симметричный мостик (с характерной длиной  $l=28$  мкм, шириной  $w=8$  мкм, толщиной  $h \sim 100$  нм) и приведены результаты его измерения, как наиболее наглядные, демонстрирующие полученный эффект памяти.

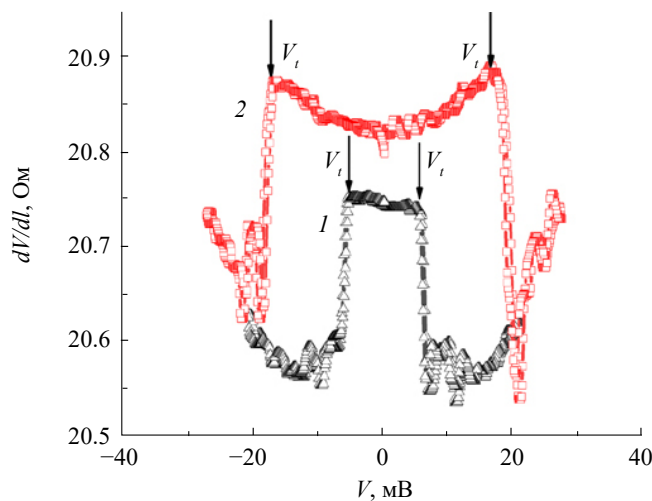
В соединении  $\text{TmTe}_3$ , аналогично другим родственным соединениям ( $\text{HoTe}_3$  [12] и  $\text{TbTe}_3$  [15]), наблюдается увеличение порогового поля со временем при выдержке образца при температуре меньшей температуры ВЗП ( $T < T_{\text{ВЗП}}$ ). Соответственно, были измерены серии ВАХ при температурах 210 и 220 К. Процесс измерений происходил следующим образом: образец охлаждали с температуры отжига (выше которой полностью отсутствует ВЗП)  $T_{\text{отж}} > T_{\text{ВЗП}}$  до температуры выдержки  $T_{\text{выд}} < T_{\text{ВЗП}}$ , после этого происходила изотермическая выдержка образца, в течение которой измеряли ВАХ. Такие измерения происходили с периодичностью в 10–15 мин. Между измерениями ВАХ на образец подавался ток  $I_{\text{выд}} = 10$  мкА и записывалась временная зависимость сопротивления для контроля процесса выдержки. Такой ток экспозиции эквивалентен нулевому току на образце, где нет воздействия на ВЗП, в этом состоянии она всегда запинингована. Такое состояние соответствует плоской вершине на дифференциальной ВАХ, сопротивление почти не меняется. Начало скольжения ВЗП соответствует резкому излому на дифференциальной ВАХ (сопротивление резко падает вниз), что соответствует пороговому полю. Наблюдение поведения порогового поля в таких режимах временной выдержки позволило получить интересный результат.

## 2. ПОЛУЧЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе [12] была подробно исследована релаксация порогового поля  $\text{HoTe}_3$  при длительных временах выдержки. В данной работе образцы также были выдержаны при температурах  $T_{\text{выд}} = 210$  и 220 К на протяжении более 100 ч (рис. 4) для подтверждения результата.

Там же было получено, что график эволюции порогового поля имеет вид не такой, как было



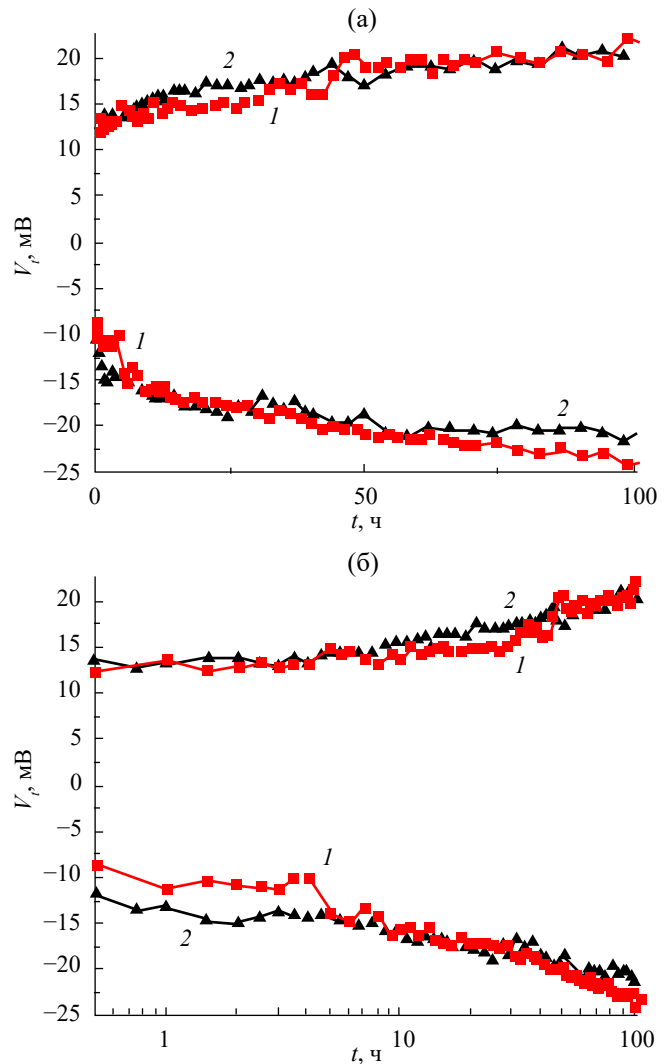


**Рис. 4.** Дифференциальные вольт-амперные характеристики мостика с характерным порогом (на рисунке обозначены пороговые напряжения  $V_t$ ), вследствие срыва и скольжения ВЗП, соответственно до (1) и после временной выдержки 138 ч (2). Кривые сдвинуты друг относительно друга по оси  $u$ .

предсказано ранее [14], а более сложный, описываемый логарифмическими законами ( $E(t) \sim \lg(t/\tau)$ ). На рис. 5 видно, что графики имеют аналогичный вид, что и в сравниваемой работе. Данное наблюдение лишь подтверждает сходство систем со сложными сильно неупорядоченными системами и усиливает сходство со спиновыми стеклами.

Как уже было сказано, эффект памяти является характерным для стекольных систем. Например, в работе [20] данный эффект проявляется в эволюции значения магнитной восприимчивости в соединении  $\text{Cr}_{0.5}\text{Fe}_{0.5}\text{Ga}$ . Описанный в ней эксперимент можно разделить на три части. Первая: экспозиция при температуре  $T_1 = 12$  К в течение времени  $t_1 = 1$  ч, магнитная восприимчивость растет и становится равна  $\chi_1$ , затем охлаждение до температуры  $T_2 = 5$  К ( $T_2 < T_1$ ). Вторая часть: образец выдерживается при температуре  $T_2$  в течение  $t_2 = 1.5$  ч. Третья часть: отогрев до температуры  $T_1$ . При этом  $\chi_{1\text{кон}} = \chi_{3\text{нач}}$ , т.е. конечное значение магнитной восприимчивости в первой фазе равно начальному значению магнитной восприимчивости в третьей фазе. Далее на протяжении времени  $t_3 = 1$  ч продолжают выдерживать образец. При совмещении графиков первой и третьей части (температуры  $T_1$ ) их слияние выглядит как один график, будто не было промежуточных изменений температуры.

В данной работе был проведен эксперимент по поиску схожего эффекта. Полученный результат представлен на рис. 6.



**Рис. 5.** Эволюция значений порогового поля в соединении  $\text{TmTe}_3$ : а – в процессе изотермической выдержки при температурах 210 (1) и 220 К (2), б – построенная в полулогарифмическом масштабе.

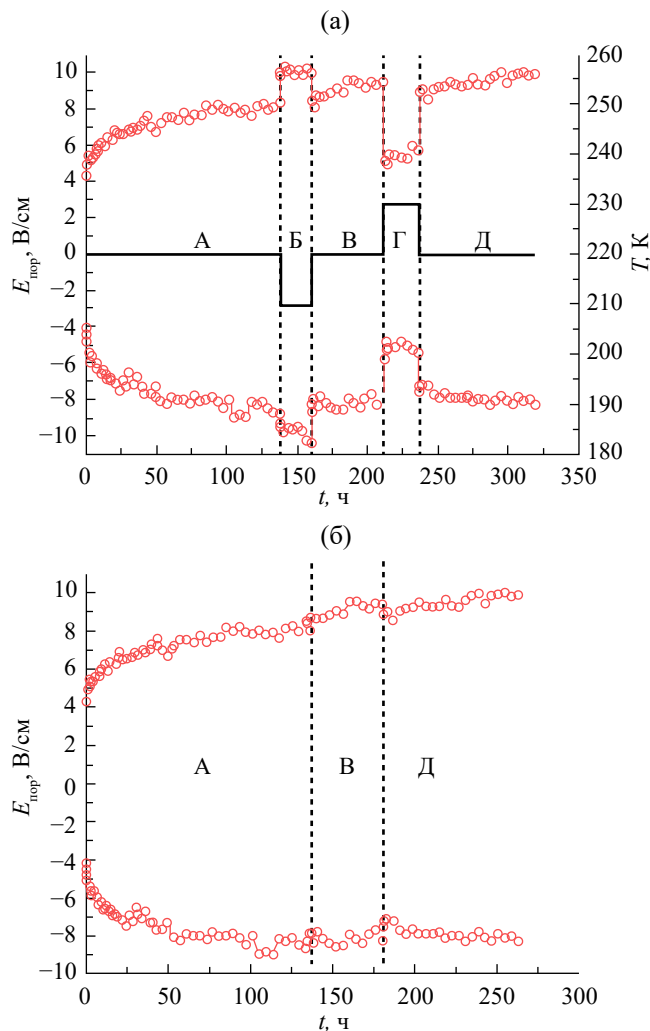
Данный эксперимент можно разделить условно на пять частей (см. рис. 6, А–Д).

А. Образец выдерживали на протяжении  $t_1 = 137$  ч при нулевом токе при температуре  $T_{\text{выд1}} = 220$  К, пороговое поле монотонно увеличивалось аналогично другим экспериментам.

Б. Затем температура была уменьшена до  $T_{\text{выд2}} = 210$  К и выдерживалась на протяжении  $t_2 = 22$  ч. При понижении температуры был зафиксирован рост порогового поля в начальный момент. Связано это с тем, что при понижении температуры пороговое поле образца линейно увеличивается, соответственно, и произошел скачок в значении.

В. После выдержки при  $T_{\text{выд2}}$  был отогрев до первоначальной температуры  $T_{\text{выд1}}$ , где нас интере-





**Рис. 6.** Эффект памяти в  $\text{TmTe}_3$ : а – эволюция порогового поля (кружочки) при различных температурах выдержки (сплошная линия); б – эволюция порогового поля при соединении секторов А, В и Д с одинаковой температурой 220 К.

совало значение порогового поля в начальный момент после отогрева. После этого на протяжении  $t_3 = 50$  ч образец выдерживали при заданной температуре. Значение порогового поля в начальный момент третьей фазы совпало со значением в момент перед первым охлаждением, как и в работе [10], где аналогичным образом совпало значение магнетизма. Это показывает, что система центров пиннинга имеет некий аналог памяти при различных значениях температур. Далее было проверено, как повлияет на эволюцию порогового поля повышение температуры до значения, меньшего чем температура пайерлсовского перехода. После выдержки при температуре  $T_{\text{выд1}}$  на протяжении  $t = 50$  ч, в течение которых наблюдался типичный

рост порогового поля, образец был нагрет до  $T_{\text{выд3}} = 230$  К. При данной температуре значение порогового поля резко упало, что описывается все той же линейной зависимостью от температуры.

Г. При  $T_{\text{выд3}}$  образец выдерживали около суток, затем охлаждали до  $T_{\text{выд1}}$ .

Д. Дальнейшая экспозиция образца при температуре  $T_{\text{выд1}}$ .

При сравнении значений пороговых полей, полученных в условных частях эксперимента В и Д, можно увидеть, что значение поля в начальный момент Д значительно меньше, чем при последнем измерении в В. То есть при повышении температуры происходит разрушение некоторой сформировавшейся системы центров пиннинга, что ведет к уменьшению значений пороговых полей при более низких температурах.

На рис. 6б представлено совмещение секторов А, В, Д, при которых значение температуры выдержки равняется  $T_{\text{выд1}}$ . Здесь можно увидеть более наглядно как соотносятся значения пороговых полей в различных секторах. Также можно отметить, что участок А–В визуально не имеет промежуточных измерений и получившийся график выглядит как один на этом участке.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, найдено, что при крайне длительной выдержке образцов эволюция порогового поля имеет сложный логарифмический вид. Причиной такого поведения может служить физика, аналогичная той, что есть в спиновых стеклах. Спиновые стекла описываются двумя моделями: капельной и иерархической [18, 21]. Если проводить аналогию с иерархической моделью, то при охлаждении ниже температуры  $T_c$  происходит фазовый переход нарушения эргодичности, при котором фазовое пространство делится на множество «долин». Эти долины разделены бесконечными барьерами свободной энергии. Внутри этих долин существуют различные узлы с ненулевыми термодинамическими средними. Данные долины, разделенные между собой, не имеют некоторого локального минимума энергии. Каждая такая долина при температуре  $T < T_c$  имеет бесконечно много метастабильных состояний, которые тоже разделены конечными барьерами, высоты этих барьеров принимают любое значение, поэтому состояние равновесия в таких системах достигнуто быть не может в принципе.

Помимо этого в образцах обнаружен характерный для стекольных систем эффект старения — эффект памяти. Описанная модель также описывает поведение образцов при наблюдении эффекта памяти.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А. Хадж-Аззем и П. Монсо за помощь в предоставлении высококачественных кристаллов трителлурида тулия ( $\text{TmTe}_3$ ) и трителлурида гольмия ( $\text{HoTe}_3$ ), а также за продуктивные обсуждения.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-22-00331).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grüner G. // Rev. Modern Phys. 1988. V. 60. № 4. P. 1129.
2. Monceau P. // Adv. Phys. 2012. V. 61. № 4. P. 325.
3. Monceau P., Ong N. P., Portis A. M. et al. // Phys. Rev. Lett. 1976. V. 37. № 10. P. 602.
4. Sinchenko A. A., Lejay P., Monceau P. // Phys. Rev. B. 2012. V. 85. № 24. P. 241104.
5. Sinchenko A. A., Lejay P., Leynaud O., Monceau P. // Solid State Commun. 2014. V. 188. P. 67.
6. Nowadnick E. A., Johnston S., Moritz B. et al. // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109. № 24. P. 246404.
7. Hu B. F., Cheng B., Yuan R. H. et al. // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. № 8. P. 085105.
8. Iyeiri Y., Okumura T., Michioka C., Suzuki K. // Phys. Rev. B. 2003. V. 67. № 14. P. 144417.
9. Ru N., Chu J. H., Fisher I. R. // Phys. Rev. B. 2008. V. 78. № 1. P. 012410.
10. Zocco D. A., Hamlin J. J., Grube K. et al. // Phys. Rev. B. 2015. V. 91. № 20. P. 205114.
11. Hamlin J. J., Zocco D. A., Sayles T. A. et al. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 102. № 17. P. 177002.
12. Фролов А. В., Орлов А. П., Воропаев Д. П. и др. // Письма в ЖЭТФ. 2023. Т. 117. № 2. С. 171.
13. Frolov A. V., Orlov A. P., Voropaev D. M. et al. // Appl. Phys. Lett. 2021. V. 118. № 25. P. 253102.
14. Фролов А. В., Орлов А. П., Синченко А. А., Монсо П. // Письма в ЖЭТФ. Т. 109. № 3. С. 196.
15. Frolov A. V., Orlov A. P., Hadj-Azzem A. et al. // Phys. Rev. B. 2020. V. 101. № 15. P. 155144.
16. Jonason K., Nordblad P., Vincent E. et al. // Eur. Phys. J. B — Cond. Matt. Complex Systems. 2000. V. 13. № 1. P. 99.
17. Jonason K., Vincent E., Hammann J. et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. № 15. P. 3243.
18. Bag P., Baral P. R., Nath R. // Phys. Rev. B. 2018. V. 98. № 14. P. 144436.
19. Di Masi E., Foran B., Aronson M. C., Lee S. // Chem. Mater. 1994. V. 6. № 10. P. 1867.
20. Lefloch F., Hammann J., Ocio M., Vincent E. // Europhysics Lett. 1992. V. 18. № 7. P. 647.
21. Доценко В. С. // Успехи физ. наук. 1993. Т. 163. № 6. С. 1.

## FEATURES OF NONEQUILIBRIUM PINNING OF CHARGE DENSITY WAVES IN COMPOUNDS $\text{HoTe}_3$ AND $\text{TmTe}_3$

D. M. Voropaev<sup>a, b, \*</sup>, A. V. Frolov<sup>a</sup>, A. P. Orlov<sup>a, c</sup>, A. A. Sinchenko<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Kotelnikov Institute of Radioengineering and Electronics of RAS,*

*Mokhovaya Str., 11, build 7, Moscow, 125009 Russian Federation*

<sup>b</sup> *Moscow Institute of Physics and Technology (National Search University),  
Institutskii per. 9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701 Russian Federation*

<sup>c</sup> *Institute of Nanotechnology of Microelectronics of RAS,  
Nagatinskaya Str., 16a, build. 11, Moscow, 115487 Russian Federation*

*\*E-mail: voropaev.dm@phystech.edu*

Received May 12, 2023, revised June 12, 2023, accepted June 17, 2023

In this paper, the similarity of glass systems with pinning in compounds with a charge density wave (CDW)  $\text{TmTe}_3$  and  $\text{HoTe}_3$  was investigated. For this purpose, the differential IVs in micro-bridge structures oriented along the sliding direction of the CDW, with a multi-stage temperature change, were studied. In such a system with a sliding CDW, the changing behavior of the threshold field during isothermal exposure was shown, with characteristic relaxation on a logarithmic time scale. A property characteristic of glass systems has been found – the memory effect, which allows us to assert the unusual glass nature of the system of pinning centers in this system.

**Keywords:** Charge-density-waves, two-dimensional structures, memory effect

## НОВЫЕ РАДИОЭЛЕКТРОННЫЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ

УДК 621.396.6; 621.372.4:621.372.22; 681.5.013:681.5.015

### ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ИЗГОТОВЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ РЕЗИСТИВНО-ЕМКОСТНОЙ СРЕДЫ

© 2024 г. А. Х. Гильмутдинов<sup>a, b, \*</sup>, К. О. Максимов<sup>c</sup>, П. А. Ушаков<sup>c</sup><sup>a</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет

им. А. Н. Туполева — КАИ (КНИТУ-КАИ),

ул. К. Маркса, 10, Казань, 420111 Российская Федерация

<sup>b</sup>Научно-производственное объединение «Радиоэлектроника» им. В.И. Шимко,

ул. Журналистов, 50, Казань, 420029 Российская Федерация

<sup>c</sup>Ижевский государственный технический университет им. М. Т. Калашникова,

ул. Студенческая, 7, Ижевск, 426069 Российская Федерация

\*E-mail: agilmutdinov@rambler.ru

Поступила в редакцию 05.09.2023 г.

После доработки 10.04.2024 г.

Принята в печать 25.06.2024 г.

Рассмотрен опыт проектирования и изготовления фрактальных элементов (ФЭ) на основе резистивно-емкостной среды, а именно на основе одномерного структурно однородного резистивно-емкостного элемента с распределенными параметрами ( $RC$ -ЭРП) со структурой слоев вида  $R-C-NR$  ( $R-C-NR$  ЭРП). Приведены результаты проектирования и изготовления образцов толсто пленочных ФЭ, имеющих постоянную фазу импеданса  $-10^\circ$ ,  $-20^\circ$ ,  $-30^\circ$  и  $-40^\circ$  в диапазоне частот порядка 1.5 декады. Дан сравнительный анализ фазоча-стотных характеристик входного импеданса синтезированной модели и изготовленного образца.

**Ключевые слова:** фрактальный импеданс, фрактальный элемент, конечный распределенный элемент, структура слоев  $R-C-NR$ , синтез фрактального элемента

DOI: 10.31857/S0033849424120089, EDN: HNAZCT

#### ВВЕДЕНИЕ

Фрактальными называются элементы, реализующие фрактальный импеданс в определенном диапазоне частот. Выражение для нормированного значения фрактального импеданса в операторной форме при нулевых начальных условиях имеет вид [1]:

$$\bar{Z}(p) \cong F_0(p) p^\gamma, \quad (1)$$

где  $p = \sigma + j\omega$  — комплексная частота,  $\omega$  — круговая частота,  $\gamma = \alpha + j\beta$ ,  $0 \leq |\alpha| \leq 1$ ,  $0 \leq |\beta| \leq 1$ ,  $F_0(p)$  — вещественная постоянная, размерность и физический смысл которой зависят от значений  $\alpha$  и  $\beta$ . В рамках данной работы будем рассматривать вопросы проектирования и изготовления вещественных фрактальных элементов, для которых  $\beta = 0$ .

Обзор возможных подходов к проектированию одно- или многокомпонентных ФЭ, предложенных различными исследовательскими группами, представлен в работе [2], список литературы в которой содержит 293 работы. Однако все рассмотренные ФЭ, за исключением элементов на осно-

ве резистивно-емкостной среды, не пригодны для промышленного применения.

В работах [3, 4] были предложены различные методы реализации ФЭ со значениями дробно-степенного показателя входного импеданса  $\alpha$ , отличными от 0.5, использующие резистивно-емкостную среду (РЕС), выполненную в виде чередующихся резистивных и диэлектрических слоев, нанесенных друг на друга.

Детальная проработка направления реализации ФЭ на этой основе со структурой слоев вида  $NR-G1-C-R-MC-G2-KR$  представлена в работе [5]. В основу этих реализаций положена базовая конструкция (технологическая заготовка) на РЕС, которую можно моделировать с помощью одномерного однородного (ОО) резистивно-емкостного элемента с распределенными параметрами ( $RC$ -ЭРП) со структурой слоев вида  $NR-G1-C-R-MC-G2-KR$ . (Здесь и далее будем придерживаться терминов и определений элементов на основе РЕС, предложенных в работе [6].) При этом  $RC$ -ЭРП разбивается на  $n$  участков, соединенных между собой определенным образом. Каждый из этих участков за счет

соответствующей конструктивно-технологической обработки может иметь свою собственную структуру слоев [5, 7], поэтому созданные таким образом элементы были в этих работах названы одномерными структурно-неоднородными (ОСН)  $RC$ -ЭРП.

Для того чтобы обеспечить хорошую воспроизводимость основных характеристик ФЭ и иметь возможность подстройки их параметров для компенсации технологических погрешностей, т.е. обеспечения технологичности конструкции ФЭ, необходимо, чтобы количество слоев было минимальным, т.е. равным трем, и все составляющие элементы конструкции были структурно однородными. Поэтому в данной работе в качестве базовой для проектирования и изготовления ФЭ выбрана трехслойная конструкция с максимальным количеством степеней свободы для обеспечения заданных параметров характеристик ФЭ, а именно конструкция одномерного структурно однородного  $RC$ -ЭРП со структурой слоев вида  $R-C-NR$  (ОСО  $R-C-NR$  ЭРП, далее —  $R-C-NR$  ЭРП), предложенная в качестве перспективной в работе [7]. С учетом этого для структурного и параметрического синтеза использована программа синтеза ФЭ, описанная в работе [5], но скорректированная для синтеза ФЭ на основе ОСО  $R-C-NR$  ЭРП.

Для экспериментальной проверки эффективности применения ФЭ в различных радиоэлектронных устройствах требуются образцы ФЭ. Однако в настоящее время методика проектирования и опыт изготовления образцов на основе ОСО  $R-C-NR$  ЭРП отсутствуют.

Цель данной работы — проектирование опытного образца ФЭ на основе структурно-параметрического синтеза ОСО  $R-C-NR$  ЭРП и анализ соответствия ФЧХ входного импеданса изготовленного образца, аналогичной характеристике, полученной в результате синтеза.

## 1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ

### 1.1. Конструкция

Схематично конструкция ОО  $R-C-NR$  ЭРП, которая выбрана в качестве базовой для реализации ФЭ толсто пленочной технологией на основе ОСО  $R-C-NR$  ЭРП, изображена на рис. 1а, а на рис. 1б — условно графическое обозначение (УГО) схемы замещения (модели) его  $i$ -го конечного элемента (рис. 1а) в соответствии с [6], т.е. УГО его  $i$ -го конечного распределенного элемента (КРЭ).

На рис. 1 между резистивными слоями и диэлектриком показаны переходные слои  $G$  и  $NG$ , которые специально не формируются, но, как было показано в [8], образуются в процессе изготовления многослойной структуры в результате диффузии материалов при высокотемпературной обработке,

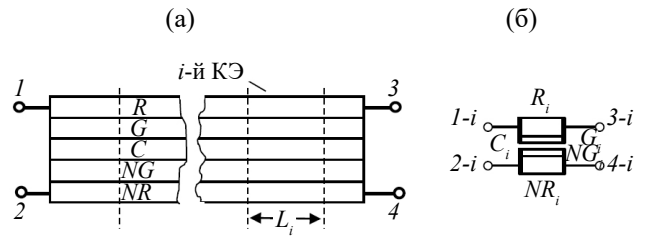


Рис. 1. Базовая конструкция для реализации ФЭ на основе ОСО  $R-C-NR$  ЭРП: а — структура слоев; б — УГО  $i$ -го КРЭ; 1...4 — обозначения номеров выводов  $RCGNR$ -структуры, 1...4- $i$  — обозначения номеров выводов  $i$ -го КРЭ.

своей толсто пленочной технологией изготовления  $RC$ -ЭРП.

### 1.2. Математические модели участков конструкции ФЭ

Для анализа рассмотренной в разд. 1.1 конструкции ОСО  $R-C-NR$  ЭРП и синтеза ФЭ на ее основе с заданными параметрами характеристик воспользуемся методом конечных распределенных элементов (МКРЭ), предложенным в [9, 10], теоретическая и практическая основа которого подробно изложена в [3]. Суть МКРЭ применительно к рассматриваемой одномерной конструкции ОСО  $R-C-NR$  ЭРП заключается в следующем. Исходная базовая заготовка ФЭ на основе ОО  $R-C-NR$  ЭРП разбивается на несколько участков  $RC$ -ЭРП, которые называются конечными элементами (КЭ). Каждый КЭ замещается ОО  $RC$ -ЭРП с соответствующей структурой слоев, который в соответствии с МКРЭ называется ОО конечным распределенным элементом (ОО КРЭ). К тому же для вычисления  $y$ -параметров функциональных элементов на основе РЕС нет необходимости находить распределение потенциалов в резистивных слоях этой среды, как это делается в методе конечных элементов: достаточно определить первичные  $y$ -параметры полученного многополюсника — модели функционального элемента на основе РЕС (в данном случае ФЭ на основе ОСО  $R-C-NR$  ЭРП), составленной из ОО КРЭ. При этом используется схема замещения элементарного участка  $\Delta x$  КЭ (рис. 2), в которой учтены потери в переходных слоях, в диэлектрике, возможное перекрытие резистивных слоев контактными площадками.

На рисунке введены следующие обозначения:  $p$  — комплексная частота,  $r$  — погонное сопротивление резистивного слоя  $R$ ,  $c$  — погонная емкость конденсатора, который получается между резистивными слоями,  $K_G$  — безразмерный коэффициент, численно равный отношению погонного сопротивления переходного слоя  $G$  к погонному сопротивлению резистивного слоя  $R$ ,  $N$  — безразмерный коэффициент, численно равный отноше-



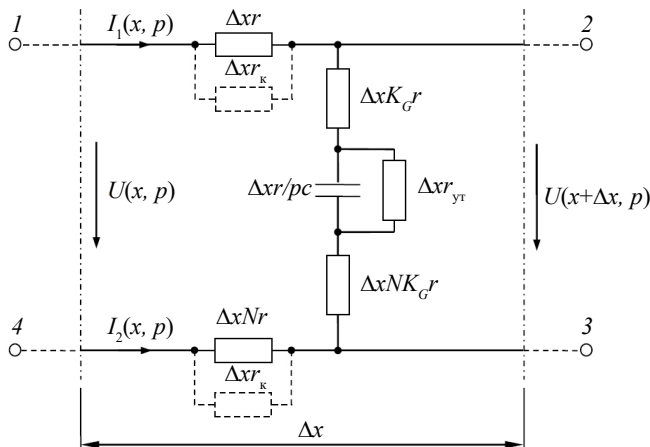


Рис. 2. Универсальная схема замещения элементарного участка  $\Delta x$  КЭ ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП.

нию погонных сопротивлений верхнего и нижнего резистивного слоев,  $r_{yt}$  — погонное сопротивление утечки диэлектрика,  $r_k$  — погонное сопротивление материала контакта. Сопротивления контактов (см. рис. 2, пунктир) учитываются только в КЭ приконтактных областей конструкции ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП.

Выражения для  $y$ -параметров ОО КРЭ, составляющих конструкцию ФЭ, получены в [8] в виде  $Y$ -матрицы для ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП:

$$Y = \frac{1}{(1+N)R} \times \begin{bmatrix} \frac{\theta}{\text{th}\theta} + N & -\frac{\theta}{\text{sh}\theta} - N & \frac{\theta}{\text{sh}\theta} - 1 & 1 - \frac{\theta}{\text{th}\theta} \\ -\frac{\theta}{\text{sh}\theta} - N & \frac{\theta}{\text{th}\theta} + N & 1 - \frac{\theta}{\text{th}\theta} & \frac{\theta}{\text{sh}\theta} - 1 \\ \frac{\theta}{\text{sh}\theta} - 1 & 1 - \frac{\theta}{\text{th}\theta} & \frac{\theta}{\text{th}\theta} + \frac{1}{N} & -\frac{\theta}{\text{sh}\theta} - \frac{1}{N} \\ 1 - \frac{\theta}{\text{th}\theta} & \frac{\theta}{\text{sh}\theta} - 1 & -\frac{\theta}{\text{sh}\theta} - \frac{1}{N} & \frac{\theta}{\text{th}\theta} + \frac{1}{N} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\theta = \sqrt{\frac{R(1+N)(1+j\omega CR_{yt})}{R_{yt} + RK_G(1+N)}}$$

— постоянная распространения ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП;  $R_{yt}$  — сопротивление утечки диэлектрического слоя, определяемое в результате идентификации параметров математической модели изготовленного образца;  $R$  — общее сопротивление резистивного слоя;  $C$  — общая емкость, определяемая площадью перекрытия резистивных слоев.

Для того чтобы выражение (2) можно было использовать в программе синтеза ФЭ, обеспечивающего заданные требования к его ФЧХ, необходимо определить параметры, входящие в (2).

### 1.3. Идентификация параметров математической модели ОО КРЭ

Особенность решения этой задачи состоит в том, что ряд параметров, характеризующих резистивно-емкостную среду ( $R_{yt}$ ,  $K_G$ ,  $r_k$ ), зависит от технологии изготовления ФЭ. Поэтому для решения задачи была использована опытная партия толсто пленочных образцов  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, описание которых приведено в работе [7]. В работе [8] был предложен и реализован метод идентификации параметров  $R_{yt}$ ,  $K_G$ ,  $r_k$  путем сопоставления частотных характеристик образца  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП с аналогичными характеристиками для его модели, полученными с использованием выражения (2) для  $Y$ -матрицы ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП.

Для автоматизации процесса идентификации был использован аппаратно-программный комплекс (АПК) на основе измерительного комплекса параметров интегральных микросхем ДМТ-219. Программная часть АПК представляет собой программу оптимизации и пользовательский интерфейс, выполненные в среде Matlab.

Автоматизированная система измерения и идентификации электрических характеристик образца  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, разработанная в [8] и используемая в данной работе, обеспечивает измерение  $y$ -параметров образцов в диапазоне частот до 3 ГГц с относительной погрешностью  $\delta_y = \pm 2\%$ , сопротивлений резистивных слоев с  $\delta_R = \pm 0.2\%$  и емкостей между резистивными слоями с  $\delta_C = \pm 1\%$ . В результате идентификации были определены параметры  $R_{yt} = 4.5 \times 10^8 \text{ Ом}$ ,  $K_G = 2.8 \times 10^{-4}$ ,  $r_k = 8.7 \text{ Ом/м}$ , характеризующие толсто пленочную технологию изготовления образцов ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, используемых для идентификации параметров математической модели ОО КРЭ.

### 1.4. Структурно-параметрический синтез модели ФЭ

Структурно-параметрический синтез модели ФЭ осуществляется в специализированной программе [5, 8], в которой с помощью генетического алгоритма определяются обеспечивающие заданные характеристики ФЭ, схема соединений выводов участков ФЭ между собой, вариант двухполюсного включения многополюсника и параметры структуры ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП: его полное сопротивление  $R$  и полная емкость  $C$ , коэффициент  $N$ , нормированные длины каждого из четырех участков ФЭ ( $l_{0i}$ ), параметры  $R_{yt}$  и  $K_G$ , необходимые для определения  $y$ -параметров в выражении (2) каждого из участков ФЭ. В данной работе использована

программа синтеза, в которой в качестве моделей конечных элементов взяты ОО КРЭ со структурой слоев  $R$ - $C$ - $NR$  с учетом переходных слоев  $G$ ,  $NG$  и потерь в диэлектрике  $R_{\text{т}}$ .

На рис. 3 представлен один из результатов работы программы структурно-параметрического синтеза ФЭ по критерию постоянства ФЧХ входного импеданса ( $\varphi_{\text{ЗВХ}}$ ) по уровню ( $\varphi_{\text{З}}$ ) с неравномерностью ( $\Delta\varphi_{\text{З}}$ ) в пределах двух частотных декад:  $\varphi_{\text{ЗВХ}} = \varphi_{\text{З}} \pm \Delta\varphi_{\text{З}} = -30^\circ \pm 2^\circ$ . Вся информация о параметрах секций (участков ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП), входящих в схему замещения ФЭ, отображена в диалоговом окне (рис. 3а). Здесь ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП назван  $RCGNR$  структурой, так как учитываются параметры переходных слоев  $G$ .

Длины участков ФЭ  $l_{0i}$  нормированы по отношению ко всей длине  $l$  ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, т.е.

$$\sum_{i=1}^4 l_{0i} = \sum_{i=1}^4 l_i / l = 1,$$

в данном случае  $l_{0i} = \{0.125, 0.1875, 0.375, 0.3125\}$ . В окне Параметры слоев выводится полное сопротивление  $R$  [Ом] и полная емкость  $C$  [Ф] ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, с помощью которых определяются сопротивления и емкости каждой части ФЭ из соотношений

$$R_i = R l_{0i}, C_i = C l_{0i},$$

где  $i$  – номер участка ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП.

Диапазон частот, в котором программа ищет структуру схемы замещения ФЭ, обеспечивающую заданные требования к ФЧХ входного импеданса, указан в окне Диапазон частот в логарифмическом масштабе. Следует отметить, что границы этого диапазона, как правило, задаются несколько шире, чем требования к диапазону постоянства фазы синтезируемого ФЭ. Это обеспечивает более высокую вероятность выполнения заданных требований к ФЧХ ФЭ.

В окне Топология  $RCGNR$ -структуры диалогового окна показана схема коммутации выводов четырех участков, на которые была разделена исходная конструкция ОО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП. С учетом полученных в результате синтеза параметров эта конструкция обеспечивает требуемую ФЧХ входного импеданса ФЭ. Одним из выводов подключения ФЭ к внешней схеме является вывод, обозначенный Вх, а вторым – «земля». Для наглядности схема замещения ФЭ изображена на рис. 3б с учетом УГО, предложенных в работе [6]. После завершения синтеза выводится график входного импеданса синтезированного ФЭ (рис. 3в).

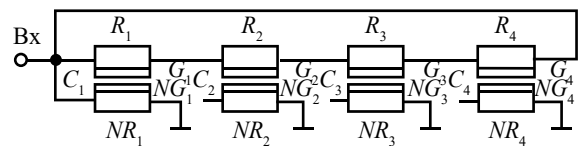
### 1.5. Разработка топологии ФЭ и определение размеров элементов

На следующем этапе была разработана конструкция (топология) ФЭ на основе ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП, реализующая сопротивления  $R_i$  и емкости

(а)



(б)



(в)

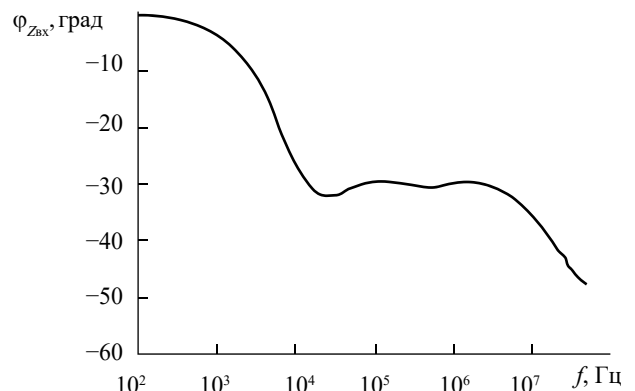


Рис. 3. Результаты работы программы синтеза ФЭ по уровню постоянства ФЧХ импеданса  $-30^\circ$ : а – диалоговое окно с результатом синтеза ФЭ; б – схема замещения синтезированного ФЭ, соответствующая полю «Топология  $RCGNR$ -структуры» диалогового окна; в – график ФЧХ входного импеданса синтезированного ФЭ.

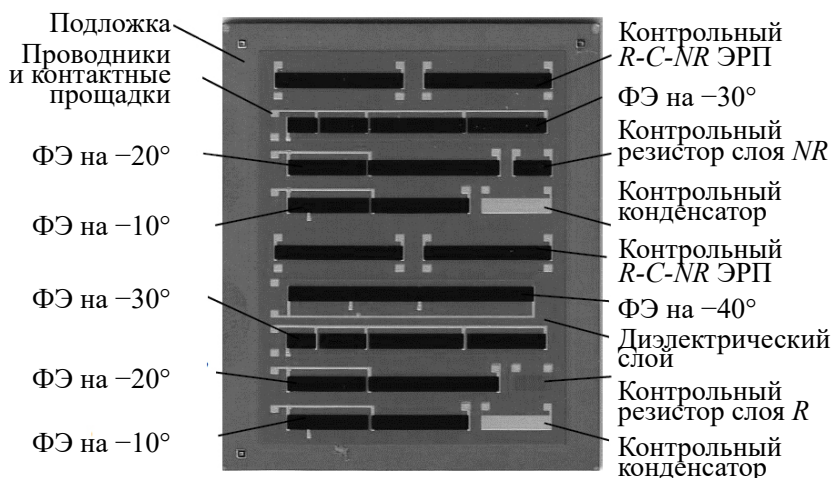


Рис. 4. Фото подложки с толсто пленочными ФЭ и контрольными элементами.

$C_i$  участков ОСО  $R-C-NR$  ЭРП, параметр  $N$ , схемы коммутации его участков, полученных в результате структурно-параметрического синтеза ФЭ, с учетом параметров выбранных материалов и конструктивно-технологических возможностей выбранного технологического процесса изготовления образцов ФЭ. Для этого необходимо определить ширину  $b$  и длины участков  $l_i$ , которые будут реализованы в изготовленном толсто пленочном образце ФЭ.

Исходя из обеспечения равенства величин сопротивлений  $R_i$  и емкостей  $C_i$  участков ФЭ, полученных в результате синтеза, и этих же параметров участков в изготовленном образце, можно записать

$$R_i = \rho_{\text{кв}} \frac{l_i}{b}, \quad C_i = b l_i C_{\text{уд}}.$$

Тогда конструктивные размеры можно получить из следующих соотношений:

$$l_i = \sqrt{\frac{R_i C_i}{\rho_{\text{кв}} C_{\text{уд}}}}, \quad b = \sqrt{\frac{C_i \rho_{\text{кв}}}{C_{\text{уд}} R_i}}.$$

Или с учетом значений для  $R_i = R_{i0}$ , и  $C_i = C_{i0}$  имеем

$$l_i = l_{i0} \sqrt{\frac{RC}{\rho_{\text{кв}} C_{\text{уд}}}}, \quad b = \sqrt{\frac{C \rho_{\text{кв}}}{C_{\text{уд}} R}}. \quad (3)$$

Для изготовления опытных образцов в качестве материала резистивного слоя была выбрана паста рутениевая серии 3100 ТУ-003-00387275-2012 с сопротивлением квадрата  $\rho_{\text{кв}} = 7$  кОм, а в качестве материала диэлектрического слоя — паста серии 6000 ТУ-006-00387275-2012 с удельной емкостью  $C_{\text{уд}} = 52$  пФ/мм<sup>2</sup>. Размеры изготавливаемых секций рассматриваемого ФЭ в соответствии с (3) получились следующими: длины  $L_1 = 4$  мм;  $L_2 = 6$  мм;

$L_3 = 12$  мм;  $L_4 = 10$  мм, ширина  $b = 2$  мм. Следует отметить, что на стадии проектирования и изготовления опытных образцов ФЭ задача минимизации размеров конструкции не ставилась.

Аналогичным образом были разработаны конструкции еще трех ФЭ, синтезированных по критерию постоянства ФЧХ входного импеданса  $\Phi_{\text{Звх}} = \Phi_Z \pm \Delta\Phi_Z = -10^\circ \pm 1.5^\circ; -20^\circ \pm 2^\circ; -40^\circ \pm 2^\circ$ .

Конструкции ФЭ разрабатывали в соответствии с техническими условиями изготовления толсто пленочных микросхем предприятия-изготовителя.

Все ФЭ были размещены на одной стандартной подложке из алюмооксидной керамики марки ВК-94 ( $\text{Al}_2\text{O}_3$  94.4% (технические условия 11–78 аЯ0.027.002 ТУ)) размером  $48 \times 60$  мм с необходимыми элементами для контроля параметров слоев в процессе изготовления и для определения параметров ФЭ после его изготовления. Вид подложки с толсто пленочными ФЭ и контрольными элементами приведен на рис. 4.

Некоторые ФЭ на подложке продублированы, чтобы выявить наличие (или отсутствие) разброса параметров ФЭ одинаковых по конструкции образцов.

## 2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФЧХ ВХОДНОГО ИМПЕДАНСА СИНТЕЗИРОВАННЫХ ФЭ И ИЗГОТОВЛЕННЫХ ОБРАЗЦОВ

### 2.1. ФЧХ входного импеданса ФЭ

Измерения частотных характеристик входного импеданса изготовленных образцов ФЭ выполнялись с помощью прецизионного анализатора импеданса Wayne Kerr WK 6550B.

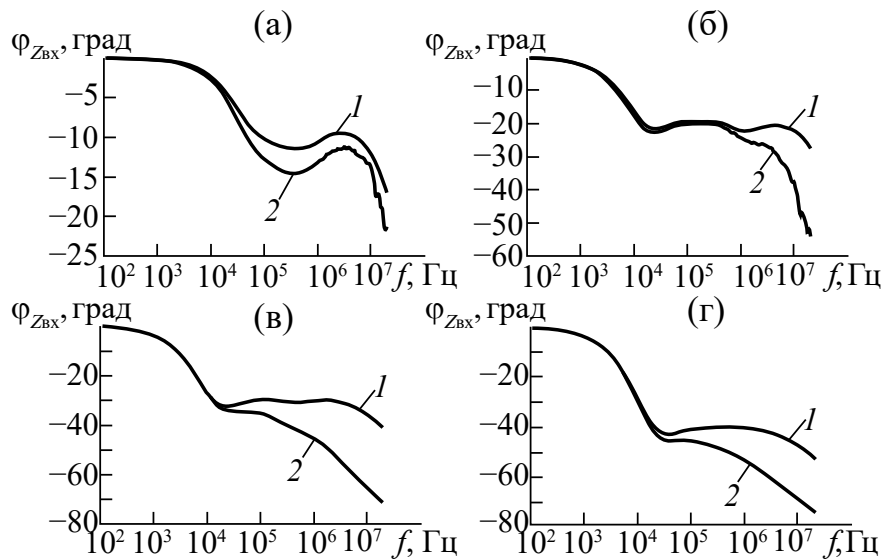


Рис. 5. Фазочастотные характеристики входного импеданса ФЭ с различными  $\varphi_{Z_{вх}} = \varphi_Z \pm \Delta\varphi_Z$ :  $-10^\circ \pm 1.5^\circ$  (а),  $-20^\circ \pm 2^\circ$  (б),  $-30^\circ \pm 2^\circ$  (в)  $-40^\circ \pm 2^\circ$  (г), для синтезированной модели (1) и измеренная для образца (2).

Результаты этих измерений и соответствующие ФЧХ синтезированных моделей приведены на рис. 5.

Анализируя приведенные на рис. 5 графики ФЧХ входного импеданса ФЭ, сделаем следующие выводы.

1. Для ФЭ с заданными постоянствами фазы входного импеданса  $\varphi_Z = -10^\circ, -20^\circ$  на частотах до 1 МГц наблюдается удовлетворительное совпадение ФЧХ импедансов синтезированной модели и изготовленного образца.

2. Для ФЭ с заданными постоянствами фазы входного импеданса  $-30^\circ, -40^\circ$  удовлетворительное совпадение ФЧХ импедансов синтезированной модели и изготовленного образца наблюдается лишь до 100 кГц.

3. Для всех образцов ФЭ (кроме образца с  $\varphi_Z = -10^\circ$ ) наблюдается более быстрое уменьшение фазового сдвига по сравнению с расчетным, начиная с частоты 1 МГц для образца с  $\varphi = -20^\circ$  и с частоты 100 кГц для остальных образцов.

## 2.2. Анализ причин расхождения ФЧХ

Наиболее вероятной причиной преждевременного спада ФЧХ входного импеданса образцов ФЭ по сравнению с ФЧХ импеданса синтезированных моделей на высоких частотах является то, что, как отмечено в разд. 1.4, программа синтеза использует модели ОО КРЭ со структурой слоев вида *R-C-NR* с учетом только переходных слоев и потерь в диэлектрике. В изготовленных же образцах ФЭ кроме ОО *RC-ЭРП* со структурой слоев вида *R-C-NR* возникают и другие виды слоев. Таким образом, схема замещения образца ФЭ отличается от схемы замещения синтезированной модели.

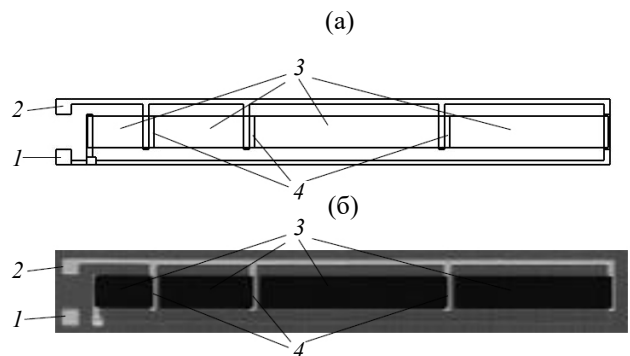


Рис. 6. Фрактальный элемент на основе ОО *R-C-NR* ЭРП с постоянством фазы  $\varphi_{Z_{вх}} = -30^\circ$ : а – топологический чертеж; б – фото изготовленного образца; 1 – проводники с контактами к нижнему резистивному слою (слой *R*), 2 – проводники с контактами к верхнему резистивному слою, 3 – верхний резистивный слой (слой *NR*), 4 – зазоры в верхнем резистивном слое.

Проверку этого предположения проведем на примере ФЭ с постоянством фазы ФЧХ входного импеданса  $\varphi_{Z_{вх}} = -30^\circ$ . На рис. 6 приведен в увеличенном масштабе топологический чертеж, по которому изготавливалась оснастка для изготовления образца, и фото изготовленного образца.

С учетом полученных в процессе изготовления дополнительных слоев (рис. 6б) была разработана схема замещения образца в программе OrCAD (рис. 7).

Здесь схемотехнические модели четырех участков ФЭ со структурой слоев *R-C-NR* (имя модели *RCGNR1024*) представляют собой лестничные цепи из 1024-х звеньев универсальной схемы замещения



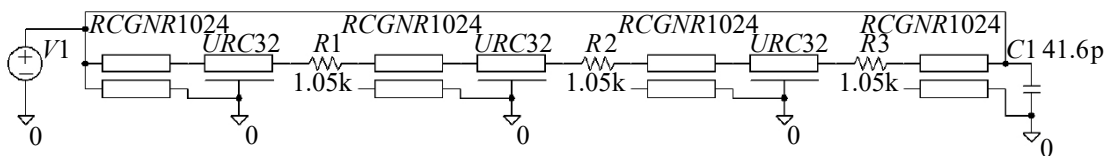


Рис. 7. Схема замещения изготовленного образца ФЭ с постоянством фазы  $\varphi_{\text{Звх}} = -30^\circ$  (рис. 6б), выполненная в OrCAD.

элементарного участка  $\Delta x$  конечного элемента ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП (см. рис. 2). Участки перекрытия резистивного слоя проводящими контактами, которые представляют собой ОО  $RC$ -ЭРП со структурой слоев вида  $R$ - $C$ -0 моделировались лестничными  $RC$ -цепями из 32-х звеньев (имя модели  $URC32$ ). Резистивные элементы ( $R1...R3$ ) учитывают активные сопротивления участков в слое  $R$ , возникающие в местах зазоров в резистивном слое  $NR$ .

Расчет параметров элементов схемы замещения ( $RCGNR1024$ ,  $URC32$ ,  $R1...R3$ ,  $C1$ ) выполняли с учетом данных технологического процесса завода-изготовителя (ширина перекрытия контактов с резистивными слоями равна 400 мкм; ширина зазоров в резистивных слоях равна 300 мкм) и геометрических размеров участков конструкции образца и удельных параметров слоев ФЭ, определенных в разд. 1.5.

Учитывая эти данные, определим емкость, образованную между концевыми контактами:  $C1 = 41.6$  пФ. Общие сопротивление и емкость модели  $URC32$  соответственно равны 1.4 кОм и 41.6 пФ. Номиналы резистивных элементов  $R1...R3$  равны 1.05 кОм. При расчете параметров модели  $RCGNR1024$  было учтено, что длины этих участков уменьшаются по сравнению с расчетными на размеры контактных площадок, перекрывающих резистивные слои.

Для корректности сравнения результатов моделирования изготовленного образца с учетом полученных дополнительных участков (см. рис. 7) и модели ФЭ, синтезированной без учета этих элементов (см. рис. 3б), была построена полная аналогия данной схемы замещения в программе OrCAD (рис. 8).

Фазочастотные характеристики входного импеданса идеализированной и уточненной моделей ФЭ (см. рис. 8 и 7 соответственно) представлены на рис. 9 (кривые 1 и 2 соответственно). Сравним кри-

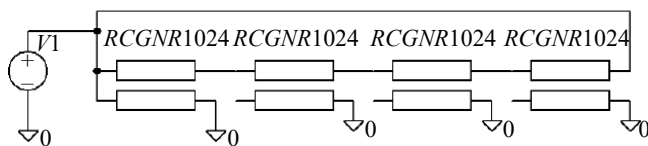


Рис. 8. Модель ФЭ в программе OrCAD, аналогичная схеме замещения синтезированного ФЭ (см. рис. 3б).

вые (рис. 9), полученные моделированием в OrCAD, с аналогичными графиками ФЧХ входного импеданса схемы замещения ФЭ, синтезированной с помощью программы, и ФЧХ изготовленного образца ФЭ (рис. 5в). ФЧХ, полученная в программе синтеза (см. рис. 5в, кривая 1), имеет хорошее совпадение с ФЧХ, полученной в программе OrCAD (рис. 9, кривая 1) для идеализированной модели (см. рис. 8). Это подтверждает корректность работы программы синтеза. ФЧХ, полученная в программе OrCAD (рис. 9, кривая 2) для уточненной модели по рис. 7 подтверждает предположение о том, что основной причиной заметного спада ФЧХ импеданса изготовленных образцов является неполное соответствие схем замещения синтезированной конструкции ФЭ и изготовленного образца. Ее несовпадение с измеренной ФЧХ образца (рис. 9, кривая 3) свидетельствует о том, что модель ФЭ на рис. 7 также не полностью учитывает реальное влияние дополнительных участков в конструкции образца ФЭ на ФЧХ входного импеданса.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первый опыт проектирования ФЭ на основе ОСО  $R$ - $C$ - $NR$  ЭРП по заданным требованиям к ФЧХ входного импеданса и изготовление толсто пленочных опытных образцов показал, что частотные характе-

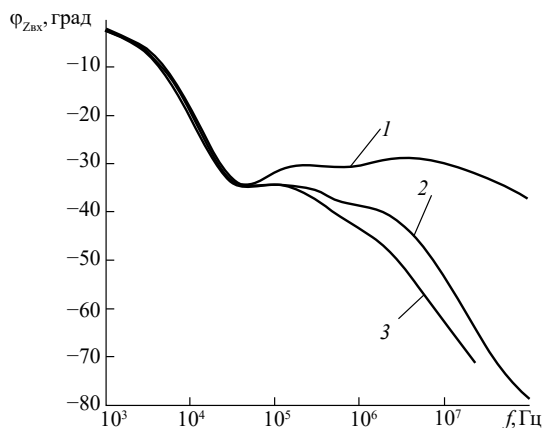


Рис. 9. Фазочастотные характеристики входного импеданса ФЭ с постоянством фазы  $-30^\circ$ , полученные в программе OrCAD для модели, представленной на рис. 8 (1) и 7 (2), а также измеренная (3) для изготовленного образца (см. рис. 5в).



ристики изготовленного образца имеют заметный спад в области верхних частот диапазона постоянства фазы по сравнению с аналогичными частотными характеристиками синтезированной модели ФЭ. Показано, что причиной такого расхождения является появление в конструкции изготовленного образца дополнительных конструктивных элементов, определяемых конструктивно-технологическими ограничениями, принятыми в используемой технологии. Для повышения точности воспроизведения частотных характеристик синтезированной схемы замещения в изготовленных на этой основе образцах необходимо совершенствование алгоритма и программы синтеза ФЭ, а также уменьшение значений паразитных емкостей при разработке топологии ФЭ. Решение этих задач позволит создавать фрактальные элементы, которые могут стать промышленно изготавливаемой новой элементной базой для развития фрактальной радиоэлектроники.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной статьи заявляют об отсутствии конфликта интересов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гильмутдинов А. Х., Ушаков П. А., Гильметдинов М. М. // Нелинейный мир. 2008. Т. 6. № 8. С. 452.
2. Shah Z. M., Kathjoo M. Y., Khanday F. A. et al. // Microelectron J. 2019. V. 84. P. 9. <https://doi.org/10.1016/j.mejo.2018.12.010>
3. Гильмутдинов А. Х. Резистивно-емкостные элементы с распределенными параметрами: анализ, синтез и применение. Казань: КГТУ, 2005.
4. Фрактальные элементы: пионерские конструктивно-технологические реализации. М.: Физматлит, 2020.
5. Мокляков В. А. Синтез фрактальных элементов на основе многослойной структурно-неоднородной резистивно-емкостной среды / Автореф. дисс. ... канд. техн. наук. Казань: КГТУ им. А. Н. Туполева, 2009. 19 с.
6. Гильмутдинов А. Х., Гильметдинов М. М. // Нелинейный мир. 2014. Т. 12. № 10. С. 43.
7. Гильмутдинов А. Х., Ушаков П. А. // РЭ. 2017. Т. 62. № 5. С. 413.
8. Максимов К. О. Решение задачи обеспечения заданных параметров фрактальных радиоэлементов на основе резистивно-емкостной среды. Дисс... канд. техн. наук. Ижевск: Ижевский гос. тех. ун-т, 2013. 162 с.
9. Гильмутдинов А. Х., Гонне А. А. // Тр. научно-техн. конф. по итогам работы за 1992–93. Казань. 4–15 апреля 1994. Казань: КГТУ, 1994. С. 218.
10. Гильмутдинов А. Х. // Вестник КГТУ им. А. Н. Туполева. 1997. № 1. С. 32.

## DESIGNING AND MANUFACTURING OF FRACTAL ELEMENTS BASED ON A RESISTANCE-CAPACITANCE MEDIUM

A. Kh. Gil'mutdinov<sup>a, b, \*</sup>, K. O. Maksimov<sup>c</sup>, P. A. Ushakov<sup>c</sup>

<sup>a</sup>Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI (KNITU-KAI), K. Marks Str., 10, Kazan, 420111 Russian Federation

<sup>b</sup>Scientific and Production Association "Radioelectronics" named after V.I. Shimko, Zhurnalystov Str., 50, Kazan, 420029 Russian Federation

<sup>c</sup>Izhevsk State Technical University named after M.T. Kalashnikov, Studencheskaya Str., 7, Izhevsk, 426069 Russian Federation

\*E-mail: agilmutdinov@rambler.ru

Received September 05, 2023, revised April 10, 2024, accepted June 25, 2024

This work presents the experience of designing and manufacturing of fractal elements (FE) based on resistance capacitance media, in particular, based on a one-dimensional structurally uniform resistance-capacitance element with distributed parameters (RC-EDP) with  $R-C-NR$  ( $R-C-NR$  ЭПИ) kind of a layer structure. It also presents the results of designing and manufacturing of thick film FE samples having constant phase of impedance  $-10^\circ, -20^\circ, -30^\circ$  and  $-40^\circ$  in the frequencies range of 1.5 decade order. It gives the results of the comparative analysis of phase-frequency characteristics of the input impedance of the synthesized model and the manufactured sample.

**Keywords:** fractal impedance, fractal element, final distributed element, layer structure  $R-C-NR$ , fractal element synthesis