

ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УДК 621.391;519.217

ОПТИМАЛЬНОЕ ДИСКРЕТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ОТСЧЕТОВ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННОГО МАРКОВСКОГО ШУМА

© 2023 г. А. Н. Детков*

Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем,
ул. Викторенко, 7, Москва, 125319 Российская Федерация

*E-mail: detkov@gosniias.ru

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

После доработки 11.02.2023 г.

Принята к публикации 25.02.2023 г.

Методами марковской теории оценивания случайных процессов решена задача синтеза оптимальных и квазиоптимальных алгоритмов оценивания отсчетов непрерывных компонент векторного дискретно-непрерывного марковского случайного процесса с учетом известных статистических характеристик аддитивного марковского коррелированного шума. При синтезе алгоритмов использован метод разностных измерений. Приведена структурная схема квазиоптимального цифрового фильтра. На простом примере методом имитационного моделирования показана работоспособность квазиоптимального алгоритма в статистически неопределенных ситуациях.

DOI: 10.31857/S0033849423060025, EDN: XLNUGM

ВВЕДЕНИЕ

В современных радиоэлектронных системах (РЭС) алгоритмы оптимальной или квазиоптимальной обработки случайных процессов практически реализуются с помощью средств цифровой обработки сигналов [1–3]. Поэтому указанные алгоритмы необходимо синтезировать в дискретной форме в виде рекуррентных соотношений, удобных для такой реализации. В то же время в большинстве случаев математические модели оцениваемых и наблюдаемых в РЭС процессов имеют непрерывную форму записи, что обусловлено физической сущностью происходящих с сигналами явлений. В связи с этим возникает проблема синтеза оптимальных алгоритмов дискретной фильтрации отсчетов непрерывных случайных процессов [4, 5].

В то же время современная элементная база позволяет использовать в электронных измерительных устройствах РЭС высокую частоту дискретизации, что приводит к автокорреляции измерительных отсчетов. Поэтому при статистическом синтезе цифровых фильтров (ЦФ) необходимо учитывать коррелированность шумов измерений, которые существенно влияют на формируемые оценки фильтрации [6–8].

В случае окрашенных шумов измерений традиционный подход к разработке алгоритмов фильтрации заключается в преобразовании уравнений состояния и измерения к требуемой канонической форме либо методом расширения простран-

ства состояний, либо “декорреляцией” случайного процесса за счет разностных измерений [6, 7, 9]. Наиболее просто задача решается методом расширения пространства состояний, который используется, например, при статистическом синтезе ЦФ [3]. Однако из-за необходимости фильтрации коррелированного шума наряду с информационным сообщением требуются дополнительные вычислительные затраты, вызванные увеличением размерности $(n + m)$ -мерного расширенного вектора состояния, что особенно критично для многопозиционных РЭС [10] и при оценивании дискретно-непрерывных марковских процессов (ДНМП) в условиях статистически неопределенных ситуаций [11]. Метод разностных измерений не требует увеличения размерности вектора состояния, однако для моделей вектора состояния и измерения в дискретном времени оценка вектора состояния формируется с запаздыванием на один шаг [7]. Тем не менее этот метод представляет наибольший практический интерес и используется далее в работе при синтезе алгоритмов оценивания.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вектор состояния рассматриваемой динамической системы описывается линейным векторно-матричным стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) с постоянными во времени коэффициентами, зависящими от изме-

нящегося во времени случайного дискретного параметра $A(k)$:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}^{(x)}(A(k))\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}^{(x)}(A(k))\mathbf{\Xi}^{(x)}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0,$$

а модель наблюдения — линейным алгебраическим уравнением

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{X}(t) + \mathbf{W}(t), \quad (2)$$

представляющим аддитивную смесь оцениваемого n_x -мерного вектора фазовых координат $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_{n_x}(t)]^T$ и коррелированного n_y -мерного вектора марковского шума $\mathbf{W}(t) = [w_1(t), w_2(t), \dots, w_{n_y}(t)]^T$, отождествляемого с вектором состояния дополнительной линейной системы:

$$\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \mathbf{F}^{(w)}(B(k))\mathbf{W}(t) + \mathbf{G}^{(w)}(B(k))\mathbf{\Xi}^{(w)}(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{W}(t_0) = \mathbf{W}_0,$$

где $\mathbf{X}(t_0)$, $\mathbf{W}(t_0)$ — векторы начальных фазовых координат, имеющие гауссовское распределение; $\mathbf{F}^{(x)}$, $\mathbf{F}^{(w)}$ — матрицы известных коэффициентов размером $(n_x \times n_x)$ и $n_y \times n_y$ соответственно; $\mathbf{G}^{(x)}$, $\mathbf{G}^{(w)}$ — матрицы интенсивностей шумов размером $(n_x \times n_x)$ и $(n_y \times n_y)$ соответственно; $\mathbf{Q}^{(x)} = \mathbf{G}^{(x)}\mathbf{G}^{(x)T}$, $\mathbf{Q}^{(w)} = \mathbf{G}^{(w)}\mathbf{G}^{(w)T}$ — матрицы коэффициентов диффузии векторов $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{W}(t)$ соответственно; T — операция транспонирования; $\mathbf{\Xi}^{(x)}$, $\mathbf{\Xi}^{(w)}$ — векторы белых гауссовских шумов (БГШ) соответствующей размерности с нулевыми математическими ожиданиями и единичными матрицами интенсивностей; $A(k) \equiv A(t_k)$, $B(k) \equiv B(t_k)$ — дискретные марковские процессы, характеризующие соответственно состояние параметров рассматриваемой динамической системы и окрашенных шумов измерений, описываемые цепями Маркова на M_1 и M_2 положений соответственно, с матрицами вероятностей переходов:

$$\Pi_1(k-1, k) = \{\pi_{ij}^a(k-1, k)\} =$$

$$\{P(A(k) = a_j | A(k-1) = a_i)\},$$

$$i, j = \overline{1, M_1},$$

$$\Pi_2(k-1, k) = \{\pi_{nm}^b(k-1, k)\} =$$

$$\{P(B(k) = b_m | B(k-1) = b_n)\},$$

$$n, m = \overline{1, M_2},$$

смена состояний которых может происходить только в фиксированные моменты времени $t_k = t_0 + k\Delta$,

$k = 1, 2, \dots$, разделенные постоянным интервалом $\Delta = t_k - t_{k-1}$; M_1, M_2 — число значений дискретных параметров a_j, b_m соответственно, P — оператор вероятности.

В соответствии с методом разностных измерений в непрерывном времени эквивалентное уравнение измерений имеет канонический вид [6]

$$\mathbf{Y}^{(y)}(t) = \frac{\mathbf{Y}(t)}{dt} - \mathbf{F}^{(w)}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}_{jm}^{(y)}\mathbf{X}(t) + \mathbf{\Xi}^{(y)}(t), \quad (4)$$

где

$$\mathbf{F}_{jm}^{(y)} = \mathbf{H}\mathbf{F}_j^{(x)} - \mathbf{F}_m^{(w)}\mathbf{H};$$

$$\mathbf{F}_{jm}^{(y)} \equiv \mathbf{F}^{(y)}(A(k) = a_j, B(k) = b_m);$$

$$\mathbf{F}_j^{(x)} \equiv \mathbf{F}^{(x)}(A(k) = a_j);$$

$$\mathbf{F}_m^{(w)} \equiv \mathbf{F}^{(w)}(B(k) = b_m);$$

$\mathbf{\Xi}^{(y)}(t)$ — вектор БГШ

$$\mathbf{\Xi}^{(y)}(t) = \mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)}\mathbf{\Xi}^{(x)}(t) + \mathbf{G}_m^{(w)}\mathbf{\Xi}^{(w)}(t);$$

$$\mathbf{G}_j^{(x)} \equiv \mathbf{G}^{(x)}(A(k) = a_j);$$

$$\mathbf{G}_m^{(w)} \equiv \mathbf{G}^{(w)}(B(k) = b_m)$$

со статистическими характеристиками

$$\mathbf{M}\{\mathbf{\Xi}^{(y)}\} = 0,$$

$$\mathbf{M}\{\mathbf{\Xi}^{(y)}(t)\mathbf{\Xi}^{(y)T}(t+\tau)\} =$$

$$= (\mathbf{H}\mathbf{G}_j^{(x)}\mathbf{G}_j^{(x)T}\mathbf{H}^T + \mathbf{G}_m^{(w)}\mathbf{G}_m^{(w)T})\delta(\tau).$$

Из (4) видно, что эквивалентное измерение вектора сообщения $\mathbf{X}(t)$ происходит на фоне вектора БГШ $\mathbf{\Xi}^{(y)}(t)$ за счет компенсации корреляционных связей процесса $\mathbf{W}(t)$, характеризующих матрицей $\mathbf{F}_m^{(w)}$.

Однако дискретизация процесса $\mathbf{Y}^{(y)}(t)$ наиболее часто осуществляется выборочными мгновенными значениями, для которых весовая функция выбора представляет собой δ -функцию [4]. Такой подход является некорректным при синтезе алгоритмов цифровой фильтрации непрерывных случайных сообщений, так как мгновенные отсчеты при наличии в измерениях БГШ не имеют смысла в силу их бесконечной дисперсии [4]. В этом случае требуется эквивалентное разностное представление математических моделей оцениваемых и измеряемых процессов, имеющих непрерывную форму записи. Для этого перепишем (4)

так, чтобы статистическая динамика векторного процесса $\mathbf{Y}(t)$ описывалась СДУ

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \mathbf{F}_m^{(w)} \mathbf{Y}(t) + \mathbf{F}_{jm}^{(y)} \mathbf{X}(t) + \mathbf{H} \mathbf{G}_j^{(x)} \mathbf{\Xi}^{(x)}(t) + \mathbf{G}_m^{(w)} \mathbf{\Xi}^{(w)}(t), \quad \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0. \quad (5)$$

Воспользуемся далее основами теории условных марковских процессов Стратоновича [12], в соответствии с которыми модели (2) и (5) описываются в виде совместного ДНМП $\mathbf{Z}(t) = [\mathbf{X}^T, \mathbf{Y}^T]^T$, СДУ которого имеет вид

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \mathbf{F}_{jm}^{(z)} \mathbf{Z}(t) + \mathbf{G}_{jm}^{(z)} \mathbf{\Xi}^{(z)}(t), \quad \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{Z}_0, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_{jm}^{(y)} & \mathbf{F}_m^{(w)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_{jm}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_j^{(x)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H} \mathbf{G}_j^{(x)} & \mathbf{G}_m^{(w)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Xi}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Xi}^{(x)} \\ \mathbf{\Xi}^{(w)} \end{bmatrix}.$$

Решение уравнения (6) определяется выражением [12]

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) \mathbf{Z}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, \tau) \mathbf{G}_{jm}^{(z)}(\tau) \mathbf{\Xi}^{(z)}(\tau) d\tau, \quad (7)$$

где фундаментальная матрица решений $\mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) = \mathbf{F}_{jm}^{(z)} \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, t_0), \quad \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0) = \mathbf{I}, \quad (8)$$

а $\mathbf{I}$, $\mathbf{0}$ — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Интеграл в правой части равенства (7) представляет собой векторный процесс с нулевым математическим ожиданием и матрицей центральных моментов второго порядка:

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(t, \tau) \mathbf{G}_{jm}^{(z)}(\tau_k) \mathbf{G}_{jm}^{(z)T}(\tau) \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)T}(t, \tau) d\tau, \quad (9)$$

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}(t_0, t_0).$$

С учетом (8), (9), СДУ (6) может быть представлено в статистически эквивалентной форме в виде разностного уравнения с шагом дискретизации $\Delta = t_k - t_{k-1}$, ($k = 1, 2, 3, \dots$ — дискретное время)

$$\mathbf{Z}(k) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)}(k, k-1) \mathbf{Z}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)}(k, k-1) \mathbf{N}^{(z)}(k-1), \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{Z}(k) \equiv \mathbf{Z}(t_k), \quad \mathbf{\Phi}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{\Phi}_m^{(yy)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{\Gamma}_m^{(yy)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(z)} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(x)} \\ \mathbf{N}^{(y)} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{N}^{(x)}$ и $\mathbf{N}^{(y)}$ — векторы размером $n \times 1$ и $m \times 1$ соответственно независимых гауссовских случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями; $\mathbf{Z}_0 = \mathcal{N}\{\mathbf{Z} - \mathbf{m}_0; \mathbf{B}_0\}$ — вектор начальных фазовых координат, имеющий нормальное распределение с вектором математических ожиданий $\mathbf{m}_0$ и корреляционной матрицей $\mathbf{B}_0$.

Элементы блочной матрицы $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)} = \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)} \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)T}$ имеют вид

$$\mathbf{B}_{jm}^{(zz)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_j^{(xx)} & \mathbf{B}_{jm}^{(xy)} \\ \mathbf{B}_{jm}^{(yx)} & \mathbf{B}_m^{(yy)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)T} & \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)} \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)T} \\ \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)} \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)T} & \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)} \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)T} + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)} \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)T} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(zz)}$, $\mathbf{\Gamma}_j^{(xx)}$, $\mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)}$, $\mathbf{\Gamma}_m^{(yy)}$ — нижние треугольные матрицы, формируемые из соответствующих элементов блочной матрицы $\mathbf{B}_{jm}^{(zz)}$, например, с помощью алгоритма Холецкого [14].

Таким образом, для неперекрывающихся интервалов времени уравнения состояния (1) и наблюдения (5) могут быть представлены из (10) в статистически эквивалентной форме в виде разностных уравнений с шагом дискретизации $\Delta = t_k - t_{k-1}$:

$$\mathbf{X}(k) = \mathbf{\Phi}_j^{(xx)} \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_j^{(xx)} \mathbf{N}^{(x)}(k-1), \quad (11)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0,$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yx)} \mathbf{X}(k-1) + \mathbf{\Phi}_{jm}^{(yy)} \mathbf{Y}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yx)} \mathbf{N}^{(x)}(k-1) + \mathbf{\Gamma}_{jm}^{(yy)} \mathbf{N}^{(y)}(k-1), \quad (12)$$

$$\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0.$$

В (11) и далее для простоты записи аргументы k , $k-1$ всех функций, где это возможно и не вызывает сомнений, не приводятся.

Эквивалентное дискретное представление (11), (12) непрерывных моделей векторов сообщения (2) и измерения (5) является абсолютно точным в том смысле, что для любых $t_k - t_{k-1} > 0$ оно позволяет получить случайные процессы с теми же статистическими характеристиками, как и решение системы СДУ (2), (5), без погрешностей аппроксимации [4].

Применительно к решаемой задаче синтеза вектор состояния представляет собой ДНМП

$$[\mathbf{X}^T(k), A(k), B(k)]^T \equiv [\mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k)]^T,$$

где $\mathbf{X}(k)$ — непрерывная n_x -мерная компонента ДНМП, описывающая в пространстве состояний динамику фазовых координат случайного процесса; $\mathbf{S}(k) \equiv [A(k), B(k)]^T$ — дискретная компонента ДНМП — двухкомпонентный дискретный марковский процесс, причем марковские цепи $A(k)$ и $B(k)$ не зависят друг от друга и не зависят от $\mathbf{X}(k)$.

Цель данной работы — на основе марковской теории оценивания случайных процессов разработать оптимальные (квазиоптимальные) алгоритмы оценивания ДНМП $[\mathbf{X}^T(k), A(k), B(k)]^T$ по наблюдаемым дискретным отсчетам выходных сигналов измерителей $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$, формируемых на фоне окрашенных шумов измерений $\mathbf{W}(t)$.

2. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СМЕШАННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО МАРКОВСКОГО ПРОЦЕССА

Обозначим апостериорное распределение смешанного вектора состояния $[\mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k)]^T$ по наблюдаемой последовательности измерений $\mathbf{y}_1^k = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k)\}$ как $\omega_{jm}(\mathbf{x}(k))$. Величина $\omega_{jm}(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k)$ равна вероятности одновременного выполнения условий

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(k) \in (\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k) + d\mathbf{x}(k)), \\ A(k) = a_j, \quad B(k) = b_m, \end{aligned}$$

где $\mathbf{x}(k)$ — детерминированное значение случайной величины $\mathbf{X}(k)$ при условии

$$\mathbf{Y}_1^k = \{\mathbf{Y}(1), \mathbf{Y}(2), \dots, \mathbf{Y}(k)\} = \mathbf{y}_1^k.$$

На основании свойств марковских процессов в дискретном времени запишем рекуррентное уравнение

$$\begin{aligned} \omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = \frac{f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k))}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) \omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \end{aligned} \quad (13)$$

где $f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) = f(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1), A(k) = a_j)$ — условная плотность вероятности (ПВ), определяемая с помощью уравнения (11); $\omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$ — апостериорное распределение, полученное на

предыдущем $k-1$ -м шаге по последовательности измерений $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$;

$$\begin{aligned} f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k)) = \\ = f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m) \end{aligned}$$

— одношаговая функция правдоподобия; $f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})$ — нормирующий коэффициент, $\sum_i = \sum_{i=1}^{M_1}$, $\sum_n = \sum_{n=1}^{M_2}$. В (13) интегрирование по переменной $\mathbf{x}$ ведется в области $\mathfrak{N}^{n_x}$.

Выражение (13) по своей сути — интегрально-рекуррентная формула Стратоновича [12] апостериорного распределения смешанного вектора состояния $[\mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k)]^T$ в дискретном времени и представляет собой решение задачи оценивания этого вектора состояния. Оптимальный алгоритм является рекуррентным и описывает эволюцию апостериорного распределения $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$ на каждом k -м шаге. Начальное условие $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}_0)$ равно известному априорному совместному распределению случайных величин $\mathbf{X}_0, A_0, B_0$.

Вводя обозначение $\tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k))$ (экстраполированное по измерениям $\mathbf{y}_1^{k-1} = \{\mathbf{y}(1), \mathbf{y}(2), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$ распределения смешанного вектора состояния $[\mathbf{X}^T(k), \mathbf{S}^T(k)]^T$), перепишем (13) в виде цепочки из двух формул

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ \times \int f_j(\mathbf{x}(k)|\mathbf{x}(k-1)) \omega_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = \frac{f_{jm}(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k))}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)). \quad (15)$$

Уравнение (14) описывает преобразование апостериорного распределения предыдущего шага в экстраполированное распределение $\tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k))$. С помощью соотношения (15) производится уточнение экстраполированного распределения на основе полученного измерения $\mathbf{y}(k)$ и определяется апостериорное распределение $\omega_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$.

Для нахождения апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП на текущем k -м шаге $P_{jm}^*(k)$ проинтегрируем (13) по переменным $\mathbf{x}(k), \mathbf{x}(k-1)$, в результате получим систему рекуррентных уравнений

$$\tilde{P}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{in}^*(k-1), \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{jm}^*(k) = \\ = \frac{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})}{f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})} \tilde{\mathbf{P}}_{jm}(k), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{jm}(k) &= \mathbf{P}(A(k) = a_j, B(k) = b_m | \mathbf{y}_1^{k-1}), \\ \mathbf{P}_{jm}^*(k) &= \mathbf{P}(A(k) = a_j, B(k) = b_m | \mathbf{y}_1^k), \\ f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1}) &= \\ &= \int f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m) \times \\ &\times \tilde{\omega}_{jm}(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k) \end{aligned} \quad (18)$$

— условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов, а нормирующий множитель $f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1})$ определяется как

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{y}_1^{k-1}) &= \sum_i \sum_n \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \times \\ &\times f(\mathbf{y}(k)|\mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1}) \mathbf{P}_{jm}^*(k), \\ \sum_j &= \sum_{j=1}^{M_1}, \quad \sum_m = \sum_{m=1}^{M_2}. \end{aligned}$$

Для нахождения условной ПВ непрерывной компоненты ДНМП

$$f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^k)$$

введем в рассмотрение условную экстраполированную ПВ непрерывной компоненты ДНМП

$$\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) = f(\mathbf{x}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})$$

и применим свойство условных распределений. В результате из (14) и (15) получим систему рекуррентных уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \mathbf{P}_{in}^*(k-1) \times \\ &\times \int f_j(\mathbf{x}(k) | \mathbf{x}(k-1)) f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1)) d\mathbf{x}(k-1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} f_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) &= \\ &= \frac{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m)}{f(\mathbf{y}(k) | \mathbf{x}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{y}_1^{k-1})} \times \\ &\times \tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k)), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\tilde{f}_{jm}(\mathbf{x}(k))$ — условная экстраполированная ПВ вектора $\mathbf{X}(k)$ при условии $A(k) = a_j, B(k) = b_m$;

$f_{jm}^*(\mathbf{x}(k))$ — условная апостериорная ПВ вектора $\mathbf{X}(k)$ при условии $A(k) = a_j, B(k) = b_m$;

$f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$ — условная апостериорная ПВ век-

тора $\mathbf{X}(k-1)$ при условии $A(k-1) = a_i, B(k-1) = b_n$, полученная на предыдущем $k-1$ -м шаге.

Синтезированный алгоритм совместной фильтрации компонент ДНМП (16)–(20) является нелинейным даже для линейных априорных уравнений (11), (12). Нелинейные операции выполняются при вычислении условной ПВ (16), используемой для определения апостериорных вероятностей (17). Особенность синтезированного алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов между собой.

3. КВАЗИОПТИМАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ДНМП НА ФОНЕ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При практической реализации синтезированного оптимального алгоритма совместного оценивания компонент ДНМП (16)–(20) встречаются значительные трудности. Они обусловлены требованием больших объемов памяти и быстродействия вычислителя при выполнении численного интегрирования многомерных ПВ для получения требуемых оптимальных оценок компонент ДНМП в реальном масштабе времени. Поэтому представляет большой интерес синтез квазиоптимальных алгоритмов фильтрации и экстраполяции [5, 15].

Существует большое количество различных методов синтеза квазиоптимальных алгоритмов нелинейного оценивания [16]. Наибольшее распространение получил метод гауссовской аппроксимации, который требует минимальных вычислительных затрат по сравнению с остальными методами и во многих случаях позволяет задать необходимое качество оценивания, несмотря на приближенное нахождение компонент ДНМП. Для этого следует выполнить двухмоментную параметрическую гауссовскую аппроксимацию апостериорного распределения $f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$, которая состоит в замене этой неизвестной функции некоторыми известными функциями, в частности условными математическим ожиданием и ковариационной функцией, случайные значения которых определяются так:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(k-1) | A(k-1) = \\ &= a_i, B(k-1) = b_n, \mathbf{Y}_1^{k-1}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(k-1), \mathbf{X}(k-1) | A(k-1) = \\ &= a_i, B(k-1) = b_n, \mathbf{Y}_1^{k-1}\}. \end{aligned}$$

Применяя, таким образом, на каждом k -м шаге гауссовскую аппроксимацию для условного апостериорного распределения $f_{in}^*(\mathbf{x}(k-1))$, можно

показать, что квазиоптимальный алгоритм фильтрации непрерывного компонента ДНМП описывается системой рекуррентных уравнений.

Вектор текущей условной оценки непрерывного компонента ДНМП и ковариационная матрица ее погрешностей

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(k) &\equiv \mathbf{M}\{\mathbf{X}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^k\}, \\ \mathbf{R}_{jm}^*(k) &\equiv \\ &\equiv \mathbf{cov}\{\mathbf{X}(k), \mathbf{X}(k) | A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^k\} \end{aligned}$$

определяются с учетом (5), (7) по результатам текущих измерений $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$, формируемых накоплением (интегрированием) непрерывного наблюдения $\mathbf{Y}(t)$ на интервалах времени между соседними отсчетами оцениваемого непрерывного компонента ДНМП:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(k) &= \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) + \mathbf{K}_{jm}(k) \times \\ &\times \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{Y}(\tau) d\tau - \Phi_{jm}^{(yy)} \mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}_{jm}^*(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k) - \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) (\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)})^{-1} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)T}. \quad (22)$$

Здесь

1) $\mathbf{K}_{jm}(k)$ — оптимальный коэффициент передачи:

$$\mathbf{K}_{jm}(k) = \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) (\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)})^{-1}, \quad (23)$$

2) $\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k)$ — условно-прогнозная оценка непрерывного компонента ДНМП при условии $A(k) = a_j$, $B(k) = b_m$ и $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k)$ — ковариационная матрица погрешностей предсказания:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1), \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \Phi_j^{(xx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(xx)T} + \Gamma_j^{(xx)} \Gamma_j^{(xx)T} + \right. \\ &+ \left[\Phi_j^{(xx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) \right] \times \\ &\times \left[\Phi_j^{(xx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k) \right]^T \Big\}, \end{aligned} \quad (25)$$

3) $\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)$ — прогнозируемое значение вектора измерений и $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k)$ — условные ковариационные матрицы погрешностей предсказания

априорные матрицы погрешностей предсказания измерений:

$$\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) = \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left(\Phi_j^{(xy)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(yx)T} + \Gamma_j^{(xy)} \Gamma_j^{(yx)T} \right); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k) &= \sum_i \sum_n \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b \frac{P_{in}^*(k-1)}{\tilde{P}_{jm}(k)} \times \\ &\times \left\{ \Phi_j^{(yx)} \mathbf{R}_{in}^*(k-1) \Phi_j^{(yx)T} + \Gamma_j^{(yx)} \Gamma_j^{(yx)T} + \right. \\ &+ \Gamma_j^{(yy)} \Gamma_j^{(yy)T} + \left[\Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right] \times \\ &\times \left[\Phi_j^{(yx)} \mathbf{X}_{in}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k) \right]^T \Big\}. \end{aligned} \quad (28)$$

При этом начальные условия для квазиоптимального алгоритма оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений (16), (17), (21)–(28) имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{jm}^*(0) &= \mathbf{M}\{\mathbf{X}_0\}, \quad \mathbf{R}_{jm}^*(0) = \mathbf{cov}\{\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0\}, \\ P_{in}^*(0) &= P_0, \quad i = \overline{1, M_1}, \quad n = \overline{1, M_2}. \end{aligned}$$

Уравнения оценивания апостериорной вероятности дискретной компоненты ДНМП (16), (17) остаются без изменения, а условная ПВ одношагового предсказания наблюдаемых сигналов (17) определяется из [15]:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{Y}(k) | \mathbf{X}(k), A(k) = a_j, B(k) = b_m, \mathbf{Y}_1^{k-1}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{n_y} \det\{\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k)\}}} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)) \times \right. \\ &\times \left. \left[\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(yy)}(k)\right]^{-1} (\mathbf{Y}(k) - \tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k))^T\right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Задача оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений считается решенной, если на выходе оптимального фильтра на каждом k -м шаге формируется оптимальная оценка, соответствующая определенному критерию оптимальности. Байесовское решение может быть получено на основе минимизации апо-

стериорного риска [17], который применительно к решаемой задаче имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^o(k) &= (\mathbf{x}^o(k), A(k) = a_j^o, B(k) = b_m^o) = \\ &= \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}(k), j, m} \sum_{\mu=1}^{M_1} \sum_{v=1}^{M_2} \int g_{j\mu v}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) \times \\ &\quad \times w_{jm}^*(\mathbf{x}(k)) d\mathbf{x}(k), \end{aligned} \quad (30)$$

где $g_{j\mu v}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k))$ — функция потерь; $\mathbf{u}^o(k)$ — оптимальное решение.

При решении многих практических задач малым ошибкам непрерывного компонента соответствуют меньшие потери. В таких случаях применяется функция потерь [15], простая по дискретному и квадратичная по непрерывному компонентам:

$$\begin{aligned} g_{j\mu v}(\mathbf{x}(k), \bar{\mathbf{x}}(k)) &= \alpha(1 - \delta_{j\mu v}) + \\ &+ \beta \delta_{j\mu v} (\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k))^T (\mathbf{x}(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)), \end{aligned} \quad (31)$$

где α, β — коэффициенты потерь; $\delta_{j\mu v}$ — символ Кронекера:

$$\delta_{j\mu v} = \begin{cases} 1, & \text{если } j = \mu, m = v, \\ 0, & \text{если } j \neq \mu, m \neq v, \\ \mu = \overline{1, M_1}, \quad v = \overline{1, M_2}. \end{cases}$$

Функция потерь (31) означает, что при любом неправильном определении значений дискретного компонента потери равны коэффициенту α , а при правильном принятии решения потери пропорциональны сумме квадратов ошибок оценки непрерывного компонента. Подставляя выражение (31) в (30) и выполняя минимизацию апостериорного риска, можно показать, что решающее правило имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\text{если } P_{jm}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{jm}^*(k) \} \} \geq \\ &\geq P_{\mu v}^*(k) \{ \alpha + \beta \text{Tr} \{ \mathbf{R}_{\mu v}^*(k) \} \}, \\ &\text{то } \mathbf{X}^o(k) = \mathbf{X}_{jm}^*(k), \quad a_j^o = a_j^*, \quad b_m^o = b_m^*, \end{aligned} \quad (32)$$

где $\text{Tr} \{ \mathbf{A} \}$ — след матрицы $\mathbf{A}$.

Таким образом, в качестве безусловной оценки непрерывного компонента ДНМП выступает условное апостериорное математическое ожидание $\mathbf{X}_{jm}^*(k)$. Из (32) следует, что принятие решения сводится к максимизации взвешенных апостериорных вероятностей дискретных компонент ДНМП. При этом следует отметить, что с увеличением погрешности оценки непрерывного компонента ДНМП уменьшаются веса погрешностей оценки дискретных компонент ДНМП. В результате может приниматься гипотеза с меньшей апостериорной вероятностью, но и с меньшими погрешностями оценки непрерывного компонента

ДНМП, т.е. может отвергаться гипотеза с большей апостериорной вероятностью.

Условная ковариационная матрица $\mathbf{R}_{jm}^*(k)$ характеризует качество оценки при правильном определении значений дискретных компонент $A(k) = a_j, B(k) = b_m$. Безусловная ковариационная матрица $\mathbf{R}^*(k)$ погрешностей оценки непрерывного компонента ДНМП определяется по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(k) &= \sum_j \sum_m \pi_{ij}^a \pi_{nm}^b P_{jm}^*(k) \left(\mathbf{R}_{jm}^*(k) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\mathbf{X}_{jm}^*(k) - \mathbf{X}^*(k) \right) \left(\mathbf{X}_{jm}^*(k) - \mathbf{X}^*(k) \right)^T \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Квазиоптимальный цифровой фильтр оценивания вектора состояния ДНМП на фоне коррелированных шумов измерений (рис. 1), реализующий алгоритм (16), (17), (21)–(28), (32)–(33), является многоканальным с числом каналов $M = M_1 \times M_2$ и в основном сохраняет структуру и все обратные связи, присущие оптимальному устройству. На вход каждого канала подаются текущие измерения $\mathbf{Y}(k) \equiv \mathbf{Y}(t_k)$, значения которых формируются из предварительно проинтегрированного аналоговым образом непрерывного процесса $\mathbf{Y}(t)$ за время одного такта, в конце каждого такта интегратор (ИНТ) обнуляется. Каждый канал состоит из блока КУ — вычисления коэффициентов усиления $\mathbf{K}_{jm}(k)$; блока оценки (БО), в котором рассчитываются векторы условных оценок $\mathbf{X}_{jm}^*(k)$, $\mathbf{X}_{in}^*(k-1)$; блока прогноза БП, в котором вычисляются условно-прогнозные оценки $\tilde{\mathbf{X}}_{jm}(k)$, $\tilde{\mathbf{Y}}_{jm}(k)$; блока апостериорных вероятностей (БАВ), в котором рассчитываются $P_{jm}^*(k)$, $P_{in}^*(k-1)$, $\tilde{P}_{jm}(k)$, и блока вычисления корреляционных матриц БКМ, в котором вычисляются $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xx)}(k)$, $\tilde{\mathbf{R}}_{jm}^{(xy)}(k)$, $\mathbf{R}_{jm}^*(k)$ и $\mathbf{R}_{in}^*(k-1)$. Окончательное решение о принятии безусловных оценок $\mathbf{X}^*(k) = \mathbf{X}_{jm}^*(k)$, $A(k) = a_j^*$, $B(k) = b_m^*$ принимается в решающем устройстве (РУ).

3.1. Пример

В качестве примера приведены результаты моделирования квазиоптимального алгоритма оценивания ДНМП на фоне гауссовского марковского случайного шума в условиях изменений статистических свойств этого шума в процессе оценивания. По условию постановки задачи исходный вектор состояния $\mathbf{X}(t) = [x \ v]^T$ априорного уравнения (1) и

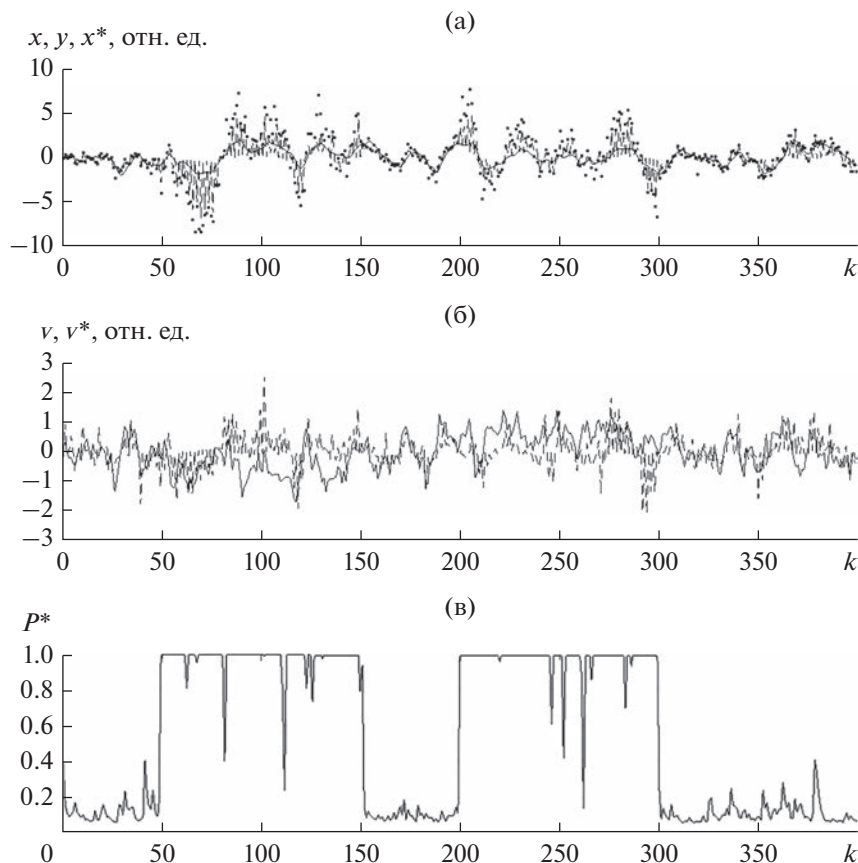


Рис. 2. Зависимости от дискретного времени: а) $x(k)$ — наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (сплошная), $x^*(k)$ — оценки наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (штриховая), $y(k)$ — измерений на фоне окрашенного шума (пунктирная); б) $v(k)$ — ненаблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (сплошная), $v^*(k)$ — оценки ненаблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП (штриховая); в) P^* — совместной вероятности правильного обнаружения изменений статистических характеристик наблюдаемой непрерывной компоненты ДНМП и окрашенного шума измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами теории условных марковских процессов решена задача оптимального оценивания отсчетов непрерывных компонент векторной марковской последовательности ДНМП на фоне коррелированного марковского шума. Синтезированные алгоритмы основаны на использовании метода разностных измерений и разложении смешанной апостериорной плотности вероятности вектора состояния $[X^T(k), A(k), B(k)]^T$ и являются алгоритмами с обратными связями по дискретному процессу $S^T(k) = [A(k), B(k)]$. На базе квазиоптимального алгоритма разработана соответствующая структурная схема цифрового фильтра.

Особенность синтезированного квазиоптимального алгоритма состоит в неразрывной связанности уравнений фильтрации и экстраполяции дискретного и непрерывного компонентов ДНМП между собой, что потребует дополнительных вы-

числительных затрат по сравнению с известными алгоритмами. Однако современная высокопроизводительная вычислительная техника позволяет построить практически реализуемый цифровой фильтр в статистически неопределенных ситуациях.

Применение метода разностных измерений не увеличивает вычислительные затраты в цифровом фильтре, так как размерность вектора состояния остается неизменной, как и при оценивании отсчетов непрерывных случайных процессов на фоне БГШ. В то же время существенно упрощается аналоговая часть аналого-цифрового преобразователя (АЦП) по сравнению с аналогичными алгоритмами [18, 19], так как задержка на один такт реализуется в ЦФ после АЦП, а также следует отметить отсутствие операции аналогового дифференцирования присущей классическим алгоритмам фильтрации непрерывных случайных процессов в непрерывном времени по методу разностных измерений [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991.
2. Ярлыков М.С., Миронов М.А. Марковская теория оценивания случайных процессов. М.: Радио и связь, 1993.
3. Величкин А.И. // РЭ. 1990. Т. 35. № 7. С. 1471.
4. Миронов М.А. // РЭ. 1993. Т. 38. № 1. С. 141.
5. Миронов М.А. Марковская теория оптимального оценивания случайных процессов. М.: Изд-во ФГУП "ГосНИИАС", 2013.
6. Sage A.P., Melsa J.L. Estimation Theory with Applications to Communication and Control. N. Y.: McGraw-Hill, 1971.
7. Xu Y., Shmaliy Y.S., Shen T. et al. // IEEE Sensors J. 2021. V. 21. № 5. P. 6384.
<https://doi.org/10.1109/JSEN.2020.3038242>
8. Jain B. // IEEE Trans. 1975. V. AC-20. № 3. P. 365.
<https://doi.org/10.1109/TAC.1975.1100979>
9. Stavrou P.A., Skoglund M. // IEEE Control Systems Lett. 2022. V. 6. P. 331.
<https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3074455>
10. Luo Y., Zhou J., Yang W. // IEEE Trans. 2022. V. CSII-69. № 6. P. 2807.
<https://doi.org/10.1109/TCSII.2021.3136184>
11. Детков А.Н. // РЭ. 2021. Т. 66. № 8. С. 748.
12. Стратонович Р.Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966.
13. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
14. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2010.
15. Детков А.Н. // РЭ. 2022. Т. 67. № 5. С. 485.
16. Руденко Е.А. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 43.
17. Репин В.Г., Тартаковский Г.П. Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Сов. радио, 1978.
18. Детков А.Н. // РЭ. 1995. Т. 40. № 9. С. 1406.
19. Детков А.Н. // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1997. № 1. С. 59.