

---

**ТЕОРИЯ И МЕТОДЫ  
ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ**


---

УДК 621.391

**РЕКУРРЕНТНАЯ ОЦЕНКА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ФАЗ  
МОДУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ**
© 2023 г. М. Л. Маслаков<sup>a, b, \*</sup>, В. В. Егоров<sup>a, b</sup><sup>a</sup>Российский институт мощного радиостроения,

11-я линия В.О., 66, Санкт-Петербург, 199178 Российская Федерация

<sup>b</sup>Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,  
ул. Большая Морская, 67, лит. А, Санкт-Петербург, 190000 Российская Федерация\*E-mail: [maslakovml@gmail.com](mailto:maslakovml@gmail.com)

Поступила в редакцию 13.09.2022 г.

После доработки 17.11.2022 г.

Принята к публикации 27.11.2022 г.

Рассмотрена задача построения эмпирической плотности распределения вероятности фаз сигнала с фазовой манипуляцией, а также методы непараметрического оценивания. Показан переход от метода аппроксимации с использованием базисных функций к методу оконных ядерных функций на базе гармонических функций. Представлены результаты численных экспериментов.

DOI: 10.31857/S0033849423050121, EDN: UHWMHT

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ**

При передаче данных по нестационарным каналам связи со сложной сигнально-помеховой обстановкой в условиях многолучевого распространения и замираний, таких как, например, коротковолновый (КВ) канал, возникает важная задача статистического анализа принимаемых сигналов. Так, при использовании сигналов с фазовой модуляцией (ФМ) данная задача сводится к статистическому анализу фаз принимаемых символов. В этом случае анализируемая выборка представляет собой угловые измерения, рассматриваемые как точки на единичной окружности. Для анализа таких измерений применяют круговые или полярные распределения вероятности случайной величины [1, 2], рассматриваемые в диапазоне  $[-\pi; \pi]$  или  $[0; 2\pi]$ .

Измеренные значения представляют собой оценки начальных фаз или разностей фаз комплексных огибающих элементарных символов принимаемого ФМ-сигнала. Таким образом, анализируемая выборка представляет собой

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (1)$$

где  $N$  – количество символов или объем выборки,  $\varphi_n$  – истинные значения фаз передаваемого сигнала,  $\zeta_n$  – ошибка измерения, связанная с аддитивным шумом и искажениями сигнала.

Одной из составляющих статистического анализа является задача получения эмпирических плот-

ностей распределения вероятностей фаз. Данная задача возникает при оценке вероятностных характеристик модулированных сигналов, оценке текущего состояния нестационарного радиоканала, а также для оценки отношения сигнал/шум [3–8].

Для решения этой задачи в работах [3, 4] был применен метод максимума правдоподобия (ММП). В этом случае модель плотности распределения вероятности фазы для сигнала с ФМ определяется выражением

$$W(\theta) = \sum_{m=0}^{M-1} p_m W_0\left(\theta - m \frac{2\pi}{M}\right), \quad \theta \in \{-\pi; \pi\}, \quad (2)$$

где  $p_m$  – вероятности или частоты символов,  $M$  – число позиций ФМ,  $W_0(\theta)$  – плотность распределения вероятности фазы при отсутствии модуляции, т.е. централизованная плотность распределения.

Отметим, что при  $m > 0$  происходит циклический сдвиг круговой плотности распределения на значение  $m \frac{2\pi}{M}$ .

Для сигналов с двоичной ФМ или BPSK-модуляцией, полагая вероятности равными  $p_0 = p_1 = 0.5$ , функционал правдоподобия имеет вид

$$L(\sigma) = \sum_{n=0}^{N-1} \lg \left[ \frac{1}{2} W_0(\psi_n, \sigma) + \frac{1}{2} W_0(\psi_n - \pi, \sigma) \right]. \quad (3)$$

Построение эмпирической плотности распределения вероятностей фаз  $\hat{W}(\theta)$ , основано на получении оценки значения  $\sigma_0$ , т.е.

$$\sigma_0 = \arg \left\{ \max_{\sigma > 0} L(\sigma) \right\}, \quad (4)$$

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2} W_0(\theta, \sigma_0) + \frac{1}{2} W_0(\theta - \pi, \sigma_0),$$

где  $\sigma$  – мера концентрации [2] или, другими словами, величина, обратная дисперсии случайной величины.

При этом в качестве плотности распределения вероятности  $W_0(\theta)$  используют круговое нормальное распределение [9, с. 297] для когерентной ФМ или распределение Мизеса [1, 2] для относительной или дифференциальной ФМ.

Значительно реже для построения эмпирической плотности применяют метод гистограмм.

При этом указанные подходы имеют весьма существенные для ряда практических приложений недостатки. Так, объем анализируемой выборки, который может быть использован для построения плотности распределения вероятностей, в условиях нестационарного канала, характеризующегося быстрыми замираниями, не велик, что существенно ограничивает применение гистограммного метода [10]. При использовании ММП в случае передачи длительных сегментов одинаковых символов (бит), например нулей, требуется соответствующий учет вероятностей  $p_m$ , что на порядок увеличивает число вычислений, даже для выборки относительно небольшого объема.

Цель работы – построение эмпирической плотности распределения вероятностей фаз символов ФМ-сигналов в условиях небольшого объема выборки.

## 2. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОМ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В условиях малого объема анализируемой выборки наиболее целесообразным является применение методов непараметрического оценивания [10]. Весьма эффективным методом является метод аппроксимации с использованием базисных функций. В этом случае искомая плотность распределения вероятностей определяется выражением

$$W(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(\theta), \quad (5)$$

где  $c_k$  – коэффициенты ряда,  $f_k(\theta)$  – ортогональные базисные функции.

В качестве функций  $f_k(\theta)$  часто выбирают базисы Эрмита, Лежандра или Чебышева [10].

В рассматриваемой задаче, оцениваемая плотность распределения априори является периодической функцией, поэтому естественно использовать тригонометрический базис, раскладывая  $W(\theta)$  в ряд Фурье [11, 12]. Тогда (5) перепишем в следующей форме [2, 13]:

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)), \quad (6)$$

где  $a_k, b_k$  – коэффициенты ряда Фурье.

Кроме того, в силу симметричности функции  $W(\theta)$  коэффициенты

$$b_k \equiv 0, k \in [0; \infty) \quad (7)$$

и тогда выражение (6) упрощается к форме

$$W(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta)) \right]. \quad (8)$$

Оценки коэффициентов  $a_k, b_k$  по имеющейся выборке (1) получают методом ортогональных разложений [14]:

$$\hat{a}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \cos(k\psi_n), \quad \hat{b}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N \sin(k\psi_n). \quad (9)$$

В результате эмпирическая оценка плотности распределения вероятности фазы имеет вид

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^K (\hat{a}_k \cos(k\theta) + \hat{b}_k \sin(k\theta)) \right], \quad (10)$$

или при условии (7) –

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^K (\hat{a}_k \cos(k\theta)) \right], \quad (11)$$

где  $K$  – число коэффициентов Фурье.

## 3. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА МЕТОДОМ ОКОННЫХ ЯДЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

Метод ядерных функций или метод Парзена [7, 15] представляется весьма эффективным для решения рассматриваемой задачи. Искомую оценку плотности распределения вероятностей по имеющейся выборке с учетом принятых в данной работе обозначений получают в виде

$$\hat{W}_h(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_h(\theta - \psi_n) = \frac{1}{Nh} \sum_{n=0}^{N-1} V\left(\frac{\theta - \psi_n}{h}\right), \quad (12)$$

где  $V(\theta)$  – неотрицательная функция, называемая ядром,  $h$  – параметр сглаживания,  $V_h(\theta)$  – взвешенное ядро.

Функцию  $V(\theta)$  выбирают из некоторых априорных соображений. Так, в качестве ядра часто

выбирают ядро в виде гауссианы [16, 17]. В рамках рассматриваемой задачи логично применение функций кругового нормального распределения, или распределения Мизеса.

В данной работе предлагается более простая форма ядра на базе гармонических функций. Рассмотрим далее соответствующий вывод.

Подставим оценки коэффициентов (9) в выражение (10)

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(k\psi_n) \cos(k\theta) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(k\psi_n) \sin(k\theta) \right) \right]. \quad (13)$$

Для упрощения дальнейших рассуждений перепишем (13) в форме

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\hat{W}_{K,N}(\theta)] \quad (14)$$

и распишем далее подробно слагаемое  $\hat{W}_{K,N}(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \hat{W}_{K,N}(\theta) &= \sum_{k=1}^K \left( \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(k\psi_n) \cos(k\theta) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sin(k\psi_n) \sin(k\theta) \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^K \left\{ \frac{1}{2} (\cos(k(\psi_n - \theta)) + \cos(k(\psi_n + \theta))) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\cos(k(\psi_n - \theta)) - \cos(k(\psi_n + \theta))) \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^K \cos(k(\psi_n - \theta)). \end{aligned} \quad (15)$$

Для конечной суммы косинусов известна (см. [13]) следующая формула:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \dots + \cos(n\theta) &= \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Обозначив выражение (16) как  $V_1(\theta)$ , распишем внутреннюю сумму в (15), тогда

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \sum_{k=1}^K \cos(k\theta) = V_1(\theta) - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sin\left(\left(K + \frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin(\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате можно переписать (15) в следующем виде:

$$\hat{W}_{K,N}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V(\psi_n - \theta). \quad (18)$$

Тогда выражение для оценки плотности распределения вероятностей преобразуется к форме

$$\hat{W}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V(\psi_n - \theta) \right]. \quad (19)$$

И окончательно введя параметр сглаживания по аналогии с (12), получим оценку плотности методом оконных ядерных функций с ядром (17) в виде

$$\begin{aligned} \hat{W}_h(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \frac{1}{Nh} \sum_{n=0}^{N-1} V\left(\frac{\psi_n - \theta}{h}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} V_h(\psi_n - \theta) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

#### 4. РЕКУРРЕНТНАЯ ОЦЕНКА В НЕСТАЦИОНАРНОМ КАНАЛЕ

Как отмечалось ранее в случае нестационарного канала, для получения различных оценок, адекватно отражающих текущее состояние канала, приходится использовать выборки весьма ограниченного объема. Это же касается и рассматриваемой задачи оценки плотности распределения вероятности фаз принимаемого сигнала. Вообще говоря, объем анализируемой выборки связан с интервалом корреляции канала.

Допустим, что текущая оценка получена по выборке объема  $N$  методом оконных ядерных функций в соответствии с представленными в разд. 3 выкладками. Обозначим такую оценку как  $\hat{W}_{h,N}(\theta)$ .

Пусть получена оценка фазы очередного символа  $\psi_{N+1}$ . Тогда при дополнении выборки до  $N + 1$  достаточно обновить (18) следующим образом:

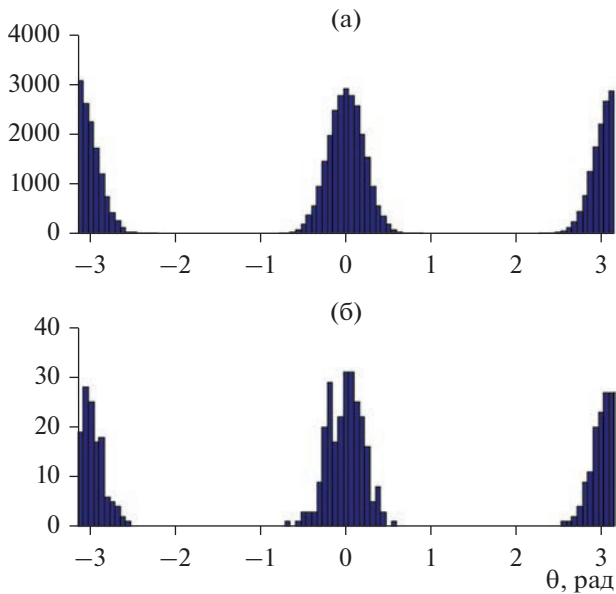
$$\hat{W}_{K,N+1}(\theta) = \frac{N\hat{W}_{K,N}(\theta) + V(\psi_{N+1} - \theta)}{N + 1}. \quad (21)$$

То есть общий объем выборки увеличился на один элемент.

Вместе с тем при обновлении можно “двигаться” по выборке фаз символов окном размера  $N$ , тогда

$$\begin{aligned} \hat{W}_{K,N+1}(\theta) &= \hat{W}_{K,N}(\theta) + \\ &+ \frac{(V(\psi_{N+1} - \theta) - V(\psi_0 - \theta))}{N}. \end{aligned} \quad (22)$$

После чего необходимо подставить (21) или (22) в выражение (14). В результате нет необходимости проводить перерасчет оценки  $\hat{W}(\theta)$ , а достаточно осуществлять ее рекуррентное обновление. Оче-



**Рис. 1.** Гистограммы выборок фаз объема  $N = 5 \times 10^4$  (а) и  $N = 5 \times 10^2$  (б).

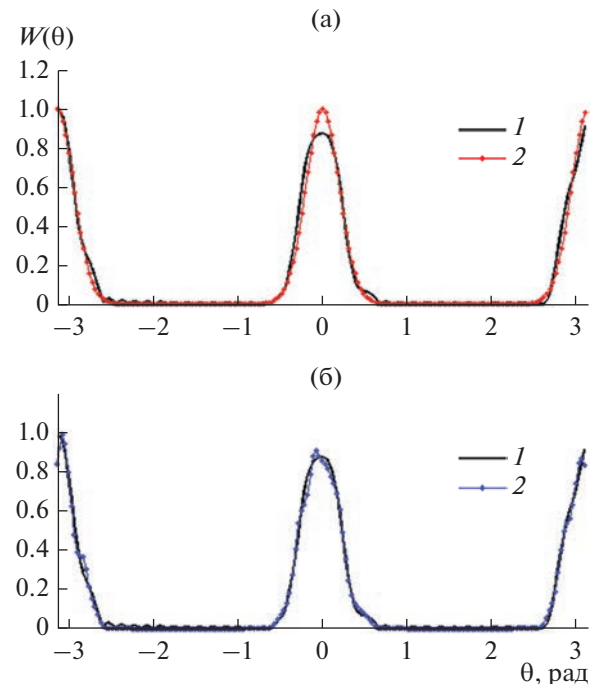
видно, что дополнение (21) характерно для стационарных или медленно меняющихся каналов. Для нестационарных каналов с быстрыми замираниями оценку  $\hat{W}(\theta)$  необходимо осуществлять путем рекуррентного обновления (22).

Аналогично можно поступить при получении сглаженной оценки  $\hat{W}_h(\theta)$  (см. выражение (20)), заменив в (18), (21) и (22)  $V(\psi_k - \theta)$  на  $V_h(\psi_k - \theta) = V\left(\frac{\psi_k - \theta}{h}\right)$ .

В общем случае значение объема анализируемой выборки  $N$  может быть адаптивным. Для такой реализации потребуется дополнительный анализ согласия (соответствия) очередного измерения фазы символа текущей оценке плотности распределения. (Подробнее о таких оценках см. в [18, 19].)

## 5. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Пусть имеется выборка фаз вида (1) для сигнала с двухпозиционной фазовой модуляцией (BPSK). На рис. 1 приведены гистограммы, полученные по выборкам фаз объема  $N = 5 \times 10^4$  и  $N = 5 \times 10^2$ . Из рисунка можно сделать вывод, что в первом случае легко построить эмпирическую плотность распределения, обладающую гладкостью, на базе гистограммного метода, во втором случае использование гистограммного метода не позволит дать приемлемый результат.

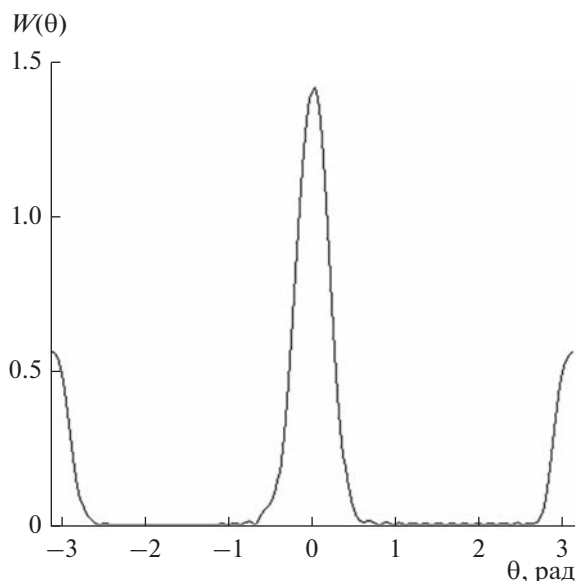


**Рис. 2.** Плотности вероятности фаз модулированного BPSK-сигнала, полученные по выборке объема  $N = 5 \times 10^2$  методами: а – РЯО (1) и ММП (2); б – РЯО (1) и методом Парзена (2).

Далее на основе выборки объема  $N = 5 \times 10^2$  была получена плотность вероятности фаз описываемым в работе способом рекуррентной ядерной оценки (РЯО) (рис. 2). Для сравнения там же приведена плотность распределения вероятности фаз, полученная ММП – рис. 2 (а) и методом Парзена – рис. 2 (б). В качестве модельной плотности  $W_0(\theta)$  выбрано круговое нормальное распределение.

В следующих примерах для получения эмпирической плотности распределения вероятности фаз использован только предложенный в работе способ.

На рис. 3 представлена плотность вероятности фаз модулированного сигнала для случая, когда число “нулевых” символов больше “единичных”. В данном примере значения вероятностей символов (см. формулу (2)) составляют  $p_0 = 0.7$ ,  $p_1 = 0.3$ . Подобная ситуация характерна для систем пакетной передачи данных, когда длина пакета неизменна, а длительность возможных сообщений меньше длины пакета, при этом количество сообщений непременно в пределах длины каждого пакета. Так, при суммарном объеме символов сообщений менее длины пакета оставшаяся часть передаваемого пакета заполняют нулями. Подобным образом поступают, например, в [20].



**Рис. 3.** Плотность вероятности фаз модулированного BPSK-сигнала, полученная по выборке объема  $N = 4 \times 10^2$  при значениях вероятностей  $p_0 = 0.7$ ,  $p_1 = 0.3$ .

Отметим, что для учета данной ситуации в случае использования ММП функционал правдоподобия (3) алгоритм (4) изменится следующим образом:

$$L(\sigma, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{N-1} \lg \left[ \left( \frac{1}{2} + \varepsilon \right) W_0(\psi_n, \sigma) + \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) W_0(\psi_n - \pi, \sigma) \right],$$

$$\{\sigma_0, \varepsilon_0\} = \arg \left\{ \max_{\substack{\sigma > 0; \\ -0.5 \leq \varepsilon \leq 0.5}} L(\sigma) \right\}, \quad (23)$$

$$\hat{W}(\theta) = \left( \frac{1}{2} + \varepsilon_0 \right) W_0(\theta, \sigma_0) + \left( \frac{1}{2} - \varepsilon_0 \right) W_0(\theta - \pi, \sigma_0),$$

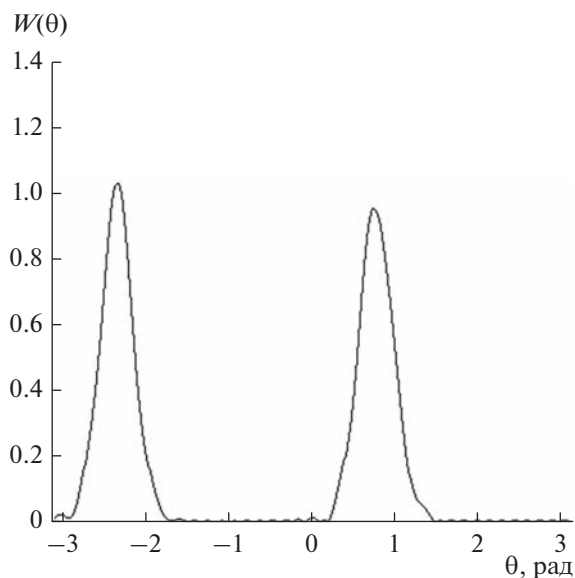
а его вычислительная сложность увеличится на порядок. В случае предложенного в работе способа алгоритм и его вычислительная сложность остаются неизменными.

Аналогично, при смещении сигнального созвездия на некоторую величину фазового сдвига  $\varphi_s$ , т.е. в случае выборки вида

$$\psi_n = \varphi_n + \zeta_n + \varphi_s, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (24)$$

при использовании ММП потребуется подобная случаю (23) модификация для учета величины  $\varphi_s$ .

В случае применения представленного в работе способа никаких его модификаций не требуется. Для примера на рис. 4 приведена оценка плот-



**Рис. 4.** Плотность вероятности фаз модулированного BPSK-сигнала, полученная по выборке объема  $N = 5 \times 10^2$  при значении фазового сдвига  $\varphi_s = \pi/4$ .

ности распределения фазы при значении фазового сдвига  $\varphi_s = \pi/4$ .

Отметим, что использование предложенного в работе ядра (17) значительно проще в вычислительном плане, так как при использовании в качестве ядра кругового нормального распределения или распределения Мизеса требуется вычисление функции ошибок (интеграла вероятности) или функции Бесселя (см. аналитические выражения для соответствующих плотностей в [1, 2, 8]).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача построения эмпирической плотности распределения вероятности фаз сигнала с фазовой манипуляцией. Для решения данной задачи наиболее предпочтительным является применение метода ядерной оценки (метод Парзена). При этом использование предложенного в работе ядра (17) на базе гармонических функций значительно проще в вычислительном плане, чем использование известных функций для круговых плотностей.

Представленный способ позволяет не только получать оценку плотности распределения вероятности фаз по относительно небольшой выборке, но и осуществлять ее обновление рекурсивно с минимальными вычислительными затратами.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mardia K.V., Jupp P.E.* Directional Statistics. Chichester: John Wiley & Sons, Inc, 2000.
2. *Jammalamadaka S.R., SenGupta A.* Topics in Circular Statistics. Singapore: World Sci. Publ. Co., 2001.
3. *Егоров В.В., Смаль М.С.* // Телекоммуникации. 2012. № 8. С. 2.
4. *Яковлева Т.В.* // Компьютерные исследования и моделирование. 2018. Т. 10. № 5. С. 511.
5. *Егоров В.В., Смаль М.С.* // Телекоммуникации. 2013. № 5. С. 29.
6. *Мартынов Ю.В.* Оценка качества передачи дискретной информации по статистическим характеристикам каналов связи. Автореф. канд. дис. ... техн. наук. Л.: ЛЭИС им. М.А. Бонч-Бруевича, 1971. 15 с.
7. *Смаль М.С.* Бестестовые способы оценивания состояния коротковолнового радиоканала в адаптивных радиоприемниках. Автореф. канд. дис. ... техн. наук. СПб.: ГУАП, 2018. 19 с.
8. *Зяблов В.В., Коробков Д.Л., Портной С.Л.* Высоко-скоростная передача сообщений в реальных каналах. М.: Радио и связь, 1991.
9. *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966.
10. *Сирота А.А.* Методы и алгоритмы анализа данных и их моделирование в MATLAB. СПб.: БХВ-Петербург, 2016.
11. *Жук В.В., Нантон Г.И.* Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.
12. *Жук В.В.* Аппроксимация периодических функций. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.
13. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. М.: Наука, 1980.
14. *Губарев В.В.* Алгоритмы статистических измерений. М.: Энергоатомиздат, 1985.
15. *Parzen E.* // Ann. Mathematical Statistic. 1962. V. 33(3). P. 1065.
16. *Иглин С.П.* Теория вероятностей и математическая статистика на базе MATLAB. Харьков: НТУ "ХПИ", 2006.
17. *Silverman B.W.* Density Estimation for Statistics and Data Analysis. L.: Chapman & Hall/CRC, 1986.
18. *Грешилов А.А.* Математические методы принятия решений. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014.
19. *Федосов В.П.* Прикладные математические методы в статистической радиотехнике. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998.
20. ARINC Characteristic 635-4. HF Data Link Protocol. Dec. 22, 2003. Annapolis: Aviation Radio Inc. (ARINC), 2003.