

УДК 539.3

**КОНТАКТ С МЕЖМОЛЕКУЛЯРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ
ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СЛОЯ (САМОСОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД):
БАЛАНС ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ
ИНДЕНТОР–СЛОЙ–ПОДЛОЖКА**

© 2024 г. И.А. Солдатенков*

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: iasoldat@hotmail.com*

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

После доработки 17.06.2024 г.

Принята к публикации 25.06.2024 г.

Рассматривается контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Предложены соответствующие модели контактного взаимодействия, для которых составлен и обоснован баланс энергии в системе индентор–слой–подложка. Последний учитывает вязкую диссипацию энергии, потенциальную энергию упругой деформации, энергию поля, а также энергию, рассеиваемую при скачке контактного зазора.

Ключевые слова: контактная задача, вязкоупругий слой, межмолекулярное взаимодействие, диссипация энергии, энергия поля

DOI: 10.31857/S0032823524030093 ZAAXGM

1. Введение. При изучении контакта деформируемых тел силы межмолекулярного взаимодействия впервые учитывались применительно к герцевскому контакту [1]. В дальнейшем был разработан ряд эффективных подходов к решению контактных задач такого типа, среди которых следует отметить подходы, использующие концепцию поверхностной энергии – модели JKR и DMT [2, 3]. Эти подходы также использовались для расчета адгезионного контакта слоистых [4–7] и вязкоупругих тел [8–11].

Строгая постановка контактной задачи, учитывающая межмолекулярное взаимодействие, предполагает существование некоторого зазора l^* между контактирующими телами. Величина этого зазора должна обеспечивать баланс сил, обусловленных контактной деформацией тел и их межмолекулярным взаимодействием (самосогласованный подход по Дерягину [12]). При таком подходе возможны постановки задачи с поверхностным [13–15] и объемным [16–20] приложением сил межмолекулярного взаимодействия.

В связи с традиционной постановкой задачи следует упомянуть концепцию межповерхностного тензора напряжений, позволяющего заменить объемное распределение межмолекулярных сил эффективным поверхностным напряжением [21, 22].

Одной из характерных особенностей адгезионного контакта является возможность скачкообразного изменения его параметров, в частности, контактного зазора. Подобные изменения рассматривались во многих исследованиях, среди которых

отметим работы [12–14, 23–26], использующие как самосогласованный подход, так и концепцию поверхностной энергии.

Ранее рассматривался контакт бесконечно протяженного плоского индентора и вязкоупругого слоя в рамках самосогласованного по Дерягину подхода с поверхностным (традиционная постановка) и объемным (уточненная постановка) приложением сил межмолекулярного взаимодействия. Были проведены расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) слоя и вязкой диссипации энергии в нем, а также контактного зазора r при заданном законе внедрения индентора [27–29]. Полученные результаты позволили выполнить расчет силы трения скольжения шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения [29].

Данная работа является продолжением указанных исследований [27–29] и преследует своей целью построение и проверку баланса энергии для рассматриваемой системы индентор–слой–подложка с учетом эффектов скачкообразного изменения контактного зазора и вязкой диссипации энергии. Подобный баланс энергии рассматривался ранее при построении известных моделей JKR, DMT [2, 3] и во многих других работах, например, для оценки диссипации энергии в адгезионном контакте [14, 30–32].

2. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим систему, состоящую из бесконечно протяженного плоского индентора и основания, представляющего собой вязкоупругий слой, связанный с подложкой (рис. 1). Считается, что индентор контактирует с основанием посредством межмолекулярных сил, при этом они разделены контактным зазором r , обеспечивающим баланс сил вязкоупругого и межмолекулярного взаимодействий контактирующих тел (самосогласованный подход [12]). Свяжем с основанием систему координат $Oxyz$, совместив ее плоскость Oxy с границей раздела слоя и подложки. Контакт индентора и слоя считается плоскопараллельным, что обуславливает зависимость всех контактных характеристик только от координаты z и времени t . Толщину слоя в недеформированном состоянии обозначим через h_0 , а в деформированном – через h . Расстояние между индентором и подложкой обозначим через H , причем $H = r + h$. Индентор и подложка считаются абсолютно жесткими.

В качестве контактной характеристики удобно использовать внедрение δ индентора в слой, которое отсчитывается от поверхности слоя в недеформированном состоянии (от уровня $z = h_0$). Отметим, что внедрение δ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, при этом $\delta(t) = h_0 - H(t)$ (рис. 1). Зависимость $\delta(t)$ внедрения от времени считается заданной.

При дальнейшем рассмотрении деформации слоя считаются малыми. Если обозначить через w перемещение слоя вдоль оси z , то это допущение можно выразить следующим образом

$$|w(z,t)|/h_0 \ll 1 \quad (2.1)$$

Межмолекулярное взаимодействие индентора и основания определяется парными взаимодействиями их молекул (гипотеза Гамакера). Соответствующая сила F зависит от свойств пары молекул и расстояния l между ними. Существуют разные формы такой зависимости, и в дальнейшем будет использоваться известный закон Леннарда–Джонса [33]:

$$F(l) = \frac{a_1}{l^m} - \frac{a_2}{l^n}, \quad (2.2)$$

где a_1, a_2, m, n – параметры взаимодействия, причем обычно полагают $m = 7, n = 13$.

При определенных допущениях [14, 32] суммирование парных взаимодействий молекул индентора и слоя позволяет для каждой точки слоя рассчитать объемную силу \mathbf{f} , обусловленную межмолекулярным взаимодействием. Эта сила направлена вдоль оси z и зависит от расстояния $d = r + s = r + h - z$ между точкой ее прило-

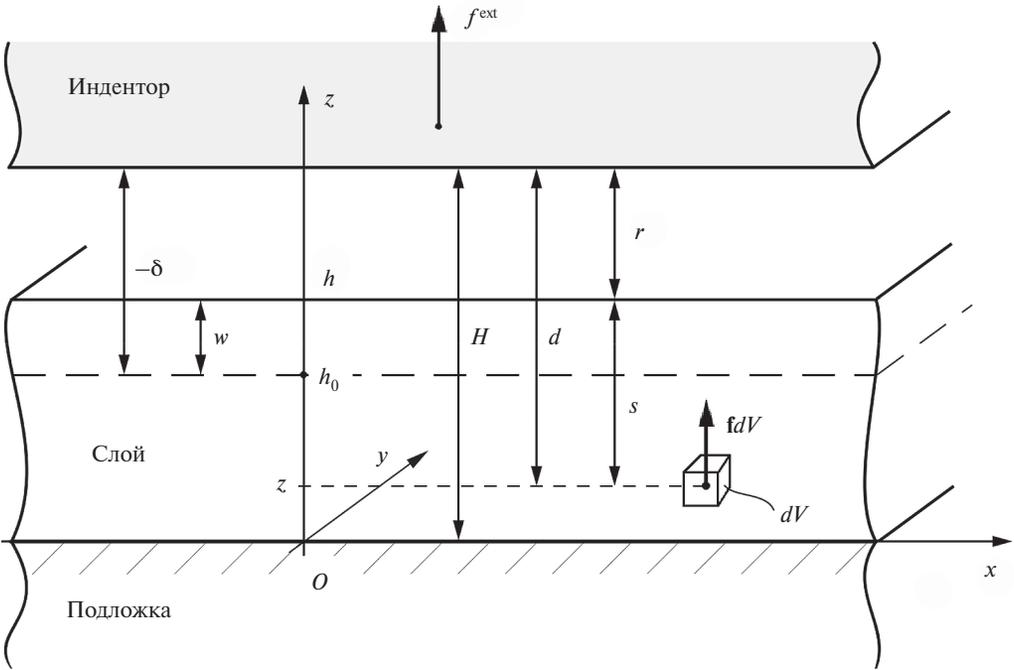


Рис. 1. Контактное взаимодействие индентора с основанием, состоящим из вязкоупругого слоя и абсолютно жесткой подложки

жения и индентором (рис. 1), причем, в силу допущения (2.1) о малости деформаций слоя, в последнем равенстве можно заменить толщину h ее начальным значением h_0 . Все это позволяет записать для компонент f_i , $i = 1, 2, 3$ объемной силы \mathbf{f} в системе координат $Oxyz$ следующие выражения:

$$f_1 = f_2 \equiv 0, \quad f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z), \quad (2.3)$$

при этом функция $f(d)$ известным образом определяется через параметры межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя [27, 28].

Отметим, что на молекулы слоя также действуют силы со стороны молекул подложки и самого слоя. Однако, при допущении (2.1) эти силы, в отличие от силы f_3 вида (2.3), не изменяются во времени и обеспечивают исходное равновесное состояние молекул слоя. При дальнейшем рассмотрении слоя как сплошной среды это состояние будет отождествляться с его исходным недеформированным состоянием.

Суммирование парных взаимодействий молекул позволяет также определить полную силу p воздействия индентора на основание, приходящуюся на единицу площади его поверхности (верхней границы):

$$p(t) = p_c(t) + p_b(t), \quad p_c(t) = - \int_0^{h(t)} f(r(t) + s) ds, \quad p_b(t) = - \int_{h(t)}^{\infty} f(r(t) + s) ds, \quad (2.4)$$

причем первый/второй интеграл здесь отвечает воздействию индентора отдельно на слой/подложку. В рамках самосогласованного подхода сила p интерпретируется как контактное давление, действующее на основание в виде композиции подложка–слой

[12–14, 19]. Величину p_c можно тогда интерпретировать как фиктивное контактное давление, обусловленное межмолекулярным воздействием индентора на слой.

Учитывая допущение (2.1) о малости деформаций слоя, верхний предел интегрирования в первом интеграле (2.4) можно заменить на h_0 . В результате, используя известное выражение для функции $f(d)$, получим [29]:

$$p_c(t) = \Phi_c(r(t)), \quad \Phi_c(r) = -\frac{A_{1c}}{r_{ec}^k} \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^k - \left(\frac{r_{ec}}{r+h_0} \right)^k \right] - \left[\left(\frac{r_{ec}}{r} \right)^l - \left(\frac{r_{ec}}{r+h_0} \right)^l \right] \quad (2.5)$$

Взятие второго интеграла в формуле (2.4) позволяет установить, что

$$p_b(t) = \Phi_b(H(t)), \quad \Phi_b(H) = -\frac{A_{1b}}{r_{eb}^k} \left[\left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^k - \left(\frac{r_{eb}}{H} \right)^l \right] \quad (2.6)$$

В формулах (2.5) и (2.6): $k = m - 4$, $l = n - 4$, а параметры $A_{1\xi}$, $r_{c\xi}$ характеризуют взаимодействие молекул слоя ($\xi = c$) или подложки ($\xi = b$) с молекулами индентора и выражаются известным образом через параметры закона Леннарда–Джонса (2.2) [27, 28].

Таким образом, равенство (2.4) позволяет записать следующее выражение для контактного давления:

$$p(t) = p_b(t) + p_c(t) = \Phi_b(H(t)) + \Phi_c(r(t)), \quad (2.7)$$

которое определяет силовую модель взаимодействия индентора и основания.

Замечание 1. В работах [27–29] контактное давление p определялось как интеграл $\int_0^\infty f(r+s)ds$. Использованное выше разбиение (2.4) этого интеграла на слагаемые p_b и p_c представляется более корректным, т. к. величина $p_b = \Phi_b(H)$ точно определяет силу воздействия индентора на подложку.

Традиционная постановка контактной задачи при наличии межмолекулярного взаимодействия подразумевает, что деформирование слоя обуславливается контактным давлением, приложенным к его поверхности [12–15]. В случае деформирования слоя, связанного с абсолютно жесткой подложкой, в качестве контактного давления представляется физически корректным использовать фиктивное контактное давление p_c вида (2.5) [29]. Ниже также рассматривается уточненная постановка, в которой естественным образом предполагается, что деформация слоя порождается объемными силами (2.3), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок [16–20]. В качестве параметра нагружения слоя в обеих постановках выступает контактный зазор r , однозначно определяющий объемную силу f_3 по формуле (2.3) и давление p_c по формуле (2.5).

Замечание 2. Ввиду быстрого затухания функции $f(d)$ с увеличением расстояния $d = r + h_0 - z$ [27, 28], объемные силы $f_3(z, t) = f(r(t) + h_0 - z)$ сконцентрированы в подповерхностной области нанометровой толщины $\sim r_{ec}$. Если $r_{ec} \ll h_0$, то, в силу соотношения (2.4), равнодействующая этих сил, отнесенная к элементу поверхности слоя, равна p_c с точностью до знака. По принципу Сен-Венана, действие таких сил на расстояниях существенно превышающих r_{ec} по глубине слоя эквивалентно приложению контактного давления p_c к поверхности слоя, что как раз отвечает традиционной постановке задачи. Таким образом, можно сделать вывод (и это подтверждается расчетами [18, 19, 34]), что использование уточненной постановки задачи актуально на наноуровне (масштаб $\sim r_{ec}$). На более крупном масштабе ($\gg r_{ec}$) для расчета НДС слоя допустимо использование более простой традиционной постановки задачи.

Деформационные свойства слоя будем описывать линейным законом наследственного типа [35–37]

$$\sigma_{ij}(z, t) = \delta_{ij} \lambda \theta(z, t) + 2\mu \varepsilon_{ij}(z, t) - \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau) \theta(z, \tau) d\tau - 2 \int_{-\infty}^t M(t - \tau) \varepsilon_{ij}(z, \tau) d\tau, \quad (2.8)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ – компоненты тензоров деформаций и напряжений, $\theta = \varepsilon_{kk}$. Величины λ и μ представляют собой мгновенные модули упругости (постоянные Ламе), а функции Λ, M характеризуют вязкие свойства материала слоя и выражаются через ядра сдвиговой R_1 и объемной R_2 релаксации: $\Lambda(t) = K R_2(t) - \frac{2}{3} \mu R_1(t)$, $M(t) = \mu R_1(t)$, причем $K = \lambda + 2\mu/3$ – мгновенный модуль объемной упругости.

Для последующего численного анализа необходимо конкретизировать ядра интегральных операторов в соотношении (2.8). Не ограничивая общности рассмотрения, пренебрежем объемной ползучестью материала слоя и положим [37]: $R_1(t) = R_0 e^{-\alpha t}$, $R_2(t) \equiv 0$, так что: $\Lambda(t) = \Lambda_0 e^{-\alpha t}$, $M(t) = M_0 e^{-\alpha t}$, где α, R_0 – заданные параметры, причем $\alpha = 1/t_r$, t_r – время релаксации, $\Lambda_0 = -2\mu R_0/3$, $M_0 = \mu R_0$. Кроме того, введем в рассмотрение длительные (равновесные) модули упругости $\lambda^\infty, \mu^\infty$, а также мгновенный B и длительный B^∞ коэффициенты упругой податливости слоя: $B = (\lambda + 2\mu)^{-1}$, $B^\infty = (\lambda^\infty + 2\mu^\infty)^{-1} = \alpha \beta^{-1} B$, причем $\beta = \alpha - B N_0 > 0$, $N_0 = 4\mu R_0/3$ [27].

Для построения полной системы уравнений НДС слоя соотношение (2.8) следует дополнить формулой Коши, связывающей деформации ε_{ij} с перемещениями u_i слоя, а также уравнением равновесия [35, 36]:

$$\sigma_{ij,j}(z, t) + f_i(z, t) = 0, \quad (2.9)$$

в котором для записи частной производной функции используется общепринятое обозначение с запятой.

При сделанном допущении (2.1) о малости деформаций, присутствующая в уравнении равновесия (2.9) объемная сила f_i определяется равенствами (2.3) и не зависит явно от компонент НДС слоя. Это означает, что рассматриваемая система уравнений (2.8), (2.9) относительно этих компонент слоя является линейной и допускает решение в аналитическом виде с использованием преобразования Лапласа по времени. Компоненты $u_i, \varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}$ соответствующего НДС при заданной функции $r(t)$ представлены в работах [27, 29].

При описании контактного взаимодействия индентора и основания используется условие контакта

$$r(t) + \bar{w}(t) = -\delta(t), \quad (2.10)$$

связывающее внедрение δ с контактным зазором r и нормальным перемещением $\bar{w} = h - h_0$ поверхности слоя (вдоль оси z). Предполагается, что до момента времени $t = 0$ взаимодействие индентора с основанием является стационарным с постоянными во времени внедрением δ^s и зазором r^s , т.е. $\delta(t) = \delta^s$, $r(t) = r^s$, $t \leq 0$.

Далее будет рассматриваться гладкая зависимость $\delta(t)$, отвечающая переходу системы из начального стационарного состояния δ^s, r^s в другое стационарное состояние с конечным внедрением δ_m индентора, т.е.

$$\delta(t) \in C^1(-\infty, \infty), \quad \delta(t) = \delta^s; t \leq 0, \quad \delta(t) = \delta_m; t \geq t_m, \quad (2.11)$$

где t_m – время перемещения индентора, $0 < t_m$. Для такой зависимости будут рассмотрены режимы подвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) > 0; t \in [0, t_m], \quad \delta^s < \delta_m \quad (2.12)$$

и отвода индентора:

$$\dot{\delta}(t) < 0; \quad t \in [0, t_m], \quad \delta^s > \delta_m \quad (2.13)$$

Здесь и далее точкой над символом функции обозначается ее производная по времени.

Подобный характер изменения внедрения $\delta(t)$ позволяет допустить асимптотическое поведение функции $r(t)$ на бесконечности:

$$r(t) \rightarrow r_m; \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.14)$$

где r_m — значение контактного зазора в стационарном состоянии с внедрением δ_m .

Начальное r^s и конечное r_m значения контактного зазора, отвечающие начальному δ^s и конечному δ_m внедрениям, находятся из уравнения [28]

$$B^\infty h_0 \begin{Bmatrix} Z(r^s) \\ Z(r_m) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} r^s \\ r_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta^s \\ \delta_m \end{Bmatrix}, \quad Z(r) = \begin{pmatrix} \Phi_c(r) \\ \Psi(r) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

причем верхний/нижний вариант в круглых скобках определения функции $Z(r)$ отвечает традиционной/уточненной постановке задачи, а функция $\Psi(r)$ определяется известным образом через параметры межмолекулярного взаимодействия индентора и слоя [28].

Изменение контактного зазора r во времени описывается дифференциальным уравнением [28, 29]:

$$\dot{r}(t) = \frac{\dot{\delta}(t) - \beta [B^\infty h_0 Z(r(t)) - r(t) - \delta(t)]}{Bh_0 Z'(r(t)) - 1}, \quad (2.16)$$

в котором штрих у символа функции обозначает ее производную по аргументу.

Функция $r(t)$ может иметь точку разрыва первого рода (скачок), если при некоторых значениях r : $Bh_0 Z'(r) > 1$, так что знаменатель в правой части уравнения (2.16) принимает нулевые значения при $Bh_0 Z'(r) = 1$. Соответствующие скачки контактного зазора можно описать следующим образом [28]:

$$\begin{aligned} r(t_+ - 0) = r_+, \quad r(t_+ + 0) = r'_+ - \text{скачок } r_+ \rightarrow r'_+ \text{ при подводе индентора} \\ r(t_- - 0) = r_-, \quad r(t_- + 0) = r'_- - \text{скачок } r_- \rightarrow r'_- \text{ при отводе индентора,} \end{aligned} \quad (2.17)$$

что иллюстрируют графики на рис. 2, построенные на основе полученных ранее результатов [28]. При построении этих графиков используются универсальные обозначения \hat{t} и r^\pm для момента скачка зазора $r(t)$ и соответствующих предельных значений функции $r(t)$:

$$\hat{t} = t_+ / t_- \text{ при подводе/отводе индентора; } r^\pm = r(\hat{t} \pm 0), \quad (2.18)$$

которые будут использоваться и при дальнейших выкладках, с целью их упрощения.

Выполненный в работе [28] анализ функции $r(t)$ как решения дифференциального уравнения (2.16) в случае гладкой зависимости $\delta(t)$ позволяет заключить, что функция $r(t)$ является кусочно-непрерывной и кусочно-монотонной при $t \in [0, \infty)$. Производная $\dot{r}(t)$ непрерывна везде, кроме точки \hat{t} разрыва функции $r(t)$, причем эта производная абсолютно интегрируема на $[0, \infty)$. Согласно выражению (2.5), функция $p_c(t)$ определяется через функцию $r(t)$ посредством гладкой зависимости $\Phi_c(r)$, поэтому $p_c(t)$ обладает всеми указанными выше свойствами $r(t)$.

Располагая решением $r(t)$ уравнения (2.16) при заданной зависимости $\delta(t)$, можно определить эволюцию НДС слоя во времени [27, 29].

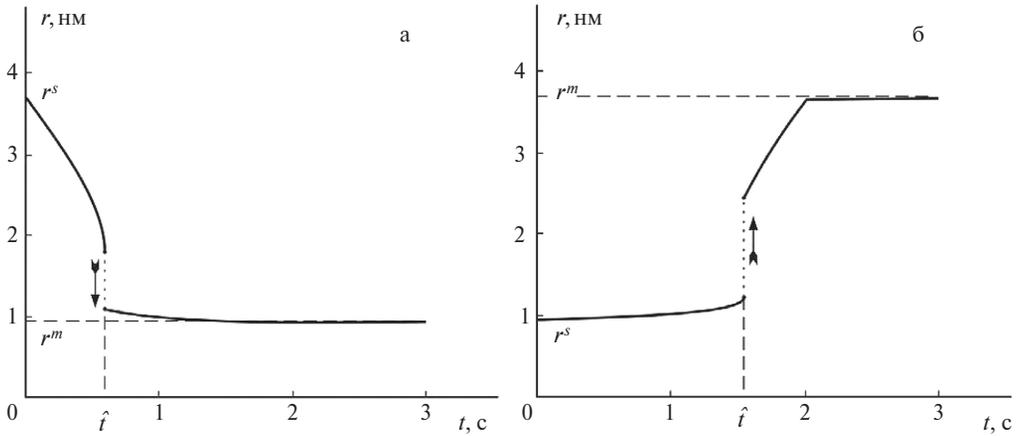


Рис. 2. Зависимости контактного зазора r от времени t в режиме подвода (а) и отвода (б) индентора (традиционная постановка задачи). Стрелками показаны скачки контактного зазора

3. Соотношения для энергии и работы. В процессе подвода/отвода индентора энергия системы индентор–слой–подложка меняется. А именно, происходит диссипация энергии в слое, обусловленная вязкостью его материала, изменяются внутренняя энергия слоя и потенциальная энергия межмолекулярного взаимодействия (энергия поля), которые зависят от НДС слоя и взаимного расположения тел. Кроме того, следует допустить возможность мгновенного изменения энергии системы при скачке контактного зазора r . Определим эти виды энергии.

Для определения вязкой диссипации энергии выделим некоторый объем $V = h_0 S$ слоя с площадью S поверхности. Согласно первому началу термодинамики, диссипация энергии $D_{[t_1, t_2]}$ в этом объеме на промежутке времени $[t_1, t_2]$ составит [27, 36]:

$$D_{[t_1, t_2]} = \mathcal{A}_{[t_1, t_2]} - [U(t_2) - U(t_1)], \quad (3.1)$$

где

$$\mathcal{A}_{[t_1, t_2]} = \int_V dV \int_{t_1}^{t_2} \sigma_{ij}(t) d\varepsilon_{ij}(t) \quad (3.2)$$

– работа деформации на промежутке $[t_1, t_2]$, $U(t)$ – внутренняя энергия рассматриваемого объема слоя, пространственные аргументы у функций $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ для простоты опущены.

Внутренний интеграл в выражении (3.2) понимается в смысле Римана–Стилтьеса (далее Стилтьеса) [38]. Подынтегральные функции $\sigma_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ в нем известным образом связаны с контактным зазором $r(t)$ [27, 29], поэтому эти функции имеют разрывы первого рода в одной и той же точке \hat{t} в случае существования скачка (2.17) зазора $r(t)$. Как известно [38], в этом случае интеграл Стилтьеса (3.2) не существует. В приложении 1 предлагается процедура регуляризации reg_0 интеграла Стилтьеса типа (3.2) для таких подынтегральных функций (формула (П.1.8)), которая обеспечивает его существование и отвечает физическому смыслу интеграла (3.2) как работы. Здесь и далее для интеграла Стилтьеса типа (3.2) с разрывными в одной и той же точке подынтегральными функциями подразумевается использование указанной процедуры регуляризации, при этом знак reg_0 может опускаться.

Равенство (3.1) позволяет рассчитать удельную диссипацию энергии $d^\infty = D_{[0,\infty)}/S$ при переходе системы из стационарного состояния δ^s, r^s в асимптотически стационарное состояние δ_m, r_m (далее – переход $\delta^s \rightarrow \delta_m$) по известному НДС слоя – соответствующее выражение для d^∞ приводится в работах [27, 29].

При переходе $\delta^s \rightarrow \delta_m$ изменение Δu удельной внутренней энергии $u = U/S$ совпадает с изменением потенциальной энергии упругой деформации с длительными модулями упругости, так что [27, 29]:

$$\Delta u = \frac{1}{2} B^\infty h_0 [(p_{cm})^2 - (p_c^s)^2] \quad (3.3)$$

– традиционная постановка задачи;

$$\Delta u = \frac{1}{2} B^\infty \int_0^{h_0} [(Y_m(z))^2 - (Y^s(z))^2] dz \quad (3.4)$$

– уточненная постановка задачи, причем:

$$p_c^s = \Phi_c(r^s), \quad p_{cm} = \Phi_c(r_m), \quad Y^s(z) = Y(z, 0), \quad Y_m(z) = Y(z, t)|_{r(t)=r_m}$$

$$Y(z, t) = - \int_z^{h_0} f(r(t) + h_0 - \eta) d\eta \quad (3.5)$$

Здесь следует указать на существование потенциальной энергии взаимодействия молекул слоя друг с другом. Однако, исходя из известных представлений о природе упругости [20, 32], изменение этой энергии при переходе $\delta^s \rightarrow \delta_m$ можно отождествить с изменением Δu потенциальной энергии упругой деформации слоя.

При подводе/отводе индентора также происходит изменение энергии поля. Эту энергию можно определить, по аналогии с объемной силой \mathbf{f} , суммированием потенциала $e(l) = -c_1/l^{m-1} + c_2/l^{n-1}$ парных взаимодействий молекул слоя и подложки с молекулами индентора, отвечающего закону Леннарда–Джонса (2.2), где $c_1 = a_1/(m-1)$, $c_2 = a_2/(n-1)$ [39]. В результате можно установить, что изменение удельной энергии поля ε при переходе $\delta^s \rightarrow \delta_m$ в предположении малости деформаций слоя составляет:

$$\Delta \varepsilon = - \int_{r^s}^{r_m} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H_m} \Phi_b(H) dH, \quad (3.6)$$

где $H^s = h_0 - \delta^s$, $H_m = h_0 - \delta_m$, а функции $\Phi_c(r)$ и $\Phi_b(H)$ определяются по формулам (2.5) и (2.6). Выражение (3.6) справедливо для обеих постановок задачи – традиционной и уточненной.

Выясним теперь, как изменяются указанные выше виды энергии в момент \hat{t} скачка контактного зазора r (формулы (2.17), (2.18)). Прежде всего, отметим, что диссипация энергии в слое изначально определяется скоростью вязких деформаций [35], которые описываются интегральными членами в законе (2.8) и не могут изменяться мгновенно. Это означает, что скачок зазора $r(t)$ не приводит к скачкообразному изменению вязкой диссипации энергии в слое. Данный вывод подтверждается прямым расчетом величины d^∞ при наличии и отсутствии скачка зазора $r(t)$ [29].

Анализ НДС слоя при скачке контактного зазора r показывает, что соответствующее изменение работы деформации и, следовательно, мгновенное изменение $\Delta \hat{u}$ внутренней энергии слоя определяются скачком потенциальной энергии упругой деформации с мгновенными модулями упругости λ и μ [27]. Это позволяет получить следующие выражения для скачка внутренней энергии в момент \hat{t} :

$$\Delta\hat{u} = \frac{1}{2}Bh_0[(p_c^+)^2 - (p_c^-)^2] \quad (3.7)$$

– традиционная постановка задачи;

$$\Delta\hat{u} = \frac{1}{2}B \int_0^{h_0} [(Y^+(z))^2 - (Y^-(z))^2] dz \quad (3.8)$$

– уточненная постановка задачи, причем:

$$p_c^\pm = \Phi_c(r^\pm), \quad Y^\pm(z) = Y(z, \hat{t} \pm 0) \quad (3.9)$$

Мгновенное изменение $\Delta\hat{\mathcal{E}}$ энергии поля при скачке зазора $r(t)$ можно определить на основе выражения (3.6). При этом следует учесть, что расстояние $H(t) = h_0 - \delta(t)$ между индентором и подложкой изменяется во времени непрерывно, согласно условию (2.11). В результате получается, что для традиционной и уточненной постановок задачи:

$$\Delta\hat{\mathcal{E}} = - \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r) dr \quad (3.10)$$

Вышесказанное позволяет заключить, что суммарное мгновенное изменение $\hat{\gamma}$ энергии системы индентор–слой–подложка при скачке контактного зазора r составляет: $\hat{\gamma} = \Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}$. Наличие подобного изменения энергии означает, что в момент \hat{t} скачка зазора $r(t)$ происходит обмен энергией между рассматриваемой системой и окружающей средой. В дальнейшем будет установлено, что $\hat{\gamma} < 0$, т. е. при скачке зазора $r(t)$ происходит выделение (рассеивание) энергии из системы в количестве $\hat{d} = -\hat{\gamma}$. Такое утверждение вполне согласуется с известными результатами [13, 32, 40].

Процесс подвода/отвода индентора (формулы (2.12), (2.13)) предполагает, что на него действует некоторая внешняя сила f^{ext} , направленная вдоль оси z (рис. 1). Сила f^{ext} считается удельной, т. е. приходящейся на единицу площади поверхности слоя, поэтому, в силу условия равновесия индентора: $f^{\text{ext}} = -p$. Работа силы f^{ext} на отрезке времени $[0, t]$ определяется по формуле:

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t f^{\text{ext}}(\tau) dH(\tau) = \int_0^t p(\tau) d\delta(\tau) = \int_0^t [p_b(\tau) + p_c(\tau)] d\delta(\tau) = A_{b[0,t]}^{\text{ext}} + A_{c[0,t]}^{\text{ext}}, \quad (3.11)$$

в которой при записи второго равенства принято во внимание соотношение $H(t) = h_0 - \delta(t)$, а следующее равенство основывается на использовании силовой модели (2.7). Здесь с учетом выражений (2.5) и (2.6):

$$A_{b[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t p_b(\tau) d\delta(\tau) = - \int_0^t \Phi_b(H(\tau)) dH(\tau) = - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH \quad (3.12)$$

$$A_{c[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^t p_c(\tau) d\delta(\tau) = \int_0^t \Phi_c(r(\tau)) d\delta(\tau) \quad (3.13)$$

Согласно условию (2.11), внедрение $\delta(t)$ не меняется при $t > t_m$, поэтому величина

$$A^{\text{ext}} = A_{[0,t_m]}^{\text{ext}} = \int_0^{t_m} p(\tau) d\delta(\tau) \quad (3.14)$$

определяет работу внешней силы при переходе $\delta^s \rightarrow \delta_m$.

Исходя из физических представлений, можно утверждать, что работа A^{ext} расходуется на вязкую диссипацию энергии в слое d^∞ , а также на изменения внутренней энергии слоя Δu и энергии поля $\Delta \mathcal{E}$. При наличии скачка контактного зазора r из суммы этих энергий следует вычесть величину $\hat{\gamma} = \Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}$ мгновенного изменения

энергии системы. Действительно, по определению (3.11), работа A^{ext} совершается внешней силой f^{ext} на непрерывном перемещении $H(t) = h_0 - \delta(t)$ и, следовательно, не может расходоваться на какое-либо мгновенное изменение энергии.

Таким образом, баланс энергии для рассматриваемой системы можно выразить следующим равенством:

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} - [\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}] \equiv d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + \hat{d} \quad (3.15)$$

при записи которого, для наглядности, используется введенная выше энергия

$$\hat{d} = -\hat{\gamma} = -[\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}], \quad (3.16)$$

рассеиваемая системой при скачке зазора $r(t)$. Равенство (3.15) отвечает закону сохранения энергии (ЗСЭ) для системы индентор–слой–подложка.

В следующем разделе равенство (3.3.15) будет подтверждено путем прямого расчета работы A^{ext} на основе уравнений контактного взаимодействия индентора и основания. Здесь же укажем на пример из приложения 2, иллюстрирующий существование баланса энергии типа (3.15) для модельной системы со скачкообразным изменением состояния. Этот пример, в частности, подтверждает отсутствие скачка диссипации энергии d в равенстве (3.15) и поясняет причину появления в нем слагаемого \hat{d} вида (3.16).

Рассмотрим теперь баланс энергии для рассматриваемой системы за цикл подвода (режим (2.12)) и последующего отвода индентора (режим (2.13)). Этот цикл подразумевает, что после подвода и формирования асимптотически стационарного состояния слоя (формула (2.14)), происходит отвод индентора в стационарное состояние, совпадающее с начальным для режима подвода состоянием. Другими словами, между начальными и конечными значениями внедрения и контактного зазора, отвечающими режимам подвода и отвода индентора, имеют место следующие соотношения:

$$\delta^s|_{\text{ret}} = \delta_m|_{\text{app}}, \quad \delta_m|_{\text{ret}} = \delta^s|_{\text{app}}, \quad r^s|_{\text{ret}} = r_m|_{\text{app}}, \quad r_m|_{\text{ret}} = r^s|_{\text{app}}, \quad (3.17)$$

причем, здесь и далее, для обозначения режима подвода/отвода используется обозначение app/ret.

Суммарные за цикл подвод–отвод работа A_{a-r}^{ext} внешней силы и диссипация энергии (гистерезисные потери) d_{a-r} в системе определяются по формулам:

$$A_{a-r}^{\text{ext}} = A^{\text{ext}}|_{\text{app}} + A^{\text{ext}}|_{\text{ret}}, \quad d_{a-r} = (d^\infty + \hat{d})|_{\text{app}} + (d^\infty + \hat{d})|_{\text{ret}}, \quad (3.18)$$

при этом, согласно выражениям (3.3), (3.4), (3.6) и соотношениям (3.17):

$$\Delta u_{a-r} = \Delta u|_{\text{app}} + \Delta u|_{\text{ret}} = 0, \quad \Delta \mathcal{E}_{a-r} = \Delta \mathcal{E}|_{\text{app}} + \Delta \mathcal{E}|_{\text{ret}} = 0 \quad (3.19)$$

На основе равенства (3.15) формулы (3.18) и (3.19) позволяют представить баланс энергии для рассматриваемой системы за цикл подвод–отвод в следующем виде

$$A_{a-r}^{\text{ext}} = d_{a-r}, \quad (3.20)$$

т. е., как и следовало ожидать, вся работа внешней силы расходуется на покрытие гистерезисных потерь, состоящих из вязкой диссипации энергии в слое и рассеивания энергии при скачках контактного зазора.

В заключении данного раздела получим некоторые дополнительные энергетические соотношения, которые будут использоваться при дальнейшем анализе баланса энергии системы индентор–слой–подложка. Для этого введем в рассмотрение работу $\mathcal{A}_{[0,r]}^c$ поверхностных (граничных) и объемных сил на соответствующих пере-

мещениях на промежутке $[0, t]$. Сформулированная выше традиционная постановка задачи предполагает, что к поверхности слоя приложены силы $\sigma_{33} = -p_c$, тогда как объемные силы отсутствуют. При уточненной постановке задачи, напротив, отсутствуют поверхностные силы и на слой действуют только объемные силы f_3 . Учитывая это, а также принимая во внимание однородность НДС слоя по координатам x и y , можно установить, что для выделенного объема $V = h_0 S$ слоя

$$A_{[0,t]}^c = -S \int_0^t p_c(\tau) d\bar{w}(\tau) \equiv SA_p(t) \quad (3.21)$$

– традиционная постановка задачи;

$$A_{[0,t]}^c = S \int_0^{h_0} dz \int_0^t f_3(z, \tau) dw(z, \tau) \equiv SA_f(t) \quad (3.22)$$

– уточненная постановка задачи, причем: $w(z, t) \equiv u_3(z, t)$ – перемещение вдоль оси z , $\bar{w}(t) = w(h_0, t)$ – граничное перемещение.

Согласно известным результатам [36], работа A^c поверхностных и объемных сил совпадает с работой A деформации, определяемой по формуле (3.2). Учитывая это обстоятельство, можно заменить в равенстве (3.1) работу A на A^c и после несложных преобразований получить для перехода $\delta^s \rightarrow \delta_m$ следующие соотношения

$$A_p = d^\infty + \Delta u \quad (3.23)$$

– традиционная постановка задачи;

$$A_f = d^\infty + \Delta u \quad (3.24)$$

– уточненная постановка задачи, которые, как и равенство (3.1), представляют собой ЗСЭ для слоя. Здесь согласно выражениям (3.21) и (3.22) при учете равенств (2.3), (2.5):

$$A_p = \lim_{t \rightarrow \infty} A_p(t) = - \int_0^\infty \Phi_c(r(t)) d\bar{w}(t) \quad (3.25)$$

$$A_f = \lim_{t \rightarrow \infty} A_f(t) = \int_0^{h_0} dz \int_0^\infty f(r(t) + h_0 - z) dw(z, t),$$

диссипация энергии d^∞ и функции $w(z, t)$, $r(t)$ находятся на основе известного НДС слоя и решения дифференциального уравнения (2.16) [27, 29], изменение Δu внутренней энергии определяется по формулам (3.3) и (3.4).

Интегралы Стилтгеса (3.25), равно как и интегралы (3.21), (3.22), можно свести к интегралу типа (П.1.1) (приложение 1). При наличии скачка (2.17) зазора $r(t)$, эти интегралы определяются по одной из эквивалентных друг другу формул (П.1.5), (П.1.7) согласно процедуре регуляризации reg_0 .

4. Проверка баланса энергии. Выше, на основании физических представлений был составлен баланс энергии (3.15), отвечающий ЗСЭ для системы индентор–слой–подложка. Целью дальнейших выкладок является вывод выражения для работы A^{ext} внешней силы в терминах баланса энергии (3.15) на основе уравнений контактного взаимодействия индентора и основания. Полученное таким образом выражение позволит подтвердить равенство (3.15) применительно к традиционной и уточненной постановкам рассматриваемой задачи.

4.1. Традиционная постановка задачи предполагает, что деформирование слоя обуславливается давлением p_c , приложенным к его поверхности. Соответствующее нормальное граничное перемещение \bar{w} определяется согласно деформационной модели [28]:

$$-\bar{w}(t) = Bh_0 p_c(t) + I_\varphi(t) = Bh_0 \Phi_c(r(t)) + I_\varphi(t), \quad (4.1)$$

причем последнее равенство получается на основе выражение (2.5) для давления p_c . Здесь функция $I_\varphi(t)$ интегральным образом определяется через давление $p_c(t) = \Phi_c(r(t))$ и имеет абсолютно интегрируемую производную на любом временном отрезке.

Для расчета работы A^{ext} воспользуемся выражением (3.11), в котором величина $A_{\text{b}[0,t]}^{\text{ext}}$ определяется по формуле (3.12). Для определения величины $A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}}$ возьмем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и разобьем отрезок $[0,t]$ интегрирования в формуле (3.13) на три части: $[0, \hat{t} - \varepsilon]$, $[\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$, $[\hat{t} + \varepsilon, t]$, полагая, что $\hat{t} < t$. Соответствующие интегралы обозначим через Q_ε^- , \hat{Q}_ε , Q_ε^+ , так что

$$A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}} = \int_0^{\hat{t}-\varepsilon} p_c(\tau) d\delta(\tau) + \int_{\hat{t}-\varepsilon}^{\hat{t}+\varepsilon} p_c(\tau) d\delta(\tau) + \int_{\hat{t}+\varepsilon}^t p_c(\tau) d\delta(\tau) = Q_\varepsilon^- + \hat{Q}_\varepsilon + Q_\varepsilon^+ \quad (4.2)$$

Пользуясь условием контакта (2.10), заменим в интегралах Q_ε^\pm внедрение $\delta(t)$ суммой $-(\bar{w}(t) + r(t))$, в которой граничное перемещение $\bar{w}(t)$ выразим по формуле (4.1). Затем осуществим в формуле (4.2) предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, заметив, что интеграл Q_ε исчезает при $\varepsilon \rightarrow 0$. Полученное в результате выражение для $A_{\text{c}[0,t]}^{\text{ext}}$ и выражение (3.12) для $A_{\text{b}[0,t]}^{\text{ext}}$ подставим в правую часть равенства (3.11). Таким образом можно установить, что

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = A_p^- + A_p^+(t) - \int_{r^s}^{r^-} \Phi_c(r) dr - \int_{r^+}^{r(t)} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH, \quad (4.3)$$

где

$$A_p^- = -\int_0^{\hat{t}} p_c(\tau) d\bar{w}(\tau), \quad A_p^+(t) = -\int_{\hat{t}}^t p_c(\tau) d\bar{w}(\tau), \quad (4.4)$$

функция $\bar{w}(t)$ определяется по формуле (4.1), а существование интегралов Стильеса (4.4) обеспечивается свойствами кусочной непрерывности функции $p_c(t)$ и абсолютной интегрируемости производной $\dot{I}_\varphi(t)$ [38].

Рассмотрим также работу $A_p(t)$ давления $p_c(t)$ на граничном перемещении $\bar{w}(t)$, которая имеет вид интеграла Стильеса (3.21). Присутствующая в этом интеграле функция $\bar{w}(t)$ определяется по формуле (4.1), поэтому интеграл (3.21) можно свести к интегралу типа (П.1.1). Это позволяет воспользоваться для определения интеграла (3.21) процедурой регуляризации reg_0 из приложения 1 при наличии скачка (2.17) зазора $r(t)$. Применим эту процедуру, используя для нее формулу (П.1.7). В результате, с учетом выражений (3.7) и (4.4), можно получить:

$$A_p(t) = \text{reg}_0 \int_0^t \Phi_c(r(\tau)) d[Bh_0 \Phi_c(r(\tau)) + I_\varphi(\tau)] = \Delta \hat{u} + A_p^- + A_p^+(t) \quad (4.5)$$

Последнее равенство (4.5) позволяет установить, что $A_p^- + A_p^+(t) = A_p(t) - \Delta \hat{u}$. Исключим с помощью этого выражения сумму $A_p^- + A_p^+(t)$ из равенства (4.3) и осуществим в нем предельный переход $t \rightarrow \infty$, который соответствует переходу системы в асимптотически стационарное состояние δ_m, r_m (переход $\delta^s \rightarrow \delta_m$). После этого, в полученном выражении для $A^{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} A_{[0,t]}^{\text{ext}}$ заменим величину A_p суммой $d^\infty + \Delta u$, согласно равенству (3.23), а также примем во внимание формулы (3.6), (3.10) и (3.16) для энергий ε и \hat{d} . В результате можно прийти к соотношению

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \varepsilon + \hat{d}, \quad (4.6)$$

которое подтверждает справедливость записанного выше баланса энергии (3.15).

Как указывалось в предыдущем разделе, величина $\hat{d} = -[\Delta\hat{u} + \Delta\hat{\mathcal{E}}]$ в равенствах (3.15) и (4.6) определяет энергию, которая выделяется из системы при скачке (2.17) зазора $r(t)$. Покажем, что величина \hat{d} принимает неотрицательные значения в соответствии с ее физическим смыслом. Для этого, учитывая выражения (3.7) и (3.10) для скачков $\Delta\hat{u}$ и $\Delta\hat{\mathcal{E}}$, представим величину \hat{d} следующим образом:

$$\hat{d} = -\frac{1}{2}Bh_0[\Phi_c^2(r^+) - \Phi_c^2(r^-)] + \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r)dr = -S_1 + S_2, \quad (4.7)$$

где

$$S_1 = \frac{1}{2}Bh_0[\Phi_c^2(r^+) - \Phi_c^2(r^-)] = \frac{1}{2}[\Phi_c(r^+) + \Phi_c(r^-)](r^+ - r^-), \quad S_2 = \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r)dr \quad (4.8)$$

Отметим, что второе равенство в выражении (4.8) для S_1 получается на основе известного соотношения $Bh_0[\Phi_c(r^+) - \Phi_c(r^-)] = r^+ - r^-$, которое связывает значения r^- и r^+ контактного зазора r до и после скачка (2.17) с соответствующими значениями $\Phi_c(r^\pm)$ [28].

Для определенности, рассмотрим режим (2.12) подвода индентора, отметив, что режим (2.13) отвода индентора рассматривается аналогично. На рис. 3 изображен график, схематично представляющий функцию $\Phi_c(r)$ вида (2.5), и показаны значения r^\pm , отвечающие скачку контактного зазора r при подводе индентора [28]. Площади затемненных областей совпадают со значениями S_1, S_2 в силу выражений (4.8). Из рис. 3 видно, что $S_1 \leq S_2$, поэтому, на основе формулы (4.7) можно получить требуемое неравенство $0 \leq \hat{d}$.

Для проверки полученных результатов был выполнен численный анализ контактного взаимодействия индентора и основания в режимах подвода (2.12) и отвода (2.13). А именно, путем решения дифференциального уравнения (2.16) при заданном внедрении $\delta(t)$ и начальном значении $r = r^s$, определяемом из уравнения (2.15), строилась функция $r(t)$ [28]. Затем, по этой функции известным образом рассчитывалась диссипация энергии d^∞ [27, 29], а также при помощи формул (3.3), (3.6), (3.7), (3.10), (3.14) определялись величины Δu , $\Delta \mathcal{E}$, $\Delta \hat{u}$, $\Delta \hat{\mathcal{E}}$, A^{ext} , составляющие баланс энергии (3.15).

Расчеты проводились при линейном изменении внедрения $\delta(t)$ индентора от начального δ^s до конечного δ_m значений за время $t_m \simeq 0.6829 \cdot 10^{-3}$ с, причем для режима подвода/отвода $\delta^s/\delta_m = -6r_{\text{ec}}$, $\delta_m/\delta^s = -2.5r_{\text{ec}}$. Использовались следующие значения параметров задачи: $m = 7$, $n = 13$, $r_{\text{ec}} = 1$ нм, $r_{\text{eb}} = 0.5r_{\text{ec}}$, $h_0 = 25$ нм,

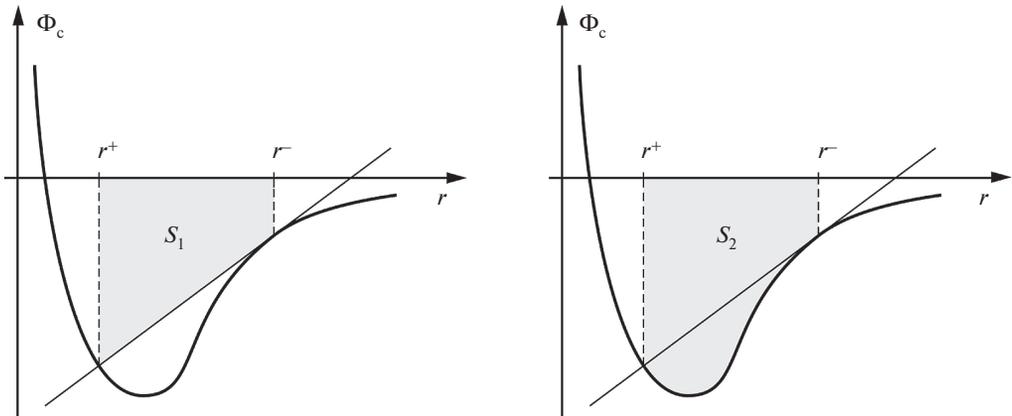


Рис. 3. Характерный график функции $\Phi_c(r)$ и значения r^\pm при подводе индентора

$\lambda = 10.42$ МПа, $\mu = 15.63$ МПа, $R_0 = 0.8 \times 10^3 \text{ с}^{-1}$, $t_r = 10^{-3}$ с, при этом значения мгновенного и длительного коэффициентов упругой податливости слоя составляли $B = 0.024 \text{ МПа}^{-1}$ и $B^\infty = 0.04 \text{ МПа}^{-1}$, соответственно. Кроме того, полагалось, что $A_{1c} = (6\pi)^{-1} A_H [12]$ и $A_{1b} = 10A_{1c}$, где A_H – постоянная Гамакера, $A_H = 10^{-19}$ Дж.

Отметим, что указанные значения параметра r_{cc} и толщины h_0 слоя вполне отвечают соотношению $r_{cc} \ll h_0$, которое упоминалось выше в связи с обоснованием традиционной постановки задачи (замечание 2).

В табл. 1 для режимов подвода (app) и отвода (ret) индентора приведены расчетные значения величин A^{ext} , d^∞ , Δu , $\Delta \mathcal{E}$, \hat{d} , а также значения этих величин за цикл подвод–отвод индентора (a–r) в соответствии с формулами (3.18) и (3.19). Кроме того, приведены расчетные значения параметра

$$\alpha_\Delta = [d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + \hat{d}] - A^{\text{ext}}, \quad (4.9)$$

характеризующие ошибку (невязку) равенства (3.15) при численных расчетах, причем аналитический расчет дает $\alpha_\Delta = 0$ (равенство (4.6)). Здесь и далее, расчетные значения приводятся в безразмерном виде относительно параметра $d_* = (A_{1c}/r_{cc}^{m-4})^2 (B^\infty - B)h_0 \approx 1.126 \cdot 10^{-2} \text{ Дж/м}^2$, физический смысл которого пояснен в работе [29].

Численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием подтверждает баланс энергии (3.15), т. к., по данным табл. 1, расчетные значения невязки α_Δ пренебрежимо малы. Согласно расчетам, величина \hat{d} энергии, выделяемой из системы при скачке контактного зазора r , принимает положительные значения, что согласуется с полученными выше результатами аналитической оценки. Представленные в табл. 1 данные, касающиеся цикла подвод–отвод индентора, подтверждают равенства (3.19), а также баланс энергии (3.20) – расчетное значение соответствующей невязки $(A_{a-r}^{\text{ext}} - d_{a-r}^{\text{ext}})/A_{a-r}^{\text{ext}}$ составляет всего $-2.374 \cdot 10^{-6}$.

Согласно выполненным расчетам: $\max |w(z, t)|/h_0 \approx 0.0722$, что вполне отвечает сделанному выше допущению (2.1) о малости деформаций слоя.

4.2. *Уточненная постановка задачи* предполагает, что деформация слоя порождается объемными силами (2.3), распределенными по его глубине, тогда как поверхность слоя свободна от нагрузок. Соответствующее нормальное граничное перемещение \bar{w} определяется согласно деформационной модели [28]:

$$-\bar{w}(t) = Bh_0 \Psi(r(t)) + I_\Psi(t), \quad (4.10)$$

причем функция $I_\Psi(t)$ интегральным образом определяется через функцию $\psi(t) = Bh_0 \Psi(r(t))$ и имеет абсолютно интегрируемую производную на любом временном отрезке.

Как и в случае традиционной постановки задачи, для расчета работы A^{ext} воспользуемся выражением (3.11), в котором величина $A_{b[0,r]}^{\text{ext}}$ по-прежнему определяется по формуле (3.12), а величину $A_{c[0,r]}^{\text{ext}}$ можно представить в виде разложения (4.2). На ос-

Таблица 1. Результаты расчетов в случае традиционной постановки задачи

	A^{ext}/d_*	d^∞/d_*	$\Delta u/d_*$	$\Delta \mathcal{E}/d_*$	\hat{d}/d_*	α_Δ/d_*
app	$-3.668 \cdot 10^{-2}$	$3.274 \cdot 10^{-2}$	$9.093 \cdot 10^{-2}$	$-1.656 \cdot 10^{-1}$	$5.268 \cdot 10^{-3}$	$5.322 \cdot 10^{-8}$
ret	$1.201 \cdot 10^{-1}$	$3.501 \cdot 10^{-2}$	$-9.093 \cdot 10^{-2}$	$1.656 \cdot 10^{-1}$	$1.038 \cdot 10^{-2}$	$1.761 \cdot 10^{-7}$
a–r	$8.339 \cdot 10^{-2}$	$6.775 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1.564 \cdot 10^{-2}$	

нове этих равенств, как и прежде, можно получить выражение (4.3) для работы $A_{[0,t]}^{\text{ext}}$. В этом выражении величины A_p^\pm задаются равенствами (4.4), в которых граничное перемещение $\bar{w}(t)$ определяется уже по формуле (4.10), отвечающей уточненной постановке задачи.

В случае традиционной постановки задачи для вывода баланса энергии (4.6) использовалось равенство (3.23), левую часть A_p которого удалось напрямую связать с работой A^{ext} внешней силы. Однако в рассматриваемом случае уточненной постановки задачи имеет место равенство (3.24), левая часть A_f которого определяется распределением объемных сил f_3 по глубине слоя (формула (3.22)) и напрямую не связана с работой A^{ext} . Для установления такой связи введем в рассмотрение разность $w_\Delta(z,t) = w(z,t) - \bar{w}(t)$, так что

$$w(z,t) = w_\Delta(z,t) + \bar{w}(t), \quad (4.11)$$

а также введем в рассмотрение величины:

$$A_f^- = \int_0^{h_0} dz \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw(z,\tau), \quad A_f^+(t) = \int_0^{h_0} dz \int_{\hat{t}}^t f_3(z,\tau) dw(z,\tau), \quad (4.12)$$

имеющие отношение к работе A_f объемных сил f_3 (формула (3.22)).

Подставим разложение (4.11) для перемещения $w(z,t)$ в интегралы (4.12) и примем во внимание интегральное выражение (2.4) для давления $p_c(t)$ через силу $f_3(z,t) = f(r(t) + h_0 - z)$. В результате можно получить равенства $A_f^- = A_\Delta^- + A_p^-$ и $A_f^+(t) = A_\Delta^+(t) + A_p^+(t)$, которые позволяют исключить величины A_p^\pm из выражения (4.3), придав ему следующий вид:

$$A_{[0,t]}^{\text{ext}} = A_f^- + A_f^+(t) - [A_\Delta^- + A_\Delta^+(t)] - \int_{r^s}^{r^-} \Phi_c(r) dr - \int_{r^+}^{r(t)} \Phi_c(r) dr - \int_{H^s}^{H(t)} \Phi_b(H) dH, \quad (4.13)$$

причем

$$A_\Delta^- = \int_0^{h_0} dz \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw_\Delta(z,\tau), \quad A_\Delta^+(t) = \int_0^{h_0} dz \int_{\hat{t}}^t f_3(z,\tau) dw_\Delta(z,\tau) \quad (4.14)$$

Рассмотрим также работу $A_f(t)$ объемных сил $f_3(z,t)$ на перемещении $w(z,t)$, которая имеет вид интеграла Стилтъяса (3.22). Присутствующая в этом интеграле функция $w(z,t)$ определяется интегральным образом через те же объемные силы $f_3(z,t)$ [27]. Это позволяет свести интеграл (3.22) к интегралу типа (П.1.1) и воспользоваться для его определения процедурой регуляризации reg_0 (см. приложение 1) при наличии скачка (2.17) зазора $r(t)$. Применим эту процедуру, используя для нее формулу (П.1.7). В результате, с учетом выражений (3.8) и (4.12), можно получить равенство

$$A_f(t) = \int_0^{h_0} dz [\text{reg}_0 \int_0^{\hat{t}} f_3(z,\tau) dw(z,\tau)] = \Delta \hat{u} + A_f^- + A_f^+(t),$$

из которого следует, что $A_f^- + A_f^+(t) = A_f(t) - \Delta \hat{u}$.

Исключим с помощью последнего соотношения сумму $A_f^- + A_f^+(t)$ из выражения (4.13) и осуществим в нем предельный переход $t \rightarrow \infty$, который соответствует переходу системы в асимптотически стационарное состояние δ_m, r_m (переход $\delta^s \rightarrow \delta_m$). После этого, в полученном выражении для $A^{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} A_{[0,t]}^{\text{ext}}$ заменим величину A_f суммой $d^\infty + \Delta u$, согласно равенству (3.24), а также примем во внимание

формулы (3.6), (3.10) и (3.16) для энергий \mathcal{E} и \hat{d} . В результате можно прийти к соотношению

$$A^{\text{ext}} = d^\infty + \Delta u + \Delta \mathcal{E} + d - \alpha_\Delta, \quad (4.15)$$

причем

$$\alpha_\Delta = \lim_{t \rightarrow \infty} [A_\Delta^- + A_\Delta^+(t)] \quad (4.16)$$

Соотношение (4.15) отличается от баланса энергии (3.15) присутствием в правой части дополнительного параметра α_Δ , который можно интерпретировать как невязку (4.9). В случае традиционной постановки задачи подобная невязка имеет нулевое значение и используется только для оценки точности выполнения равенства (3.15) при численных расчетах. Однако, в рассматриваемом случае уточненной постановки задачи, значение параметра α_Δ определяется по формуле (4.16) и, вообще говоря, отличается от нулевого. Другими словами, в случае уточненной постановки задачи не удается в точности подтвердить баланс энергии (3.15), что обусловлено приближенным характером соответствующих выкладок, использующих допущение (2.1) о малости деформаций слоя.

Тем не менее, оказывается, что значение параметра α_Δ мало, если выполняется допущение (2.1). Действительно, как указывалось в замечании 2, объемные силы $f_3(z, t)$ сконцентрированы в подповерхностной области толщины $\sim r_{\text{ec}}$. Поэтому, если допустить соотношение $r_{\text{ec}} \ll h_0$, то следует ожидать близость к нулю величин A_Δ^\pm , определяемых согласно равенствам (4.14). В свою очередь, это означает близость к нулю параметра α_Δ , связанного с величинами A_Δ^\pm по формуле (4.16). Данный вывод будет подтвержден ниже численными расчетами.

Как и прежде, величина $\hat{d} = -[\Delta \hat{u} + \Delta \hat{\mathcal{E}}]$ в соотношении (4.15) определяет энергию, которая выделяется из системы при скачке (2.17) зазора $r(t)$. С учетом выражений (3.8) и (3.10) для скачков $\Delta \hat{u}$ и $\Delta \hat{\mathcal{E}}$ при уточненной постановке задачи величина \hat{d} имеет следующий вид:

$$\hat{d} = -\frac{1}{2} B \int_0^{h_0} [(Y^+(z))^2 - (Y^-(z))^2] dz + \int_{r^-}^{r^+} \Phi_c(r) dr \quad (4.17)$$

Однако, в отличие от случая традиционной постановки задачи, здесь не удастся показать, что величина \hat{d} принимает неотрицательные значения в соответствии с ее физическим смыслом. Тем не менее, можно установить это свойство величины \hat{d} , если объемные силы $f_3(z, t)$ сконцентрированы в подповерхностной области толщины $\sim r_{\text{ec}} \ll h_0$. Действительно, при таком условии, в силу определений (2.5) и (3.5), оказываются близки друг к другу величины $\int_0^{h_0} Y^2(z, t) dz$ и $h_0 \Phi_c^2(r(t))$. В свою очередь, это приводит к близости правой части выражения (4.17) к правой части выражения (4.7), которая, как было показано выше, принимает неотрицательные значения. Справедливость неравенства $0 \leq \hat{d}$ для уточненной постановки задачи при вышеуказанном условии будет подтверждено ниже численными расчетами.

Для проверки полученных результатов был выполнен численный анализ контактного взаимодействия индентора и основания в режимах подвода (2.12) и отвода (2.13) по схеме, описанной выше для традиционной постановки задачи и при тех же значениях параметров задачи. В табл. 2 приведены расчетные значения величин, которые определяются так же как и для табл. 1.

Данные табл. 2 позволяют заключить, что численный анализ контактного взаимодействия индентора с основанием свидетельствует о справедливости баланса энергии (3.15), т.к. расчетные значения невязки α_Δ , присутствующей в соотношении (4.15), весьма малы. Как видно, величина \hat{d} энергии, выделяемой из системы

Таблица 2. Результаты расчетов в случае уточненной постановки задачи

	A^{ext}/d_*	d^∞/d_*	$\Delta u/d_*$	$\Delta \mathcal{E}/d_*$	\hat{d}/d_*	α_Δ/d_*
app	$-3.627 \cdot 10^{-2}$	$3.022 \cdot 10^{-2}$	$9.364 \cdot 10^{-2}$	$-1.648 \cdot 10^{-1}$	$5.530 \cdot 10^{-3}$	$8.133 \cdot 10^{-4}$
ret	$1.165 \cdot 10^{-1}$	$3.592 \cdot 10^{-2}$	$-9.364 \cdot 10^{-2}$	$1.648 \cdot 10^{-1}$	$7.068 \cdot 10^{-3}$	$-2.299 \cdot 10^{-3}$
a-r	$8.022 \cdot 10^{-2}$	$6.614 \cdot 10^{-2}$	0	0	$1.260 \cdot 10^{-2}$	

при скачке контактного зазора r , принимает положительные значения, что согласуется со сделанными выше теоретическими выводами. Представленные в табл. 2 данные, касающиеся цикла подвод–отвод индентора, подтверждают равенства (3.19), а также баланс энергии (3.20) – расчетное значение соответствующей невязки $(A_{a-r}^{\text{ext}} - d_{a-r})/A_{a-r}^{\text{ext}}$ составляет всего $1.852 \cdot 10^{-2}$.

Согласно выполненным расчетам: $\max_{z,t} |w(z,t)|/h_0 \approx 0.0705$, что вполне отвечает сделанному выше допущению (2.1) о малости деформаций слоя.

5. Обсуждение. Проведенный анализ контактного взаимодействия индентора и основания показывает, что при составлении баланса энергии для системы индентор–слой–подложка необходимо учитывать вязкую диссипацию энергии d^∞ в слое, изменения Δu и $\Delta \mathcal{E}$ потенциальной энергии упругой деформации и энергии поля. Кроме того, при наличии скачка контактного зазора r необходимо учитывать соответствующее рассеивание энергии \hat{d} . В связи с этим, следует отметить, что скачкообразное изменение зазора $r(t)$ также оказывает существенное влияние на величину d^∞ [29].

За цикл подвод–отвод индентора, как и следовало ожидать, вся работа внешней силы расходуется на покрытие гистерезисных потерь d_{a-r} , состоящих из вязкой диссипации энергии в слое и рассеивания энергии при скачках контактного зазора r . В работе [29] величина d_{a-r} использовалась как мера энергетических потерь при скольжении шероховатого контртела по вязкоупругому слою в режиме бесконтактного трения, что позволило рассчитать соответствующий коэффициент трения. Однако, при наличии скачка контактного зазора r следует учитывать дополнительное рассеивание энергии \hat{d} . Такой учет, очевидно, повысит оценку коэффициента трения скольжения.

Выполненные выше аналитические расчеты предполагают допущение (2.1) о малости деформаций слоя, на основе которого используется выражение (2.3) для объемной силы $f_3(z,t)$. Это выражение не учитывает зависимость силы $f_3(z,t)$ от перемещения $w(z,t)$, что обеспечивает линейный характер рассматриваемой задачи о контактом взаимодействии индентора и основания. Такой характер, в частности, позволяет применить к условию равновесия (2.9) преобразование Лапласа по времени и получить аналитические выражения для НДС слоя [27].

Таким образом, проведенные аналитические расчеты, по сути, являются приближенными. Это касается и выкладок предыдущего раздела, посвященного прямому выводу выражения для работы A^{ext} внешней силы в терминах баланса энергии (3.15). Однако, несмотря на указанные обстоятельства, в случае традиционной постановки задачи удастся получить выражение (4.6) для работы A^{ext} , которое в точности соответствует равенству (3.15). Это обуславливается использованием силовой модели (2.7), позволяющей установить прямую связь величины A^{ext} с работой A_p давления p_c , которая, в свою очередь, равна сумме $d^\infty + \Delta u$ (формула (3.23)). В случае уточненной постановки задачи подобная схема неприменима, т. к. в этом случае

сумма $d^\infty + \Delta u$ равна работе A_f объемных сил f_3 (формула (3.24)), прямую связь которой с величиной A^{ext} установить не удастся.

В приложении 2 приводится пример модельной вязкоупругой системы с телом, совершающим движение по ступенчатой поверхности под действием внешней силы. Аналитический расчет работы A^{ext} этой силы приводит к выражению (П.2.13), которое согласуется с балансом энергии (3.15). В частности, выражение (П.2.13) включает энергию \hat{D} , рассеиваемую в виде тепла при скачкообразном изменении положения тела, при этом отсутствует мгновенное изменение вязкой диссипации энергии D .

Выводы

1. Исходя из общих физических представлений, составлен баланс энергии (3.15) для системы индентор—слой—подложка, отвечающий ЗСЭ. Баланс включает вязкую диссипацию энергии в слое, изменения потенциальной энергии упругой деформации и энергии поля межмолекулярного взаимодействия, а также энергию, рассеиваемую при скачке контактного зазора.

2. В рамках допущения (2.1) о малости деформаций слоя предложена силовая модель (2.7), а также деформационные модели (4.1) и (4.10) для традиционной и уточненной постановок задачи. На основе этих моделей удастся подтвердить баланс энергии (3.15) путем аналитических и численных расчетов.

3. Исходя из ЗСЭ для рассматриваемой системы, получены формулы (4.7) (традиционная постановка задачи) и (4.17) (уточненная постановка задачи) для расчета энергии, которая выделяется из системы при скачке контактного зазора.

4. Полученные результаты могут быть использованы для оценок гистерезисных потерь при индентировании и силы трения применительно к вязкоупругим покрытиям.

Приложение 1. Регуляризация интеграла Стильгеса. Как известно [38], интеграл Римана—Стильгеса (далее, Стильгеса) $\int_a^b f(t)dg(t)$ заведомо не существует в случае, когда функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют общую точку разрыва. Однако, для интеграла Стильгеса специального вида оказывается возможным дать математически корректное определение в указанном случае разрывных функций. Это определение основывается на физически понятной интерпретации разрыва функции как быстрого скачка ее значений в точке разрыва.

Рассмотрим интеграл Стильгеса специального вида

$$I = \int_a^b f(t)dg(t) \equiv \int_a^b F(x(t))d[Q(x(t)) + q(t)], \quad (\text{П.1.1})$$

который встречается в математической физике, например, при определении работы (формулы (3.2), (3.21), (3.22)). Считается, что функции $x(t), q(t)$ — кусочно-монотонные на отрезке $[a, b]$, $q(t)$ — непрерывная на $[a, b]$, $x(t)$ — непрерывная на $[a, b]$, кроме точки \hat{t} , в которой функция $x(t)$ имеет разрыв первого рода. Соответствующие пределы $x(\hat{t} \pm 0)$ обозначим через x^\pm . Функции $F(X)$ и $Q(X)$ считаются гладкими. При таких условиях подынтегральные функции $f(t)$ и $g(t)$ имеют общую точку разрыва \hat{t} , поэтому, как указывалось выше, интеграл (П.1.1) не существует. Применим к нему следующую процедуру регуляризации.

Рассмотрим непрерывную функцию

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} x(t), & t \in [a, \hat{t} - \varepsilon] \cup [\hat{t} + \varepsilon, b] \\ \rho(t), & t \in [\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon] \end{cases}, \quad (\text{П.1.2})$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр, $\rho(t)$ – произвольная непрерывная и кусочно-монотонная функция, такая что $\rho(\hat{t} \pm \varepsilon) = x(\hat{t} \pm \varepsilon)$. Подобную функцию можно рассматривать как непрерывное приближение исходной разрывной функции $x(t)$.

Для функции (П.1.2) интеграл (П.1.1) принимает вид

$$I_\varepsilon = \int_a^b f_\varepsilon(t) dg_\varepsilon(t) \equiv \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) d[Q(x_\varepsilon(t)) + q(t)] \quad (\text{П.1.3})$$

При оговоренных выше условиях, функции $f_\varepsilon(t)$ и $g_\varepsilon(t)$ являются непрерывными и кусочно-монотонными на отрезке $[a, b]$. Эти свойства обеспечивают существование интеграла (П.1.3) [38], который, в свою очередь, можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) Q'(x_\varepsilon(t)) dx_\varepsilon(t) + \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) dq(t) = \\ &= \int_{x_\varepsilon(a)}^{x_\varepsilon(b)} F(X) Q'(X) dX + \int_a^b F(x_\varepsilon(t)) dq(t). \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

Осуществим теперь в правой части формулы (П.1.4) предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая определение (П.1.2) функции $x_\varepsilon(t)$ и оговоренные выше свойства функций $q(t)$ и $F(X)$. В результате получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{x(a)}^{x(b)} F(X) Q'(X) dX + J^- + J^+, \quad (\text{П.1.5})$$

где

$$J^- = \int_a^{\hat{t}} F(x(t)) dq(t), \quad J^+ = \int_{\hat{t}}^b F(x(t)) dq(t),$$

причем для интегралов J^- и J^+ : $x(\hat{t}) = x^-$ и $x(\hat{t}) = x^+$, соответственно.

Получим еще одно, эквивалентное (П.1.5), выражение для предела интеграла I_ε . Для этого разобьем отрезок $[a, b]$ интегрирования в формуле (П.1.3) на три части: $[a, \hat{t} - \varepsilon]$, $[\hat{t} - \varepsilon, \hat{t} + \varepsilon]$, $[\hat{t} + \varepsilon, b]$ и обозначим соответствующие интегралы через $I_\varepsilon^-, \hat{I}_\varepsilon, I_\varepsilon^+$, так что

$$I_\varepsilon = \hat{I}_\varepsilon + I_\varepsilon^- + I_\varepsilon^+ \quad (\text{П.1.6})$$

Пользуясь оговоренными выше свойствами функций $x(t), q(t), F(X), Q(X)$ и выражением (П.1.2) для функции $x_\varepsilon(t)$, нетрудно установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{I}_\varepsilon &= \int_{x^-}^{x^+} F(X) Q'(X) dX, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^- = I^- \equiv \int_a^{\hat{t}} F(x(t)) dg(t) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon^+ &= I^+ \equiv \int_{\hat{t}}^b F(x(t)) dg(t), \end{aligned}$$

причем $g(t) = Q(x(t)) + q(t)$ и для интегралов I^- и I^+ : $x(\hat{t}) = x^-$ и $x(t) = x^+$, соответственно. С учетом этих формул, предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ в равенстве (П.1.6) позволяет получить искомое выражение:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon = \int_{x^-}^{x^+} F(X) Q'(X) dX + I^- + I^+ \quad (\text{П.1.7})$$

Согласно выражению (П.1.2), при $\varepsilon \rightarrow 0$ непрерывная функция $x_\varepsilon(t)$ воспроизводит разрывную функцию $x(t)$. В связи с этим, представляется разумным прийти к соглашению использовать предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon$ в качестве величины интеграла Стильтьеса (П.1.1) при наличии общей точки разрыва у подынтегральных функций. Указанный предел можно найти по одной из формул – (П.1.5) или (П.1.7). Подобную процедуру определения величины интеграла Стильтьеса назовем регуляризацией этого интеграла, используя для нее обозначение reg_0 , т. е.

$$\text{reg}_0 \int_a^b F(x(t))d[Q(x(t)) + q(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon \quad (\text{П.1.8})$$

Отметим, что выражения (П.1.5) и (П.1.7) для предела в равенстве (П.1.8) не зависят от произвольной функции $\rho(t)$ в выражении (П.1.2), что свидетельствует о корректности предложенной процедуры регуляризации reg_0 интеграла Стильтьеса.

В случае отсутствия разрыва у функции $x(t)$, в выражениях (П.1.5), (П.1.7) следует формально положить $x^- = x^+$, после чего можно убедиться, что процедура регуляризации (П.1.8) приводит к обычным выражениям для интеграла Стильтьеса с непрерывными функциями [38].

В качестве примера, рассмотрим частный случай интеграла (П.1.1):

$$A = k \int_a^b [x(t) - x_0] dx(t),$$

который представляет собой работу внешней силы по растяжению пружины длины $x(t)$, имеющей жесткость k и длину x_0 в недеформированном состоянии. Процедура регуляризации (П.1.8) дает для такого интеграла выражение

$$\text{reg}_0 A = \frac{k}{2} \{ [x(b) - x_0]^2 - [x(a) - x_0]^2 \},$$

в правой части которого стоит приращение потенциальной энергии деформации пружины, что вполне согласуется с физическими представлениями о сохранении энергии.

Приложение 2. Модельная система со скачком состояния. Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки (тела), связанной через вязкоупругий элемент Кельвина с направляющей (ось x) (рис. 4). Под действием внешней силы f^{ext} тело скользит без трения по поверхности, образованной прямолинейными участками, два из которых разделены ступенькой и имеют положительный угол наклона α к оси x . Тело движется вдоль оси x с постоянной скоростью V , при этом связь тела с направляющей через элемент Кельвина обеспечивает его прижатие к поверхности. Отметим, что в рассматриваемом примере используются обозначения, показанные на рис. 4, которые могут отличаться от обозначений основного материала статьи. Целью дальнейших выкладок является вывод баланса энергии типа (3.15) для рассматриваемой системы.

Обозначим через $x(t) = Vt$ координату тела в зависимости от времени, предполагая, что в моменты времени $0, \hat{t}, t_m$ тело имеет координаты $0, x, x_m$, соответственно. Текущая высота h тела над уровнем оси x описывается известной функцией $h(t)$ – ее несложно построить, учитывая заданную геометрию поверхности и равенство $x(t) = Vt$. При достижении телом координаты \hat{x} ступеньки поверхности (в момент \hat{t}) его высота h скачком уменьшается на высоту $\Delta \hat{h}$ ступеньки под действием силы упругости растянутой пружины b . Подобное мгновенное изменение положения тела предполагает отсутствие у него инерции, что возможно в предположении незначительности массы тела. Считается также, что удар тела о поверхность в момент \hat{t} не сопровождается отскоком, т. е. является неупругим.

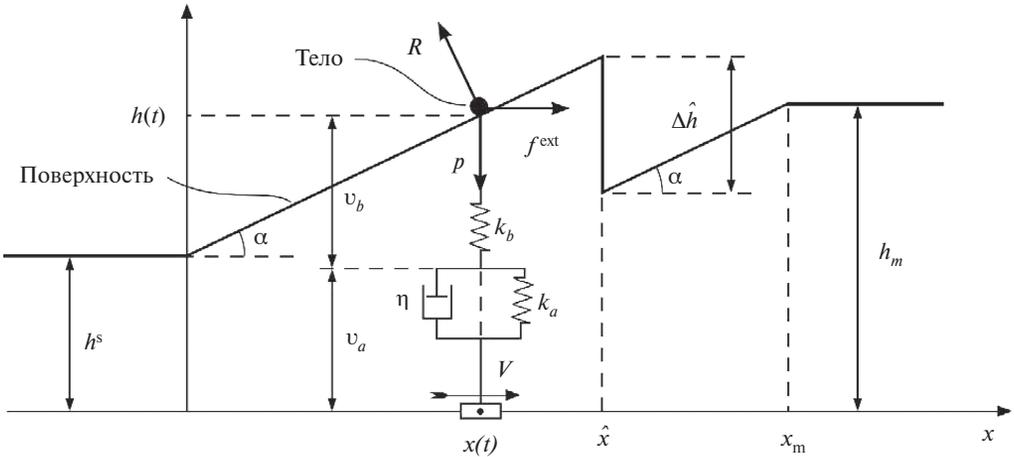


Рис. 4. Схема скольжения тела по поверхности со ступенькой (для наглядности длины пружин укорочены)

Запишем уравнения равновесия тела: $f^{\text{ext}} = R \sin \alpha$, $p = R \cos \alpha$, где R — нормальная сила реакции поверхности, p — сила, действующая на тело со стороны вязкоупругого элемента Кельвина, причем значения всех указанных сил считаются положительными (рис. 4). Из этих уравнений вытекает равенство, связывающее силы f^{ext} и p на наклонных участках поверхности:

$$f^{\text{ext}}(t) = p(t) \operatorname{tg} \alpha, \quad (\text{П.2.1})$$

при этом на горизонтальных участках поверхности $f^{\text{ext}}(t) = 0$. В дальнейшем будем формально полагать $\alpha = 0$ на горизонтальных участках поверхности. При таком соглашении равенство (П.2.1) будет справедливо для всех участков поверхности.

Выделим произвольный отрезок $[t_1, t_2]$ непрерывности функции $h(t)$. Работа $A_{[t_1, t_2]}^{\text{ext}}$ силы $f^{\text{ext}}(t)$ на этом отрезке определяется по формуле:

$$A_{[t_1, t_2]}^{\text{ext}} = \int_{t_1}^{t_2} f^{\text{ext}}(t) dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) \operatorname{tg} \alpha dx(t) = \int_{t_1}^{t_2} p(t) dh(t), \quad (\text{П.2.2})$$

при записи которой принято во внимание равенство (П.2.1) и геометрическое соотношение $dh(t) = \operatorname{tg} \alpha dx(t)$.

Величина силы p определяется процессом деформирования элемента Кельвина, так что [41]:

$$\begin{aligned} p(t) &= \eta \dot{v}_a(t) + k_a [v_a(t) - v_{a0}] \\ p(t) &= k_b [v_b(t) - v_{b0}], \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

где η и k_i — вязкость демпфера и жесткость пружины i элемента Кельвина, v_i и v_{i0} — длина пружины i в растянутом и недеформированном состояниях, $i = a, b$, при этом, согласно принятым обозначениям (рис. 4):

$$v_a(t) + v_b(t) = h(t) \quad (\text{П.2.4})$$

Диссипация энергии $D_{[t_1, t_2]}$ в демпфере на произвольном отрезке $[t_1, t_2]$ времени и потенциальная энергия U_i упругой деформации пружины i определяются по формулам [42]:

$$D_{|v_1, v_2|} = \eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}_a^2(t) dt, \quad U_i(t) = \frac{k_i}{2} [v_i(t) - v_{i0}]^2; \quad i = a, b \quad (\text{П.2.5})$$

Введем также в рассмотрение полную потенциальную энергию пружин:

$$U(t) = U_a(t) + U_b(t) \quad (\text{П.2.6})$$

Предполагается, что в начале тело скользит по первому горизонтальному участку поверхности $x < 0$ (рис. 4), и элемент Кельвина находится в стационарном состоянии с $\dot{v}_a(t) = 0$. При достаточно продолжительном (строго говоря, при $t \rightarrow \infty$) скольжении тела по второму горизонтальному участку $x_m < x$ происходит релаксация элемента Кельвина и он опять приходит в стационарное состояние. Значения p^s и p_m силы p , соответствующие указанным стационарным состояниям определяются из равенств (П.2.3), (П.2.4) при условии $\dot{v}_a(t) = 0$, так что [42]:

$$p(0) = p^s = k^\infty (h^s - v_0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = p_m = k^\infty (h_m - v_0), \quad (\text{П.2.7})$$

где $k^\infty = k_a k_b / (k_a + k_b)$ – длительная жесткость, $v_0 = v_{a0} + v_{b0}$. Полная потенциальная энергия пружин в стационарных состояниях определяется по формулам:

$$U^s = \frac{1}{2k^\infty} (p^s)^2, \quad U_m = \frac{1}{2k^\infty} (p_m)^2 \quad (\text{П.2.8})$$

Исключив из равенств (П.2.3), (П.2.4) неизвестные функции $v_a(t)$ и $v_b(t)$, можно получить дифференциальное уравнение относительно функции $p(t)$ [42]. Решение этого уравнения с начальным условием $p(0) = p^s$ позволяет определить функции $v_a(t)$, $v_b(t)$, рассчитать затем по формулам (П.2.2), (П.2.5) величины $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$, $D_{|t_1, t_2|}$, U_a , U_b и составить баланс энергии типа (3.15). Однако это проще сделать, получив выражение для работы $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$ непосредственно из исходных равенств (П.2.3), (П.2.4).

Для этого, используя соотношение (П.2.4), заменим в правой части равенства (П.2.2) для работы $A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}}$ функцию $h(t)$ суммой $v_a(t) + v_b(t)$ и подставим в полученные два интеграла вместо функции $p(t)$ два ее выражения (П.2.3). В результате можно получить искомое выражение:

$$\begin{aligned} A_{|t_1, t_2|}^{\text{ext}} &= \eta \int_{t_1}^{t_2} \dot{v}_a(t) dv_a(t) + k_a \int_{t_1}^{t_2} [v_a(t) - v_{a0}] dv_a(t) + k_b \int_{t_1}^{t_2} [v_b(t) - v_{b0}] dv_b(t) = \\ &= D_{|t_1, t_2|} + U(t_2) - U(t_1), \end{aligned} \quad (\text{П.2.9})$$

в котором последнее равенство записано на основе формул (П.2.5), (П.2.6).

Рассмотрим теперь работу $A^{\text{ext}} = A_{|0, \infty|}^{\text{ext}}$ силы f^{ext} по перемещению тела из начального стационарного состояния с $p = p^s$ (первый горизонтальный участок поверхности) в асимптотически стационарное состояние с $p = p_m$ (второй горизонтальный участок поверхности). Представим работу A^{ext} в виде суммы работ $A_{|0, \hat{t}|}^{\text{ext}}$ и $A_{|\hat{t}, \infty|}^{\text{ext}}$ до и после скачка высоты $h(t)$, которые определяются по формуле (П.2.9). В результате, учитывая равенства (П.2.7) и (П.2.8), можно прийти к следующему соотношению, представляющему собой баланс энергии для рассматриваемой системы:

$$A^{\text{ext}} = D^\infty + \Delta U - \Delta \hat{U}, \quad (\text{П.2.10})$$

где

$$D^\infty = D_{|0, \infty|}, \quad \Delta U = U_m - U^s, \quad \Delta \hat{U} = U(\hat{t} + 0) - U(\hat{t} - 0), \quad (\text{П.2.11})$$

причем величины U^s и U_m определяются по формулам (П.2.8).

При конечной силе p демпфер в элементе Кельвина не допускает мгновенного изменения своей длины v_a . Это означает, что скачок высоты $h(t)$ в момент \hat{t} не может вызвать мгновенных изменений длины v_a пружины a и, соответственно, ее потенциальной энергии U_a . Однако, длина v_b пружины b в момент \hat{t} мгновенно уменьшается на величину Δh скачка высоты $h(t)$, что приводит к мгновенному изменению потенциальной энергии U_b . Данные обстоятельства позволяют с учетом формул (П.2.5), (П.2.6) записать выражения:

$$D^\infty = \eta \int_0^\infty \dot{v}_a^2(t) dt, \quad \Delta \hat{U} = \Delta \hat{U}_b = U_b^+ - U_b^-, \quad (\text{П.2.12})$$

причем $U_b^\pm(t) = U_b(\hat{t} \pm 0) = \frac{k_b}{2} [v_b(\hat{t} \pm 0) - v_{b0}]^2$.

Отметим, что на втором горизонтальном участке внешняя сила f^{ext} не совершает дополнительной работы, т.е. $A^{\text{ext}} = A_{[0, \infty)}^{\text{ext}} = A_{[0, t_m]}^{\text{ext}}$. Однако, использование в равенстве (П.2.10) в качестве конечного состояния асимптотически стационарного состояния с известной силой $p = p_m$ позволяет получить явные выражения (П.2.11), (П.2.12) для входящих в равенство (П.2.10) величин D^∞ и ΔU .

Согласно общепринятым физическим представлениям, при мгновенном уменьшении высоты h тела в момент \hat{t} потенциальная энергия U элемента Кельвина переходит в кинетическую энергию тела, которая, в свою очередь, рассеивается при неупругом ударе тела о поверхность в количестве $\hat{D} = -\Delta \hat{U} > 0$. Последнее соотношение позволяет представить баланс энергии (П.2.10) в следующем виде:

$$A^{\text{ext}} = D^\infty + \Delta U + \hat{D} \quad (\text{П.2.13})$$

Равенство (П.2.13), как и равенство (П.2.10), отвечает 3СЭ для рассматриваемой системы тело–элемент Кельвина и имеет понятный физический смысл. Например, если горизонтальные участки поверхности находятся на одинаковом уровне ($h^s = h_m$, рис. 4), а в элементе Кельвина отсутствует демпфер ($\eta = 0$), то, согласно выражениям (П.2.11) и (П.2.12): $D^\infty = \Delta U = 0$. В таком случае, в силу равенства (П.2.13): $A^{\text{ext}} = \hat{D}$, т.е., как и следовало ожидать, вся работа внешней силы f^{ext} рассеивается.

Баланс энергии (П.2.13) вполне соответствует записанному балансу энергии (3.15) для рассматриваемой в статье системы индентор–слой–подложка. В частности, равенство (П.2.13) подтверждает отсутствие скачка диссипации энергии d в балансе энергии (3.15), а также поясняет физический смысл слагаемого \hat{d} в нем.

Отметим, что приведенный пример подвижной системы тело–элемент Кельвина со скачком состояния представляет самостоятельный интерес для моделирования трения шероховатых тел, а также явления прерывистого скольжения (stick–slip).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант № 22-49-02010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // *Kolloid-Zeitschrift*. 1934. Bd. 69. H. 2. S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. 1971. V. 324. №1558. P. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // *J. Colloid Interface Sci*. 1975. V. 53. №2. P. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // *J. Phys. D: Appl. Phys*. 1997. V. 30. №12. P. 1710–1719.

5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // *J. Mech. Phys. Solids*. 2006. V. 54. №9. P. 1843–1861.
6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.* 2006. V. 21. №10. P. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazhnikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. of Solids*. 2018. V. 24. №5. P. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*. 1981. V. 43. №3. P. 697–711.
9. *Горячева И.Г., Губенко М.М., Маховская Ю.Ю.* Скольжение сферического индентора по вязкоупругому основанию с учетом сил молекулярного притяжения // *ПМТФ*. 2014. Т. 55. №1. С. 99–107.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: an analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polymer Sci. Pt. B: Polymer Phys.* 2002. V. 40. P. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech.&Phys. of Solids*. 2003. V. 51. №1. P. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.* 1980. V. 77. №1. P. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*. 1992. V. 46. №12. P. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*. 1997. V. 453. №1961. P. 1277–1297.
15. *Солдатенков И.А.* Применение метода последовательных приближений к расчету упругого контакта при наличии молекулярной адгезии // *ПММ*. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 734–743.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.* 1998. V. 199. №2. P. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2007. V. 71. №8. P. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*. 2013. V. 61. №6. P. 1377–1390.
19. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия (уточненная постановка) // *ПММ*. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 877–893.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Int. J. Nanomech. Sci.&Technol.* 2015. V. 6. №2. P. 117–133.
21. *Jagota A., Argento C.* An intersurface stress tensor // *J. Colloid Interface Sci.* 1997. V. 191. №2. P. 326–336.
22. *Argento C., Jagota A., Carter W.C.* Surface formulation for molecular interactions of macroscopic bodies // *J. Mech. Phys. Solids*. 1997. V. 45. №7. P. 1161–1183.
23. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. of Adhesion*. 2010. V. 86. №11. P. 1071–1085.
24. *Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю.* Адгезионное взаимодействие упругих тел // *ПММ*. 2001. Т. 65. №2. С. 279–289.
25. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // *J. Mech. Phys. Solids*. 2011. V. 59. P. 2488–2510.
26. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Barber J.R.* Effect of Tabor parameter on hysteresis losses during adhesive contact // *J. Mech. Phys. Solids*. 2017. V. 98. P. 236–244.
27. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): расчет НДС и диссипации энергии // *ПММ*. 2020. Т. 84. №1. С. 102–121.
28. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): анализ особенностей процесса подвода/отвода индентора // *ПММ*. 2021. Т. 85. №1. С. 44–65.

29. *Солдатенков И.А.* Контакт с межмолекулярным взаимодействием для вязкоупругого слоя (самосогласованный подход): диссипация энергии при индентировании и сила трения // ПММ. 2022. Т. 86. №3. С. 424–444.
30. *Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М.* Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
31. *Handbook of Micro/Nanotribology / Ed. by Bhushan B.* Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
32. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.
33. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
34. *Солдатенков И.А.* Контактная задача при объемном приложении сил межмолекулярного взаимодействия: особенности подповерхностных напряжений // ПММ. 2016. Т. 80. №6. С. 733–745.
35. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
36. *Огибалов П.М., Ломакин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Изд-во МГУ, 1975. 528 с.
37. *Адамов А.А., Матвеев В.П., Труфанов Н.А., Шардаков И.Н.* Методы прикладной вязкоупругости. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. 411 с.
38. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Физматлит, 2003. Т. 3. 728 с.
39. *Takahashi K., Onzawa T.* Effect of the stiffness of the measurement system on adhesion force curves in the elastic continuum limit // J. Adhesion Sci. Technol. 1996. V. 10. №1. P. 17–31.
40. *Johnson K.L.* Mechanics of adhesion // Tribol. Int. 1998. V. 31. №8. P. 413–418.
41. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
42. *Солдатенков И.А.* К расчету деформационной составляющей силы трения для стандартного вязкоупругого основания // Трение и износ. 2008. Т. 29. №1. С. 12–21.

**Contact with Intermolecular Interaction Forces for a Viscoelastic Layer
(Self-Consistent Approach): The Energy Balance
for the System of Indenter–Layer–Substrate**

I.A. Soldatenkov^{a,*}

^a*Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^{*}*e-mail: iasoldat@hotmail.com*

The contact of an infinitely extended plane indenter and a viscoelastic layer in the framework of the Derjaguin self-consistent approach with the surface (traditional formulation) and bulk (refined formulation) application of intermolecular interaction forces is considered. Corresponding models of the contact interaction are proposed, for which the energy balance in the indenter–layer–substrate system is derived and validated. The balance takes into account viscous energy dissipation, potential energy of elastic deformation, field energy, as well as the energy dissipated in jump of the contact gap.

Keywords: contact problem, viscoelastic layer, intermolecular interaction, energy dissipation, field energy

REFERENCES

1. *Derjaguin B.* Untersuchungen über die Reibung und Adhäsion, IV. Theorie des Anhaftens kleiner Teilchen // Kolloid-Zeitschrift, 1934, Bd. 69, H. 2, S. 155–164.
2. *Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D.* Surface energy and the contact of elastic solids // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A, 1971, vol. 324, no. 1558, pp. 301–313.
3. *Derjaguin B.V., Muller V.M., Toporov Yu.P.* Effect of contact deformations on the adhesion of particles // J. Colloid Interface Sci., 1975, vol. 53, no. 2, pp. 314–326.
4. *Sridhar I., Johnson K.L., Fleck N.A.* Adhesion mechanics of the surface force apparatus // J. Phys. D: Appl. Phys., 1997, vol. 30, no. 12, pp. 1710–1719.
5. *Sergici A.O., Adams G.G., Müftü S.* Adhesion in the contact of a spherical indenter with a layered elastic half-space // J. Mech. Phys. Solids, 2006, vol. 54, no. 9, pp. 1843–1861.

6. *Reedy E.D.* Thin-coating contact mechanics with adhesion // *J. Mater. Res.*, 2006, vol. 21, no. 10, pp. 2660–2668.
7. *Borodich F.M., Galanov B.A., Perepelkin N.V., Prikazchikov D.A.* Adhesive contact problems for a thin elastic layer: Asymptotic analysis and the JKR theory // *Math.&Mech. of Solids*, 2018, vol. 24, no. 5, pp. 1405–1424.
8. *Greenwood J.A., Johnson K.L.* The mechanics of adhesion of viscoelastic solids // *Phil. Mag. A*, 1981, vol. 43, no. 3, pp. 697–711.
9. *Goryacheva I.G., Gubenko M.M., Makhovskaya Yu.Yu.* Sliding of a spherical indenter on a viscoelastic foundation with the forces of molecular attraction taken into account // *J. of Appl. Mech.&Tech. Phys.*, 2014, vol. 55, no. 1, pp. 81–88.
10. *Lin Y.Y., Hui C.Y.* Mechanics of contact and adhesion between viscoelastic spheres: An analysis of hysteresis during loading and unloading // *J. Polymer Sci. Pt. B: Polymer Phys.*, 2002, vol. 40, pp. 772–793.
11. *Haiat G., Phan Huy M.C., Barthel E.* The adhesive contact of viscoelastic spheres // *J. Mech. & Phys. of Solids*, 2003, vol. 51, no. 1, pp. 69–99.
12. *Muller V.M., Yushchenko V.S., Derjaguin B.V.* On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid plane // *J. Coll. Interface Sci.*, 1980, vol. 77, no. 1, pp. 91–101.
13. *Attard P., Parker J.L.* Deformation and adhesion of elastic bodies in contact // *Phys. Rev. A*, 1992, vol. 46, no. 12, pp. 7959–7971.
14. *Greenwood J.A.* Adhesion of elastic spheres // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1997, vol. 453, no. 1961, pp. 1277–1297.
15. *Soldatenkov I.A.* The use of the method of successive approximations to calculate an elastic contact in the presence of molecular adhesion // *JAMM*, 2012, vol. 76, no. 5, pp. 597–603.
16. *McMeeking R.M.* A Maxwell stress for material interactions // *J. Colloid Interface Sci.*, 1998, vol. 199, no. 2, pp. 187–196.
17. *Sauer R.A., Li S.* A contact mechanics model for quasi-continua // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2007, vol. 71, no. 8, pp. 931–962.
18. *He L.H.* Stress and deformation in soft elastic bodies due to intermolecular forces // *J. Mech. Phys. Solids*, 2013, vol. 61, no. 6, pp.1377–1390.
19. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces (a refined formulation) // *JAMM*, 2013, vol. 77, no. 6, pp. 629–641.
20. *Dolgov N.A., Romashin S.N., Frolenkova L.Yu., Shorkin V.S.* A model of contact of elastic bodies with account for their adhesion // *Int. J. Nanomech. Sci.&Tech.*, 2015, vol. 6, no. 2, pp. 117–133.
21. *Jagota A., Argento C.* An intersurface stress tensor // *J. Colloid Interface Sci.*, 1997, vol. 191, no. 2, pp. 326–336.
22. *Argento C., Jagota A., Carter W.C.* Surface formulation for molecular interactions of macroscopic bodies // *J. Mech. Phys. Solids*, 1997, vol. 45, no. 7, pp. 1161–1183.
23. *Wu J.-J.* The Jump-to-contact distance in atomic force microscopy measurement // *J. of Adhesion*, 2010, vol. 86, no. 11, pp. 1071–1085.
24. *Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu.* Adhesive interaction of elastic bodies // *JAMM*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 273–282.
25. *Kesari H., Lew A.J.* Effective macroscopic adhesive contact behavior induced by small surface roughness // *J. Mech. Phys. Solids*, 2011, vol. 59, pp. 2488–2510.
26. *Ciavarella M., Greenwood J.A., Barber J.R.* Effect of Tabor parameter on hysteresis losses during adhesive contact // *J. Mech. Phys. Solids*, 2017, vol. 98, pp. 236–244.
27. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction forces for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Calculation of the stress-strain state and energy dissipation // *Mech. of Solids*, 2020, vol. 55, no. 7, pp. 159–174.
28. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interactions for a viscoelastic layer (self-consistent approach): feature analysis of the indenter approach/retract process // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1259–1276.
29. *Soldatenkov I.A.* Contact with intermolecular interaction for a viscoelastic layer (self-consistent approach): Energy dissipation under indentation and friction force // *Mech. of Solids*, 2022, vol. 57, no. 7, pp. 1701–1716.
30. *Churaev N.V., Derjaguin B.V., Muller V.M.* *Surface Forces*. N.Y.: Springer, 1987.

31. Handbook of Micro/Nanotribology / Ed. by *Bhushan B.* Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
32. *Israelachvili J.N.* Intermolecular and Surface Forces. London: Academic, 2011.
33. *Kaplan I.G.* Intermolecular Interactions: Physical Picture, Computational Methods and Model Potentials. Chichester: Wiley, 2006.
34. *Soldatenkov I.A.* The contact problem with the bulk application of intermolecular interaction forces: distinctive features of the subsurface stresses // JAMM, 2016, vol. 80, no. 6, pp. 518–526.
35. *Christensen R.M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. N.Y.: Acad. Press, 1971.
36. *Ogibalov P.M., Lomakin V.A., Kishkin B.P.* Mechanics of Polymers. Moscow: MSU Pub., 1975. (in Russian)
37. *Adamov A.A., Matveenko V.P., Trufanov N.A., Shardakov I.N.* Methods of Applied Viscoelasticity. Ekaterinburg: Ural Branch RAS, 2003. (in Russian)
38. *Fikhtengolts G.M.* Course of Differential and Integral Calculus. Vol. 3. Moscow: Fizmatlit, 2003. (in Russian)
39. *Takahashi K., Onzawa T.* Effect of the stiffness of the measurement system on adhesion force curves in the elastic continuum limit // J. Adhesion Sci. Technol., 1996, vol. 10, no. 1, pp. 17–31.
40. *Johnson K.L.* Mechanics of adhesion // Tribol. Int., 1998, vol. 31, no. 8, pp. 413–418.
41. *Rabotnov Yu.N.* Elements of Hereditary Solid Mechanics. Moscow: Mir, 1980.
42. *Soldatenkov I.A.* Calculation of the deformation component of the force of friction for a standard elastoviscous base // J. Friction&Wear, 2008, vol. 29, no. 1, pp. 7–14.