

УДК 532.5+537.2

К РАСЧЕТУ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

© 2024 г. Д. Ф. Белоножко^{1,*}¹Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

*e-mail: belonozhko@mail.ru

Поступила в редакцию 12.02.2024 г.

После доработки 17.04.2024 г.

Принята к публикации 13.05.2024 г.

Аналитически рассчитаны условия развития неустойчивости заряженной поверхности стратифицированной жидкости по отношению к избытку поверхностного заряда. Сформулировано правило отбора корней дисперсионного уравнения для правильного описания спектра волновых движений на свободной поверхности.

Ключевые слова: заряженная поверхность, стратифицированная жидкость, неустойчивость, капиллярные силы

DOI: 10.31857/S0032823524030035 ZAZUUD

1. Введение. В последние годы отмечается всплеск интереса к теоретическим исследованиям течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью [1–5]. Даже для хорошо известных классических задач введение в модель феномена стратификации оказывается удивительно продуктивным: обнаруживаются пропущенные прежде структурные компоненты течений [1–2], раскрываются новые черты уже известных решений [3–5].

В настоящей работе эффект стратификации добавляется в классическую модель неустойчивости поверхности проводящей жидкости, вызванной избытком поверхностного электрического заряда [7, 8]. Классическое представление о механизме этого явления сформировалось еще в первой половине прошлого столетия. Один теоретический подход был реализован американцем Л. Тонксом [6], а другой – советским физиком Я.И. Френкелем [7]. На практике неустойчивость Тонкса–Френкеля приводит к разрушению закритически заряженной свободной поверхности жидкости [8]: за счет преобладания электрических пондеромоторных сил над лапласовскими на ней образуются конусообразные выступы – конусы Тейлора – с которых происходит сброс избыточного заряда, часто в виде струйки, дробящейся на больше количество маленьких сильно заряженных капелек [9, 10].

Использованная Я.И. Френкелем методика расчета критического значения поверхностной плотности электрического заряда, превышение которой запускает процесс развития неустойчивости, является результатом анализа спектра малых волновых возмущений заряженной свободной поверхности жидкости. Соответствующая схема решения в рамках простейшей модели разбирается в восьмом томе курса теоретического физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица в виде упражнения к пятому па-

паграфу первой главы [11]. Демонстрируемый подход успешно справляется и с более сложными моделями явления (см. [12, 13] и ссылки там).

В нижеследующем изложении разбирается один любопытный пример обобщения задачи Я.И. Френкеля [7] – рассматривается поверхность заряженной проводящая жидкость со стратификацией плотности по глубине. В этом случае формальное использование традиционного подхода [7, 11] приводит к набору решений, нуждающихся в сортировке на физически достоверные и ложные. В дальнейшем изложении демонстрируется логика отбора нужных решений и, как результат, корректное описание спектра малых волновых возмущений заряженной свободной поверхности стратифицированной жидкости. Выявление неустойчивых компонент спектра, как и в классической задаче, позволяет четко сформулировать условия развития неустойчивости.

2. Математическая формулировка задачи. Пусть идеальная, идеально проводящая жидкость в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ заполняет слой $-d < z < 0$. Ось Oz ориентирована вертикально вверх против направления действия поля силы тяжести $\mathbf{g}$. По свободной горизонтальной жидкости равномерно распределен электрический заряд с постоянной поверхностной плотностью σ_0 , индуцированной вертикальным однородным электрическим полем с напряженностью $E_0 = 4\pi\sigma_0$. Коэффициент поверхностного натяжения жидкости равен γ . Плотность жидкости линейно растет с глубиной $\rho = \rho_s(1 - Rz)$ (ρ_s – значение плотности на поверхности, $R = (\rho_d - \rho_s)/(\rho_s d)$, ρ_d – плотность на дне). Эффектами вязкости, диффузии и теплопроводности пренебрегалось. Описанное равновесное состояние системы исследовалось на устойчивость к малым волновым возмущениям $z = \xi(t, x)$ свободной поверхности. Для простоты, возмущенное движение жидкости считалось независимым от второй горизонтальной координаты y .

Полная математическая формулировка задачи расчета гидродинамического поля скоростей $\mathbf{U} = u(x, z, t)\mathbf{e}_x + v(x, z, t)\mathbf{e}_z$ в жидкости и электрического потенциала $\Phi \equiv \Phi(x, z, t)$ над ней имеет вид:

$$\begin{aligned} z > \xi : \Delta\Phi &= 0 \\ z < \xi : \rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} &= -\nabla P - \rho\mathbf{g} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}) &= 0 \\ z = \xi : \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x}u &= v, \quad P + P_E + P_\gamma = 0, \quad \Phi = \text{const} \\ z \rightarrow \infty : \Phi \rightarrow -E_0 z; \quad z = -d : v &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $u \equiv u(x, z, t)$ и $v \equiv v(x, z, t)$ – горизонтальная и вертикальная компоненты поля скоростей в жидкости; $\nabla \equiv \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_z \partial_z$, $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{zz}$ – двумерные дифференциальные операторы Гамильтона и Лапласа; $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_z$ – орты координатных осей. В условии баланса давлений на свободной поверхности помимо гидродинамического давления P учтены: давление электрических поперечных сил $P_E \equiv (\nabla\Phi)^2/(8\pi)$ [11] и лапласовское давление $P_\gamma \equiv -\gamma \nabla \cdot \mathbf{n}$ [15, 16] ($\mathbf{n}$ – единичная внешняя нормаль к искаженной свободной поверхности).

Задача решалась в линейном приближении по малому параметру, равному отношению амплитуды простейшего периодического волнового искажения свободной поверхности к его характерной горизонтальной длине [17]. Далее для краткости этот малый параметр называется просто малой амплитудой. Все величины разлагались на компоненты нулевого (значение в равновесном состоянии) и первого по малой амплитуде порядков малости (возмущений). В частности, плотность представлялась выражением $\rho = \rho_s(1 - Rz + s)$, где $s = s(x, z, t)$ – деленная на ρ_s компонента первого порядка малости. Кроме того, использовалось приближение Буссинеска [14],

подразумевающее игнорирование отклонения плотности от среднего значения $\rho_* = (\rho_s + \rho_d)/2$ всюду, кроме массовых сил.

В нулевом приближении равновесные распределения плотности, давления и электрического потенциала описываются соотношениями:

$$z < 0 : \rho_0 = \rho_s(1 - Rz), P_0 = -\rho_s g z \left(1 - R \frac{z}{2}\right) - 2\pi\sigma_0^2$$

$$z > 0 : \Phi_0 = -4\pi\sigma_0 z = -E_0 z$$

На возмущенной поверхности $z = \xi(t, x)$ давление с требуемой точностью выражалось через свои значения и значения производной по z , вычисленные при $z = 0$:

$$\begin{aligned} P|_{z=\xi} &= P|_{z=0} + \xi \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{z=0} + \dots \approx (P_0 + p)|_{z=0} + \xi \left(\frac{\partial (P_0 + p)}{\partial z} \right)_{z=0} = \\ &= P_0|_{z=0} + p|_{z=0} - \rho_s g \xi \end{aligned}$$

Здесь $p \equiv p(t, x, z)$ – возмущение равновесного распределения давления P_0 , вызванное волновым искажением свободной поверхности. Аналогично выражался электрический потенциал на возмущенной поверхности.

Математическая формулировка определения величин первого по амплитуде волнового возмущения порядка малости имеет вид:

$$z > 0 : \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.2)$$

$$z < 0 : \rho_* \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \rho_* \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 s g = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

$$z = 0 : \frac{\partial \xi}{\partial t} = v, \quad -\rho_s \xi g + p - E_0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \Phi - E_0 \xi = 0 \quad (2.5)$$

$$z \rightarrow \infty : \frac{\partial \Phi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \rightarrow 0; \quad z = -d : v = 0 \quad (2.6)$$

Теперь $u \equiv u(t, x, z)$ и $v \equiv v(t, x, z)$ – значения горизонтальной и вертикальной компонент поля скоростей в первом приближении по малой амплитуде; $\Phi \equiv \Phi(t, x, z)$ – возмущение равновесного электрического потенциала Φ_0 в полупространстве над проводящей жидкостью.

Система из трех уравнений (2.3), (2.4) устанавливает взаимосвязь четырех неизвестных функций $u \equiv u(t, x, z)$, $v \equiv v(t, x, z)$, $p \equiv p(t, x, z)$ и $s \equiv s(t, x, z)$. Необходимо еще одно связующее соотношение. Принималось во внимание, что уравнение (2.4) совместно с уравнением неразрывности (см. уравнение непосредственно слева от символа нумерации (2.1)), не только при постоянной плотности, но и при условии, когда выполняется соотношение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \rho = 0 \quad (2.7)$$

Поэтому, не вступая в противоречие с логикой приближения Буссинеска, использовалось дополнительное уравнение для $s \equiv s(t, x, z)$ и $v \equiv v(t, x, z)$ непосредственно следующее из (2.7):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial (-Rz)}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

3. Построение дисперсионного уравнения задачи. Исследовалась устойчивость равновесного состояния по отношению к периодическим волновым возмущениям свободной поверхности с частотой ω и волновым числом k [18, 19]:

$$\xi = H \exp(i\theta) \quad (3.1)$$

$$\theta = kx - \omega t \quad (3.2)$$

В связи с (3.1), остальные неизвестные задачи (2.2)–(2.4), (2.8) удовлетворяющие граничным условиям (2.5) и (2.6), искались в виде:

$$\varphi = F \exp(-kz) \exp(i\theta)$$

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + a_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ v &= (b_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + b_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ p &= (A_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + A_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ s &= (B_1 \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B_2 \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для установления связи между константами $a_i, b_i, A_i, B_i; i = 1, 2$ и определения параметра λ , необходимо подставить (3.3) в уравнения (2.3)–(2.4), (2.8) и рассмотреть условия разрешимости получившихся уравнений. В результате, выясняется что выражения (3.3) могут быть переписаны в виде:

$$\varphi = F \exp(-kz) \exp(i\theta)$$

$$\begin{aligned} u &= (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ v &= -\frac{ik}{\lambda} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ p &= \frac{\rho_s \omega}{k} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \\ s &= \frac{kR}{\lambda \omega} (A \operatorname{ch}(\lambda(z+d)) + B \operatorname{sh}(\lambda(z+d))) \exp(i\theta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\lambda^2 = k^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2} \right) \quad (3.6)$$

$$N = \sqrt{gR} = \sqrt{g \frac{\rho_d - \rho_s}{\rho_s d}} \quad (3.7)$$

Связь между значениями констант H, F, A, B определяется из граничных условий (2.5), в которые следует подставить соотношения (3.1) и (3.4). В результате получится система однородных линейных уравнений относительно H, F, A, B . Условие ее нетривиальной разрешимости – обращение в ноль определителя – приводит к связи k, ω и других параметров задачи – дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 = k \eta \omega_s^2 \frac{\operatorname{th}(\lambda d)}{\lambda} \quad (3.8)$$

$$\omega_s^2 = gk(1 + (\alpha_s k)^2 - \alpha_s k W) \quad (3.9)$$

$$\alpha_s = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho_s g}}, \quad W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\gamma\rho_s g}} = \frac{4\pi\sigma_0^2}{\sqrt{\gamma\rho_s g}}, \quad \eta = \frac{\rho_s}{\rho_*} \quad (3.10)$$

Параметр α_s имеет смысл капиллярной постоянной жидкости, обладающей постоянной плотностью ρ_s и постоянным коэффициентом поверхностного натяжения γ . Безразмерный параметр W называется параметр Тонкса–Френкеля. Он пропорционален отношению электрических и капиллярных сил на гребнях волновых искажений свободной поверхности жидкости. Соотношение (3.9) – классическое дисперсионное уравнение, полученное Я.И. Френкелем [7] и цитируемое в монографии [11]. Оно описывает спектр частот ω_s периодических капиллярно-гравитационных волн, распространяющихся по электрически заряженной поверхности идеально проводящей жидкости с постоянной плотностью ρ_s .

Будем работать в приближении, когда слой жидкости настолько глубок, что с учетом нечетности гиперболического тангенса, независимо от выбора знака иррациональности $\lambda = \pm k\sqrt{1 - N^2/\omega^2}$ можно положить

$$\frac{\text{th}(\lambda d)}{\lambda} \rightarrow \frac{1}{|\lambda|}$$

В таком пределе дисперсионное уравнение упрощается:

$$\omega^2 |\lambda| = k\eta\omega_s^2 \quad (3.11)$$

4. Решение дисперсионного уравнения. Дисперсионное соотношение (3.11), как уравнение относительно ω , содержит иррациональность

$$\lambda = k\sqrt{1 - \frac{N^2}{\omega^2}}$$

От нее несложно избавиться, возведя обе части (3.11) в квадрат. Получится квадратное уравнение относительно ω^2 с корнями:

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(N^2 + \sqrt{N^4 + 4\eta^2\omega_s^4}) \quad (4.1)$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}(N^2 - \sqrt{N^4 + 4\eta^2\omega_s^4}) \quad (4.2)$$

Для однозначности результата вычислений по формулам (4.1) и (4.2) нужно определиться с правилом вычисления квадратного корня. Без потери общности удобно выбирать в качестве результата положительное значение корня и говорить о двух аналитических ветвях (4.1), (4.2) формального решения дисперсионного уравнения [20].

На этапе возведения в квадрат в уравнении могут возникнуть ложные корни. Поэтому важно проверить адекватность полученных соотношений.

В пределе отсутствия стратификации $N^2 \rightarrow 0$ выражение (4.2) дает отрицательное значение квадрата частоты $\omega_2^2 < 0$. Сама частота получается комплексной, а ее модуль описывает инкремент нарастания во времени амплитуды любого сколь угодно малого волнового возмущения (3.1). Получается, что даже при отсутствии поверхностного электрического заряда – главного дестабилизирующего фактора – плоская свободная поверхность покоящейся жидкости должна покрываться некими искажениями, возникшими в результате эволюции малых начальных возмущений. Ясно, что формула (4.2) неадекватна наблюдаемой физической ситуации.

Можно предположить, что (4.2) необходимо объявить физически нереализуемым корнем, а в качестве решения дисперсионного уравнения оставить ветвь (4.1). Но и тогда возникает противоречие. Из (4.1) видно, что квадрат частоты положителен при всех возможных значениях поверхностной плотности электрического заряда σ_0 , регулируемой посредством изменения значений положительного безразмерного параметра Тонкса—Фрекеля W (см. (3.10)). Даже при больших значениях поверхностной плотности электрического заряда, когда электрические пондеромоторные силы превалируют над капиллярными и, по физическим соображениям, дестабилизация равновесного состояния неизбежна, система формально остается устойчивой. Результат снова выглядит сомнительно.

Ясно, что для решения вопроса об отборе верных решений и отбрасывании ложных требуется более скрупулезный анализ. Начать его логично с еще не возведенного обеими частями в квадрат соотношения (3.11). Из $k, \eta > 0$ немедленно следует, что знаки ω^2 и ω_s^2 обязаны совпадать.

При $W = 0$ поверхностный электрический заряд отсутствует, и, в соответствии с (3.9), выполняется неравенство $\omega_s^2 > 0$. Чтобы значение ω^2 тоже оказалась положительным, из двух альтернатив (4.1) или (4.2) однозначно выбирается формула (4.1). По той же причине формула (4.1) будет справедлива и при увеличении W , лишь бы выражение в скобках в правой части (3.9) оставалось положительным. Легко установить, что это имеет место при всех $0 \leq W < W_k^0$, где $W_k^0 = \alpha_s k + (\alpha_s k)^{-1}$ — значение параметра Тонкса—Френкеля, при котором правая часть (3.9) обнуляется. При $W > W_k^0$ значение ω_s^2 становится отрицательным. Теперь чтобы знаки ω_s^2 и ω^2 совпадали, однозначно выбирается формула (4.2). Таким образом, каждое из формально найденных решений (4.1) и (4.2) оказываются верными при одних значениях W и ложным при других. Значение $W_k^0 = \alpha_s k + (\alpha_s k)^{-1}$ отмечает точку разрыва, в которой при увеличении параметра W затухающее с глубиной решение совершает скачек с одной ветви формального решения (4.1) на другую (4.2). Остальные части ветвей (4.1) и (4.2) описывают ложные решения.

Несложно выразить описанное “переключение” решения с одной аналитической ветви (4.1) на другую (4.2) объединенной формулой:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(N^2 + \operatorname{sgn}(\omega_s^2) \sqrt{N^4 + 4\eta^2 \omega_s^4} \right) \quad (4.3)$$

Критерием перехода рассматриваемой системы в неустойчивое состояние является выход значений параметра ω^2 в отрицательную область [18, 19]. Волновые возмущения, для которых $\omega^2 < 0$ образуют спектр неустойчивых волновых мод, участвующих в развитии неустойчивости. При чем, значения ω^2 отрицательны или положительны совместно со значениями ω_s^2 , в независимости от параметра $\eta = \rho_s/\rho_*$ — отношения плотности жидкости на поверхности к плотности, усредненной по глубине слоя. Из (3.9) легко установить условия, при которых $\omega_s^2 < 0$:

$$W > W_k^0 = \frac{1}{\alpha_s k} + \alpha_s k \quad (4.4)$$

Правая часть (4.4) достигает минимума $W = 2$ при $\alpha_s k = 1$. Если $W < 2$, то $\omega_s^2 > 0$, и спектр всевозможных волновых движений (4.3) не содержит никаких неустойчивых мод. При $W > 2$ существует целый диапазон неустойчивых волновых чисел, участвующих в развитии неустойчивости (для которых $\omega^2 < 0$ и $\omega_s^2 < 0$):

$$W > 2: \frac{W - \sqrt{W^2 - 4}}{2} < \alpha_s k < \frac{W + \sqrt{W^2 - 4}}{2}$$

Возмущение с волновым числом $\alpha_s k = 1$ интерпретируется, как наиболее неустойчивая волновая мода. Для нее пороговое значение поверхностной плотности

заряда, превышение которого обеспечивает преобладание электрических сил над лапласовскими, является минимальным.

Полученный результат формально совпадает с классическими условиями реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля. Единственным отличием является использование в формулах (3.10) для параметра Тонкса—Френкеля и капиллярной постоянной не просто плотности жидкости, а плотности ρ_s на ее поверхности.

Заключение. Условия, при которых поверхностный электрический заряд инициирует развитие неустойчивости горизонтальной поверхности стратифицированной жидкости формулируется также, как условия классической неустойчивости Тонкса—Френкеля, но с заменой постоянной плотности жидкости на ее значение на поверхности жидкости. При установлении этих условий принципиально важно корректно отбирать физически значимые корни дисперсионного уравнения, описывающего спектр реализующихся в системе капиллярно-волновых движений. Рассмотренная модель представляет собой показательный пример задачи, в которой физически значимые корни дисперсионного уравнения описываются с помощью кусочно-непрерывной зависимости, составленной из разных аналитических ветвей формального решения дисперсионного уравнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A. Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*. 2022. V. 11. №8. P. 402.
2. Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А. Расчет двумерных периодических возмущений свободной поверхности жидкости в различных моделях среды // *Докл. РАН*. 2023. Т. 513. С. 95–102.
3. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Двумерные периодические волны в невязкой непрерывно стратифицированной жидкости // *Изв. РАН. ФАО*. 2022. Т. 58. №5. С. 524–533.
4. Макаренко Н.И., Мальцева Ж.Л., Черевко А.А. Уединенные волны в двухслойной жидкости с кусочно-экспоненциальной стратификацией // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 186–199.
5. Чашечкин Ю.Д., Очиров А.А., Лапина К.Ю. Поверхностные волны вдоль границы раздела устойчиво стратифицированных жидких сред // *Физ.-хим. кин. в газовой дин*. 2022. Т. 23. №6.
<http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
6. Tonks L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Phys. Rev*. 1935. V. 48. №6. P. 562.
7. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // *ЖЭТФ*. 1936. Т. 6. №. 4. С. 347–350.
8. Taylor G.I., McEwan A.D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // *J. of Fluid Mech*. 1965. V. 22. №1. P. 1–15.
9. Fernández de La Mora J. The fluid dynamics of Taylor cones // *Annu. Rev. Fluid Mech*. 2007. V. 39. P. 217–243
10. Zhang X., Xie L., Wang X., Shao Z., Kong B. Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single-to multi-Taylor cone sites // *Appl. Mater. Today*. 2022. V. 26. С. 101272.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 тт. Т. 8. Электродинамика сплошных сред / под ред. Пятаевского Л.П. М.: Наука, 2023. 656 с.
12. Очиров А.А., Чашечкин Ю.Д. Волновое движение в вязкой однородной жидкости с поверхностным электрическим зарядом // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 379–391.
13. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромылов В.А. О некоторых закономерностях реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости в бассейне конечных размеров // *ПММ*. 2023. Т. 87. Вып. 3. С. 392–408.
14. Vallis G.K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge: Univ. Press, 2017. 995 p.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М: Мир, 1989. 357 с.
17. Le Méhauté B. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves*. Berlin: Springer, 1976. 323 p.

18. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961. 654 p.
19. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2002. V. 32. 258 p.
20. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексной переменной. М.: Наука, 1987. 544 с.

To the Charged Surface Instability Calculation of a Stratified Fluid

D. F. Belonozhko^{a,*}

^a*P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*

^{*}*e-mail: belonozhko@mail.ru*

The conditions for the development of instability of the charged surface of a stratified fluid in relation to an overload of surface charge are calculated analytically. A rule for selecting the roots of the dispersion equation is formulated to correctly describe the spectrum of wave motions on the free surface.

Keywords: charged surface; stratified liquid; instability; capillary forces

REFERENCES

1. *Chashechkin Yu.D., Ochirov A.A.* Periodic waves and ligaments on the surface of a viscous exponentially stratified fluid in a uniform gravity field // *Axioms*, 2022, vol. 11, no. 8, pp. 402.
2. *Chashechkin Y.D., Ochirov A.A.* Free-surface two-dimensional periodic disturbances in various models of fluid // *Dokl. RAN*, 2023, vol. 513, no. 1, pp. 95–102.
3. *Ochirov A.A., Chashechkin Y.D.* Two-dimensional periodic waves in an inviscid continuously stratified fluid // *Izv. RAN. Atmos.&Oceanic Phys.*, 2022, vol. 58, no. 5, pp. 450–458.
4. *Makarenko N.I., Maltseva J.L., Cherevko A.A.* Solitary waves in a two-layer fluid with piecewise exponential stratification // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1235–1245.
5. *Chashechkin Y., Ochirov A., Lapshina K.Y.* Surface waves along the interface of stably stratified liquids // *Phys.-Chem. Kin. in Gas Dyn.*, 2022, vol. 23, iss. 6. <http://chemphys.edu.ru/issues/2022-23-6/articles/1028/>
6. *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // *Phys. Rev.*, 1935, vol. 48, no. 6, pp. 562.
7. *Frenkel Y.I.* On Tonks' theory of fluid surface breakup by a constant electric field in a vacuum // *Zh. Exp. Teor. Fiz.*, 1936, vol. 6, no. 4, pp. 347–350.
8. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // *J. of Fluid Mech.*, 1965, vol. 22, no. 1, pp. 1–15.
9. *Fernández de La Mora J.* The fluid dynamics of Taylor cones // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2007, vol. 39, pp. 217–243.
10. *Zhang X., Xie L., Wang X., Shao Z., Kong B.* Electrospinning super-assembly of ultrathin fibers from single-to multi-Taylor cone sites // *Appl. Mater. Today*, 2022, vol. 26, pp. 101272.
11. *Landau L.D., Lifschitz E.M., Pitaevskii L.P.* Electrodynamics of Continuous Media: Course of Theoretical Physics. Vol. 8. Elsevier Sci., 1995. 460 p.
12. *Ochirov A.A., Chashechkin Y.D.* Wave motion in a viscous homogeneous fluid with a surface electric charge // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1318–1327.
13. *Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O., Koromyslov V.A.* On some regularities in the implementation of the electrostatic instability of a charged liquid surface in a pool of finite dimensions // *Fluid Dyn.*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 1328–1340.
14. *Vallis G.K.* Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Cambridge: Univ. Press, 2017. 995 p.
15. *Landau L.D., Lifschitz E.M.* Fluid Mechanics. Course of Theoretical Physics. Vol. 6. Pergamon, 1987. 539 p.
16. *Rosensweig R.E.* Ferrohydrodynamics. Courier Corp., 2013. 368 p.
17. *Le Méhauté B.* An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves. Berlin: Springer, 1976. 323 p.

-
18. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon, 1961. 654 p.
 19. *Drazin P.G.* Introduction to Hydrodynamic Stability. Cambridge: Univ. Press, 2002. vol. 32, 258 p.
 20. *Lavrentev M.A., Shabat B.V.* Methods of the Theory of Function of Complex Variable. Moscow: Nauka, 1987, 544 p. (in Russian)