

УДК 521.1, 629

РЕГУЛЯРНЫЕ КВАТЕРНИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ХИЛЛА В ПЕРЕМЕННЫХ КУСТААНХЕЙМО–ШТИФЕЛЯ И КВАТЕРНИОННЫХ ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ

© 2024 г. Ю. Н. Челноков*

*Институт проблем точной механики и управления РАН, Саратов, Россия***e-mail: chelnokovyun@gmail.com*

Поступила в редакцию 17.01.2024 г.

После доработки 28.05.2024 г.

Принята к публикации 10.06.2024 г.

Получены регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (варианта ограниченной задачи трех тел (Солнце, Земля, Луна (или другое изучаемое движущееся космическое тело с малой массой)), когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим, в четырехмерных переменных Кустаанхеймо–Штифеля (KS -переменных) в рамках эллиптической и круговой пространственной ограниченной задачи трех тел, а также регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита. В этих уравнениях в качестве переменных выступают KS -переменные или переменные Леви-Чивита и энергия относительного движения изучаемого тела или переменная, обращающаяся для круговой задачи Хилла в константу движения этого тела (постоянную интегрирования Якоби), а также планетоцентрическое расстояние Солнца и реальное время, связанное с новой независимой переменной дифференциальным преобразованием времени Зундмана или другим более сложным дифференциальным соотношением. Эти уравнения дополнены уравнением орбиты Земли в полярных координатах и уравнением для истинной аномалии, характеризующей положение Земли на орбите. Установлен первый интеграл полученных уравнений в KS -переменных в случае круговой задачи. Другим первым частным интегралом в общем случае является билинейное соотношение, связывающее KS -переменные и их первые производные. Предложены три новые формы регулярных уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных). Предложенные регулярные кватернионные уравнения имеют осцилляторный вид или вид уравнений с медленно изменяющимися переменными, что позволяет эффективно использовать при исследовании задачи Хилла аналитические и численные методы теории колебаний и методы нелинейной механики.

Ключевые слова: пространственная и плоская задачи Хилла, регулярные кватернионные уравнения, переменные Кустаанхеймо–Штифеля и Леви-Чивита, круговая и эллиптическая задачи, энергия относительного движения, интеграл Якоби, кватернионные оскулирующие элементы

DOI: 10.31857/S0032823524030022 ZBBOLD

1. Введение. В основе небесной механики и астродинамики (механики космического полета) лежат ньютоновские дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел и возмущенной пространственной ограниченной задачи трех

тел в декартовых (прямоугольных) координатах [1–4]. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел вырождаются при соударении второго (изучаемого) тела с первым (центральный) телом (при равенстве нулю расстояния между телами), что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения второго тела в малой окрестности центрального тела или его движения по сильно вытянутым орбитам. Сингулярность в начале координат создает в задаче двух тел в этих случаях не только теоретические, но и практические (вычислительные) трудности. Ньютоновские уравнения возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел вырождаются при соударении изучаемого тела (тела с пренебрежимо малой массой) с одним из двух других тел, имеющих конечные массы, что делает использование этих уравнений неудобным при изучении движения тела с малой массой в окрестности первого или второго гравитирующего тела и также создает не только теоретические, но и вычислительные трудности в ограниченной задаче трех тел в этих случаях.

Устранение особенностей типа сингулярности (деления на ноль) классических (ньютоновских) уравнений небесной механики и астродинамики, порождаемых силами гравитации, получило название “регуляризация” (Леви-Чивита), а уравнения, не имеющие этих особенностей, называются регулярными.

Проблема регуляризации уравнений задачи двух тел, восходит к Эйлеру и Леви-Чивита, которые дали решения одномерной и двумерной задачам о соударении двух тел (в случаях прямолинейного и плоского движений). Наиболее эффективная регуляризация дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (спиновая или матричная, или каноническая KS -регуляризация) была предложена Кустаанхеймо и Штифелем. Она представляет собой обобщение регуляризации Леви-Чивита уравнений плоского движения и наиболее полно изложена в широко цитируемой монографии [5].

Отметим основные хорошо известные достоинства уравнений Кустаанхеймо–Штифеля. Они, в отличие от ньютоновских уравнений:

- регулярны в центре притяжения;
- линейны для невозмущенных кеплеровских движений (для эллиптического кеплеровского движения, когда полная энергия в задаче Кеплера постоянна и меньше нуля эти уравнения в KS -переменных эквивалентны уравнениям движения четырехмерного одночастотного гармонического осциллятора в новом времени (квадрат частоты этого осциллятора равен половине этой полной энергии, взятой со знаком минус));
- позволяют выработать единый подход к изучению всех трех типов кеплеровского движения;
- близки к линейным уравнениям для возмущенных кеплеровских движений;
- позволяют представить правые части дифференциальных уравнений движения небесных и космических тел в полиномиальной форме, удобной для их решения с помощью ЭВМ.

Эти обстоятельства позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Так, во многих работах, например, в [5–11], показано, что использование регулярных уравнений в KS -переменных позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики от двух до семи порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании ньютоновских уравнений. Это во многом связано со структурой регулярных уравнений и их замечательными свойствами линейности для невозмущенных кеплеровских движений.

Исследование возмущенного кеплеровского движения проводится в книге [5] не только с использованием регулярных уравнений в осцилляторной форме (с исполь-

зованием в качестве переменных четырехмерных специальных квадратных матриц (KS -матриц, введенных Штифелем)) и методов теории колебаний, но также с использованием регулярных уравнений в канонической форме, для чего ими разработана теория канонического KS -преобразования. Такой канонический подход к проблеме регуляризации, использующий KS -преобразование, развит в работах [12–14] и широко используется в настоящее время.

Среди методов регуляризации и регулярных моделей небесной механики и астродинамики в последнее время широкое распространение получили кватернионные методы и модели, основанные на использовании четырехмерных гиперкомплексных переменных — кватернионов Гамильтона, компонентами (элементами) которых являются четырехмерные KS -переменные [5]. Эти методы и модели имеют ряд преимуществ аналитического и вычислительного характера перед другими методами и моделями.

В работах автора статьи [15, 16] показано, что кватернионный подход к регуляризации позволяет:

- дать прямой и наглядный вывод регулярных уравнений в KS -переменных (что ставилось Штифелем и Шейфеле под сомнение [5] из-за неоднозначности KS -преобразования),

- дать наглядные геометрическую и кинематическую интерпретации регуляризирующему KS преобразованию,

- раскрыть геометрический смысл его неоднозначности,

- получить более общие регулярные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел, частным случаем которых являются регулярные уравнения Кустаанхеймо–Штифеля,

- использовать при решении проблем регуляризации удобный аппарат кватернионов, имеющий наглядность векторного исчисления.

Изучению различных аспектов кватернионной регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел с использованием четырехмерных KS -переменных посвящены многие работы зарубежных авторов, а также работы автора статьи. Среди зарубежных работ отметим статьи Вальдфогеля [17, 18], который утверждает [18], что “кватернионы для регуляризации небесной механики — верный (правильный) путь” и что кватернионы “являются идеальным инструментом для описания и разработки теории пространственной регуляризации в небесной механике”.

Обзоры работ, посвященных кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, с различной степенью детализации даны в статьях [19–21].

KS -переменные и кватернионы были эффективно использованы также для регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи трех тел (в неограниченном и ограниченном вариантах) [22–26]. История регуляризации задачи трех тел начинается со знаменитых работ Пуанкаре и Зундмана. В работах [22, 23] с использованием канонического формализма Гамильтона и двух KS -преобразований предложена регуляризация уравнений возмущенной пространственной неограниченной задачи трех тел. Приведенная в этих работах восьмимерная регуляризация общей задачи трех тел, основанная на двойной KS -регуляризации, обладает следующими свойствами: 1) уравнения движения являются регулярными при столкновении двух тел; 2) уравнения движения хорошо решаются для случаев, близких к тройным столкновениям.

В книге [6] двойное KS -преобразование предлагается использовать для построения канонических уравнений возмущенной ограниченной задачи трех тел (со ссылкой на регуляризирующие алгоритмы, полученные Арсезом, Заре и Хегги). В работах автора статьи [24–26] разработан кватернионный метод регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех

тел, методологически тесно связанный с кватернионным методом регуляризации дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных, предложенным ранее [15, 16].

Отметим, что неограниченная и ограниченная задачи трех тел имеют существенное различие. Если в невозмущенной неограниченной задаче трех тел существует интеграл энергии, то в невозмущенной ограниченной задаче трех тел такого интеграла не существует. Это затрудняет построение регулярных уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. (Более того, по словам Арсеца и Заре, предложенный в их работе [22] новый метод регуляризации неограниченной задачи трех тел, использующий в качестве одной из дополнительных переменных энергию системы, нельзя использовать для изучения задачи трех тел, в которой одна из частиц не имеет массы, т. е. для изучения ограниченной задачи трех тел.)

В предложенной нами в работах [24–26] кватернионной регуляризации уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел в качестве дополнительной переменной вместо обычно используемой энергии системы используется (в силу выше указанной причины) переменная, являющаяся интегралом Якоби в невозмущенной пространственной ограниченной круговой задаче трех тел (точнее, являющаяся константой движения Якоби в этой задаче). Такой подход используется нами и в настоящей работе при построении регулярных кватернионных уравнений плоской и пространственной задач Хилла.

В работе [12] развивается теория преобразований гамильтоновых систем уравнений, рассматривается проблема канонического увеличения размерности этих систем. Результаты общей теории иллюстрируются выводом основных соотношений в случае регуляризирующего KS -преобразования. Говорится, что общий подход упрощает доказательства и делает более естественными некоторые утверждения, сформулированные для KS -преобразования. В другой работе [13] предложен метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла с использованием четырехмерных KS -переменных. Метод выявления и построения орбит систематическим путем и исследование их устойчивости опирается [14] на вычислительную процедуру. Уравнения задачи Хилла записываются в KS -переменных в канонической (Гамильтоновой) форме. Отмечается [13], что “ KS -переменные существенно используются при вычислениях в анализе. Они позволяют обойти ряд численных и аналитических трудностей, возникающих при рассмотрении орбит, близких к орбите B_0 , которая всегда проходит через особую точку $|x| = 0$ (тело меньшей массы), и сокращают затраты времени ЭВМ на численное интегрирование). ... Характер поведения орбит семейства L_0 , близких к B_0 в окрестности особой точки $|x| = 0$ представляет самостоятельный интерес. Эта задача анализируется в разделе 13”.

Автором настоящей статьи предлагаются новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла в четырехмерных KS -переменных, из которых вытекают, как частные, приводимые в статье регулярные кватернионные дифференциальные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита. Предложены три новые формы регулярных уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных).

2. Уравнения пространственной задачи Хилла в прямоугольных координатах. Задача Хилла [1–4] — это вариант ограниченной эллиптической задачи трех тел, рассматриваемых как материальные точки M_0 , M_1 и M_2 , получаемый из нее, если Солнце (точка M_0) удаляется на большое расстояние таким образом, чтобы оставалось справедливым соотношение (по третьему закону Кеплера [3])

$$n_0^2 a_0^3 = f(m_0 + m_1),$$

где a_0 – большая полуось орбиты Солнца, n_0 – среднее движение Солнца, m_0 и m_1 – массы точек M_0 и M_1 (Солнца и Земли), f – гравитационная постоянная; масса точки $M_2 = M$ (например, Луны или астероида, космического аппарата), движение которой изучается, считается пренебрежимо малой в сравнении с массами точек M_0 и M_1 .

Отметим, что неравномерностью движения Солнца пренебрегается.

В планетоцентрической прямоугольной вращающейся системе координат M_1xyz , ось M_1x которой проходит через Солнце M_0 , уравнения пространственного движения изучаемой точки M имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fm_1 \frac{z}{r^3} + n_0^2 z &= \frac{\partial \Omega}{\partial z},\end{aligned}\quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{1}{2}n_0^2 \left[3\frac{a_0^3}{r_1^3}x^2 - 3x^2 + r^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \right], \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= -2n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) y, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial z} = n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) z,\end{aligned}\quad (2.2)$$

x , y и z – планетоцентрические координаты изучаемой точки, r – планетоцентрическое расстояние этой точки, r_1 – планетоцентрическое расстояние Солнца M_0 .

В рамках круговой пространственной ограниченной задачи трех тел функция $\Omega = 0$ и уравнения (2.1) задачи Хилла принимают вид (2.3) [1, 2]:

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fm_1 \frac{z}{r^3} + n_0^2 z &= 0\end{aligned}\quad (2.3)$$

Уравнения (2.3) имеют интеграл Якоби [1, 2]

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - 2\frac{fm_1}{r} - 3n_0^2 x^2 + n_0^2 z^2 = 2H, \quad (2.4)$$

где H – произвольная постоянная интегрирования.

Уравнения плоского движения изучаемой точки M имеют вид [1, 2]

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x} &= -2n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) x, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial y} = n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) y; \quad r^2 = x^2 + y^2\end{aligned}\quad (2.5)$$

Классические дифференциальные уравнения Хилла [2] являются частным случаем уравнений (2.1), получаются из них при $\Omega = 0$ и $z = 0$ и имеют вид системы двух дифференциальных уравнений (2.6):

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n_0 \frac{dy}{dt} + fm_1 \frac{x}{r^3} - 3n_0^2 x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2n_0 \frac{dx}{dt} + fm_1 \frac{y}{r^3} = 0 \quad (2.6)$$

Эти уравнения положены Хиллом в основу построенной им теории движения Луны [2].

В справочнике по небесной механике и астродинамике [1, Гл. 10] излагается теория движения Луны. Говорится (с. 443) что “Наиболее совершенная с практической точки зрения явилась теория Хилла ... Работы Хилла ... послужили основой для полной теории движения Луны, которая была построена в 1904–1909 гг. Брауном ... С 1960 г. эфемерида Луны для астрономических ежегодников вычисляется непосредственно по тригонометрическим рядам Брауна без помощи его таблиц ... Теория Хилла–Брауна с учетом внесенных в нее поправок наиболее полно учитывает в пределах точности, принятой при вычислениях, гравитационные эффекты в движении Луны. В этой главе мы изложим результаты теории Делоне и теории Хилла–Брауна”.

Если теория Хилла строится на основе уравнений (2.6), то теория Хилла–Брауна строится на основе уравнений, имеющих вид уравнений (2.1), (2.2).

Отметим, что классические уравнения Хилла (2.6) являются предметом многих исследований, например, работы [27, 28]. Также отметим, что рассматриваемые в статье исходные уравнения (2.1), (2.2), называемые в справочнике [1] и в книге [2] уравнениями задачи Хилла, находят многие приложения к конкретным задачам теории движения естественных и искусственных небесных тел (в частности, для построения пространственных периодических орбит [13, 14]).

Уравнения (2.1) движения изучаемой точки M необходимо дополнить уравнением орбиты Земли в полярных координатах r_E и ϑ в инерциальной системе координат с началом в центре масс Солнца, имеющим вид (2.7):

$$r_E = r_1 = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta} \quad (2.7)$$

Это уравнение описывает изменение величины r_1 (планетоцентрического расстояния Солнца M_0 , равного расстоянию r_E Земли от Солнца). В нем $\mu = f(m_0 + m_1)$ – гравитационный параметр, c – константа площадей; ϑ – истинная аномалия, характеризующая положение Земли на орбите; $p_E = c^2/\mu$ и $e_E = f/\mu$ – фокальный параметр и эксцентриситет орбиты Земли.

Уравнение орбиты (2.7) дополняется полярной формой интеграла площадей, записываемой нами в форме дифференциального уравнения (2.8):

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c}{r_E^2} \quad (2.8)$$

3. Регулярные кватернионные уравнения задачи Хилла в KS -переменных и переменных Леви-Чивита

3.1. Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла в KS -переменных, построенные с использованием энергии изучаемой точки. Уравнения задачи Хилла (2.1) и (2.2) могут быть записаны в виде дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел, правые части которых содержат слагаемые (“возмущения”), пропорциональные малой величине n_0 (среднему движению Солнца) или n_0^2 . Поэтому регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла, описываемой в декартовых координатах уравнениями (2.1) и (2.2), в четырехмерных KS -переменных u_j ($j = 0, 3$) [5] имеют вид регулярных кватернионных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел (3.1)–(3.3), полученных автором статьи [16]:

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} = \mathbf{f} = \frac{1}{2} r \mathbf{q}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} \quad (3.1)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = 2 \text{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right) = 2 \left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_1 \frac{du_1}{d\tau} + q_2 \frac{du_2}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \quad (3.2)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_1 \mathbf{i} - u_2 \mathbf{j} - u_3 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{f} = f_0 + f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k},$$

в правых частях которых в рассматриваемом случае (задаче Хилла) фигурируют возмущения p_x , p_y и p_z (проекции вектора возмущающего ускорения $\mathbf{p}$ на оси вращающейся системы координат M_1xyz), определяемые в соответствии с уравнениями (2.1) и (2.2) соотношениями (3.4):

$$\begin{aligned} p_x &= 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2n_0 \frac{dy}{dt} + n_0^2 x + 2n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \\ p_y &= -2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -2n_0 \frac{dx}{dt} + n_0^2 y - n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} y \\ p_z &= -n_0^2 z + \frac{\partial \Omega}{\partial z} = -n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} z \end{aligned} \quad (3.4)$$

В этих соотношениях декартовы координаты x , y , z точки M и проекции

$$v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$$

ее вектора относительной скорости должны быть выражены через KS -переменные u_j и их производные $du_j/d\tau$ с помощью соотношений (3.5) и (3.6):

$$x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad y = 2(u_1 u_2 - u_0 u_3), \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{r} \left(u_0 \frac{du_0}{d\tau} + u_1 \frac{du_1}{d\tau} - u_2 \frac{du_2}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{2}{r} \left(u_1 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_2 - u_0 \frac{du_3}{d\tau} - \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{2}{r} \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Кватернион $\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}$, фигурирующий в основном кватернионном уравнении (3.1), с учетом соотношений (3.4) принимает вид (3.7):

$$\mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r \mathbf{u} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[2n_0 \left(\frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right) + n_0^2 \left(3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \mathbf{i} - z \mathbf{k} \right) \right] \quad (3.7)$$

Здесь и далее $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – векторные мнимые единицы Гамильтона (орты четырехмерного гиперкомплексного пространства).

Фигурирующая в регулярном кватернионном уравнении (3.1) скалярная переменная h определяется соотношениями

$$h = \frac{1}{2} v^2 - \frac{f m_1}{r}, \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \quad (3.8)$$

и удовлетворяет (в исходных переменных) дифференциальному уравнению

$$\frac{dh}{dt} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = p_x v_x + p_y v_y + p_z v_z, \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}, \quad (3.9)$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости относительного движения изучаемой точки M (вектор скорости точки в системе координат M_1xyz).

При $\mathbf{p} = 0$, когда $n_0 = 0$, переменная h является полной энергией точки M . В этом случае $h = h(t_0) = h_0 = \text{const}$.

С использованием KS -переменных энергия h определяется соотношением

$$h = \frac{2}{r} \left[\sum_{j=0}^3 \left(\frac{du_j}{d\tau} \right)^2 - fm_1 \right]; \quad r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.10)$$

При использовании KS -переменных основное регулярное кватернионное дифференциальное уравнение (3.1) дополняется нами скалярными дифференциальными уравнениями (3.2) и (3.3) для энергии h и времени t .

Уравнения (3.1)–(3.3) также необходимо дополнить уравнениями (3.11):

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}, \quad (3.11)$$

которые описывают (в соответствии с уравнениями (2.7), (2.8) и (3.3)) изменение расстояния r_1 , как функции истинной аномалии ϑ , и изменение во “времени” τ истинной аномалии ϑ .

Декартовы координаты x, y, z точки M и проекции v_x, v_y, v_z ее вектора относительной скорости находятся через KS -переменные u_j и их производные $du_j/d\tau$ с помощью скалярных соотношений (3.5) и (3.6) или с помощью кватернионных соотношений (3.12):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \\ \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Замечание. Отметим, что регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел были получены автором статьи в работах [15, 16] в двух различных формах. В [15] эти уравнения были получены в матричной форме с использованием классических кватернионных матриц, а не KS -матриц, введенных Штифелем и Шейфеле и используемых в их теории регуляризации [5]. В [16] эти уравнения были получены в кватернионной форме с использованием кватернионов Гамильтона. Отметим также, что в работах [15, 16] автором статьи были получены более общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел (в сравнении с регулярными уравнениями Кустанхеймо–Штифеля) в предположении, что не выполняется билинейное соотношение Штифеля и Шейфеле

$$u_0 \frac{du_1}{d\tau} - u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_2}{d\tau} + u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0,$$

накладываемое на KS -переменные и их первые производные (это соотношение Штифель и Шейфеле называют основным в своей теории). В частном случае (при выполнении этого билинейного соотношения) полученные автором статьи в работе [16] общие регулярные кватернионные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел принимают вид уравнений (3.1)–(3.3).

Правая часть $\mathbf{f}$ кватернионного дифференциального уравнения (3.1) для четырехмерной переменной $\mathbf{u}$, определяемая соотношениями $\mathbf{f} = (1/2)r\mathbf{q}$ и (3.7), может быть преобразована с учетом соотношения

$$\frac{dy}{dt}\mathbf{i} - \frac{dx}{dt}\mathbf{j} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} \right) \circ \mathbf{k} = \frac{2}{r}\bar{\mathbf{u}} \circ \mathbf{i} \circ \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{r} \frac{dz}{d\tau}$$

к другому, более удобному виду (3.13):

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}n\mathbf{q} = 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \mathbf{u} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0^2 r \left(3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \mathbf{i} - z \mathbf{k} \right) \right], \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \\ x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \end{aligned}$$

В регулярных кватернионных дифференциальных уравнениях (3.1)–(3.3) пространственной задачи Хилла, дополненных уравнениями (3.11) и соотношением (3.13), в качестве зависимых переменных выступают KS -переменные u_j ($j = 0, 3$) (компоненты кватернионной переменной $\mathbf{u}$) и энергия h относительного движения изучаемой точки M , а также планетоцентрическое расстояние Солнца $r_1 = r_E$, реальное время t и истинная аномалия ϑ . В этих уравнениях независимой переменной является “фиктивное” время τ , связанное с временем t дифференциальным уравнением (3.3) (дифференциальным преобразованием времени Зундмана).

В скалярной записи регулярное кватернионное уравнение пространственной задачи Хилла (3.1), дополненное уравнениями (3.11) и соотношением (3.13), принимает вид (3.14) и (3.15):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = f_j; \quad j = 0, 3 \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} f_0 &= n_0 \left(-2r \frac{du_3}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_1 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_0 - z u_2 \right] \\ f_1 &= n_0 \left(2r \frac{du_2}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_0 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_1 - z u_3 \right] \\ f_2 &= n_0 \left(-2r \frac{du_1}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_3 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_2 - z u_0 \right] \\ f_3 &= n_0 \left(2r \frac{du_0}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_2 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right) u_3 - z u_1 \right], \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} r &= u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned}$$

Дифференциальное уравнение (3.2) для энергии h с учетом соотношения (3.7) для кватерниона $\mathbf{q}$ может быть записано в следующем виде:

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2} n_0^2 \left[\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right], \quad (3.16)$$

где расстояние r и координаты x, z определены (как функции переменных u_j) выше приведенными соотношениями.

Таким образом, в скалярной записи регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), (3.13) имеют вид дифференциальных уравнений (3.14), (3.16) и (3.3), дополненных уравнениями (3.11) и соотношениями (3.15).

В рамках круговой пространственной задачи Хилла, когда расстояние $r_1 = a_0 = \text{const}$, дифференциальное уравнение (3.16) для энергии h принимает более простой вид (3.17):

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(3\frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right) \quad (3.17)$$

Из этого уравнения следует интеграл Якоби (2.4) в форме (3.18):

$$h = \frac{1}{2}n_0^2 (3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const} \quad (3.18)$$

В полученных регулярных дифференциальных уравнениях (3.1)–(3.4), (3.11) и (3.14)–(3.16), (3.3), (3.11) основное кватернионное уравнение (3.1) и соответствующие ему скалярные уравнения (3.14) в KS -переменных имеют вид уравнений движения четырехмерного возмущенного осциллятора, что позволяет построить (см. разд. 5) соответствующие им уравнения в медленно изменяющихся переменных (в четырехмерных кватернионных оскулирующих элементах).

3.2. *Регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита u_0 и u_3 , построенные с использованием энергии h изучаемой точки.* Эти уравнения (в рамках эллиптической ограниченной задачи трех тел) получаются из выше приведенных регулярных кватернионных уравнений пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3) и имеют вид уравнений (3.19):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} &= \mathbf{f} = \frac{1}{2}r\mathbf{q} \\ \frac{dh}{d\tau} &= 2\text{scal} \left(\frac{d\bar{\mathbf{u}}}{d\tau} \circ \mathbf{q} \right) = 2 \left(q_0 \frac{du_0}{d\tau} + q_3 \frac{du_3}{d\tau} \right), \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2 \\ r_1 &= r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

дополненных соотношениями (3.20)–(3.23)

$$\mathbf{u} = u_0 + u_3 \mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{q} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} \quad (3.20)$$

$$p_x = 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2 x + \frac{\partial \Omega}{\partial x} = 2n_0 \frac{dy}{dt} + n_0^2 x + 2n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \quad (3.21)$$

$$p_y = -2n_0 \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -2n_0 \frac{dx}{dt} + n_0^2 y - n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} y$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad y = -2u_0 u_3 \quad (3.22)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{r} \left(u_0 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right), \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{r} \left(u_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) \quad (3.23)$$

Кватернион $\mathbf{f}$, стоящий в правой части первого кватернионного уравнения из системы (3.19), может быть записан в виде (3.24):

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \frac{1}{2}r\mathbf{q} = 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \mathbf{u} + \frac{3}{2} \frac{a_0^3}{r_1^3} n_0^2 r x \bar{\mathbf{u}} = \\ &= 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{2}n_0^2 r \left\{ \left[r + 2\frac{a_0^3}{r_1^3} u_0^2 - 4\frac{a_0^3}{r_1^3} u_3^2 \right] u_0 + \left[r - 4\frac{a_0^3}{r_1^3} u_0^2 + 2\frac{a_0^3}{r_1^3} u_3^2 \right] u_3 \mathbf{k} \right\} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Отметим, что в регулярных кватернионных уравнениях плоской задачи Хилла (3.19), дополненных соотношениями (3.20)–(3.23) или кватернионным соотношением (3.24), переменными являются переменные Леви-Чивита u_0 и u_3 , являющиеся компонентами двухмерной кватернионной переменной $\mathbf{u} = u_0 + u_3 \mathbf{k}$, энергия h относительного движения изучаемой точки M , а также реальное время t .

В скалярной записи регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла, построенные в рамках эллиптической плоской ограниченной задачи трех тел, принимают вид уравнений (3.25):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_k &= f_k; \quad k = 0, 3 \\ \frac{dh}{d\tau} &= \frac{1}{2} n_0^2 \left[\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} \right], \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \\ r_1 &= r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= -2m_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right] u_0 \\ f_3 &= 2m_0 \frac{du_0}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0^2 r \left[\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r - 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} x \right] u_3 \\ x &= u_0^2 - u_3^2, \quad r = u_0^2 + u_3^2 \end{aligned}$$

Для круговой плоской задачи Хилла расстояние $r_1 = a_0$ и скалярные регулярные дифференциальные уравнения этой задачи принимают вид уравнений (3.26):

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_k = f_k; \quad k = 0, 3, \quad \frac{dh}{d\tau} = \frac{3}{2} n_0^2 \frac{dx^2}{d\tau}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \quad (3.26)$$

или вид уравнений (3.27):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_k}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_k &= f_k; \quad k = 0, 3, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_3^2 \\ h &= \frac{3}{2} n_0^2 x^2 + H; \quad x = u_0^2 - u_3^2, \quad H = \text{const}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= -2m_0 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{3}{2} n_0^2 r x u_0, \quad f_3 = 2m_0 \frac{du_0}{d\tau} - \frac{3}{2} n_0^2 r x u_3 \\ x &= u_0^2 - u_3^2, \quad r = u_0^2 + u_3^2 \end{aligned}$$

3.3. Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла в KS-переменных, построенные с использованием переменной Якоби. Рассматривая пространственную задачу Хилла в общем случае (для некруговой задачи), введем вместо энергии h новую переменную H , называемую автором статьи переменной Якоби и определяемую соотношением

$$H = h - \frac{1}{2} n_0^2 (3x^2 - z^2) \quad (3.28)$$

Эта переменная обращается для круговой задачи Хилла в соответствии с (3.18) в константу движения изучаемой точки M , фигурирующую в интеграле Якоби.

В соответствии с уравнением (3.16) и соотношением (3.28) для энергии h переменная H удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \left(\frac{dr^2}{d\tau} - 3\frac{dx^2}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2)$$

Кватернионные уравнения эллиптической пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), дополненные соотношением (3.13), с использованием новой переменной H принимают вид уравнений (3.29) и (3.30):

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}H\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.29)$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2), \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (3.30)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} + \mathbf{f} = \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} + \frac{1}{2}r\mathbf{q} = \\ &= \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)\mathbf{u} - \frac{1}{2}r\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = \\ &= 2n_0r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{4}n_0^2 \left[3x^2 - z^2 + 2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \right] \mathbf{u} - \\ &- n_0\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[\frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2}n_0r \left(3\frac{a_0^3}{r_1^3}x\mathbf{i} - z\mathbf{k} \right) \right] \\ x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

В дифференциальных уравнениях (3.29)–(3.31) пространственной задачи Хилла в качестве зависимых переменных выступают KS -переменные u_j , $j = 0, 3$ и переменная Якоби H , определяемая соотношением (3.28) и обращающаяся для круговой задачи Хилла в константу движения, планетоцентрическое расстояние Солнца $r_1 = r_E$, а также время t и истинная аномалия ϑ . В этих уравнениях независимой переменной, по-прежнему, является “фиктивное” время τ , связанное с временем t вторым из дифференциальных уравнений (3.30).

3.4. Регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в переменных Леви-Чивита u_0 и u_3 , построенные с использованием переменной Якоби. Эти уравнения получаются из регулярных кватернионных уравнений пространственной задачи Хилла (3.29)–(3.31) и имеют следующий вид:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}H\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2) \quad (3.32)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu) \cos \vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2},$$

где

$$\mathbf{u} = u_0 + u_3\mathbf{k}, \quad \bar{\mathbf{u}} = u_0 - u_3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_0 + F_3 \mathbf{k} = 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} + \frac{1}{4} n_0^2 \left[3x^2 + 2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) r^2 \right] \mathbf{u} + \frac{3}{2} n_0^2 \frac{a_0^3}{r_1^3} r x \bar{\mathbf{u}} \quad (3.33)$$

$$x = u_0^2 - u_3^2, \quad y = -2u_0 u_3, \quad r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_3^2$$

4. Регулярные кватернионные уравнения круговой пространственной задачи Хилла в KS-переменных. Для этой задачи проекции вектора возмущающего ускорения

$$p_x = 2n_0 \frac{dy}{dt} + 3n_0^2 x, \quad p_y = -2n_0 \frac{dx}{dt}, \quad p_z = -n_0^2 z$$

С их учетом соотношение (3.7) для кватерниона $\mathbf{q}$ принимает вид (4.1):

$$\mathbf{q} = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{p} = -\mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[2n_0 \left(\frac{dy}{dt} \mathbf{i} - \frac{dx}{dt} \mathbf{j} \right) + n_0^2 (3x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \right] \quad (4.1)$$

При этом правая часть $\mathbf{f}$ кватернионного уравнения (3.1), определяемая соотношением (3.13), упрощается и принимает вид (4.2):

$$\mathbf{f} = f_0 + f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k} = \frac{1}{2} r \mathbf{q} = 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0^2 r (3x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \right] \quad (4.2)$$

В этом случае дифференциальное уравнение (3.16) для энергии h принимает вид (3.17), из которого, как уже отмечалось, следует интеграл Якоби (3.18).

Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.1)–(3.3), (3.11), (3.13), в которых используется энергия точки h , для круговой задачи с учетом соотношений (4.2) и (3.18) принимают вид (4.3) и (4.4):

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h \mathbf{u} = \mathbf{f} = \frac{1}{2} r \mathbf{q} = 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[n_0 \frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0^2 r (3x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \right] \quad (4.3)$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_0 + u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k}, \quad h = \frac{1}{2} n_0^2 (3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const} \\ x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\ \frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

В скалярной записи эти уравнения имеют вид (4.6):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} h u_j = \frac{1}{2} r q_j = f_j; \quad j = \overline{0, 3}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad (4.6)$$

где

$$h = \frac{1}{2} n_0^2 (3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const}$$

$$\begin{aligned}
f_0 &= n_0 \left(-2r \frac{du_3}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_1 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_0 - zu_2) \\
f_1 &= n_0 \left(2r \frac{du_2}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_0 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_1 - zu_3) \\
f_2 &= n_0 \left(-2r \frac{du_1}{d\tau} + \frac{dz}{d\tau} u_3 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_2 - zu_0) \\
f_3 &= n_0 \left(2r \frac{du_0}{d\tau} - \frac{dz}{d\tau} u_2 \right) + \frac{1}{2} n_0^2 r (3xu_3 - zu_1) \\
x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\
\frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Отметим, что правые части f_j уравнений (4.6) (компоненты кватерниона $\mathbf{f}$), определяемые соотношениями (4.7), могут быть представлены в виде (4.8):

$$\begin{aligned}
f_0 &= au_0 + bu_3 - cu_2, \quad f_1 = au_1 - bu_2 - cu_3 \\
f_2 &= au_2 - bu_1 - cu_0, \quad f_3 = -au_3 + bu_0 - cu_1 \\
a &= r \left(n_0 \frac{dy}{dt} + \frac{3}{2} n_0^2 x \right) = 2n_0 \left(u_1 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_2 - u_0 \frac{du_3}{d\tau} - \frac{du_0}{d\tau} u_3 \right) + \\
&\quad + \frac{3}{2} n_0^2 r (u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2) \\
b &= n_0 r \frac{dx}{dt} = 2n_0 \left(u_0 \frac{du_0}{d\tau} + u_1 \frac{du_1}{d\tau} - u_2 \frac{du_2}{d\tau} - u_3 \frac{du_3}{d\tau} \right) \\
c &= \frac{1}{2} n_0^2 r z = n_0^2 r (u_1 u_3 + u_0 u_2)
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Регулярные кватернионные уравнения пространственной задачи Хилла (3.30)–(3.31), в которых используется в явном виде переменная H , для круговой задачи принимают вид (4.9):

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} H \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = \mathbf{u} \circ \bar{\mathbf{u}} = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \tag{4.9}$$

где $H = \text{const}$ – постоянная Якоби,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{1}{4} n_0^2 (3x^2 - z^2) \mathbf{u} + \mathbf{f} = \\
&= \frac{1}{4} n_0^2 (3x^2 - z^2) \mathbf{u} + 2n_0 r \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \circ \mathbf{k} - n_0 \mathbf{i} \circ \mathbf{u} \circ \left[\frac{dz}{d\tau} + \frac{1}{2} n_0 r (3x\mathbf{i} - z\mathbf{k}) \right] \\
x &= u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1 u_3 + u_0 u_2) \\
\frac{dz}{d\tau} &= 2 \left(u_1 \frac{du_3}{d\tau} + \frac{du_1}{d\tau} u_3 + u_0 \frac{du_2}{d\tau} + \frac{du_0}{d\tau} u_2 \right)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

В скалярной записи эти уравнения принимают вид (4.11):

$$\frac{d^2 u_j}{d\tau^2} - \frac{1}{2} H u_j = F_j; \quad j = \overline{0,3}, \quad \frac{dt}{d\tau} = r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \tag{4.11}$$

где

$$F_j = f_j + \frac{1}{4}n_0^2(3x^2 - z^2)u_j; \quad x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2), \quad (4.12)$$

компоненты f_j определяются соотношениями (4.7) или (4.8).

Умножим j -е уравнение системы (4.11) на $du_j/d\tau$ и сложим левые и правые части полученных уравнений, учитывая соотношения (4.7). Интегрируя найденное соотношение, получим первый интеграл уравнений пространственной задачи Хилла в KS -переменных для круговой задачи, имеющий вид (4.13):

$$\left(\frac{du_0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_1}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du_3}{d\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}r\left[\frac{1}{2}n_0^2(3x^2 - z^2) + H\right] = c_h, \quad (4.13)$$

где c_h — произвольная постоянная интегрирования,

$$r = u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2, \quad x = u_0^2 + u_1^2 - u_2^2 - u_3^2, \quad z = 2(u_1u_3 + u_0u_2); \quad H = \text{const}$$

Можно показать, что постоянная $c_h = (1/2)fm_1$.

Отметим, что уравнения пространственной задачи Хилла в KS -переменных в общем случае (не только для круговой задачи) имеют первый частный интеграл

$$u_0 \frac{du_1}{d\tau} - u_1 \frac{du_0}{d\tau} - u_3 \frac{du_2}{d\tau} + u_2 \frac{du_3}{d\tau} = 0, \quad (4.14)$$

называемый в пространственной задаче двух тел билинейным соотношением [5].

5. Регулярные уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных)

5.1. Первая форма уравнений в кватернионных оскулирующих элементах. Полагая правую часть $\mathbf{f}$ кватернионного уравнения (3.1), определяемую соотношением (3.13), в котором может быть вынесен общий малый постоянный множитель n_0 (среднее движение Солнца), равной нулю, получаем:

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}h\mathbf{u} = 0; \quad h = \text{const} \quad (5.1)$$

Общее решение этого уравнения, имеющего вид регулярного кватернионного дифференциального уравнения невозмущенной пространственной задачи двух тел, для энергии $h < 0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \alpha \cos(k\tau) + \beta \sin(k\tau), \quad \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = k[-\alpha \sin(k\tau) + \beta \cos(k\tau)]; \quad k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2}, \quad (5.2)$$

где $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ и $\beta = \beta_0 + \beta_1\mathbf{i} + \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}$ — произвольные кватернионные постоянные интегрирования.

Полагая $\mathbf{f} \neq 0$, а энергию h переменной величиной, будем рассматривать соотношения (5.2) как формулы замены кватернионных переменных $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ на новые кватернионные переменные α и β (кватернионные оскулирующие (медленно изменяющиеся) переменные).

Формулы обратного перехода от переменных α и β к переменным $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ имеют вид (5.3):

$$\alpha = \cos(k\tau)\mathbf{u} - \frac{1}{k}\sin(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \quad \beta = \sin(k\tau)\mathbf{u} + \frac{1}{k}\cos(k\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}; \quad k = \left(-\frac{1}{2}h\right)^{1/2} \quad (5.3)$$

Первая форма уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах α и β для $h < 0$ в соответствии с уравнениями (3.1)–(3.3) и соотношениями (5.3) имеет вид уравнений (5.4)–(5.6):

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \left[-\frac{1}{k} \sin(k\tau) \right] \mathbf{f}, \quad \frac{d\beta}{d\tau} = \left[\frac{1}{k} \cos(k\tau) \right] \mathbf{f}; \quad k = \left(-\frac{1}{2}h \right)^{1/2} \quad (5.4)$$

$$\frac{dh}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left[\left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3} \right) \frac{dr^2}{d\tau} + 3 \frac{a_0^3}{r_1^3} \frac{dx^2}{d\tau} - \frac{dz^2}{d\tau} \right] \quad (5.5)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2/\mu)}{1 + (f/\mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\tau} = r = \cos^2(k\tau)\alpha \circ \bar{\alpha} + \sin(k\tau)\cos(k\tau)(\alpha \circ \bar{\beta} + \beta \circ \bar{\alpha}) + \sin^2(k\tau)\beta \circ \bar{\beta} = \\ = \cos^2(k\tau)(\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + 2\sin(k\tau)\cos(k\tau)(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) + \\ + \sin^2(k\tau)(\beta_0^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2), \end{aligned} \quad (5.6)$$

где кватернионная функция $\mathbf{f}$ имеет вид (3.13) для некруговой задачи и вид (4.2) для круговой задачи.

Для нахождения расстояния r , декартовых координат x , y , z и производных $dx/d\tau$, $dy/d\tau$, $dz/d\tau$, входящих в функцию $\mathbf{f}$, фигурирующую в правых частях кватернионных уравнений (5.4), а также входящих в правую часть скалярного уравнения (5.5) для энергии h , необходимо воспользоваться скалярными соотношениями (3.5) и (3.6) (или кватернионными соотношениями (3.12)) и кватернионными формулами замены переменных (5.2).

Для круговой задачи Хилла имеет место соотношение (3.18) (интеграл Якоби):

$$h = \frac{1}{2}n_0^2(3x^2 - z^2) + H; \quad H = \text{const}$$

Поэтому дифференциальное уравнение (5.5) для энергии h выпадает из системы дифференциальных уравнений движения точки (5.4)–(5.6).

Планетоцентрические координаты x , y , z точки M и проекции v_x , v_y , v_z ее орбитальной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов α и β с помощью кватернионных соотношений (5.7) и (5.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [\bar{\alpha}\cos(k\tau) + \bar{\beta}\sin(k\tau)] \circ \mathbf{i} \circ [\alpha\cos(k\tau) + \beta\sin(k\tau)] = \\ = \cos^2(k\tau)\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \alpha + \cos(k\tau)\sin(k\tau)(\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \beta + \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \alpha) + \sin^2(k\tau)\bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \beta \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{2k}{r}[\bar{\alpha}\cos(k\tau) + \bar{\beta}\sin(k\tau)] \circ \mathbf{i} \circ [\alpha\sin(k\tau) + \beta\cos(k\tau)] = \\ = \frac{2k}{r}[\cos(k\tau)\sin(k\tau)(\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \alpha + \bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \beta) + \cos^2(k\tau)\bar{\alpha} \circ \mathbf{i} \circ \beta + \sin^2(k\tau)\bar{\beta} \circ \mathbf{i} \circ \alpha], \end{aligned} \quad (5.8)$$

где верхняя черта, по-прежнему, символ сопряжения.

5.2. Вторая и третья формы регулярных уравнений в кватернионных оскулирующих элементах. Полагая равной нулю правую часть $\mathbf{F}$ кватернионного уравнения (3.29), определяемую соотношением (3.31) и рассматриваемую как возмущение, содержащее общий малый постоянный множитель n_0 , получаем уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{u}}{d\tau^2} - \frac{1}{2}H\mathbf{u} = 0; \quad H = \text{const} \quad (5.9)$$

Общее решение этого уравнения для постоянной Якоби $H < 0$ имеет вид (5.10), аналогичный соотношениям (5.2):

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} \cos(K\tau) + \mathbf{B} \sin(K\tau), \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = K[-\mathbf{A} \sin(K\tau) + \mathbf{B} \cos(K\tau)]; K = \left(-\frac{1}{2}H\right)^{1/2}, \quad (5.10)$$

где $\mathbf{A} = A_0 + A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ и $\mathbf{B} = B_0 + B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$ – произвольные кватернионные постоянные интегрирования.

Полагая $\mathbf{F} \neq 0$, а H переменной величиной, будем рассматривать соотношения (5.10) как формулы замены кватернионных переменных $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ на новые кватернионные переменные $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (кватернионные оскулирующие переменные).

Формулы обратного перехода от переменных $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ к переменным $\mathbf{u}$ и $d\mathbf{u}/d\tau$ имеют вид, аналогичный (5.3):

$$\mathbf{A} = \cos(K\tau)\mathbf{u} - \frac{1}{K}\sin(K\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}, \quad \mathbf{B} = \sin(K\tau)\mathbf{u} + \frac{1}{K}\cos(K\tau)\frac{d\mathbf{u}}{d\tau}; \quad K = \left(-\frac{H}{2}\right)^{1/2} \quad (5.11)$$

Вторая форма уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ для $H < 0$ в соответствии с уравнениями (3.29)–(3.31) и соотношениями (5.10) имеет вид уравнений (5.12)–(5.14):

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} = \left[-\frac{1}{K}\sin(K\tau)\right]\mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\tau} = \left[\frac{1}{K}\cos(K\tau)\right]\mathbf{F}; \quad K = \left(-\frac{1}{2}H\right)^{1/2} \quad (5.12)$$

$$\frac{dH}{d\tau} = \frac{1}{2}n_0^2 \left(1 - \frac{a_0^3}{r_1^3}\right) \frac{d}{d\tau}(r^2 - 3x^2) \quad (5.13)$$

$$r_1 = r_E = \frac{(c^2 / \mu)}{1 + (f / \mu)\cos\vartheta} = \frac{p_E}{1 + e_E \cos\vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\tau} = \frac{cr}{r_1^2}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = r = \cos^2(K\tau)\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \sin(K\tau)\cos(K\tau)(\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{A}}) +$$

$$+ \sin^2(K\tau)\mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{B}} = \cos^2(K\tau)(A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) +$$

$$+ 2\sin(K\tau)\cos(K\tau)(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + \sin^2(K\tau)(B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2), \quad (5.14)$$

где кватернионная функция $\mathbf{F}$ имеет вид (3.31) для некруговой задачи и вид (4.10) для круговой задачи.

Для нахождения расстояния r , координат x , y , z и производных $dx/d\tau$, $dy/d\tau$, $dz/d\tau$, входящих в функцию $\mathbf{F}$, фигурирующую в правых частях кватернионных уравнений (5.12), а также входящих в правую часть скалярного уравнения (5.13) для переменной H , необходимо воспользоваться скалярными соотношениями (3.5) и (3.6) (или кватернионными соотношениями (3.12)) и кватернионными формулами замены переменных (5.10).

Для круговой задачи Хилла переменная $H = \text{const}$. Поэтому первое дифференциальное уравнение из (5.13) для этой переменной выпадает из системы уравнений движения точки (5.12)–(5.14). При этом фигурирующая в этих уравнениях величина $K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}$.

Планетоцентрические координаты x , y , z точки M и проекции v_x , v_y , v_z ее относительной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с помощью кватернионных соотношений (5.7) и (5.8), в которых вместо элементов α и β следует положить элементы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ соответственно.

Для круговой задачи Хилла в дифференциальных уравнениях (5.12) и (5.14) целесообразно перейти к новой независимой переменной φ в соответствии с соотношениями

$$\varphi = K\tau, d\varphi = Kd\tau, d\tau = (1/K)d\varphi; K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}, H < 0$$

Переменная φ связана с временем t дифференциальным соотношением $dt = (r/K)d\varphi$.

В итоге получим третью форму уравнений пространственной задачи Хилла для круговой задачи в кватернионных оскулирующих элементах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, имеющую вид (5.15) и (5.16):

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi} = -\left(\frac{1}{K^2}\sin\varphi\right)\mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi} = \left(\frac{1}{K^2}\cos\varphi\right)\mathbf{F}; \quad K^2 = -\frac{1}{2}H = \text{const} > 0 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{r}{K} &= \frac{1}{K} \left[\cos^2\varphi \mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi \cos\varphi (\mathbf{A} \circ \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{A}}) + \sin^2\varphi \mathbf{B} \circ \bar{\mathbf{B}} \right] = \\ &= \frac{1}{K} \left[\cos^2\varphi (A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\sin\varphi \cos\varphi (A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + \sin^2\varphi (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2 + B_3^2) \right], \end{aligned} \quad (5.16)$$

где кватернионная функция $\mathbf{F}$ имеет вид (4.10).

Планетоцентрические координаты x, y, z точки M и проекции v_x, v_y, v_z ее относительной скорости находятся через компоненты кватернионных оскулирующих элементов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ с помощью кватернионных соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = [\cos\varphi\bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi\bar{\mathbf{B}}] \circ \mathbf{i} \circ [\cos\varphi\mathbf{A} + \sin\varphi\mathbf{B}] = \\ &= \cos^2\varphi\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A} + \cos\varphi\sin\varphi(\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} + \bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A}) + \sin^2\varphi\bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} \\ \mathbf{v} &= v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} = \frac{2K}{r} [\cos\varphi\bar{\mathbf{A}} + \sin\varphi\bar{\mathbf{B}}] \circ \mathbf{i} \circ [\sin\varphi\mathbf{A} + \cos\varphi\mathbf{B}] = \\ &= \frac{2K}{r} [\cos\varphi\sin\varphi(\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A} + \bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B}) + \cos^2\varphi\bar{\mathbf{A}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{B} + \sin^2\varphi\bar{\mathbf{B}} \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{A}] \end{aligned}$$

6. Анализ полученных результатов. В работе получены новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла, когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим, в четырехмерных KS -переменных u_j , $j = 0, 3$ с использованием энергии h относительного движения изучаемого тела малой массы в случаях эллиптической и круговой задач (кватернионные уравнения (3.1), (3.3), (3.11), (3.13), (3.16) и соответствующие им скалярные уравнения (3.14)–(3.16), (3.3), дополненные уравнениями (3.11), (3.13), в случае эллиптической задачи; кватернионные уравнения (4.3)–(4.5) и соответствующие им скалярные уравнения (4.6), (4.7) (или (4.8)) в случае круговой задачи), а также регулярные кватернионные уравнения плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита u_0 и u_3 в случаях эллиптической и круговой задач (кватернионные уравнения (3.19)–(3.23) и соответствующие им скалярные уравнения (3.25) в случае эллиптической задачи, скалярные уравнения (3.26) или (3.27) в случае круговой задачи).

Также получены (с использованием переменной Якоби H вместо энергии h) для пространственной эллиптической задачи Хилла новые регулярные кватернионные дифференциальные уравнения (3.29)–(3.31) в четырехмерных KS -переменных u_j и регулярные кватернионные дифференциальные уравнения (3.32), (3.33) плоской задачи Хилла в двухмерных переменных Леви-Чивита u_0 и u_3 . Переменная H обращается для круговой задачи Хилла в константу движения изучаемого тела малой массы (постоянную интегрирования Якоби).

В полученных уравнениях реальное время t выступает в качестве зависимой переменной, а независимой переменной является “фиктивное” время τ , связанное с временем t дифференциальным уравнением (3.3) (дифференциальным преобразованием времени Зундмана).

Установлен первый интеграл (4.13) полученных уравнений пространственной задачи Хилла в KS -переменных в случае круговой задачи. Другим первым частным интегралом в общем случае является билинейное соотношение (4.14), связывающее KS -переменные и их первые производные.

Левые части полученных кватернионных дифференциальных уравнений пространственной задачи Хилла в KS -переменных, во многом характеризующие динамику системы, имеют вид левых частей регулярных кватернионных дифференциальных уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных, полученных автором статьи в работах [15, 16], а их правые части содержат слагаемые, пропорциональные малой величине n_0 (среднему движению Солнца) или n_0^2 , что позволяет говорить о близости свойств этих уравнений с точки зрения эффективности и точности их численного интегрирования в сравнении с уравнениями в прямоугольных (декартовых) координатах.

Полученные кватернионные уравнения (3.1), (3.3), (3.11), (3.13), (3.16) и соответствующие им скалярные уравнения и соотношения (3.14)–(3.16), (3.3), (3.11), (3.13) в KS -переменных в отличие от исходных уравнений (2.1), (2.2) в декартовых координатах, имеют осцилляторный вид (вид уравнений четырехмерного возмущенного осциллятора в KS -переменных).

Они близки к линейным уравнениям и являются регулярными. Отметим, что свойство регулярности этих уравнений для изучения ограниченной эллиптической задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и Луна, не является существенным, однако при изучении ограниченной эллиптической задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и тело с малой массой (например, астероид, спутник, космический аппарат), движущееся по высокоэллиптической орбите, это свойство позволяет существенно повысить точность численного решения уравнений этой задачи (прогноза орбитального движения этого тела). Лидовым [13], как уже отмечалось во введении, предложен метод построения пространственных периодических орбит в задаче Хилла с использованием KS -переменных, который опирается на вычислительную процедуру (уравнения задачи Хилла записываются Лидовым в KS -переменных в Гамильтоновой форме). Лидовым и Ляховой установлено [13, 14], что “ KS -переменные ... позволяют в задаче Хилла обойти ряд численных и аналитических трудностей, возникающих при рассмотрении орбит, близких к орбите B_0 , которая всегда проходит через особую точку $|x| = 0$ (тело меньшей массы), и сокращают затраты времени ЭВМ на численное интегрирование”.

Как известно, регулярные дифференциальные уравнения возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных позволили разработать эффективные методы нахождения решений в аналитической или численной форме таких трудных для классических методов задач как исследование движения вблизи притягивающих масс или движения по орбитам с большими эксцентриситетами. Использование регулярных уравнений в KS -переменных позволяет повысить точность численного решения ряда задач небесной механики и астродинамики (например, задачи о возмущенном движении искусственного спутника Земли по орбитам с большими эксцентриситетами) от двух до семи порядков по сравнению с решениями, полученными при использовании классических (ньютоновских) уравнений; приводит к эффективной схеме интегрирования уравнений орбитального движения, повышающей точность и скорость численного интегрирования.

Полученные регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной задачи Хилла в KS -переменных имеют вид регулярных дифференциальных

уравнений возмущенной пространственной задачи двух тел в KS -переменных, что позволяет говорить о близости (в смысле точности численного интегрирования) этих уравнений.

Осцилляторный вид полученных кватернионных дифференциальных уравнений пространственной задачи Хилла в KS -переменных позволяет эффективно построить (с использованием метода вариации произвольных постоянных интегрирования) уравнения этой задачи в кватернионных оскулирующих элементах (четырёхмерных кватернионных медленно изменяющихся переменных), чего не позволяют сделать исходные уравнения пространственной задачи Хилла в декартовых координатах.

В статье предложены три новые нормальные формы уравнений пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах:

- 1) уравнения (5.4)–(5.6) в элементах α и β с использованием энергии $h < 0$ (h – переменная),
- 2) уравнения (5.12)–(5.14) в элементах A и B с использованием переменной Якоби $H < 0$ (H – переменная),
- 3) уравнения (5.15) и (5.16) в элементах A и B для круговой задачи Хилла, когда постоянная Якоби $H = \text{const} < 0$.

Элементы α и β являются произвольными кватернионными постоянными интегрирования уравнений (3.1)–(3.4) пространственной задачи Хилла в KS -переменных для случая, когда влиянием Солнца на движение изучаемого тела M пренебрегается. В этом случае эти уравнения имеют вид уравнений движения четырёхмерного одночастотного гармонического осциллятора, собственная (круговая) частота которого $k = (-h/2)^{1/2}$ (h в этом случае – постоянная кеплеровская энергия).

Элементы A и B являются произвольными кватернионными постоянными интегрирования уравнений (3.29)–(3.31) пространственной задачи Хилла в KS -переменных, принимающих вид четырёхмерного одночастотного гармонического осциллятора, собственная частота которого $K = (-H/2)^{1/2}$ (H в этих уравнениях – постоянная интегрирования Якоби уравнений круговой задачи Хилла).

В первых двух формах уравнений в оскулирующих элементах независимой переменной является “фиктивное” время τ , связанное с временем t дифференциальным соотношением $dt = r d\tau$ (преобразованием времени Зундмана, где r – планетоцентрическое расстояние изучаемого движущегося тела M), а в третьей форме уравнений – новая независимая переменная φ , связанная с “фиктивным” временем τ и реальным временем t другим более сложным дифференциальным соотношением

$$dt = (r/K) d\varphi, \quad d\varphi = K d\tau; \quad K = (-H/2)^{1/2} = \text{const}$$

Отметим, что в предложенных уравнениях задачи Хилла можно легко учесть другие действующие возмущения. Для этого достаточно их включить в возмущения p_x , p_y и p_z , определяемые соотношениями (3.4).

Заключение. Предложены регулярные кватернионные дифференциальные уравнения пространственной и плоской задачи Хилла (варианта уравнений ограниченной задачи таких трех тел, как Солнце, Земля и Луна или другое естественное, или искусственное космическое тело с малой массой, когда расстояние между двумя телами с конечными массами считается весьма большим) в KS -переменных и в переменных Леви-Чивита, а также уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах (медленно изменяющихся кватернионных переменных). В отличие от уравнений этой задачи в декартовых координатах, регулярные уравнения в KS -переменных и в переменных Леви-Чивита имеют осцилляторную форму (форму уравнений четырёхмерного или двухмерного возмущенного осциллятора), что позволило эффективно построить уравнения пространственной задачи Хилла в кватернионных оскулирующих элементах.

Предложенные уравнения имеют компактную и симметричную форму, характерную для кватернионных моделей аналитической механики, удобную для анализа и численного решения. Они позволяют эффективно использовать при исследовании задачи Хилла аналитические и численные методы теории нелинейных колебаний и методы нелинейной механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.
2. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1978.
3. Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968. 800 с.
4. Себехей. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 656 с.
5. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.
6. Бордовицына Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. М.: Наука, 1984. 136 с.
7. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
8. Fukushima T. Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // Astron. J. 2005. V. 129. №5. Art. No. 2496. <https://doi.org/10.1086/429546>
9. Fukushima T. Numerical comparison of two-body regularizations // Astron. J. 2007. V. 133. №6. Art. No. 2815.
10. Челноков Ю.Н., Логинов М.Ю. Новые кватернионные модели регулярной механики космического полета и их приложения в задачах прогноза движения космических тел и инерциальной навигации в космосе // Сб. матер.: XXVIII С.-Петербургская межд. конф. по интегрированным навигационным системам. С.-Петербург, 2021. С. 292–295.
11. Челноков Ю.Н., Сапунков Я.Г., Логинов М.Ю., Шекутьев А.Ф. Прогноз и коррекция орбитального движения космического аппарата с использованием регулярных кватернионных уравнений и их решений в переменных Кустаанхеймо–Штифеля и изохронных произвольных // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 2. С. 124–156.
12. Лидов М.Л. Увеличение размерности гамильтоновых систем. KS-преобразование, использование частных интегралов // Космич. исслед. 1982. Т. 20. №2. С. 163–176.
13. Лидов М.Л. Метод построения семейства пространственных периодических орбит в задаче Хилла // Космич. исслед. 1982. Т. 20. №6. С. 787–807.
14. Лидов М.Л., Ляхова В.А. Семейства пространственных периодических орбит задачи Хилла и их устойчивость // Космич. исслед. 1983. Т. 21. №1. С. 3–11.
15. Челноков Ю.Н. К регуляризации уравнений пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №6. С. 12–21.
16. Челноков Ю.Н. О регулярных уравнениях пространственной задачи двух тел // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №1. С. 151–158.
17. Waldvogel J. Quaternions and the perturbed Kepler problem // Celest. Mech.&Dyn. Astron. 2006. V. 95. P. 201–212.
18. Waldvogel J. Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // Mech.&Dyn. Astron. 2008. V. 102. №1. P. 149–162.
19. Chelnokov Yu.N. Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // Appl. Math.&Mech. 2022. V. 43. №1. P. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
20. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные методы и регулярные модели аналитической механики (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 4. С. 519–556. <https://doi.org/10.31857/S0032823523040033>
21. Челноков Ю.Н. Кватернионная регуляризация особенностей моделей астродинамики, порождаемых гравитационными силами (обзор) // ПММ. 2023. Т. 87. Вып. 6. С. 915–953. <https://doi.org/10.31857/S0032823523060036>
22. Aarseth S.J., Zare K.A. Regularization of the three-body problem // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 185–205.

23. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. New York: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
24. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. I // Изв. РАН. МТТ. 2017. №6. С. 24–54.
25. *Челноков Ю.Н.* Кватернионная регуляризация уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел. II // Изв. РАН. МТТ. 2018. №6. С. 41–63.
26. *Челноков Ю.Н.* Кватернионные методы и регулярные модели небесной механики и механики космического полета: локальная регуляризация особенностей уравнений возмущенной пространственной ограниченной задачи трех тел, порождаемых гравитационными силами // Изв. РАН. МТТ. 2023. №5. С. 27–57.
<https://doi.org/10.31857/S0572329922600591>
27. *Батхин А.Б., Батхина Н.В.* Периодические решения второго рода в окрестности семейства g задачи Хилла // Вестн. ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика. 2003. №8. С. 167–181.
28. *Батхин А.Б.* Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла // Препринт ИПМ им. Келдыша РАН. 2010. №47.

Regular Quaternion Equations of the Spatial Hill Problem in Kustaanheimo–Stiefel Variables and Quaternion Osculating Elements

Yu. N. Chelnokov^{a, #}

^a*Institute for Problems of Precision Mechanics and Control RAS, Saratov, Russia*

[#]*e-mail: chelnokovyun@gmail.com*

Regular quaternion equations of the spatial Hill problem (a variant of the limited three-body problem (Sun, Earth, Moon (or another low-mass moving cosmic body under study)) are obtained, when the distance between two bodies with finite masses is considered very large, in four-dimensional Kustaanheimo–Stiefel variables (KS-variables) within the framework of the elliptical and circular spatial bounded three-body problem, as well as the regular quaternion equations of the planar Hill problem in two-dimensional Levi-Civita variables. In these equations, the variables are KS-variables or Levi-Civita variables and the energy of relative motion of the body under study, or a variable that converts for the circular Hill problem into a constant of motion of this body (the Jacobi integration constant), as well as the planetocentric distance of the Sun and real time associated with a new independent variable by the Sundman differential transformation of time or other more complex differential ratio. These equations are supplemented by the equation of the Earth's orbit in polar coordinates and the equation for the true anomaly characterizing the Earth's position in the orbit. The first integral of the obtained equations in KS-variables in the case of a circular problem is established. Another first partial integral in the general case is a bilinear relation connecting KS-variables and their first derivatives. Three new forms of regular equations of the spatial Hill problem in quaternion osculating elements (slowly changing quaternion variables) are proposed. The proposed regular quaternion equations have an oscillatory form or the form of equations with slowly changing variables, which makes it possible to effectively use analytical and numerical methods of oscillation theory and methods of nonlinear mechanics in the study of the Hill problem.

Keywords: spatial and planar Hill problems, regular quaternion equations, Kustaanheimo–Stiefel and Levi-Civita variables, circular and elliptic problems, energy of relative motion, Jacobi integral, quaternion osculating elements

REFERENCES

1. *Abalakin V.K., Aksenov E.P., Grebenikov E.A., Demin V.G., Ryabov Yu.A.* Reference Guide to Celestial Mechanics and Astrodynamics. Moscow: Nauka, 1976. (in Russian)
2. *Duboshin G.N.* Celestial Mechanics. Analytical and Qualitative Methods. Moscow: Nauka, 1978. (in Russian)
3. *Subbotin M.F.* Introduction to Theoretical Astronomy. Moscow: Nauka, 1968. 800 p. (in Russian)

4. *Szebehely V.* Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies. N.Y.: Acad. Press, 1967. 668 p.
5. *Stiefel E.L., Scheifele G.* Linear and Regular Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971.
6. *Bordovitsyna T.V.* Modern Numerical Methods in Problems of Celestial Mechanics. Moscow: Nauka, 1984. 136 p. (in Russian)
7. *Bordovitsyna T.V., Avdyushev V.A.* The Theory of Motion of Artificial Earth Satellites. Analytical and Numerical Methods. Tomsk: Izd-vo Tom. un-ta, 2007. 178 p. (in Russian)
8. *Fukushima T.* Efficient orbit integration by linear transformation for Kustaanheimo–Stiefel regularization // *Astron. J.*, 2005, vol. 129, no. 5, art. no. 2496. <https://doi.org/10.1086/429546>
9. *Fukushima T.* Numerical comparison of two-body regularizations // *Astron. J.*, 2007, vol. 133, no. 6, art. no. 2815.
10. *Chelnokov Y.N., Loginov M.Y.* New quaternion models of spaceflight regular mechanics and their applications in the problems of motion prediction for cosmic bodies and in inertial navigation in space // 28th St. Petersburg Int. Conf. on Integrated Navigation Systems, ICINS 2021, 9470806.
11. *Chelnokov Yu.N., Sapunkov Ya.G., Loginov M.Yu., Schekutev A.F.* Prediction and correction of the orbital motion of spacecraft using regular quaternion equations and their solutions in the Kustaanheimo–Stiefel variables and isochronic derivatives // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2478–2503.
12. *Lidov M.L.* Increasing the dimension of Hamiltonian systems. KS-transformation, the use of partial integrals // *Kosmich. Issled.*, 1982, vol. 20, no. 2, pp. 163–176. (in Russian)
13. *Lidov M.L.* A method for constructing a family of spatial periodic orbits in the Hill problem // *Kosmich. Issled.*, 1982, vol. 20, no. 6, pp. 787–807. (in Russian)
14. *Lidov M.L., Lyakhova V.A.* Families of spatial periodic orbits of the Hill problem and their stability // *Kosmich. Issled.*, 1983, vol. 21, no. 1, pp. 3–11. (in Russian)
15. *Chelnokov Yu.N.* On the regularization of the equations of the spatial problem of two bodies // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1981, no. 6, pp. 12–21. (in Russian)
16. *Chelnokov Yu.N.* On the regular equations of the two-body spatial problem // *Izv. AN SSSR. MTT*, 1984, no. 1, pp. 151–158. (in Russian)
17. *Waldvogel J.* Quaternions and the perturbed Kepler problem // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2006, vol. 95, pp. 201–212.
18. *Waldvogel J.* Quaternions for regularizing celestial mechanics: the right way // *Celest. Mech.&Dyn. Astron.*, 2008, vol. 102, no. 1, pp. 149–162.
19. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and models of regular celestial mechanics and astrodynamics // *Appl. Math.&Mech.*, 2022, vol. 43, no. 1, pp. 21–80. <https://doi.org/10.1007/s10483-021-2797-9>
20. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion and biquaternion methods and regular models of analytical mechanics (review) // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 2450–2477. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070051>
21. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of singularities of astrodynamics models generated by gravitational forces (review) // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 8, pp. 2855–2883. <https://doi.org/10.3103/S0025654423080071>
22. *Aarseth S.J. and Zare K.A.* Regularization of the Three-Body Problem // *Celest. Mech.*, 1974, vol. 10, pp. 185–205.
23. *Aarseth S.J.* Gravitational N-Body Simulations. N.Y.: Cambridge Univ. Press, 2003. 408 p.
24. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: I // *Mech. of Solids*, 2017, vol. 52, no. 6, pp. 613–639.
25. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion regularization of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem: II // *Mech. of Solids*, 2018, vol. 53, no. 6, pp. 633–650.
26. *Chelnokov Yu.N.* Quaternion methods and regular models of celestial mechanics and space flight mechanics: local regularization of the singularities of the equations of the perturbed spatial restricted three-body problem generated by gravitational forces // *Mech. of Solids*, 2023, vol. 58, no. 5, pp. 1458–1482. <https://doi.org/10.3103/S0025654422601264>

-
27. *Batkhin A.B., Batkhina N.V.* Periodic solutions of the second genre in the vicinity of Hill's problem family g // Sci. J. of Volgograd State Univ. Math. Phys., 2003, no. 8, pp. 167–181. (in Russian)
 28. *Batkhin A.B.* Generating planar periodic orbits of the Hill's problem // Preprint of the Keldysh Inst. of Appl. Math. of RAS, Moscow, 2010. no. 47. (in Russian)