

УДК 539.4

ЭФФЕКТ ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ ПРИ ПРЯМОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ДАВЛЕНИЯ

© 2024 г. А. А. Мовчан^{1,*}, А. В. Шарунов^{2,**}¹Институт Прикладной механики РАН, Москва, Россия²Московский Авиационный институт, Москва, Россия

*e-mail: movchan47@mail.ru,

**aleksej-sharunov@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.01.2024г.

После доработки 29.01.2024 г.

Принята к публикации 15.02.2024 г.

Решены связанные задачи об изменении напряженно-деформированного и фазового состояния в толстостенной сферической оболочке из сплава с памятью формы, материал которой претерпевает прямое термоупругое фазовое превращение, связанное с уменьшением температуры, равномерно распределенной по всему объему материала, под действием постоянных внутреннего или внешнего давления. Обнаружены эффекты существенного перенапряжения примыкающих к внутренней границе слоев тела и существенной разгрузки примыкающих к внешней границе слоев, связанные с движением по материалу фронта завершения фазового перехода.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы, толстостенная сфера, прямое превращение, перераспределение напряжений

DOI: 10.31857/S0032823524020057 EDN: XULYKA

1. Введение. Сплавы с памятью формы (СПФ) [1–3], благодаря происходящим в них термоупругим фазовым превращениям [4], являются представителями нелинейных наследственных деформируемых твердых тел, изучению которых посвящены труды Ю. Н. Работнова и его учеников [5–9]. Процесс накопления деформации прямого термоупругого фазового превращения [10,11] в статически неопределимых элементах из СПФ, даже если он происходит под действием постоянной механической нагрузки, и при равномерном распределении температур по телу может приводить к перераспределению напряжений. Тот факт, что в наследственных деформируемых твердых телах, находящихся под действием постоянной нагрузки, может происходить перераспределение напряжений, отмечен в работе [12]. В работах [13,14] при решении в рамках микроструктурной модели поведения СПФ [15] задачи о прямом превращении в бесконечном цилиндре из СПФ, вызываемом охлаждением через поверхность, т.е. при неравномерном распределении температур по точкам тела, были обнаружены существенные перенапряжения этой поверхности. Эффекты перераспределения напряжений при равномерном распределении температуры по телу ранее были обнаружены при решении задач о прямом превращении в связанной постановке (т.е. с учетом влияния действующих напря-

жений на фазовый переход) для балки прямоугольного поперечного сечения из СПФ, находящейся под действием постоянного изгибающего момента или постоянной поперечной силы [16], и стержня из СПФ круглого поперечного сечения, находящегося под действием постоянного крутящего момента [17]. Обнаружено, что форма эпюры напряжений, которая в начальном аустенитном состоянии нагруженного материала была прямолинейной, при фазовом переходе значительно искривляется. При этом области материала, прилегающие к нейтральной плоскости или оси кручения, разгружаются почти до нуля, а внешние слои существенно перегружаются, так что действующие в них напряжения могут в два и более раз превышать напряжение в той же точке в упругом аустенитном состоянии материала. Связано такое перенапряжение с движением по материалу фронта завершения фазового перехода.

В упомянутых выше работах [16,17] эффект перераспределения напряжений рассмотрен при одномерном напряженном состоянии, причем механические свойства СПФ описывались в рамках простейшей модели линейного деформирования СПФ при фазовых превращениях [18], которая эффект структурного деформирования вообще не учитывала. В данной работе исследованы процессы перераспределения напряжений, связанные с прямым фазовым превращением в толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием постоянных внутреннего или внешнего давления, т.е. в случае двумерного напряженного состояния. Учитывается как нелинейный по напряжениям эффект прямого фазового превращения, так и нелинейное влияние структурного перехода.

2. Постановка задачи. Рассматривается толстостенная сфера из СПФ с внутренним радиусом a и внешним радиусом b в сферической системе координат (r, ϕ, ψ) , нагруженная постоянным внутренним или внешним давлением P , не зависящим от угловых координат. Температура в каждый момент времени равномерно распределена по материалу сферы и монотонно убывает через интервал температур прямого мартенситного превращения. Упругие и фазово-структурные свойства материала считаются изотропными. В силу сферически симметричного распределения нагрузки и температуры, а также изотропии термомеханических свойств, напряженно-деформированное состояние также является сферически симметричным. Поэтому в сферической системе координат отличны от нуля только радиальная компонента смещений w , нормальные компоненты напряжений $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_\psi$ и деформаций $\varepsilon_r, \varepsilon_\phi, \varepsilon_\psi$, причем $\sigma_\phi = \sigma_\psi, \varepsilon_\phi = \varepsilon_\psi$.

СПФ являются типичным представителем деформируемых твердых тел, поведение которых зависит от вида напряженного состояния (свойство “разносопротивляемости”) [19–21]. Определяющие соотношения, для упругого поведения тел, обладающих этим свойством, предложены в [22]. Согласно [19, 20], приращения деформаций СПФ как по фазовому, так и по структурному механизмам,

зависят от параметра вида напряженного состояния $\mu_\sigma = \frac{27 I_{3\sigma'}}{2 \sigma_i^3}$. Здесь

σ_i, σ'_{ij} – интенсивность и девиатор напряжений, $I_{3\sigma'}$ – третий инвариант девиатора напряжений, который в декартовой системе координат определяется по формуле $I_{3\sigma'} = \det(\sigma'_{ij})$. В случае действия внутреннего давления $\sigma_r < 0, \sigma_\phi = \sigma_\psi > 0, \sigma_i = \sigma_\phi - \sigma_r, \mu_\sigma = -1$. Для случая внешнего давления $\sigma_r > 0, \sigma_\phi = \sigma_\psi < 0, \sigma_i = \sigma_r - \sigma_\phi, \mu_\sigma = 1$, т.е. в обоих случаях параметр вида девиатора напряжений μ_σ сохраняет одно и то же значение (+1 для внешнего давления и -1 для внутреннего) во всех точках тела и для всех моментов процесса прямого превращения. Это обстоятельство существенно упрощает вывод разрешающих соотношений, поскольку при дифференцировании величину μ_σ в этом случае можно считать постоянной.

3. Определяющие соотношения модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Известен целый ряд моделей деформирования СПФ, учитывающих нелинейность соответствующего процесса и как фазовый, так и структурный механизмы деформирования [23–26]. Ниже алгоритм решения краевой задачи строится в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенной в [27], распространенной на случай учета влияния на поведение СПФ вида напряженного состояния и сводящейся для случая прямого фазового перехода и структурного превращения к следующим соотношениям:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{phst}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{e'}$$

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K(q)}, \quad \varepsilon_{ij}^{e'} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G(q)}, \quad \frac{1}{K(q)} = \frac{q}{K_m} + \frac{1-q}{K_a}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_m} + \frac{1-q}{G_a} \quad (3.1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{phst} = d\varepsilon_{ij}^{ph} + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad d\varepsilon_{ij}^{ph} = \varepsilon_0 \delta_{ij} dq + \frac{3}{2} \rho_{D1}(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) dq \quad (3.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_{D2}(\sigma_i, \mu_\sigma) q \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \frac{\partial \varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)}{\partial \sigma_i} d\sigma_i \quad (3.3)$$

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos \pi t_\sigma) \quad (3.4)$$

$$t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0} \quad (3.5)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\sigma_i \rho_{D1}(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) + Z(\sigma_{ij}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (3.6)$$

$$6Z(\sigma_{ij}) = \frac{\sigma_{kk}^2 \Delta K}{K_a K_m} + \frac{\sigma_i^2 \Delta G}{G_a G_m}, \quad \Delta K = K_a - K_m, \quad \Delta G = G_a - G_m$$

Здесь ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{phst} – тензоры полных, упругих и фазово-структурных деформаций; штрихом у тензоров обозначены компоненты дивергента; q – объемная доля мартенсита; $K(q)$, $G(q)$ – зависящие от параметра фазового состава утроенный объемный модуль и модуль сдвига, K_a , K_m , G_a , G_m – значения этих модулей в аустенитном и мартенситном состояниях соответственно; ε_0 – линейная деформация объемного эффекта прямого фазового превращения; $d\varepsilon_{ij}^{ph}$, $d\varepsilon_{ij}^{st}$ – приращения тензора фазово-структурных деформаций за счет фазового и структурного механизмов; формула (3.3) для приращения деформации по структурному механизму справедлива, в случае если интенсивность напряжений в рассматриваемый момент равна максимальному за всю предшествующую историю процесса значению этой величины и, кроме того, должно выполняться дифференциальное условие активного нагружения:

$$\sigma_i(q_1) = \max_{q \in (0, q_1)} \sigma_i(q), \quad d\sigma_i > 0 \quad (3.7)$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то $d\mu_{ij}^{st} = 0$;

$\rho_{D1}(\mu_\sigma)$, $\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma)$, $\rho_{D2}(\mu_\sigma)$, $\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma)$ – материальные функции, определяющие уравнение диаграммы прямого превращения

$$\varepsilon_i^{ph} = \rho_{D1}(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) \quad (3.8)$$

и диаграммы мартенситной неупругости

$$\varepsilon_i^{st} = \rho_{D2}(\mu_\sigma) \varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma) \quad (3.9)$$

В (3.5) T, t, t_σ – температура и безразмерные параметры температуры, соответственно, независящий и зависящий от действующих напряжений; в (3.5), (3.6) M_s^0, M_f^0 – характерные температуры начала и окончания прямого фазового превращения в отсутствие напряжений, M_s^σ – температура начала прямого фазового превращения при наличии напряжений; ΔS – объемная плотность энтропии перехода из мартенситной в аустенитную фазу.

4. Материальные функции и постоянные для никелида титана. Зависимость входящих в приведенную выше систему определяющих соотношений материальных функций от параметра вида напряженного состояния μ_σ исследована в настоящее время недостаточно. Однако для решения рассматриваемой задачи надо знать значения функций только для двух значений $\mu_\sigma = -1$ (внутреннее давление) и $\mu_\sigma = 1$ (внешнее давление). Такие же значения параметра μ_σ характерны для случая одноосного нагружения, соответственно при сжатии и растяжении. Поскольку величина μ_σ является в рамках рассматриваемой модели единственным параметром вида напряженного состояния, от которого зависит процесс прямого превращения, то для решения поставленных задач достаточно иметь значения всех материальных функций только для случаев одноосного растяжения и сжатия. Рассматривается равноатомный поликристаллический изотропный никелид титана, модули Юнга и коэффициент Пуассона которого имеют значения [28]

$$E_a = 84 \text{ ГПа}, \quad E_m = 28 \text{ ГПа}, \quad \nu_a = \nu_m = 0.3$$

В [29] приведены результаты экспериментального исследования образцов из никелида титана на прямое превращение под действием постоянных напряжений и на нагружение в режиме мартенситной неупругости для случаев одноосного растяжения и сжатия. Получены аппроксимации диаграмм прямого превращения и мартенситной неупругости. Установлено, что для аппроксимации диаграммы прямого превращения (3.8) вполне приемлемой по точности и в то же время достаточно простой является экспоненциальная зависимость:

$$\varphi_1(\sigma_i, \mu_\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_i}{\sigma_{10}(\mu_\sigma)}\right), \quad (4.1)$$

причем для равноатомного никелида титана при одноосном сжатии $\sigma_{10}(-1) = 185.7$ МПа, $\rho_{D1}(-1) = 0.0742$, а при одноосном растяжении $\sigma_{10}(+1) = 322.6$ МПа, $\rho_{D1}(+1) = 0.1047$.

Наилучшей аппроксимацией диаграммы мартенситной неупругости никелида титана (3.9) в [29] признана зависимость, использующая интегральную функцию гамма-распределения:

$$\varphi_2(\sigma_i, \mu_\sigma) = \Phi\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{20}(\mu_\sigma)}, \alpha(\mu_\sigma)\right), \quad \Phi(x, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \xi^{\alpha(\mu_\sigma)-1} \exp(-\xi) d\xi, \quad (4.2)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция. Для равноатомного никелида титана методом наименьших квадратов найдены следующие значения параметров зависимостей (3.9), (4.2):

$$\begin{aligned} \rho_{D2}(-1) &= 0.02, \quad \sigma_{20}(-1) = 18 \text{ МПа}, \quad \alpha(-1) = 16.08 \\ \rho_{D2}(+1) &= 0.0608, \quad \sigma_{20}(+1) = 27.4 \text{ МПа}, \quad \alpha(+1) = 6.45 \end{aligned}$$

Характерные температуры прямого превращения принимались равными $M_s^0 = 313 \text{ К}$, $M_f^0 = 293 \text{ К}$, величина энтропии перехода $\Delta S = 0.32$ МПа/К, что соответствует равноатомному никелиду титана. Функции (4.1), (4.2) и приведенные выше

значения параметров использовались для получения описанных ниже результатов решения задач.

5. Система определяющих соотношений, разрешенная относительно приращений напряжений. Приведенная выше система определяющих соотношений СПФ разрешена относительно приращений деформаций. Для получения матрицы жесткости отдельных конечных элементов и их ансамбля необходимо разрешить эту систему относительно приращений напряжений. В работах [30–32] для конечно-элементного анализа поведения элементов из СПФ при прямом фазовом превращении использовалась численная методика такого обращения, что приводит к увеличению времени счета. В [33] изложена методика аналитического обращения определяющих соотношений объединенной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [34], не учитывающей свойства зависимости процесса деформирования СПФ от вида напряженного состояния. В данной работе с использованием аналогичного подхода получены следующие формулы аналитического обращения определяющих соотношений варианта (3.1) – (3.6) модели нелинейного деформирования СПФ [27], учитывающей влияние вида напряженного состояния на процесс деформирования СПФ:

$$d\sigma_{ij} = \frac{1}{3}K\delta_{ij}d\varepsilon_{kk} + 2Gd\varepsilon'_{ij} - (2GA_{ij} + k\delta_{ij})(mdt + pd\varepsilon_{kk}) - \frac{3G(\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} - f_3(mdt + pd\varepsilon_{kk}))}{\sigma_i + 3G(mf_5 + f_4)} \times [2G(A_{ij}n + B_{ij}) + nk\delta_{ij}] \quad (5.1)$$

$$\text{Здесь } k = KB, f_3 = \frac{1}{3} \frac{\Delta G \sigma_i^2}{G_a G_m} + \rho_{D1} \sigma_i \varphi_1, f_4 = \rho_{D2} \sigma_i q \varphi_2', f_5 = f_1 f_3,$$

$$A_{ij} = \sigma'_{ij} \left(\frac{\Delta G}{2G_a G_m} + \frac{3}{2} \frac{\rho_{D1} \varphi_1}{\sigma_i} \right), B_{ij} = \frac{3}{2} \rho_{D2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \varphi_2',$$

$$m = \frac{M}{R}, n = \frac{N}{R}, p = \frac{PK}{R}, R = \frac{1 + 3B^2 K(q)M}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)},$$

$$M = \pi(1 - q) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi t \sigma}{2} \right), N = Mf_1(\sigma_i), P = Mf_2(\sigma_{kk}),$$

$$f_1(\sigma_i) = \frac{\rho_{D1}(\varphi_1 + \sigma_i \varphi_1') + \Delta G \sigma_i / (3G_a G_m)}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}, f_2(\sigma_{kk}) = \frac{B}{\Delta S(M_s^0 - M_f^0)}$$

В приведенных выше формулах штрихом функций φ_1 и φ_2 обозначены их производные по первому аргументу σ_i .

Дифференциальное условие осуществления прямого фазового превращения, проверяемое на каждом шаге процесса, сводится к выполнению неравенства

$$dq = mdt + pd\varepsilon_{kk} + n \frac{3G(\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} - mf_3 dt - pf_3 d\varepsilon_{kk})}{\sigma_i + 3G(mf_5 + f_4)} > 0$$

Дифференциальное условие осуществления структурного перехода, проверяемое на каждом шаге процесса, сводится к выполнению неравенства

$$\sigma'_{ij}d\varepsilon'_{ij} > mdt + pd\varepsilon_{kk}$$

Соотношения (5.1) позволяют обычным путем получить матрицы жесткости конечных элементов, связывающие приращения узловых смещений и приращения уз-

ловых сил, а также общую матрицу жесткости системы конечных элементов, позволяющую решить задачу на каждом шаге уменьшения температуры процесса прямого превращения.

На основе определяющих соотношений (5.1) построена пользовательская модель, интегрированная в конечно-элементный комплекс Simulia Abaqus посредством процедуры UMAT [30,35,36]

6. Верификация численной процедуры. Верификация численной процедуры проведена на модельных задачах с однородным напряженно-деформируемым состоянием, имеющих решение, сводящееся к одномерной квадратуре. Рассматривается общее линейное по времени пропорциональное нагружение

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* (1 + \lambda_1 t) \quad (6.1)$$

В (6.1) σ_{ij}^* – постоянный тензор, $\lambda_1 > 0$. Тогда для девиатора напряжения σ'_{ij} выполняется

$$\sigma'_{ij} = (1 + \lambda_1) \sigma_{ij}^{*'}, \quad \sigma_{ij}^{*'} = \sigma_{ij}^* - \frac{1}{3} \sigma_{kk}^* \delta_{ij} \quad (6.2)$$

Вводя постоянный девиатор единичной интенсивности $\sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{*'} / \sigma_i^*$, где $\sigma_i^* = \sqrt{3\sigma_{ij}^{*'} \sigma_{ij}^{*'}/2}$, получаем

$$\sigma'_{ij} = \sigma_i^* (1 + \lambda_1 t) \sigma_{ij}^0, \quad \sigma_i = \sigma_i^* (1 + \lambda_1 t) \quad (6.3)$$

Объемным эффектом реакции термоупругого фазового превращения пренебрегается, фазово-структурная деформация является девиатором, который также (в силу изложенной в разд. 2 системы определяющих соотношений) меняется пропорционально:

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \varepsilon \varepsilon_{ij}^0, \quad \varepsilon_{ij}^0 = \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0, \quad \frac{2}{3} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 = 1, \quad |\varepsilon| = \varepsilon_i^{phst} \quad (6.4)$$

Одновременно с изменением напряжений (6.1) происходит линейное по времени уменьшение температуры через интервал температур прямого термоупругого фазового превращения

$$T = M_S \sigma_i^* - kt \quad (6.5)$$

Процесс заканчивается в тот момент времени t_f , когда снижающаяся температура достигает значения температуры конца прямого фазового перехода, соответствующей интенсивности напряжения σ_{ij} , определяемой по второй формуле (6.3) для $t = t_f$.

Задача решается в рамках системы определяющих соотношений для СПФ, приведенной в разд. 2 и с материальными функциями и константами, значение которых приведено в разд. 3. Подстановка (6.2) и (6.4) в (3.2), (3.3) дает дифференциальное соотношение, связывающее σ , ε и q .

$$d\varepsilon = \text{sgn}(\sigma) [\rho_{D1} \varphi_1(|\sigma|) dq + \rho_{D2} q_{st} \varphi_2'(|\sigma|) d(|\sigma|)] \quad (6.6)$$

Для любого процесса пропорционального изменения девиатора напряжений (6.2) знак постоянного направляющего девиатора σ_{ij}^0 можно выбрать таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\sigma > 0$, то есть $\sigma_i = \sigma$. При этом, согласно (6.4) (6.6), с учетом того, что $\varphi_1 \geq 0$, $\varphi_2' \geq 0$, $\rho_{D1} > 0$, $\rho_{D2} > 0$, а для прямого превращения $dq > 0$ получается $d\varepsilon \geq 0$, можно считать, что $\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. В дальнейшем будут рассматриваться процессы, в которых интенсивность напряжений монотонно возрастает, то есть выполняется условие активного нагружения $d\sigma_i > 0$. Тогда соотношение (6.6) можно переписать в виде

$$d\varepsilon_i^{phst} = \rho_{D1} \varphi_1(\sigma_i) dq + \rho_{D2} q \varphi_2'(\sigma_i) d(\sigma_i) \quad (6.7)$$

Для сведения вычислений к определению одного интеграла в правой части (6.7) проводятся следующие преобразования

$$d\varepsilon_i^{phst} = [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i)]dq + d[\rho_{D2}q\varphi_2(\sigma_i)] \quad (6.8)$$

Интегрируя (6.8) для описания процесса прямого превращения из полностью мартенситного состояния при монотонно возрастающем значении σ_i , с учетом того, что в начальной точке процесса $q = 0$, получаем

$$\varepsilon_i^{phst} = \int_0^q [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i)]dq_1 + \rho_{D2}q\varphi_2(\sigma_i) \quad (6.9)$$

Поскольку в силу рассматриваемого процесса все функции, входящие в (6.9), являются функциями времени, то в интеграле производится замена переменной интегрирования q_1 на функцию времени

$$\varepsilon_i^{phst} = \int_0^{q(t)} [\rho_{D1}\varphi_1(\sigma_i(t)) - \rho_{D2}\varphi_2(\sigma_i(t))] \frac{dq}{dt} dt + \rho_{D2}q(t)\varphi_2(\sigma_i(t)) \quad (6.10)$$

Формула для производной dq/dt получается с учетом зависимостей (6.3) и (6.5), а также определяющих соотношений (3.4) и (3.6). После определения зависимости от времени интенсивности фазово-структурной деформации по формуле (6.10), компоненты фазово-структурной деформации вычислялись по формуле (6.4), упругие деформации определялись по закону Гука с учетом переменности модулей при фазовом переходе по формулам (3.1). На рис. 1 сплошными линиями представлены графики полученных таким образом зависимостей деформаций $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ и ε_z от температуры для случая $\sigma_{x0} = \sigma_{y0} = -100$ МПа, $\sigma_{xf} = \sigma_{yf} = -150$ МПа, $\sigma_{r0} = \sigma_{rf} = 0$, $\sigma_{z0} = \sigma_{zf} = 0$, что соответствует значению параметра вида напряженного состояния $\mu_\sigma = 1$. Там же штриховыми линиями изображены результаты полученного с помощью разработанной процедуры численного решения задачи о деформировании цилиндра, находящегося в состоянии равнодвухосного сжатия по граням, перпендикулярным осям x и y в отсутствии внешней нагрузки по граням, перпендикулярным оси z . Как видно, получено неплохое совпадение результатов численного решения и решения в квадратурах.

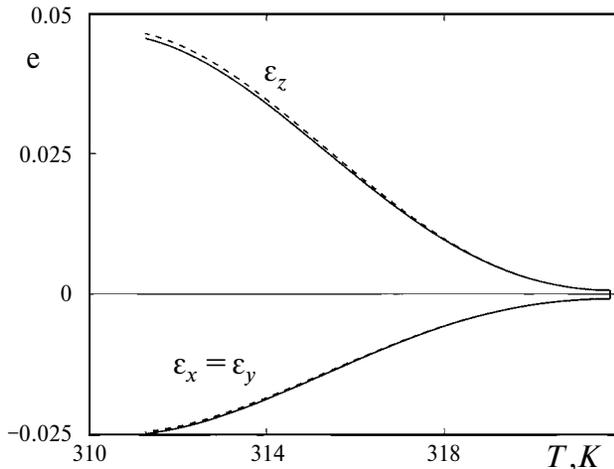


Рис. 1.

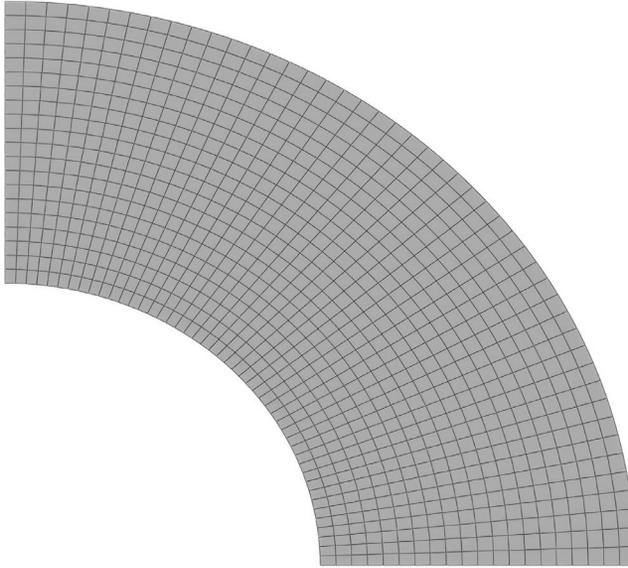


Рис. 2.

7. Результаты решения задач для толстостенной сферы. С помощью разработанной пользовательской модели материала получены решения задач об изменении напряженно-деформированного и фазового состояния толстостенной сферы из СПФ при охлаждении через интервал прямого термоупругого фазового превращения под действием внутреннего или внешнего постоянного давления. Внешний радиус рассматриваемой сферической оболочки принят равным $b = 10$ мм, внутренний – $a = 5$ мм, величина давления $P = 100$ МПа. Температура сферической оболочки снижается с 336 К до 293 К. Считается, что охлаждение сферы происходит медленно, и выделяющееся латентное тепло прямого фазового превращения успевает рассеяться в окружающую среду. Поэтому температура в каждый момент времени равномерно распределена по сечению оболочки. Решение задачи получено с учетом влияния действующих напряжений на характерные температуры фазовых переходов.

При решении задачи рассматривались следующие термомеханические процессы:

1. Изотермическое упругое деформирование сферической оболочки из СПФ монотонно возрастающим внутренним или внешним давлением в аустенитном фазовом состоянии. Значение достигнутого давления фиксируется. Фиксированная температура T_0 и максимальное значение внешней нагрузки подобраны таким образом, чтобы величина T_0 была в точности равна M_s^σ для напряженного состояния, внутренней поверхности оболочки в момент приложения максимального давления. Таким образом, эффект сверхупругости [1,10,11] при начальном нагружении места не имеет.
2. Пошаговое охлаждение сферической оболочки под действием постоянного давления через интервал температур прямого мартенситного превращения от температуры начала прямого превращения на внутренней поверхности оболочки до температуры окончания прямого превращения в точках внешней поверхности оболочки. В процессе охлаждения происходит изменение упругих деформаций, связанное с изменением упругих модулей при фазовом переходе, накопление деформаций прямого превращения по фазовому механизму, подчиняющееся второму уравнению (3.2), и накопление деформаций по структурному механизму, подчиняющееся уравнению (3.3) в случае выполнения условий активного нагружения

(3.7), проверяемых на каждом шаге процесса охлаждения.

Задача решается в осесимметричной конечно-элементной постановке с конечными элементами в форме торов (двумерные осесимметричные конечные элементы типа КЭ СЗХ4Н [37]). На рис. 2 приведена расчетная область в виде одной четвертой части сечения сферы, которая разделена на четырехугольники, каждый из которых является сечением соответствующего торообразного осесимметричного конечного элемента. На горизонтальной и вертикальной границах области выполняются условия симметрии.

Ранее задачи о перераспределении напряжений при прямом превращении в случае действия изгибающих или крутящих моментов [16,17] решались без учета структурного механизма деформирования. Поэтому далее особое внимание обращается на влияние учета структурного деформирования на результат решения. Поэтому в приведенных ниже графиках сплошные кривые соответствуют учету упругого, фазового и структурного деформирования, а штриховые – решению, где учитывается, наряду с упругим, только фазовый механизм. Из каждой пары приведенных ниже рисунков: а соответствует случаю действия внутреннего давления; б – внешнего давления. Напряжения отложены по осям графиков в МПа, температура – в Кельвинах.

На рис. 3–5 линии 1 построены для точек, находящихся на внешней поверхности сферы, линии 2 – для $r = 0.5(a + b)$, линии 3 – для точек внутренней поверхности. На рис. 3 приведены графики зависимости интенсивности напряжений от температуры, иллюстрирующие процедуру принятия решения о включении или выключении структурного механизма деформирования. Наибольшая интенсивность напряжений в каждый момент времени как при внутреннем, так и при внешнем давлении наблюдается в точках внутренней границы тела. Однако ни при начальном нагружении в аустенитном состоянии до значения интенсивности напряжения σ_{\max} (правые вертикальные отрезки на рис. 3), ни в последующем процессе падения σ_i и последующем возрастании этой величины до значения σ_{\max} структурный механизм деформации вблизи внутренней поверхности (кривые 3) не работает из-за нарушения условий (3.7). Структурный механизм включается в той точке процесса прямого превращения, в которой возрастающая интенсивность напряжений достигает значения σ_{\max} (точка излома на линии 3 рис. 3, б). В то же время для точек внешней поверхности и промежуточной (линии 1 и 2) интенсивность напряжений возрастает с самого начала прямого превращения и до точек максимума напряжений, после этого монотонно убывает. Поэтому на участке монотонного роста σ_i от начала фазового перехода и до точки максимума на линиях 1 и 2 рис. 3 структурный переход имеет место, а после точки максимума и до завершения фазового перехода отсутствует. Наблюдаемая

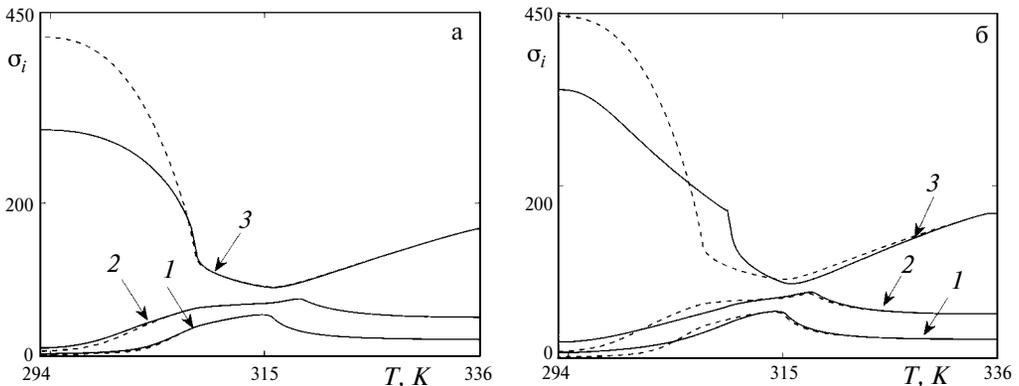


Рис. 3.

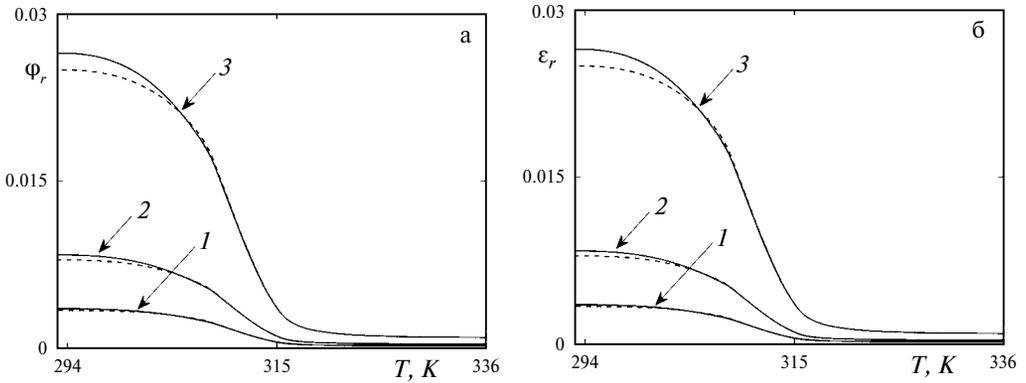


Рис. 4.

разница между сплошными и пунктирными линиями 1 и 2 после точек максимума связана с тем обстоятельством, что структурный переход происходит в точках с большими значениями радиальной координаты (линии 3).

На рис. 4, а, б и 5, а, б представлены графики зависимостей модулей кольцевых (рис. 4) и радиальных (рис. 5) деформаций для случая (а) – внутреннего и (б) – внешнего давления от температуры. Согласно приведенным рисункам, в процессе прямого превращения во всех сечениях наблюдается существенный рост модулей деформаций и модулей значений радиальных смещений, отнесенных к радиальной координате соответствующих точек, особенно заметный на внутренней поверхности оболочки. Учет структурного перехода приводит к дополнительному росту деформаций и смещений, особенно существенному на завершающей стадии прямого превращения и наиболее значительному в случае действия внешнего давления. Влияние структурного перехода более значительно для радиальных деформаций, чем для кольцевых.

На рис. 6, а, б и 7, а, б приведены эпюры радиальных σ_r и кольцевых σ_φ напряжений соответственно. Здесь $\xi = r / b$ – безразмерная радиальная координата. Кривые 1 соответствуют упругому решению задачи (материал оболочки находится в аустенитном фазовом состоянии), кривые 2 – этапу охлаждения в тот момент, когда фронт начала фазового перехода достиг внешней поверхности муфты, кривые 3 – этапу охлаждения, когда все сечение оболочки полностью перешло в мартенситную фазу

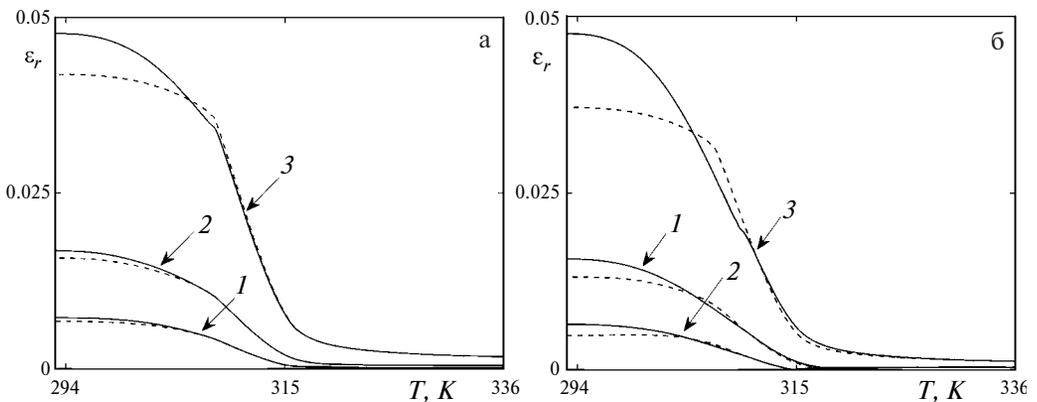


Рис. 5.

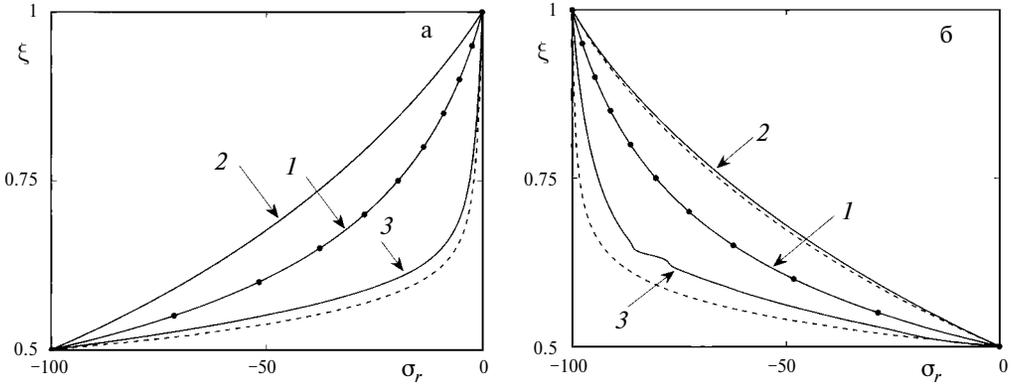


Рис. 6.

и прямое превращение завершено, точки – аналитическому решению для упругого поведения (нанесены для проверки численного решения).

Перераспределение радиальных напряжений ограничено заданным внешним давлением на нагруженном конце интервала изменения радиальной координаты и нулевым значением на ненагруженном конце. На всех этапах фазового перехода зависимость σ_r от ξ является монотонной. На первом этапе процесса фазового перехода от его начала и до выхода фронта начала фазового превращения на внешнюю границу сферы величина $|\sigma_r|$ во всех точках тела в случае внутреннего давления растет (рис. 6, а), а в случае внешнего давления падает (рис. 6, б). На втором этапе фазового перехода, от выхода фронта начала превращения на внешнюю поверхность и до выхода на ту же поверхность фронта завершения фазового перехода, величина $|\sigma_r|$ уменьшается для случая внутреннего давления (увеличивается для случая внешнего давления), принимая в последней точке этого интервала наименьшее (наибольшее) из всех ранее достигнутых в этой точке значений. В случае неучета структурного перехода эта последняя тенденция усиливается.

Перераспределение кольцевых напряжений по сечению (рис. 7) при фазовом переходе не ограничено фиксированными величинами граничных значений этой величины и поэтому более существенно, чем у радиальных напряжений. Если распределение упругих кольцевых напряжений является достаточно равномерным (различие крайних значений не превосходит 50 МПа), то к моменту выхода фронта начала превращения на внешнюю границу тела модули кольцевых напряжений в точках

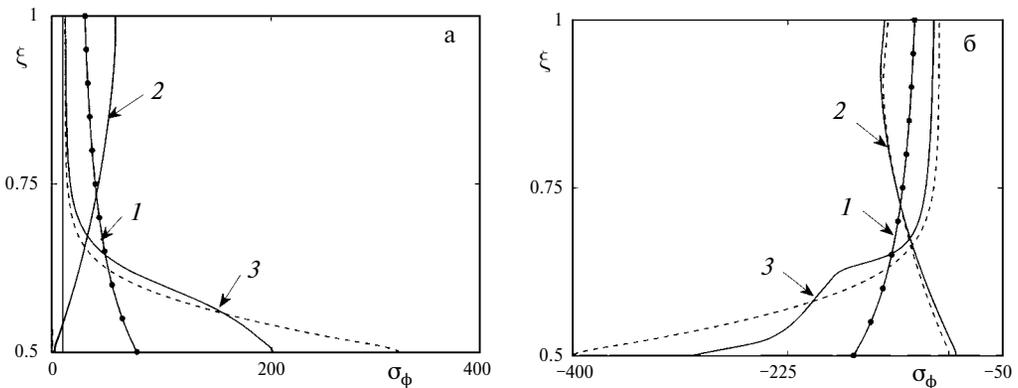


Рис. 7.

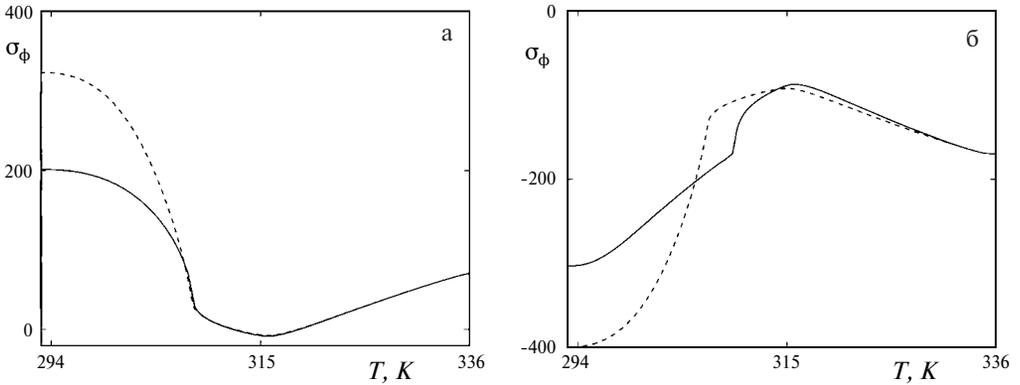


Рис. 8.

этой границы несколько возрастают, а в точках внутренней границы существенно убывают, так что для случая действия внутреннего давления величина σ_ϕ даже меняет знак. Это изменение знака не приводит к изменению значения μ_σ , поскольку знак меняют одновременно два одинаковых значения напряжения $\sigma_\phi = \sigma_\psi$, а знак $\sigma_r < \sigma_\phi$ (рис. 6, а и 7, а), которое было справедливо и до изменения знака кольцевых напряжений. После этого, на втором этапе фазового перехода, наблюдается противоположная тенденция – модули кольцевых напряжений на внутренней границе резко возрастают, а на внешней умеренно убывают. В момент, когда фронт завершения фазового перехода достигает внешней границы тела, значения σ_ϕ на внутренней границе превосходят те же значения для упругого решения в аустенитном состоянии более чем в два раза для случая внутреннего давления (рис. 7, а). Для случая прямого превращения под действием внешнего давления величина $|\sigma_\phi|$ на внутренней границе тела в момент завершения фазового перехода превосходит ту же величину для упругого решения, соответствующую началу процесса, чуть меньше чем в два раза. Этот эффект можно квалифицировать, как перенапряжение, вызванное фазовым переходом. Если не учитывать структурный механизм деформирования, эффект перенапряжения почти удваивается.

На рис. 8 и 9 эффекты изменения кольцевых напряжений на внутренней поверхности тела (рис. 8) сопоставлены с распределением по сечению тела параметра фазового состава (рис. 9). Согласно рис. 8, после упругого нагружения в аустенитном

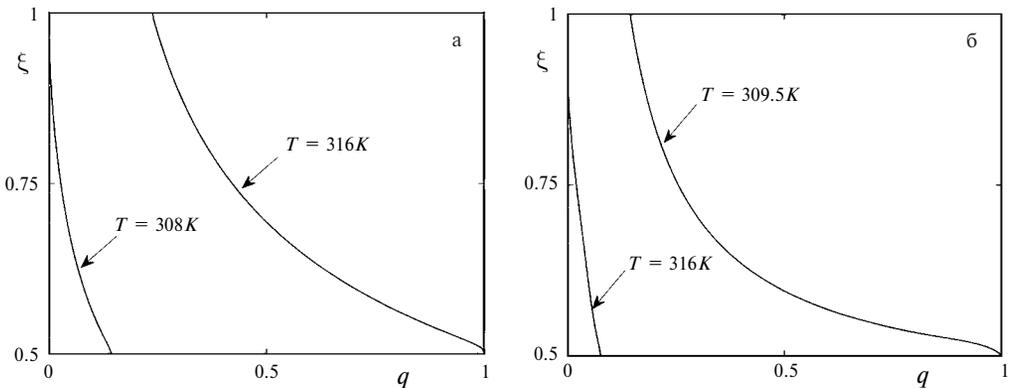


Рис. 9.

состоянии (вертикальные отрезки справа для рис. 8, а и 8, б), с начала фазового перехода и до достижения температурой значения $T = 316$ К, соответствующего выходу (рис. 9) фронта начала фазового перехода на внешнюю границу тела, величина $|\sigma_\phi|$ монотонно уменьшается до минимального значения.

При дальнейшем снижении температуры до значения $T^* = 308$ К в случае внутреннего давления или до значений $T^* = 309.5$ К в случае внешнего давления, соответствующих моменту завершения прямого превращения на внутренней границе тела, происходит умеренный рост σ_ϕ для случая внутреннего давления или ускоренный рост $|\sigma_\phi|$ для случая внешнего давления. При дальнейшем охлаждении происходит движение по материалу от внутренней границы тела к внешней границе фронта завершения фазового перехода, на котором выполняется условие $q = 1$. График зависимости σ_ϕ от T резко меняется. Для случая действия внутреннего давления медленное возрастание σ_ϕ сменяется быстрым ростом этой величины. На соответствующем графике для случая действия внешнего давления в точке $T = T^*$ наблюдается точка с резким изменением производной. В обоих случаях движение по материалу фронта завершения фазового перехода вызывает весьма существенное увеличение модуля кольцевого напряжения, которое становится еще больше, если не учитывать структурный механизм деформирования СПФ. Согласно рис. 3, в процессе движения по материалу фронта завершения фазового перехода на внутренней границе тела наблюдается резкий рост интенсивности напряжений. В то же время на внешней границе тела как в случае внутреннего, так и в случае внешнего давления в том же процессе наблюдается монотонное уменьшение интенсивности напряжений.

Закключение. На примере решения задачи о прямом термоупругом фазовом превращении в толстостенной сфере из СПФ, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления, показано, что при прямом превращении под действием постоянной внешней нагрузки происходит существенное перераспределение кольцевых напряжений и интенсивности напряжений. Кольцевые напряжения на внутренней границе сферы при полном фазовом переходе возрастают примерно в два раза по сравнению со значениями в упругом аустенином состоянии до начала фазового перехода. В случае внутреннего давления эффект перенапряжения несколько выше, чем в случае внешнего давления. Этот эффект связан с движением по материалу фронта завершения фазового перехода. Эффект перенапряжения опасен, поскольку он наблюдается в низкопрочном мартенситном фазовом состоянии. На внешней границе тела этот процесс приводит к существенному падению кольцевых напряжений по сравнению с упругими значениями в аустенитном состоянии. Учет структурного механизма деформирования СПФ несколько уменьшает эффект перенапряжения и в то же время приводит к росту деформаций и радиальных смещений, особенно на внутренней границе сферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. Л.: Изд.-во ЛГУ, 1987. 216 с.
2. *Lexcellent C. Shape-Memory Alloys Handbook*. ISTE Ltd.&Wiley&Sons Inc., 2013. 379 p.
3. *Lagoudas D. S. Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications*. Springer, 2008. 435 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47685-8>.
4. Курдюмов Г.В., Хандрос Л.Г. О термоупругом равновесии при мартенситном превращении // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. Вып. 2. С. 211–215.
5. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

7. *Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И.* Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах // *Механика полимеров*. 1971. № 1. С. 74–87.
8. *Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н.* Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории // *ПМТФ*. 1971. № 2. С. 76–82.
9. *Rabotnov Yu. N. Savorova J. V.* The non-linear hereditary-type stress-strain relations for metals // *Int. J. Solids&Struct.* 1978. V. 14. № 3. P. 173–185.
10. *Материалы с эффектом памяти формы. Т. 2 / Под ред. Лихачева В.А.* СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. 374 с.
11. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. СПб.: Наука, 1993. 471 с.
12. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука. 1988. 712 с.
13. *Волков А.Е., Кухарева А.С.* Расчет напряженно-деформированного состояния в цилиндре из TiNi при охлаждении под нагрузкой и разгрузке // *Изв. РАН. Сер. физич.* 2008. Т. 72. № 9. С. 1337–1340.
14. *Волков А.Е., Кухарева А.С.* Расчет напряженно-деформированного состояния в бесконечном цилиндре из сплава с памятью формы при охлаждении и нагреве с различными скоростями // *Мех. композ. матер. и констр.* 2009. Т. 15. № 1. С. 128–136.
15. *Волков А.Е.* Микроструктурное моделирование деформации сплавов при повторяющихся мартенситных превращениях // *Изв. РАН. Сер. физич.* 2002. Т. 66. № 9. С. 1290–1297.
16. *Мовчан А.А.* Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы // *ПМТФ*. 1998. Т. 39. № 1. С. 164–173.
17. *Мовчан А.А.* Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // *Изв. РАН. МТТ*. 2000. № 6. С. 143–154.
18. *Мовчан А.А.* Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // *ПМТФ*. 1995. Т. 36. № 2. С. 173–181.
19. *Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A.* Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state // *Material Sci. Res. Int. Special Tech. Pub.* 2001. V. 2. P. 327–334.
20. *Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P.* Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys // *J. Mech.&Phys. Solids*. 2002. V. 50. P. 2717–2735.
21. *Volkov A.E., Emelyanova E.V., Evard M.E., Volkova N.A.* An explanation of phase deformation tension–compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling // *J. Alloys&Comp.* 2013. V. 577. P. 127–130.
22. *Ломакин Е.В., Работнов Ю.Н.* Соотношения теории упругости для изотропного разномодульного тела // *Изв. АН СССР. МТТ*. 1978. № 6. С. 29–34.
23. *Cisse C., Zaki W., Zineb T.B.* A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // *Int. J. Plasticity*. 2016. V. 76. P. 244–284.
24. *Gu X., Zhang W., Zaki W., Moumni Z.* An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading // *Smart Mater. Struct.* 2017. V. 26. Art. No. 095047.
25. *Tikhomirova K.* Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model // *Materials Today: Proc.* 2017. № 4. P. 4626–4630.
26. *Тихомирова К.А.* Феноменологическое моделирование фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы. Одномерный случай // *Выч. мех. сплошных сред*. 2018. Т. 11. № 1. С. 36–50.
27. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 3. С. 118–130.
28. *Хачин В.Н., Пушин В.Г., Кондратьев В.В.* Никелид титана: структура и свойства. М.: Наука, 1992. 160 с.
29. *Мовчан А.А., Казарина С.А., Сильченко А.Л.* Экспериментальная идентификация модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Деформ. и разруш. матер.* 2018. № 12. С. 2–11.
30. *Nushtaev D. V., Zhavoronok S. I.* Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions // *IFAC Papers OnLine*. 2018. V. 51. № .2. P. 873–878.
31. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions // *Adv. Struct. Mater.* 2019. V. 110. P. 493–524.

32. Zhavoronok S.I. On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements // AIP Conf. Proc. Ser. "Int. Conf. Comput. Meths. in Sci.&Engng. 2020". 2021. P. 120004. <https://doi.org/10.1063/5.0047900>
33. Movchan A.A. Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys // AIP Conf. Proc. 2022. V. 2611. Iss. 1. Art. No. 100005. <https://doi.org/10.1063/5.0120427>
34. Мовчан А.А. Феноменологическая модель изменения фазово-структурных деформаций в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. 2020. № 4. С. 140–151.
35. Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr. Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities // Arch. Appl. Mech. 2006. V. 7. P. 133–144.
36. Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A. Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection // J. Intell. Mater. Syst.&Struct. 2015. V. 26. № 5. P. 1–19.
37. Золочевский А.А., Беккер А.А. Введение в ABAQUS. Харьков: 2011. 49 с.

The Effect of Stress Redistribution in a Thick-Walled Sphere Made of Shape Memory Alloy at Direct Phase Transformation under Constant Pressure

A. A. Movchan^{a,#}, A. V. Sharunov^{b,##}

^a*Institute of Applied Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

^b*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: movchan47@mail.ru,*

^{##}*e-mail: aleksej-sharunov@yandex.ru*

The coupled problems of changing the stress-strain and phase state in a thick-walled spherical shell made of a shape memory alloy, the material of which undergoes a direct thermoelastic phase transformation associated with a decrease in temperature uniformly distributed over the entire volume of the material under the action of constant internal or external pressure, are solved. The effects of significant overstressing of the body layers adjacent to the inner boundary and significant unloading of the layers adjacent to the outer boundary associated with the movement of the phase transition completion front through the material were found.

Keywords: shape memory alloys, thick walled sphere, direct transformation, stress redistribution

REFERENCES

1. Lihachev V.A., Kuz'min S.L., Kamenceva Z.P. Shape Memory Effect. Leningrad: Izd.-vo LGU, 1987. 216 p. (in Russian)
2. Lexcellent C. Shape-Memory Alloys Handbook. ISTE Ltd.; Wiley&Sons Inc., 2013. 379 p.
3. Lagoudas D. S. Shape Memory Alloys Modeling and Engineering Applications. Springer, 2008. 435 p. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-47685-8>.
4. Kurdyumov G.V., Handros L. G. On thermoelastic equilibrium in martensitic transformation // Dokl. Phys., 1949, vol. 66, iss. 2, pp. 211–215. (in Russian)
5. Rabotnov Yu. N. Creep Problems in Structural Members. Moscow: Nauka, 1966. 752 p. (in Russian)
6. Rabotnov Yu. N. Introduction to Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
7. Rabotnov Yu.N., Papernik L. Kh., Stepanychev E.I. Application of nonlinear theory of heredity to the description of temporal effects in polymeric materials. // Polimer Mech., 1971, vol. 7, no. 1, pp. 63–73.
8. Dergunov N.N., Papernik L. Kh., Rabotnov Yu. N. Analysis of behavior of graphite on the basis of nonlinear heredity theory // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1971, no. 1, pp. 235–240.
9. Rabotnov Yu. N. Suvorova J. V. The non-linear hereditary-type stress-strain relations for metals // Int.

- J. Solids&Struct., 1978, vol. 14, no. 3, pp. 173–185.
10. Materials with Shape Memory Effect: Vol. 2 / Ed. by Likhachev V.A. St. Petersburg: Izd-vo NIIH SPbGU, 1998. 374 p. (in Russian)
 11. *Lihachev V.A., Malinin V.G.* Structural and Analytical Theory of Strength. St. Petersburg: Nauka, 1993. 471 p. (in Russian)
 12. *Rabotnov Yu. N.* Mechanics of a Straining Solid. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
 13. *Volkov A.E., Kukhareva A. S.* Calculation of the stress-strain state of a TiNi cylinder subjected to cooling under axial force and unloading // Bull. of the RAS: Physics, 2008, no. 11, pp. 1267–1270.
 14. *Volkov A.E., Kukhareva A. S.* Calculation of the stress-strain state in an infinite shape memory alloy cylinder during cooling and heating at different speeds // Mech. Compos. Mater.&Const., 2009, vol. 15, no.1, pp. 128–136. (in Russian)
 15. *Volkov A. E.* Microstructural modeling of alloy deformation under repeated martensitic transformations // Izv. RAS. Ser. Phys., 2002, vol. 66, no. 9, pp. 1290–1297. (in Russian)
 16. *Movchan A. A.* Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1998, vol. 39, no. 1, pp. 143–151.
 17. *Movchan A. A.* Torsion of prismatic beams from shape memory alloys // Mech. of Solids, 2000, no. 6, pp. 119–128.
 18. *Movchan A. A.* The Selection of the phase transition diagram approximation and model of disappearing of martensite crystals for shape memory alloys // J. Appl. Mech.&Tech. Phys., 1995, vol. 36, no. 2, pp. 300–306.
 19. *Raniecki B., Tanaka K., Ziolkowski A.* Testing and modeling of NiTi SMA at complex stress state // Mater. Sci. Res. Int. Spec. Techn. Pub., 2001, vol. 2, pp. 327–334.
 20. *Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P.* Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys // J. Mech.&Phys. Solids, 2002, vol. 50, pp. 2717–2735.
 21. *Volkov A.E., Emelyanova E. V., Evard M.E., Volkova N.A.* An explanation of phase deformation tension-compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling // J. Alloys&Comp., 2013, vol. 577, pp. 127–130.
 22. *Lomakin E.V., Rabotnov Yu.N.* A theory of elasticity for an isotropic body with different moduli in tension and compression // Mech. of Solids, 1978, vol. 13, no. 6, pp. 825–831.
 23. *Cisse C., Zaki W., Zineb T.B.* A review of constitutive models and modeling techniques for shape memory alloys // Int. J. Plasticity, 2016, vol. 76, pp. 244–284.
 24. *Gu X., Zhang W., Zaki W., Mounni Z.* An extended thermomechanically coupled 3D rate-dependent model for pseudoelastic SMAs under cyclic loading // Smart Mater. Struct., 2017, vol. 26, art. no. 095047.
 25. *Tikhomirova K.* Computation of phase and structural deformations in shape memory alloys. One-dimensional model // Mater. Today: Proc., 2017, no. 4, pp. 4626–4630.
 26. *Tikhomirova K. A.* Phenomenological modeling of phase and structural deformations in shape memory alloys. The one-dimensional case // Comput. Mech. Contin. Media, 2018, vol. 11, no. 1, pp. 36–50. (in Russian)
 27. *Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L. G.* Micromechanical model of non-linear deformation of shape memory alloys under phase and structure transformation // Mech. of Solids, 2010, vol. 45, no. 3, pp. 406–416.
 28. *Hachin V.N., Pushin V.G., Kondrat'ev V.V.* Titanium Nickelide: Structure and Properties. Moscow: Nauka, 1992. 160 p. (in Russian)
 29. *Movchan A.A., Kazarina S.A., Sil'chenko A. L.* Experimental identification of a nonlinear deformation model for a shape memory alloy during phase and structural transformations // Russ. Metall., 2019, no. 4, pp. 301–308.
 30. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Dynamics of martensite phase transitions in shape memory beams under buckling and postbuckling conditions // IFAC Papers OnLine, 2018, vol. 51, no. 2, pp. 873–878.
 31. *Nushtaev D.V., Zhavoronok S. I.* Abnormal buckling of thin-walled bodies with shape memory effects under thermally induced phase transitions // Adv. Struct. Mater., 2019, vol. 110, pp. 493–524.
 32. *Zhavoronok S. I.* On the coupled model of the thermoelastic behavior of a shape memory alloy in intrinsic variables and some statement of buckling problems of shape memory elements // AIP Conf. Proc. Ser. "Int. Conf. of Comput. Meths. in Sci.&Engng. 2020", 2021, pp. 120004. <https://doi.org/10.1063/5.0047900>

33. *Movchan A. A.* Method of analytical inverting of nonlinear constitutive relations of the combined model of phase and structural deformation of shape memory alloys // AIP Conf. Proc., 2022, vol. 2611, iss. 1, art. no. 100005.
<https://doi.org/10.1063/5.0120427>
34. *Movchan A. A.* Phenomenological model of changes in phase-structural deformations in shape memory alloys // Mech. of Solids, 2020, vol. 55, no. 4, pp. 573–583.
35. *Banderia E., Savi M., Monteiro P. Jr.* Finite element analysis of shape memory alloy adaptive trusses with geometrical nonlinearities // Arch. Appl. Mech., 2006, vol. 76, pp. 133–144.
36. *Alipour A., Kadkhodaei M., Ghaei A.* Finite element simulation of shape memory alloy wires using a user material subroutine: Parametric study on heating rate, conductivity, and heat convection // J. Intell. Mater. Syst.&Struct., 2015, vol. 26, iss. 5, pp. 1–19.
37. *Zolocheskiy A.A., Bekker A.A.* Introduction to ABAQUS. Har'kov: 2011. 49 p. (in Russian)