

УДК 539.3

**РАЗВИТИЕ ВЗГЛЯДОВ Ю.Н. РАБОТНОВА НА КРИТЕРИИ  
ПРОЧНОСТИ КОМПОЗИТОВ**© 2024 г. А. Н. Полилов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия

\*e-mail: polilovan@mail.ru

Поступила в редакцию 20.12.2023 г.

После доработки 31.01.2024 г.

Принята к публикации 10.02.2024 г.

Кроме известных фундаментальных работ Ю.Н. Работнова в области наследственной упругости и теории ползучести, одной из сторон его научной деятельности стала механика композитов и, в частности, предложенный им новый класс критериев прочности конструктивно анизотропных композитов. Главная особенность подхода Юрия Николаевича — это не попытка построить единую гладкую предельную поверхность в пространстве напряжений, а учет реальных механизмов разрушения, носящих, как правило, направленный характер. Сейчас подобные подходы становятся определяющими в расчетных алгоритмах, моделирующих процесс разрушения с учетом деградации упругих и прочностных свойств, но в период первых публикаций Ю.Н. Работнова они были пионерскими и вызывали определенные дискуссии. Развитие и применение некоторых предложенных Работновым типов критериев прочности волокнистых композитов при растяжении, сжатии и сложном напряженном состоянии обсуждены в данной юбилейной статье.

*Ключевые слова:* композитный материал, армированные волокнами пластики, механика разрушения, усталость, расслоение, расщепление

DOI: .10.31857/S00328235240020034 EDN: XVBJVI

**1. Введение.** Академик Юрий Николаевич Работнов, безусловно, относится к плеяде выдающихся ученых-механиков XX столетия [1]. К наиболее известным областям, в которых Ю.Н. Работновым были получены классические фундаментальные результаты, относятся техническая теория оболочек (с анализом краевого эффекта), теория наследственной упругости (1948 г.) [2–4] в приложении к проблеме ползучести и механика повреждаемости, введение параметра поврежденности [5]. Полученные им результаты мирового уровня привели к тому, что Такео Ёкобори, создавая Международный конгресс по разрушению (ICF), пригласил Работнова на должность одного из директоров Конгресса в ранге вице-президента. В конце жизни Юрий Николаевич получил выкованное на медном листе свидетельство признания его Почетным президентом этого Конгресса.

После одной из конференций Конгресса в Мюнхене (1972 г.) Юрий Николаевич окончательно увлекся механикой разрушения [6], и на Международной конференции в МГУ заявил, что не теории упругости, пластичности, ползучести, а именно — механика разрушения и механика композитов являются наиболее интересными и перспективными областями механики твердого тела. Тогда же по инициативе Работнова

начался перевод и издание фундаментальных коллективных монографий [7,8], сыгравших огромную роль в развитии этих областей науки в нашей стране.

Нельзя не отметить педагогическую ценность его учебников [9,10], первый из которых Валентин Валентинович Новожилов в приветственном письме назвал “жемужиной среди многочисленных учебников по сопротивлению материалов”, а второй по праву можно считать лучшей (вероятно, в мире) энциклопедической монографией по механике твердого тела.

Возможно, это счастливая случайность, но привезенная С.Т. Милейко из Англии книга [11] чрезвычайно понравилась Юрию Николаевичу и была мгновенно переведена и издана. Его заинтересовала задача Гордона об остановке трещины границей раздела [12], и он включил полученный результат в монографию [10]. А далее — развивался интерес к особым механизмам расслоения и расщепления композитов [13,14], и последняя его прижизненная статья [15] была посвящена новой модели множественного расщепления с выпучиванием, приводящим сжимаемое звено бамбука (или композитную трубу) к форме, напоминающей “китайский фонарик”.

Оригинальный взгляд имел Юрий Николаевич и на методы построения предельных поверхностей в пространстве напряжений, приводя иногда строчку Павла Когана “Я с детства не любил овал, я с детства — угол рисовал”. Работнов обосновал новый тип критериев прочности [16] (разд. 1–3), отличающийся от популярных в то время тензорно-полиномиальных критериев, и с обоснованием новых критериев он выступал и на Съезде по механике в Киеве [17], и на Конгрессе в Канаде [18], и на советско-японском симпозиуме в МГУ [19]. Это была еще одна область, которая занимала его в последние годы — механика разрушения композитов, обоснование особых видов критериев прочности конструктивно анизотропных материалов [20–23].

Последняя книга Юрия Николаевича по механике разрушения [24] была издана (и позднее — переиздана) на основе перевода его лекций с французского, которым он блестяще владел еще с детства. В 1979 г. Юрий Николаевич читал во Франции по приглашению университета Пуатье цикл лекций по механике разрушения металлов и композитов. Лекции были столь увлекательными и блестящими, что, по воспоминаниям очевидцев, слушатели (большой частью профессора, а не только студенты) часами не отпускали лектора, засыпая его бесконечными вопросами и просьбами рассказать еще, на которые Юрий Николаевич откликался, не считаясь со временем. Возможно, именно эти перегрузки и привели в скором времени к тяжелому удару, от которого он так и не смог полностью оправиться.

Книгу научного наследия [25] мы составляли только из статей, написанных его рукой (без соавторов), и поэтому все мы можем вновь и вновь насладиться не только глубокими идеями, но и его блестящим русским языком.

Цель данной юбилейной статьи — изложить некоторые идеи Ю.Н. Работнова в области механики разрушения композитов и показать их развитие в современной научной литературе.

## 2. Предельные поверхности для совместно работающих упруго-пластических структур.

Многие известные авторы (Мизес—Хилл, Малмейстер, Цай-Ву, Гольденблат—Копнов и др.) формулировали критерии прочности анизотропных материалов в виде полинома от инвариантов, представляющих собой свертки тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  с “тензорами прочности” четных рангов:  $I_1 = A_{rs}\sigma_{rs}$ ,  $I_2 = B_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}$ ,  $I = C_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn}$  и т.д.

Если ограничиться вторым инвариантом, критерий приобретает вид:

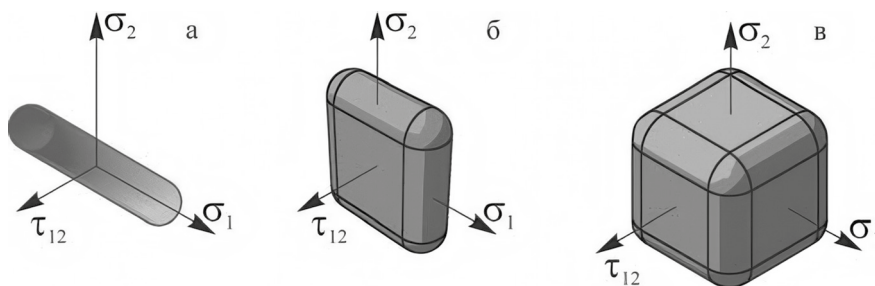
$$I_1^\alpha + I_2^\beta (+I_3^\gamma + \dots) = 1 \quad (2.1)$$

Число констант  $A_{rs}$  даже для плоского случая равно трем,  $B_{ijkl}$  — шести (в трехмерном случае 6 и 14, соответственно), и нахождение такого большого числа констант прочности из ограниченного числа опытов оказывается неустойчивым: экспериментальные данные описываются одинаково хорошо совершенно различным набором констант, и некоторые из них по произволу приходится назначать равными нулю.

Параметры полиномиальных критериев типа (2.1) можно было бы считать просто коэффициентами регрессионного анализа, подбираемыми по критерию наилучшего соответствия доступному набору экспериментальных данных. Тогда, казалось бы, снимаются вопросы: какие параметры полагать равными нулю, взаимодействием между какими напряжениями можно пренебречь, и просто нужно отбрасывать некоторые прочностные параметры за их малостью. Но основное противоречие при этом не исчезает. Определяемые параметры остаются, по сути, не свойствами материала, а функционалами от имеющихся экспериментальных данных и метода их обработки, и определение большого числа параметров остается неустойчивым.

С другой стороны, критерии типа (2.1) определяют гладкую предельную поверхность (эллипсоид) в пространстве напряжений, и формально по достижению предельной поверхности нельзя ничего сказать о виде разрушения, а это важно при послойных расчетах с учетом деградации свойств монослоев.

Альтернативный подход к построению критериев разрушения был предложен Ю.Н. Работновым [10,16,24] на основе модели совместно работающих упруго-пластических структур, в данном случае — волокон и матрицы. Приближение предельной кривой в плоскости  $\sigma_1 - \sigma_2$  эллипсом для однонаправленного (рис. 1, а) или ортогонально армированного (рис. 1, б) пластика со слабой матрицей вряд ли может считаться удовлетворительным. Действительно, пренебрегая прочностью матрицы, мы получаем ортогональную решетку, которая может выдерживать только напряжения вдоль волокон, но не под углом к ним, и предельная поверхность в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$  представляет собой прямоугольник в плоскости  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Учет ненулевого предела текучести матрицы превращает плоский прямоугольник в “диванную подушку” (рис. 1, б). Разумеется, вводя в уравнение (2.1) инварианты более высоких порядков, можно эту поверхность с плоскими гранями аппроксимировать с любой степенью точности, но число констант и соответствующие трудности их экспериментального определения при этом неизмеримо возрастут. Отсылая читателя за математическими формулировками к статьям [10, 16, 24, 25] Ю.Н. Работнова, можно для волокнистых композитов пояснить геометрию построения сложной предельной



**Рис. 1.** Предельные поверхности в виде: а — закругленного цилиндра для однонаправленного композита, б — “диванной подушки” (*ottoman cushion*) для ортогонально армированного пластика; в — трехмерного косоугольного параллелепипеда для армирования в трех и более направлениях.

поверхности, которая получается движением центра предельной поверхности для одного компонента по предельной поверхности для другого компонента.

Например, предельная поверхность для ряда параллельных волокон имеет вид отрезка вдоль оси  $\sigma_1$  (рис. 1, а). Добавляя предельную поверхность для изотропной матрицы в виде эллипсоида, получаем предельную поверхность для однонаправленного пластика в виде цилиндра с закругленными концами. Добавление ортогонального семейства волокон, для которого предельная “поверхность” представляет собой отрезок вдоль оси  $\sigma_2$ , эквивалентно движению цилиндра вдоль этой оси и превращению поверхности в “диванную подушку” (рис. 1, а) с плоскими гранями и закругленными краями. Добавление третьего семейства волокон, то есть движение этой “подушки” вдоль третьего направления приведет к поверхности в виде существенно трехмерного косоугольного параллелепипеда с закругленными ребрами (рис. 1, в). Такая структура армирования (с тремя и более семействами волокон) лишена главного недостатка ортогонально армированных и однонаправленных пластиков — слабого сопротивления сдвигу и растяжению под углом к волокнам.

Применительно к представленным на рис. 1 предельным поверхностям легко вывести, например, зависимость критического напряжения  $\sigma^*(\varphi)$  от угла  $\varphi$  между направлением растяжения и направлением укладки волокон (ось 1). Проекция “вектора” нагружения в координатах  $\sigma_1 - \sigma_2 - \tau_{12}$  выражаются в виде:

$$\sigma_1 = \sigma(\varphi)\cos^2 \varphi, \quad \sigma_2 = \sigma(\varphi)\sin^2 \varphi, \quad \tau_{12} = \sigma(\varphi)\sin \varphi \cos \varphi \quad (2.2)$$

Термин “вектор” используется для наглядности и взят в кавычки, так как компоненты тензора второго ранга преобразуются при повороте системы координат не по векторному правилу. Этот “вектор” (2.2) может “протыкать” боковую поверхность цилиндра на рис. 1, а, уравнение которой имеет вид:

$$\left( \frac{\sigma_2}{\sigma^*(90)} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{\tau^*(0)} \right)^2 = 1, \quad (2.3)$$

где  $\sigma^*(90)$ ,  $\tau^*(0)$  — прочности при растяжении ортогонально волокнам и на сдвиг вдоль волокон. Условие такого “протыкания” при подстановке (2.2) в (2.3) определяет выражение критерия прочности по условию разрушения матрицы при растяжении под углом к волокнам:

$$\sigma^*(\varphi) = \left[ \sin^4 \varphi / \sigma^*(90)^2 + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi / \tau^*(0)^2 \right]^{-1/2} \quad (2.4)$$

Если для наглядности принять прочности матрицы на сдвиг и на растяжение одинаковыми:  $\sigma^*(90) = \tau^*(0) = \tau^*$ , то из (2.4) получится совершенно простая зависимость, которая подтверждалась в экспериментах:

$$\sigma^*(\varphi) = \frac{\tau^*}{\sin \varphi} \quad (2.5)$$

“Вектор” нагружения может протыкать также сферическую (при  $\sigma^*(90) = \tau^*(0) = \tau^*$ ) концевую часть цилиндра, уравнение которой имеет вид:

$$(\sigma_1 - \sigma^*(0))^2 + (\sigma_2)^2 + (\tau_{12})^2 = \tau^*, \quad (2.6)$$

где  $\sigma^*(0) (\gg \tau^*)$  — прочность при растяжении вдоль волокон. Подстановкой (2.2) получим из (2.6) квадратное уравнение для определения  $\sigma^*(\varphi)$ :

$$A\sigma^2(\varphi) - 2B\sigma(\varphi) + C = 0, \quad (2.7)$$

где  $A = c^2 + s^4$ ,  $B = c^2 \sigma^*(0)$ ,  $C = \sigma^{*2}(0) - \tau^{*2}$ ,  $c = \cos \varphi$ ,  $s = \sin \varphi$ .

Решение уравнения (1.7) получается довольно громоздким, но поскольку разрыв волокон происходит лишь при весьма малых углах  $\varphi$ , легко показать, что  $\sigma^*(\varphi) \rightarrow \sigma^*(0)$  при  $\varphi \rightarrow 0$ , и для малых углов  $\varphi$  можно с достаточной точностью считать:

$$\sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(0) \quad (2.8)$$

Равенство напряжений (2.5) и (2.8) определяет угол  $\varphi^*$  перехода от разрыва волокон к разрушению матрицы, и можно получить удобную оценку рационального угла малой разориентации:  $\varphi^* \approx \arcsin[\sigma^*(90) / \sigma^*(0)]$ , при котором продольная прочность практически не снижается, а сопротивление расщеплению резко растет. Подобная разориентация волокон создается в стволе дерева, и поэтому свилеватая древесина, оставаясь прочной в продольном направлении, имеет гораздо более высокую, чем прямослойная древесина, прочность в поперечном направлении, и поэтому ее очень трудно расколоть.

Для ортогонально армированного пластика (рис. 1, б) “вектор” нагружения может “протыкать” предельную поверхность либо по плоскости  $\tau_{12} = \tau^*(0)$ , и тогда зависимость прочности имеет вид

$$\sigma^*(\varphi) = \tau^*(0) / (\sin \varphi \cos \varphi), \quad (2.9)$$

либо по скругленному краю, и тогда приближенно можно считать (в зависимости от стороны “подушки”):

$$\sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(0) \text{ или } \sigma^*(\varphi) \approx \sigma^*(90) \quad (2.10)$$

Угол  $\varphi^*$  смены площадки разрушения определяется равенством выражений (2.9) и (2.10):

$$\varphi^* \approx \frac{1}{2} \arcsin(2\tau^*(0) / \sigma^*(0)) \quad (2.11)$$

Полученные на основе подхода Ю.Н. Работнова выражения критериев прочности однонаправленных и ортогонально армированных пластиков оказываются чрезвычайно простыми по сравнению с тензорно-полиномиальными критериями и достаточно хорошо согласуются с экспериментами по определению прочности в различных направлениях.

**3. Критерии прочности типа Кулона – Мора.** Ю.Н. Работнов предложил [17–19] формулировать критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов, в виде предельного соотношения между нормальным  $\sigma_n$  и касательным  $\tau_n$  напряжениями на площадке возможного разрушения, содержащей направление одного из семейств волокон:

$$\Phi(\sigma_n, \tau_n) = 1 \quad (3.1)$$

Простейшее предположение [24,26] о виде функции  $\Phi$  в (3.1) состоит в том, что она линейна, и тогда, например, для ортогонально армированного пластика можно выписать два критерия на одной ( $n_1$ ) или на другой ( $n_1$ ) плоскости возможного разрушения:

$$\sigma_{n_i} + m_i \tau_{n_i} = c_i; \quad i = 1, 2, \quad c_1 = \sigma^*(0), \quad c_2 = \sigma^*(90) \quad (3.2)$$

Используя формулы (2.2) преобразования тензора напряжений при повороте координатных осей на угол  $\varphi$ , получаем из (3.2) для случая одноосного растяжения две зависимости прочности  $\sigma^*(\varphi)$  от угла вырезки образца  $\varphi$ :

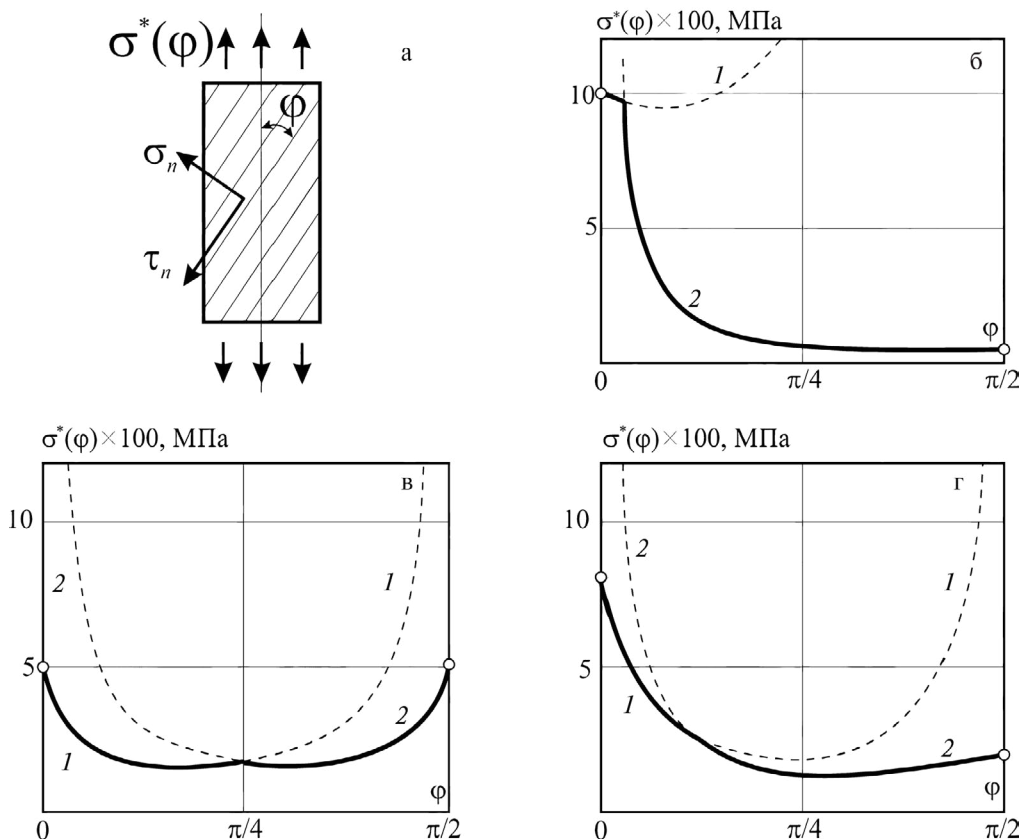
$$\sigma^*(\varphi) = \frac{c_1}{\cos^2 \varphi + m_1 \sin \varphi \cos \varphi} \quad \text{при } \varphi \leq \varphi^* \quad (3.3)$$

$$\sigma^*(\varphi) = \frac{c_2}{\sin^2 \varphi + m_2 \sin \varphi \cos \varphi} \quad \text{при } \varphi > \varphi^* \quad (3.4)$$

При угле  $\varphi^*$  происходит переход от одной плоскости разрушения к другой, и этот угол находится из равенства (3.3) и (3.4), приводящего к квадратному уравнению относительно  $\operatorname{tg} \varphi^*$ , из которого находится:

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \arctg \left[ \frac{1}{2} \left( m_1 \varepsilon - m_2 + \sqrt{(m_2 - m_1 \varepsilon)^2 + 4\varepsilon} \right) \right] \approx \\ &\approx \left\{ \arctg \frac{\varepsilon}{m_2} \leftarrow \varepsilon \ll 1 \right\}; \quad \varepsilon = \frac{c_2}{c_1} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Зависимости (3.3) и (3.4) представлены на рис. 2 для разных соотношений между числами волокон в ортогональных направлениях и, в частности, для однонаправленного композита, для которого сохраняется и оказывается наиболее естественным тот же подход в предположении, что число волокон в ортогональном направлении равно нулю. Из (3.5) при малых углах  $\varphi < \varphi^*$  происходит разрыв волокон, и зависимость



**Рис. 2.** Схема нагружения (а) и зависимости прочности ортогонально армированных композитов от направления вырезки образцов: б – однонаправленный (0); в – “равнопрочный” (0/90); г – (0<sub>4</sub>/90<sub>1</sub>). Линия 1 – (2.3); 2 – (2.4).

прочности имеет вид (3.3). При  $\varphi \geq \varphi^*$  происходит разрушение матрицы по критерию (3.4).

Для однонаправленных композитов угол  $\varphi^*$  очень мал, например, для углепластиков:  $\sigma^*(0) \approx 1000$  МПа,  $\sigma^*(90) \approx 25 \div 40$  МПа,  $m_2 \approx 0,5 \Rightarrow \varphi^* = 3^\circ \div 4^\circ$ . Надежное экспериментальное определение  $m_1$  в таком крайне узком диапазоне углов вряд ли возможно, поэтому для инженерных приложений удобно упростить зависимость (3.3), полагая  $\sigma^*(\varphi) = \sigma^*(0)$  при  $\varphi \leq \varphi^*$ . Погрешность при таком вычислении  $\sigma^*(\varphi)$  по сравнению с (3.3) в диапазоне  $\varphi < \varphi^*$  не превышает 4%, что вполне допустимо с учетом точности эксперимента и разброса свойств композитов.

На рис. 3 проиллюстрирован метод определения параметров линейных критериев прочности: экспериментальные данные для ортогонально армированного углепластика нанесены в координатах  $\sigma_n = \sigma^*(\varphi)\cos^2\varphi$ ,  $\tau_n = \sigma^*(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$ .

Прямая линия (3.2) в этих координатах одинаково хорошо согласуется с экспериментом, как и участок эллипса:

$$\left(\frac{\sigma_n}{\sigma^*(0)}\right)^2 + \left(\frac{\tau_n}{\tau^*}\right)^2 = 1, \quad (3.6)$$

соответствующий следующей зависимости прочности:

$$\sigma^*(\varphi) = \left(\cos^4\varphi / \sigma^{*2}(0) + \sin^2\varphi\cos^2\varphi / \tau^{*2}(0)\right)^{-1/2} \quad (3.7)$$

Но проведение прямой линии через экспериментальные точки в координатах  $\sigma_n - \tau_n$  всегда нагляднее и надежнее, поэтому предпочтение следует отдать линейным критериям (3.2), приводящим к расчетным зависимостям (3.3), (3.4). Напомним, что критическое соотношение между нормальным и касательным напряжением в теориях Кулона и Мора тоже, как правило, предполагалось линейным, но в теории Мора угол площадки разрушения требует определения, а для композитов эта площадка должна содержать направление одного из семейств волокон, и она определяется простым перебором.

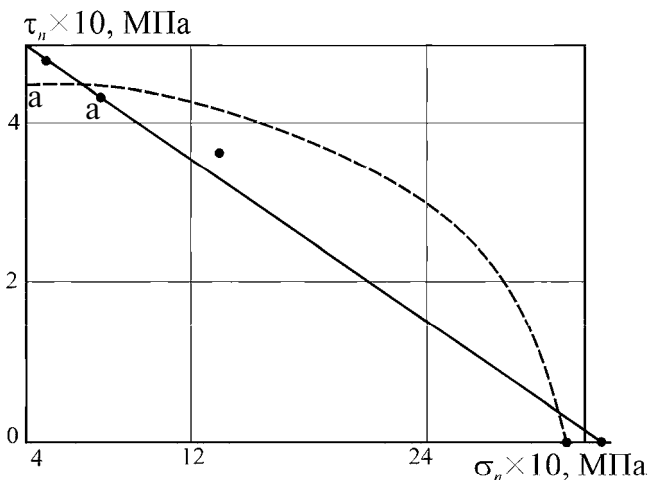


Рис. 3. Предельные кривые для углепластика (0/90) в координатах  $\sigma_n - \tau_n$ .

Естественно считать  $\varphi^*$  (3.5) оптимальным углом малой разориентации волокон (аналог свилеватой, и потому нерасщепляющейся древесины). При таком угле разориентации прочность вдоль волокон практически не снижается, а сопротивление росту продольных трещин возрастает многократно, исключая расщепления композитного материала при циклических нагрузках и вблизи концентраторов напряжений. Подобным образом поступает и природа: древесные волокна растут не строго вдоль ствола, а совершают полный оборот вокруг ствола на длине примерно 6–10 м. При этом угол разориентации ( $\approx 3^\circ \div 5^\circ$ ) оказывается весьма близким к полученным выше оценкам.

Простота критерия (3.2) позволяет легко распространить его на область усталостного разрушения [20,21], полагая параметры критерия функционалами от истории нагружения или – при постоянной амплитуде – функциями от числа циклов.

С помощью критериев, учитывающих направленный характер разрушения, можно объяснить и описать немонотонные и негладкие поверхности прочности: в простейшем случае – зависимости прочности от направления нагружения. Традиционные тензорно-полиномиальные критерии описывают гладкую предельную поверхность в пространстве напряжений (многомерный эллипсоид), поэтому сложно установить условия возникновения того или иного вида разрушения, что является известным недостатком для послойного анализа, когда в зависимости от вида разрушения монотонно надо либо полностью исключать его из рассмотрения (после разрыва волокон), либо полагать практически нулем характеристики матрицы (после выполнения условия разрушения поверхности раздела). Сейчас подобные критерии Хашина с установлением коэффициентов деградации свойств в зависимости от вида разрушения считаются общепризнанными, но Ю.Н. Работнов обратил на это внимание еще 50 лет назад.

**4. Модель ромба для косоугольно армированных труб.** Ю.Н. Работнов предложил [23] модель разрушения композитной ячейки в виде ромба из нерастяжимых нитей (рис. 4), повороту которых препятствует момент  $M = 2\mu^2 \sin \alpha \cos \alpha$ , возникающий из-за сдвига матрицы и пропорциональный площади ромба.

Сила осевого растяжения, приложенная к вершине ромба, пропорциональна длине малой диагонали  $P_z = 2\sigma_z l \sin \alpha$ . Толщину ромба можно принять за единицу: она сокращается в конечном уравнении энергетического баланса. Смещение вершины при изменении угла:  $\Delta = (2l \cos \alpha)' d\alpha = -2l \sin \alpha d\alpha$ . Знак “минус” означает, что с ростом осевых напряжений  $\sigma_z$  угол  $\alpha$  убывает. Приравнявая работу осевой силы  $\frac{1}{2} P_z \Delta$  работе момента  $M d\alpha$ , препятствующего изменению угла  $d\alpha$ , получим

$$\sigma_z^*(\alpha) = \mu^* \operatorname{ctg} \alpha = \sigma_z^*(45) \operatorname{ctg} \alpha = \sigma_z^*(45) / t, \quad (4.1)$$

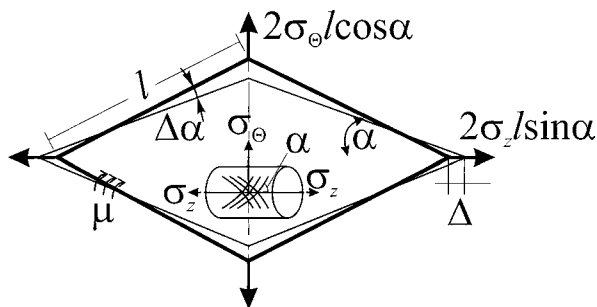


Рис. 4. Схема деформирования элемента косоугольно армированного композита.

где критическое значение распределенного момента  $\mu^*$  соответствует прочности на растяжение трубы с намоткой  $\pm 45^\circ$ :  $\sigma_z^*(45) = \mu^*$ . Удивительно, но модель Ю.Н. Работнова привела в точности к такому же соотношению (4.1), полученному ранее в [22] чисто феноменологически при обработке экспериментов по растяжению стеклопластиковых трубок.

Наиболее интересно применение данной модели для двухосного растяжения. Окружная сила  $P_\theta = 2\sigma_\theta / \cos \alpha$  от действия окружных напряжений  $\sigma_\theta$  стремится, напротив, увеличить  $\alpha$ , и приведенный выше анализ остается в силе с точностью до замены  $\alpha$  на  $90^\circ - \alpha$ . Как видно на рис. 4, осевые  $\sigma_z$  и окружные  $\sigma_\theta$  напряжения пытаются исказить ромб в разных направлениях, что дает (рис. 5) значительный упрочняющий эффект и приводит к следующему условию разрушения:

$$|\sigma_z \operatorname{tg} \alpha - \sigma_\theta \operatorname{ctg} \alpha| = \sigma_z^*(45) \quad (4.2)$$

Прямые скобки – обозначение абсолютной величины – говорят о смене знака выражения в скобках в зависимости от того, какой член в этой разности больше, что приводит на плоскости  $\sigma_\theta - \sigma_z$  к двум параллельным предельным прямым линиям 1, 2 (рис. 5), проходящим через точки  $\sigma_z^*(\alpha)$ ,  $\sigma_\theta^*(\alpha)$  на осях.

Для заданного отношения приложенных напряжений, как показано в [26], легко указать оптимальный угол намотки, обращающий в ноль разность в прямых скобках в (3.2). Это означает невозможность перекашивания ромба и перенесение всех усилий только на волокна. Например, в цилиндрической части баллона для сжатого газа (“труба с заглушками”) окружные напряжения примерно вдвое превышают осевые  $\sigma_\theta = 2\sigma_z$ , и оптимальный угол намотки  $\alpha^*$  имеет известное из “нитяной аналогии” значение:  $\operatorname{tg}^2 \alpha^* = 2 \Rightarrow \alpha^* = \arctg \sqrt{2} = 54^\circ 44'$ .

Отрезок прямой 3 замыкает прямоугольную предельную поверхность, и при углах, близких к оптимальному, когда перекашивание ромба невозможно, происходит разрыв волокон, и реализуется наибольшая прочность. Критерий Работнова, приводящий к кусочно-линейной предельной поверхности, несмотря на свою удивительную простоту, хорошо согласуется с экспериментами (рис. 5) и позволяет легко проектировать оптимальную структуру армирования сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев под углами  $\pm \alpha_i$ .

**5. Эюд об образовании кинка при сжатии.** Обычно считают, что полосы сдвига (линии Чернова–Людерса) располагаются в плоском образце при сжатии (или растяжении) под углом  $45^\circ$  – по направлению наибольших касательных напряже-

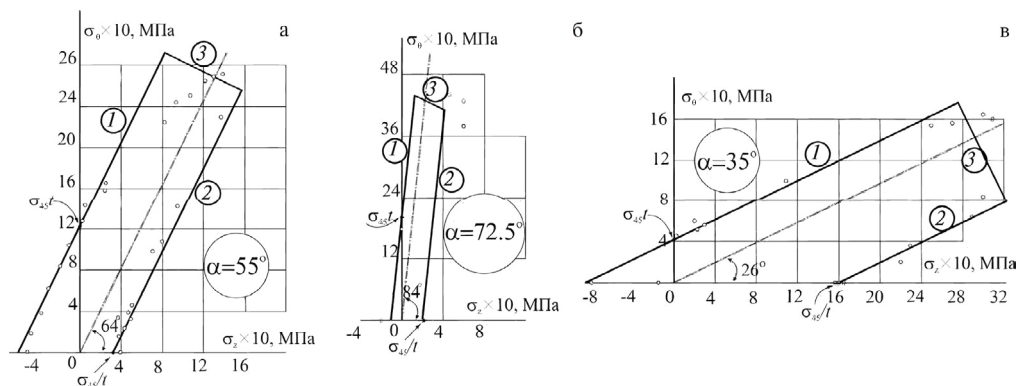


Рис. 5. Предельные поверхности для двухосного нагружения стеклопластиковых труб: с намоткой:  $\pm 55^\circ$  (а),  $\pm 72.5^\circ$  (б),  $\pm 35^\circ$  (в).

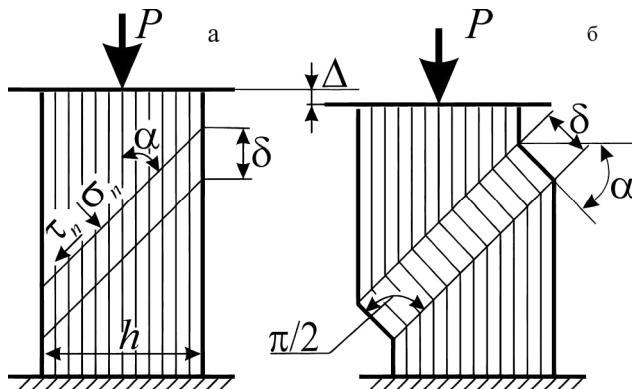


Рис. 6. Схема образования кинка при сжатии.

ний. Но Юрий Николаевич увидел, что в экспериментах на сжатие стеклопластиков возникает совершенно другой угол направленного разрушения. Он сформулировал изящную модель, результат которой до изумления точно совпал с экспериментом. Согласно примененному Работновым энергетическому критерию, кинк должен возникнуть (и возникает) под углом  $\alpha = 30^\circ$  к продольной оси [26]. Правда, он решил эту задачу не публиковать, посчитав ее неким частным случаем.

Термин кинк (*kink* – полоса сдвига) уже и в отечественной литературе применяется без кавычек. Образование кинка представляет одну из новых и очень, как выяснилось, важных проблем расчета композитных конструкций. Например, в металлах при действии сжимающих напряжений рост трещин около отверстий не происходит, и надрезы, перпендикулярные направлению сжатия, считаются неопасными. Но в волокнистых композитах, именно при сжатии, возможно появление кинка около отверстий. Кинк – опасный вид растущей (линейной) зоны разрушения, но методы оценки несущей способности волокнистых композитов при сжатии обоснованы все еще недостаточно. И связано это в первую очередь со сложностью и многообразием механизмов разрушения.

Простая модель образования кинка при сжатии композитов (или древесины), проиллюстрированная на рис. 6, основана на следующих допущениях.

Считается, что при повороте волокон в кинке высотой  $\delta$ , сопровождаемом разрушением матрицы, несущая способность сохраняется до тех пор, пока потерявшие устойчивость волокна не станут перпендикулярны прямолинейной границе кинка. Это предельное состояние показано на рис. 6, б. При образовании кинка происходит уменьшение высоты образца на величину  $\Delta = \delta(1 - \sin \alpha)$ , и работа внешней приложенной силы сжатия  $P = \sigma hw$  (где  $h$  и  $w$  – толщина и ширина образца) на этом перемещении затрачивается на работу разрушения матрицы, пропорциональную произведению объема кинка  $\delta hw / \sin \alpha$  на некоторую (неизвестную) удельную работу разрушения  $G^*$ . Приравняв работу силы и работу разрушения, получим

$$\sigma \delta hw (1 - \sin \alpha) = G^* \delta w \frac{h}{\sin \alpha} \quad (5.1)$$

Из условия минимума напряжения в (5.1):  $\partial \sigma / \partial \alpha = 0 \Rightarrow [(1 - \sin \alpha) \sin \alpha]' = 0$  находится угол  $\alpha^*$ , под которым энергетически выгодно образование кинка: это либо  $\alpha^* = 90^\circ$ , что соответствует смятию по торцу, либо  $\sin \alpha^* = 1/2$ ,  $\alpha^* = 30^\circ$  – и это значение с высокой точностью подтверждается в опытах на сжатие тканых стеклопластиков.

Кроме удовлетворения чисто познавательного интереса, определение угла кинка  $\alpha^*$  позволяет выбрать допустимую длину  $L$  рабочей части образца на сжатие, что-

бы разрушение происходило в пределах рабочей зоны:  $L > h \operatorname{ctg} \alpha^* \approx 1.7h$ . Модель, предложенная Работновым, лишь открывает путь к созданию расчетных методик, может быть, поэтому он решил, что ее еще рано публиковать.

**6. Замедленное разрушение композитов при сжатии в результате потери устойчивости волокон.** Один из характерных видов разрушения волокнистых композитов при сжатии — это внутренняя потеря устойчивости волокон.

В нулевом приближении из уравнения продольного изгиба шарнирно опертой пластины толщиной  $h$  и длиной  $L$  (ширину полагаем равной единице, так как она во все соотношения входит линейно и сокращается в окончательных выражениях)

$$B \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + Pv = 0, \quad B = \frac{1}{12} E_f h^3, \quad P = \sigma h \quad (6.1)$$

можно найти эйлерово напряжение при потере устойчивости, принимая прогиб в виде  $v(x) = v_0 \sin(\pi x / L)$ ,

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E_f h^2}{12 L^2} \quad (6.2)$$

В композите без поддержки матрицы длинные и тонкие волокна теряли бы устойчивость при очень низких сжимающих напряжениях, поэтому для оценки прочности волокнистых композитов на сжатие Работновым принята модель композитной среды в виде чередующихся слоев из материалов волокон и матрицы, и слои волокон толщиной  $h_f$  предполагаются идеально упругими с модулем Юнга  $E_f$ .

В первом приближении слои матрицы толщиной  $h_m$  предполагаются подчиняющимися при сдвиге линейному закону Гука:  $\tau = G_m \gamma$ . Считается, что вся сжимающая нагрузка  $P$  воспринимается упругими волокнами и напряжение в них:  $\sigma_f = \sigma_c (1 + h_m / h_f) = \sigma_c / \psi_f$ , где  $\sigma_c$  — среднее напряжение в композите,  $\psi_f$  — объемная доля волокон. Направив ось  $x$  по средней линии одного из слоев, рассмотрим возможность симметричного выпучивания слоев в одну сторону (рис. 7).

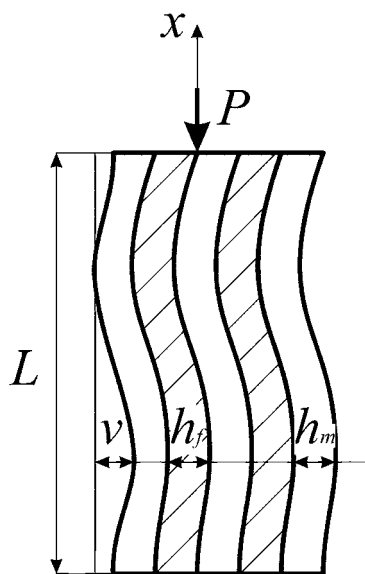


Рис. 7. Схема внутренней потери устойчивости волокон (слоев) при сжатии.

Находящиеся между ними слои более слабой матрицы получают сдвиговую деформацию  $\gamma = \partial v(x) / \partial x$ , где  $v(x) = v_0 \sin \lambda x$  — прогиб упругих слоев. В результате сдвига возникают касательные напряжения  $\tau$  с двух сторон изогнутого слоя, действие которых препятствует выпучиванию и сводится к распределенному по длине моменту  $m = \tau h_f = G_m \gamma h_f$  на единицу ширины. Распределенный момент действует с обратным знаком относительно момента от приложенной продольной силы  $P$ , и уравнение изгиба (6.1) принимает вид:

$$B \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + P \frac{\partial v}{\partial x} - m = 0 \quad (6.3)$$

После подстановки прогиба и сокращения на  $\lambda \cos \lambda x$  получим  $P_e = B \lambda^2 + G_m h_f$ , и по аналогии с (6.2)

$$\sigma_{ce} = \frac{1}{12} \lambda^2 \psi_f E_f h_f^2 + G_m \psi_f \quad (6.4)$$

Из (6.4) видно, что при линейном законе упругости для матрицы минимум критического напряжения обеспечивает наибольшая длина волны выпучивания  $L = \pi / \lambda$ , и основной вклад в эйлерово напряжение для композита дает модуль сдвига матрицы, так как он намного больше эйлерова напряжения (6.2) для волокон.

Во втором приближении принимается нелинейное соотношение между сдвиговыми деформациями и касательными напряжениями в матрице:  $\tau = \tau_0 \gamma^{1/m}$ . При этом уравнение (6.3) принимает вид:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} + k^2 \frac{dv}{dx} - \beta^m \left( \frac{dv}{dx} \right)^{\frac{1}{m}} = 0, \quad (6.5)$$

где  $k^2 = P / B$ ,  $\beta^{1/m} = \tau_0 h_f / B$ . Степень  $1 / m$  в выражении для  $\beta$  выбрана для удобства интегрирования уравнения (6.5).

Чем больше прогиб слоев, тем выше сдвиговая деформация матрицы и возникающие в ней касательные напряжения. Поэтому можно амплитуду прогиба принять пропорциональной касательному напряжению:  $v = \tau \sin \lambda x$ .

Тогда уравнение (6.5) перепишется в виде:

$$\tau \lambda \cos \lambda x (k^2 - \lambda^2) = (\beta \tau \lambda \cos \lambda x)^{1/m} \quad (6.6)$$

Домножая обе части уравнения (6.6) на  $\cos \lambda x d\lambda x$  и интегрируя по  $\lambda x$  от  $-\pi / 2$  до  $+\pi / 2$ , получим, что интеграл от левой части (6.6) пропорционален  $\pi / 2$ , а от правой — числовому коэффициенту — интегралу от дробной степени косинуса:

$$\mu^{\frac{1}{m}} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos^{\frac{1}{m}+1}(\lambda x) d(\lambda x). \quad \text{Тогда уравнение (6.6) примет более простой вид}$$

$$k^2 = \lambda^2 + K \lambda^{-1+1/m}; \quad K = (\beta \mu \tau^{1-m})^{1/m} \quad (6.7)$$

Напомним, что  $m$  больше единицы,  $k^2$  пропорционален эйлеровой нагрузке  $P_e$ , и из (6.7) следует, что существует критическое значение длины волны выпучивания, реализующее минимум эйлеровой нагрузки:

$$\lambda^* = \left[ \frac{K(m-1)}{2m} \right]^{\frac{m}{3m-1}}$$

Подставляя  $\lambda^*$  в (6.7), можно найти минимальное эйлерово напряжение для критической длины волны при внутреннем выпучивании слоистой структуры.

В третьем приближении Работновым была рассмотрена модель длительной прочности (запаздывающего разрушения — *delayed fracture*). Предполагалось, что волокна

нечувствительны ко времени нагружения, а деформирование матрицы при сдвиге подчиняется закону установившейся ползучести

$$\tau = \tau_0 \left( \frac{|\dot{\gamma}|}{\gamma_0} \right)^{1/n} \quad (6.8)$$

Здесь  $\tau_0$  и  $\gamma_0$  — константы ползучести, одна из которых может быть выбрана по произволу. При симметричном выпучивании слои матрицы получают сдвиговую деформацию  $\gamma = \partial v(x, t) / \partial x$ , где  $v(x, t)$  — прогиб упругих слоев. Принимая за безразмерное время  $t$  истинное время, умноженное на  $\gamma_0$ , получаем из (6.8)

$$m = \tau h_f = \tau_0 h_f \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^{1/n}, \text{ и уравнение (6.5) преобразуется к виду}$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + k^2 \frac{\partial v}{\partial x} - \beta^{1/n} \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \right|^{1/n} = 0 \quad (6.9)$$

После разделения переменных:

$$\tau^{-n} \mu \beta d\tau = \lambda^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n dt, \quad (6.10)$$

где обозначено  $\mu^{1/n} = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos z)^{\frac{1}{n}+1} dz$ ;  $z = \lambda x$ . Если в начальном состоянии ось сжимаемого слоя описывалась уравнением  $v_0 = \tau_0 \sin \lambda x$ , то из (6.10):

$(\tau^{1-n} - \tau_0^{1-n})(1-n)^{-1} \mu \beta = \lambda^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n t$ , и можно найти критическое время, при котором прогиб  $v$  и напряжение  $\tau$  обращаются в бесконечность:

$$t_c = \frac{\mu \beta}{(\lambda \tau_0)^{n-1} (k^2 - \lambda^2)^n (n-1)} \quad (6.11)$$

В реальной структуре композита всегда имеются начальные искривления волокон с разными длинами волн, поэтому для оценки долговечности следует выбрать такое значение  $\lambda^*$ , которому соответствует минимальное критическое время из (6.11). Условие  $\partial t_c / \partial \lambda = 0$  дает:

$$\lambda^{*2} = \frac{n-1}{3n-1} k^2 \quad (6.12)$$

Если обозначить  $L_0$  критическую длину шарнирно опертых упругих слоев (без матрицы), для которых данная сила  $P$  является эйлеровой, то длина  $L^*$  полуволны потери устойчивости композита с матрицей, находящейся в условиях ползучести, дается формулой

$$L^* = L_0 \sqrt{\frac{3n-1}{n-1}} \quad (6.13)$$

Минимальное значение критического времени получается при постановке  $\lambda^*$  из (6.12) в (6.11):

$$t_{\min} = \left[ (3n-1) \frac{B}{P} \right]^{\frac{3n-1}{2}} \frac{\mu \beta \tau_0}{(2n\tau_0)^n (n-1)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (6.14)$$

Предложенная Работновым довольно простая модель длительного разрушения композита при сжатии позволяет оценить влияние ползучести матрицы на критическое время (6.14) и предсказывает наличие характерной длины (6.13) волны внутреннего выпучивания волокон.

**7. Современное развитие идей Ю.Н. Работнова.** Фундаментальные результаты Работнова в области механики композитов, в частности, изложенные в [10, 24] и в посвященной 100-летию Учителя книге [26] известны как в нашей стране, так и за рубежом. Его непосредственные ученики: академики И.Г. Горячева, Б.Д. Аннин, чл.-корр. РАН С.А. Шестериков, Е.В. Ломакин, доктора наук С.Т. Милейко, Ю.В. Немировский, Г.И. Брызгалин, А.В. Березин, Ю.В. Суворова, А.А. Мовчан, В.И. Астафьев, А.М. Думанский, А.Н. Полилов — передавали и передают идеи Юрия Николаевича ученикам второго поколения: С.И. Алексеева, И.В. Викторова, Н.А. Татусь, К.А. Хвостунков — всех не перечислишь.

Анализ литературы последних лет показывает огромное число ссылок на основополагающие монографии Работнова [2, 4, 10]. В списке литературы приведены некоторые статьи последних лет: по нелинейному деформированию и ползучести [27–30], по длительной прочности [31, 32], по применению и развитию моделей наследственной упругости [33–37]. В свое время Работнов интересовался задачами о концентрации напряжений [5, 13], и его модели получали развитие [12, 38]. В частности, он предложил модель “сдвигового анализа” для оценки концентрации напряжений около захватов при растяжении плоских образцов из композитов со слабой полимерной матрицей, и со временем эта модель была доведена до конкретных расчетных оценок [39, 40].

Неоднократно высказывал Юрий Николаевич соображения о сходстве композитов и биологических материалов типа древесины, но лишь с освоением мощных компьютеров удалось решить интересные задачи моделирования системы криволинейного армирования в зоне сучка [41–43], что позволяет с применением аддитивных технологий [44] проектировать принципиально новые, биоподобные (*bio-inspired*) виды соединений композитных деталей. Статьи [13, 15, 21] породили многие работы, посвященные механизмам разрушения композитов в виде образования трещин расслоения или расщепления [45, 46].

Вслед за Ю.Н. Работновым его ученики обратили свой интерес к биомеханике [47, 48], и в частности, к возможности создания ветвящихся упругих элементов, напоминающих крону дерева с постоянной суммарной площадью ветвей (правило Леонардо) [49, 50].

И наконец, маленькая заметка с идеей формулировки простого критерия прочности для модели ромба из нерастяжимых стержней [23] оказалась чрезвычайно плодотворной и нашла свое развитие в серии работ по рациональному армированию композитных сосудов давления [51–54].

Не только прямые ученики Юрия Николаевича (и их аспиранты) развивали его идеи. Многие известные представители Сибирской и Якутской научных школ были подготовлены в Новосибирском Академгородке и в аспирантуре Института машиноведения РАН и по-прежнему считают академика Ю.Н. Работнова одним из своих Учителей, что неоднократно отмечается в их публикациях [55].

Отметим, что только по базе Scopus за последние 5 лет (2018–2023 гг.) число ссылок на труды Ю.Н. Работнова в мире превышает 800, а за все прошедшие годы — сотни тысяч. Малая часть из них отмечена в приведенном кратком обзоре.

**Заключение.** Изложить в одной юбилейной статье все оригинальные результаты, полученные Ю.Н. Работновым, и их развитие в сравнительно новой области механики разрушения композитов вряд ли возможно. Задача данной публикации была лишь в том, чтобы показать пять красивых, предложенных Юрием Николаевичем моделей, которые служат основой новых научных направлений, развиваемых его многочисленными учениками.

**Вместо эпилога.** Незаменимых людей нет, но бывают люди, потеря которых кажется невозможной.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ломакин Е.В., Полилов А.Н. Наследственность в науке и в жизни (К столетию со дня рождения академика Ю.Н. Работнова) // Вестн. РАН. 2014. Т. 84. № 4. С. 60–64.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 2014. 752 с.
3. Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука, 1970. 223 с.
4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. Работнов Ю.Н. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Изв. АН СССР. МТТ. 1967. № 3. С. 36–41.
6. Работнов Ю.Н., Полилов А.Н. Проблемы разрушения материалов // Механика. 1974. № 5. С. 17–32.
7. Разрушение. Т. 7 / пер. с англ. под ред. Работнова Ю.Н. М.: Мир, 1976. 636 с.
8. Композиционные материалы. Том 5. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978. 486 с.
9. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Физматлит, 1962. 455 с.
10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
11. Гордон Дж. Почему мы не проваливаемся сквозь пол. М.: Мир, 1971. 272 с.
12. Полилов А.Н. Торможение трещины поверхностью раздела // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 1. С. 68–72.
13. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. Разрушение около боковых выточек композитов с низкой сдвиговой прочностью // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 6. С. 112–119.
14. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. Развитие расслоений при сжатии композитов // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 4. С. 166–171.
15. Работнов Ю.Н., Полилов А.Н. О разрушении композитных труб по форме китайского фонарика // Механ. композ. матер. 1983. № 3. С. 548–550.
16. Работнов Ю.Н. Уруглопластическое состояние композитной структуры // в сб.: Пробл. гидродин. и механ. сплошн. среды. (к 60-лет. Л.И. Седова) М.: Наука, 1969. С. 411–415.
17. Полилов А.Н., Работнов Ю.Н. Критерий прочности для армированных волокнами пластиков // Аннот. докл. на IV Всесоюзн. съезде по теор. и прикл. мех. Киев: 1976. С. 104.
18. Rabotnov Yu.N., Polilov A.N. Strength criteria for fiber reinforced plastics // Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials. 4th Int. Conf. Fract. (ICF 4), Waterloo, Canada, June 1977. Vol. 3B. Applications and non-metals. Sess. 3. Composites / Ed. by Taplin D.M.R. New York: Pergamon, 1978. P. 1059–1067.
19. Rabotnov Yu.N., Polilov A.N. Strength criteria for reinforced plastics // в кн.: “Композиционные материалы”. Докл. Первого советско-японского симпозиума. 1977. М.: МГУ, 1979. С. 375–384.
20. Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н. и др. Усталостная прочность однонаправленных углепластиков при растяжении под углом к направлению армирования // Механ. композ. матер. 1985. № 1. С. 44–47.
21. Работнов Ю.Н., Когаев В.П., Полилов А.Н., Стрекалов В.Б. Критерий межслойной прочности углепластиков при циклических нагрузках // Механ. композ. матер. 1982. № 6. С. 983–986.
22. Работнов Ю.Н., Данилова И.Н., Полилов А.Н. и др. Исследование прочности намоточных эпоксидных угле- и стеклопластиков при кручении, растяжении и поперечном изгибе // Механ. полим. 1978. № 2. С. 219–225.
23. Работнов Ю.Н. О прочности композитов, армированных в двух направлениях // Механ. полим. 1978. № 5. С. 832–834.
24. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука, 1987. 80 с.
25. Работнов Ю.Н. Избр. тр. Проблемы механики деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1991. 196 с.
26. Полилов А.Н. Этюды по механике композитов. М.: Физматлит, 2015. 320 с.
27. Dumanski A.M., Alimov M.A., Terekhin A.V. Experiment- and computation-based identification of mechanical properties of fiber reinforced polymer composites // J. Phys. Conf. Ser. 2019. Iss. 1. Art. No. 1158.
28. Ашиз Е.С., Суворова Ю.В., Алексеева С.И., Куприянов Д.Ю., Татусь Н.А. Моделирование процесса ползучести георешеток при длительных временах нагружения // Завод. лаб. Диагн. матер. 2006. № 1. С. 49–54.
29. Хохлов А.В. Анализ общих свойств кривых ползучести при ступенчатом нагружении, порождаемых нелинейным соотношением Работнова для вязкоупругих материалов // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естеств. науки. 2017. № 3. С. 93–123.

30. *Маслов Б.П.* Нелинейная наследственная ползучесть изотропных композитов со случайной структурой армирования // Прикл. механ. 2022. Т. 58. № 1. С. 85–101.
31. *Локощенко А.М., Фомин Л.И., Ларин Т.С.* Прочность при ползучести стержня, растягиваемого в агрессивной среде и имеющего различные двусвязные формы поперечного сечения // ПММ. 2021. Т. 85. № 1. С. 66–88.
32. *Радченко И.П., Афанасьева Е.А., Саушкин М.Н.* Предсказание высокотемпературной реологической деформации и длительной прочности вязко-пластического материала с использованием предварительно нагруженного образца // Вестн. Самар. ГУ. Сер. Физ.-мат. Науки. 2023. Т. 27. № 2. С. 292–308.
33. *Суворова Ю.В.* Онелинейно-наследственным уравнением Ю.Н. Работнова и его приложениях // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 174–181.
34. *Хохлов А.В.* Анализ свойств кривых релаксации с начальной стадией гауп-деформирования, порожденных нелинейной теорией наследственности Работнова // Механ. композ. матер. 2018. № 4. С. 687–708.
35. *Шитикова М.В.* Удар жесткого шара по бесконечной пластинке Кирхгоффа–Лява с учетом объемной и сдвиговой релаксации // Вестн. СПбГУ. Матем. Механ. Астрон. 2023. Т. 10 (68). Вып. 1. С. 139–154.
36. *Власов Д.Д., Полилов А.Н., Татусь Н.А.* О проблемах восстановления кривых ползучести полимерных композитов по результатам вибрационных испытаний // Машин. и инж. образ. 2021. № 3–4. С. 37–48.
37. *Власов Д.Д., Полилов А.Н.* О возможности восстановления ядра ползучести вязкоупругих полимерных композитов на основе частотных зависимостей компонент комплексного модуля // Механ. композ. матер. 2022. № 1. С. 43–58.
38. *Татусь Н.А., Полилов А.Н., Власов Д.Д.* Влияние отверстий на снижение прочности композитных образцов с различной укладкой волокон // Завод. лаб. Диагн. матер. 2022. Т. 88. № 4. С. 58–65.  
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2022-88-4-58-65>
39. *Полилов А.Н., Арутюнова А.С., Татусь Н.А.* Влияние концентрации напряжений вблизи захватов на реализацию прочности композитов при растяжении // Завод. лаб. Диагн. матер. 2020. Т. 86. № 11. С. 48–59.  
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2020-86-11-48-59>
40. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Оценка концентрации напряжений вблизи захватов при растяжении образцов из полимерных композитов // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2020. № 5. С. 95–107.
41. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design of composite structures reinforced curvilinear fibres // Composites Pt. A. Appl. Sci. & Manufact. 2016. Т. 87. С. 23.
42. *Малахов А.В., Полилов А.Н.* Алгоритм построения рациональных траекторий волокон в произвольно нагруженной композитной пластине // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2017. № 5. С. 71–80.
43. *Малахов А.В., Полилов А.Н., Ли Д., Тянь Ш.* Увеличение несущей способности композитных пластин в зоне болтового соединения за счет применения криволинейных траекторий и переменного объемного содержания волокон // Механ. композ. матер. 2021. Т. 57. № 3. С. 411–428.
44. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Технологическая механика композитов, основанная на изучении опыта Природы в создании прочных биологических материалов-конструкций // Пробл. машиностр. и автомат. 2021. № 1. С. 59–85.
45. *Плитов И.С., Полилов А.Н.* Рациональные размеры звена бамбука и композитной трубы, подверженной сжатию, изгибу и кручению // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2015. № 3. С. 58–69.
46. *Полилов А.Н., Власов Д.Д., Татусь Н.А.* Уточненный критерий расслоения при изгибе композитной балки // Завод. лаб. Диагн. матер. 2023. Т. 89. № 10. С. 63–73.  
<https://doi.org/10.26896/1028-6861-2023-89-10-63-73>
47. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханические принципы оптимального проектирования композитных конструкций // Машиностр. и инж. образ. 2018. № 3 (56). С. 19–26.
48. *Полилов А.Н., Татусь Н.А.* Биомеханика прочности волокнистых композитов. М.: Физматлит, 2018. 328 с.

49. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Проектирование разветвляющихся или профилированных композитных элементов по аналогии со структурой кроны дерева // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2017. № 4. С. 76–84.
50. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Тянь Ш., Арутюнова А.С. Равнопрочные ветвящиеся композитные балки с постоянной суммарной площадью переменных эллиптических сечений // Механ. композ. матер. 2019. Т. 55. № 3. С. 465–482.
51. Полилов А.Н., Склямина О.Ю., Татусь Н.А. Послойный метод расчета и критерии прочности композитных сосудов давления, намотанных симметричными парами слоев. Ч. 1. Особенности послойного метода расчета композитной структуры из симметричных пар слоев // Машиностр. и инж. образ. 2020. № 3 (64). С. 21–30. Ч. 2. Простые критерии прочности для двухосного растяжения косоугольно армированных труб // Машиностр. и инж. образ. 2020. № 4 (65). С. 14–25.
52. Полилов А.Н., Власов Д.Д., Склямина О.Ю., Татусь Н.А. Критерии прочности косоугольно намотанных композитных труб при двухосном растяжении // Пробл. прочн. 2021. № 5. С. 79–88.
53. Полилов А.Н., Склямина О.Ю., Татусь Н.А. Метод проектирования структуры армирования симметричными парами слоев на примере композитного баллона для сжатого газа // Механ. композ. матер. 2021. Т. 57. № 6. С. 1093–1114.
54. Полилов А.Н., Власов Д.Д., Склямина О.Ю., Татусь Н.А. Оценка прочности композитного баллона для сжатого газа // Пробл. машиностр. и надежн. машин. 2022. № 1. С. 57–67.
55. Несущая способность и безопасность металлокомпозитных баков космических аппаратов / под ред. Москвичёва В.В., Тестоедова Н.А. Новосибирск: Наука, 2021. 440 с.

### Development of the Looks of Yu.N. Rabotnov on Strength Criteria of Composites

A. N. Polilov<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup>*Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute, Moscow, Russia*

<sup>\*</sup>*e-mail: polilovan@mail.ru*

Besides the well-known fundamental works of Yu.N. Rabotnov in the field of hereditary elasticity and creep theory, one of the aspects of his scientific activity was the mechanics of composite materials and, in particular, a new class of strength criteria for structurally anisotropic composites proposed by him.

The main feature of Yuri Rabotnov's approach was not an attempt to construct a uniform smooth limiting surface in the stress-space, but taking into account real fracture mechanisms, which, as a rule, are directional in nature.

Now such approaches become crucial in calculation algorithms modeling the fracture process with taking into account the degradation of elastic and strength properties, but in the period of the first Yu. N. Rabotnov's papers they were pioneering and caused certain discussions. Development and application of some of Rabotnov's proposed types of strength criteria for fiber-reinforced composites in tension, compression and complex stress state are discussed in this anniversary paper.

**Keywords:** composite material, FRP, strength criteria, fracture mechanics, fatigue, delamination, splitting

### REFERENCES

1. Lomakin E.V., Polilov A.N. Hereditary in science and in living (to 100-years jubilee of Yu.N. Rabotnov // Vestn. RAS, 2014, vol. 84, no. 4, pp. 60–64 (in Russian)
2. Rabotnov Yu.N. Creep of Structural Elements. Moscow: Nauka, 2014. 752 p. (in Russian)
3. Rabotnov Yu.N., Mileiko S.T. Low-Time Creep. Moscow: Nauka, 1970. 223 p. (in Russian)
4. Rabotnov Yu.N. Elements of Hereditary Mechanics of Solids. Moscow: Nauka, 1977. 384 p. (in Russian)
5. Rabotnov Yu.N. Effect of stress concentration on long-time strength // Mech. of Solids, 1967, no. 3, pp. 36–41. (in Russian)
6. Rabotnov Yu.N., Polilov A.N. Problems of fracture of materials // Mehanika, 1974, no. 5, pp. 17–32. (in Russian)

7. *Fracture. Vol. 7.* / Transl. ed. *Rabotnov Yu.N.* Moscow: Mir, 1976. 636 p. (in Russian)
8. *Composite Materials. Vol. 5. Fracture and Fatigue.* Moscow: Mir, 1978. 486 p. (in Russian)
9. *Rabotnov Yu.N.* Materials Resistance. Moscow: Fizmatlit, 1962. 455 p.
10. *Rabotnov Yu.N.* Mechanics of Deformable Solids. Moscow: Nauka, 1988. 712 p. (in Russian)
11. *Gordon J.* New Strength Theory. Moscow: Mir, 1971. 272 p. (in Russian)
12. *Polilov A.N.* Crack arrest by weak interface // *Mech. of Solids*, 1974, no. 1, pp. 68–72. (in Russian)
13. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* Fracture of low shear strength composites near edge notches // *Mech. of Solids*, 1976, no. 6, pp. 112–119. (in Russian)
14. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* The development of delaminations under compression of composites // *Mech. of Solids*, 1983, no. 4, pp. 166–171. (in Russian)
15. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* On the fracture of composite pipes by shape of Chinese lantern // *Mech. of Compos. Mater.*, 1983, no. 3, pp. 548–550. (in Russian)
16. *Rabotnov Yu.N.* Elasto-plastic state of composite structure // in: *Problems of Hydro-Dynamics and Mechanics of Continuous Media.* Moscow: Nauka, 1969. pp. 411–415. (in Russian)
17. *Polilov A.N., Rabotnov Yu.N.* Strength criterion for FRP // in: *Proc. IV All-Union Conf. on Theor. & Appl. Mech.* Kiev: 1976. p. 104. (in Russian)
18. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for fiber reinforced plastics // *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials. 4th Int. Conf. Fract. (ICF 4), Waterloo, Canada, June 1977. Vol. 3B. Applications and Non-Metals. Sess. 3. Composites / Ed. by Taplin D.M.R.* N.Y.: Pergamon, 1978. pp. 1059–1067.
19. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N.* Strength criteria for reinforced plastics // in: *Composite Materials. First USSR–Japanese Symp.*, 1977, Moscow, MSU, 1979, pp. 375–384.
20. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N., Kogaev V.P., et al.* Fatigue strength of unidirectional CFRP under tension at the angle to direction of reinforcement // *Mech. Compos. Mater.*, 1985, no. 1, pp. 44–47. (in Russian)
21. *Rabotnov Yu.N., Polilov A.N., Kogaev V.P. et al.* Interlaminar strength criterion for CFRP under cyclic loading // *Mech. Compos. Mater.*, 1982, no. 6, pp. 983–986. (in Russian)
22. *Rabotnov Yu.N., Danilova I.N., Polilov A.N. et al.* Strength investigation of wounded epoxy CFRP and GFRP under torsion, tensile and 3-point bending load // *Mech. Polym.*, 1978, no. 2, pp. 219–225. (in Russian)
23. *Rabotnov Yu.N.* On strength of two-directions reinforced composites // *Mech. Polym.*, 1978, no. 5, pp. 832–834 (in Russian)
24. *Rabotnov Yu.N.* Introduction into Fracture Mechanics. Moscow: Nauka, 1987, 80 p. (in Russian)
25. *Rabotnov Yu.N.* Problems of Deformable Solids Mechanics. Selected Papers. Moscow: Nauka, 1991. 196 p. (in Russian)
26. *Polilov A.N.* Etudes on Mechanics of Composites. Moscow: Nauka, 2015. 320 p. (in Russian)
27. *Dumanski A. M., Alimov M.A., Terekhin A.V.* Experiment- and computation-based identification of mechanical properties of fiber reinforced polymer composites // *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, iss. 1, art. no. 1158.
28. *Ashpiz E.S., Suvorova Yu.V., Alexeeva S.I. et al.* Modelling of creep process of geo-grids at long-time loading // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2006, no. 1, pp. 49–54. (in Russian)
29. *Khokhlov A.V.* The analysis of own properties of creep curves under step loading, being born from non-linear Rabotnov's equations for visco-elastic materials // *Vestn. Bauman MSTU. Natural Sci.*, 2017, no. 3, pp. 93–123. (in Russian)
30. *Maslov B.P.* Nonlinear hereditary creep of isotropic composites of random structure // *Int. J. Appl. Mech.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 75–90.
31. *Lokoshenko A.V., Fomin L.V., Larin N.S.* Creep rupture strength of rod stretched in an aggressive medium with various two-connected forms of their cross-section // *Mech. of Solids*, 2021, vol. 56, no. 7, pp. 1277–1294.
32. *Radchenko V.P., Afanas'eva E.A., Saushkin M.N.* Prediction high temperature and long-term strength of visco-plastic material using a leader sample // *Vestn. Samar. Gos. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2023, vol. 27, no. 2, pp. 292–308. (in Russian)
33. *Suvorova Yu.V.* On Rabotnov's non-linear hereditary-type equation and its applications // *Mech. of Solids*, 2004, no. 1, pp. 174–181. (in Russian)
34. *Khokhlov A.V.* The analysis of properties of relaxation curves with initial stage of ramp-deformation, being born from Rabotnov's non-linear hereditary theory // *Mech. Compos. Mater.*, 2018, no. 4, pp. 687–708.

35. *Shitikova M.V.* Impact of rigid sphere on an infinite viscoelastic Kirchhoff-Love plate considering volume and shear relaxations // *Vestn. St. Pb. Gos. Univ. Ser. Math., Mech., Astron.*, 2023, vol. 10 (68), no. 1, pp. 139–154. (in Russian)
36. *Vlasov D.D., Polilov A.N., Tatus N.A.* On the problems of creep curves prediction for polymeric composites using vibration tests // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2021, no. 3–4, pp. 37–48. (in Russian)
37. *Vlasov D.D., Polilov A.N.* The possibility of creep prediction of viscoelastic polymer composites using frequency dependences of complex modulus components // *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 58, no. 1, pp. 274–289.
38. *Tatus N.A., Polilov A.N., Vlasov D.D.* The effect of holes on the strength reduction of composite specimens with different structure of fiber reinforcement // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2022, vol. 88, no. 4, pp. 58–65. (in Russian)
39. *Polilov A.N., Arutunova A.S., Tatus' N.A.* Effect of stress concentration near grips on composite strength realization under tension // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2020, vol. 86, no. 11, pp. 48–59.
40. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Estimating stress concentration near grips under tension of polymer composite samples // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2020, vol. 49, no. 5, pp. 446–456.
41. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design of composite structures reinforced curvilinear fibres // *Compos. Pt. A. Appl. Sci.&Manuf.*, 2016, vol. 87, pp. 23–31.
42. *Malakhov A.V., Polilov A.N.* Design algorithm of rational fiber trajectories in arbitrarily loaded composite plate // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 5, pp. 479–487.
43. *Malakhov A.V., Polilov A.N., Li D, Tian X.* Increasing the bearing capacity of composite plates in the zone of bolted joints by using curvilinear trajectories and a variable fiber volume fraction // *Mech. Compos. Mater.*, 2021, vol. 57, no. 3, pp. 287–300.
44. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Technological mechanics of composites, based on learning of Nature experience in design of bio-materials&structures // *Probl. Mashinostr. i Avtomat.*, 2021, no. 1, pp. 59–85. (in Russian)
45. *Plitov I.S., Polilov A.N.* Rational dimensions of segments of bamboo stems and composite tubes subjected to compression, flexure, and torsion // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2015, vol. 44, no. 3, pp. 239–248.
46. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Tatus' N.A.* Precise criterion of delamination of composite beam under bending // *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2023, vol. 89, no. 10, pp. 63–73.
47. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Biomechanical principles of optimum design of composite constructions // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2018, no. 3 (56), pp. 19–26. (in Russian)
48. *Polilov A.N., Tatus' N.A.* Biomechanics of Strength of Fibrous Composites. Moscow: Fizmatlit, 2018. 328 p. (in Russian)
49. *Polilov A.N., Tatus N.A.* Designing branching or shaped composite elements by analogy with the structure of treetops // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2017, vol. 46, no. 4, pp. 385–393.
50. *Polilov A.N., Tatus N.A., Tian X., Arutjunova A.S.* Equistrong branchy composite beams with a constant total area of variable elliptic cross sections // *Mech. Compos. Mater.*, 2019, vol. 55, no. 3, pp. 465–482.
51. *Polilov A.N., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Ply-by-ply calculation method and failure criteria of composite pressure vessels wounded with symmetric pair of layers. Pt. 1. Features of ply-by-ply design method for composite structure made of symmetric pair of layers // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2020, no. 3 (64), pp. 21–30.  
Pt. 2. Simple strength criteria for angle-ply reinforced tubes under two-axis tension // *Mashinostr. i Inzh. Obraz.*, 2020, no. 4 (65), pp. 14–25. (in Russian)
52. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Strength criteria of obliquely wound composite tubes under biaxial tension // *Strength of Mater.*, 2021, vol. 53, no. 5, pp. 765–774. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00342-7>
53. *Polilov A.N., Sklemina O.Yu., Tatus' N.A.* Design method of reinforcement structure with symmetric pairs of layers by the example of composite gas tank // *Mech. Compos. Mater.*, 2022, vol. 57, no. 6, pp. 769–784. <https://doi.org/10.1007/s11029-022-09998-x>
54. *Polilov A.N., Vlasov D.D., Sklemina O.Yu. Tatus' N.A.* Evaluation of the strength of a composite cylinder for compressed gas // *J. Machin. Manuf.&Reliab.*, 2022, vol. 51, no. 1, pp. 46–54. <https://doi.org/10.3103/S1052618822010083>
55. *Load Capacity and Safety of Metal-Composite Gas Tanks for Space Apparatus* / Ed. by *Moskvichev V.V., Testeodov N.A.* Novosibirsk. Nauka, 2021. 440 p. (in Russian)