

УДК 519.958:531.33:517.956.8

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКИХ УПРУГИХ ПРОКЛАДOK

©2024 С. А. Назаров^{1,*}

¹Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

^{*}e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию 19.07.2023 г.

После доработки 18.01.2024 г.

Принята к публикации 18.01.2024 г.

Изучены собственные колебания тонких изотропных однородных пластин постоянной и переменной толщины, основания которых жестко заземлены. Показано, что лишь для пластины постоянной толщиной с дополнительно зафиксированной боковой поверхностью двумерная модель — спектральная задача Дирихле для двумерной системы Ламе с измененным коэффициентом Пуассона — правильно описывает частоты собственных колебаний тонкого трехмерного тела. В остальных случаях асимптотический анализ предоставляет иные модели пониженной размерности, в частности разнообразные обыкновенные дифференциальные уравнения, а для соответствующих мод собственных колебаний характерна концентрация около всей боковой поверхности или некоторых точек на границе. При неплоских основаниях локализация собственных мод происходит около точек максимума толщины пластины и описывается обобщенными уравнениями гармонического осциллятора. Обсуждается случай несжимаемого изотропного материала пластины.

Ключевые слова: тонкая изотропная однородная пластина, зафиксированные основания, прокладка между жесткими штампами, модели пониженной размерности, локализация собственных колебаний.

DOI: 10.31857/S0032823524010083 EDN: YULWJG

1. Постановка задачи. Тонкая пластина (рис. 1)

$$\Omega_H^h = \left\{ \begin{array}{l} x = (y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : \\ y = (y_1, y_2) \in \omega, z \in \Upsilon_H^h(y) := (0, hH(y)) \end{array} \right\}, \quad (1.1)$$

изготовленная из однородного изотропного материала с постоянными Ламе $\lambda \geq 0, \mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$, жестко закреплена вдоль оснований

$$\begin{aligned} \Sigma^0 &= \{x : y \in \omega, z = x_3 = 0\} \\ \Sigma_H^h &= \{x : y \in \omega, z = hH(y)\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

но свободна от внешних воздействий на боковой поверхности

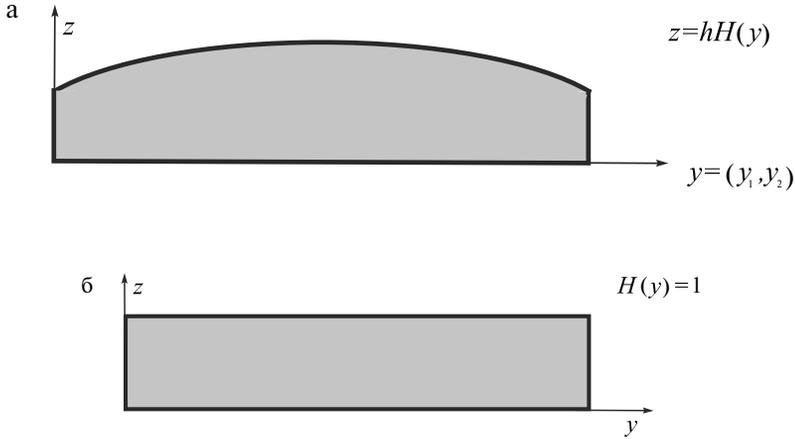


Рис. 1. Поперечные сечения пластин переменной (а) и постоянной толщины (б).

$$\Gamma_H^h = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) : y \in \partial\omega, z \in \Upsilon_H^h(y) \right\} \quad (1.3)$$

Сечение ω — область на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$, ограниченная простым связным замкнутым гладким (класса C^∞ ; ср. разд. 8, 2^0) контуром $\partial\omega$, H — гладкая положительная профильная функция на замкнутом множестве $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$, а h — малый положительный параметр. Масштабированием сведем характерный размер области ω к единице, т.е. сделаем декартову систему координат x и все геометрические параметры безразмерными; кроме того, положим $\rho = 1$.

Собственные колебания пластины (1.1) описываются системой дифференциальных уравнений Ламе в частных производных и краевыми условиями в смещениях и напряжениях

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{jk}(u^h; x) &= \\ &= \Lambda^h u^h(x); x \in \Omega_H^h, k = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$u_k^h(x) = 0; x \in \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h, k = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^3 n_j(x) \sigma_{jk}(u^h; x) = 0; x \in \Gamma_H^h, k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

Здесь Λ^h — спектральный параметр (квадрат частоты собственных колебаний), u_k^h — декартовы компоненты вектора смещений u^h , т.е. моды собственных колебаний или собственной вектор-функции, а в формуле для декартовых компонент тензора напряжений фигурирует символ Кронекера $\delta_{j,k}$

$$\sigma_{jk}(u^h) = \mu \left(\frac{\partial u_j^h}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^h}{\partial x_j} \right) + \lambda \delta_{j,k} \left(\frac{\partial u_1^h}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^h}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^h}{\partial x_3} \right) \quad (1.7)$$

Вариационная формулировка задачи (1.4) — (1.6) апеллирует к интегральному тождеству [1,2]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h) &= \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Omega_H^h} \\ \psi^h &\in H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h)^3 \end{aligned} \quad (1.8)$$

При этом $(\cdot, \cdot)_{\Omega_H^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega_H^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma_H^h)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на поверхности $\Sigma_H^h \subset \partial\Omega_H^h$, а последний верхний индекс 3 в формуле (1.8) указывает количество компонент пробной вектор-функции $\psi^h = (\psi_1^h, \psi_2^h, \psi_3^h)$. Наконец, $\mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная пластиной (1.1), а симметричная билинейная форма

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(u^h, \psi^h; \Omega_H^h) &= \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\begin{aligned} &\sum_{j,k=1}^3 (\sigma_{jk}(u^h), \sigma_{jk}(\psi^h))_{\Omega_H^h} - \\ &-\frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu} (\sum_{j=1}^3 \sigma_{jj}(u^h), \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk}(\psi^h))_{\Omega_H^h} \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

замкнута и положительно определена на пространстве $H_0^1(\Omega_H^h; \Sigma^0 \cup \Sigma_H^h)^3$. Таким образом, вариационная задача (1.8) (или краевая задача (1.4) — (1.6)) обладает дискретным спектром, образующим монотонную неограниченную положительную последовательность нормальных собственных чисел

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_m^h \leq \dots \rightarrow \cdot \quad (1.10)$$

Основная цель работы — исследовать асимптотическое поведение собственных частот и соответствующих мод колебаний пластины в трех ситуациях:

1) профильная функция H имеет глобальный строгий максимум в точке y^0 внутри области ω ;

2) $H(y) = H_0$ — постоянная и ω — круг $B_1 = \{y : |y| < 1\}$;

3) $H(y) = H_0$ — постоянная и кривизна к контура γ имеет глобальный строгий экстремум (максимум или минимум; см. разд. 6) в точке $y^0 \in \omega$.

В последних двух случаях положим $H_0 = 1$ (рис. 1б), обозначив пластину и ее боковую поверхность через Ω^h и Γ^h соответственно. Кроме того, поместим начало \mathcal{O} двумерной системы декартовых координат y в точку y^0 .

Краевые условия (1.5), (1.11) и (1.6) далее называем условиями Дирихле и Неймана соответственно.

Пластина играет роль тонкой упругой прокладки между двумя абсолютно жесткими штампами, прикрепленной к их поверхностям, однако общепринятый подход к асимптотическому анализу тонких деформируемых тел (см. [3–7] и многие другие публикации) дает правильный ответ — какую-то двумерную задачу на сечении ω для определения собственных пар {число; вектор-функция} — только в случае пластины

постоянной толщины с полностью зафиксированной поверхностью, т.е. при замене краевого условия (1.6) в напряжениях условиями в смещениях

$$u_k^h(x) = 0; \quad x \in \Gamma_H^h, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.11)$$

Собственные вектор-функции задач Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) и смешанной краевой (1.4) — (1.6) подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$\left(u_{(p)}^h, u_{(q)}^h \right)_{\Omega^h} = \delta_{p,q}; \quad p, q \in N := \{1, 2, 3, \dots\} \quad (1.12)$$

В разд. 4–7 показано, что начальные члены последовательности (1.10) собственных чисел смешанной краевой задачи (1.4) — (1.6) находятся из совершенно иных задач, а для собственных вектор-функций характерна сугубая локализация около экстремальных точек кривизны к контура $d\omega$ (ситуация (iii)) или в малой окрестности всей круговой кромки Γ^h (ситуация (ii)). В ситуации (i) локализация происходит около точек экстремумов профильной функции H .

Двумерная модель [8] пластины Ω^h с полностью зафиксированной поверхностью $\partial\Omega^h$ указана в разд. 3. Эффекты концентрации мод собственных колебаний обусловлены явлением пограничного слоя, информация о котором приведена в разд. 2. К сожалению, полное исследование спектральной задачи теории упругости в полубесконечной полосе (далее полуполосе; рис. 2)

$$\Pi = \{ \xi = (\xi_1, \xi_2) : \xi_1 < 0, \xi_2 \in (0, 1) \} \quad (1.13)$$

посредством аналитических выкладок невозможно и требует применения вычислительных методов, а часть результатов в статье получена при рассмотрении возможных разных случаев.

Одномерные модели, описывающие, в частности, локализацию собственных вектор-функций в цилиндрической пластине Ω^h , найдены в разд. 5 и разд. 6. Пластина Ω^h переменной толщины $hH(y)$ рассмотрена в разд. 7, где выведена и исследована предельная система дифференциальных уравнений на плоскости с растущими на бесконечности коэффициентами — векторный аналог уравнения гармонического осциллятора [9]. В разд. 8 собраны доступные обобщения и перечислены открытые вопросы, относящиеся, например, к численным решениям модельных задач теории упругости в полуполосе. Кроме того, кратко обсуждаются пластины, изготовленные из несжимаемого материала.

2. Спектр задачи о пограничном слое. В этом разделе рассматриваем пластину (1.1) постоянной толщины, т.е. $H(y) = 1$ (рис. 1б). При некотором $d > 0$

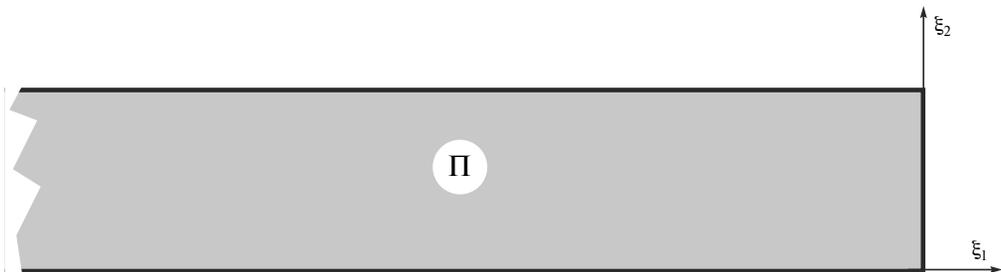


Рис. 2. Полубесконечная упругая полоса, служащая для описания явления пограничного слоя.

в d -окрестности N_d контура $\partial\omega$ введем естественную систему криволинейных координат (n, s) , где n — ориентированное расстояние до $\partial\omega$, $n < 0$ в $\omega \cap N_d$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Проекция тензора напряжений $\sigma(u^h)$ на оси n , s и z имеют вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{nn}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_n u_n^h + \\
 &+ \lambda \left(J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \partial_z u_z^h \right) \\
 \sigma_{ss}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h) + \\
 &+ \lambda(\partial_n u_n^h + \partial_z u_z^h) \\
 \sigma_{zz}(u^h) &= (\lambda + 2\mu)\partial_z u_z^h + \\
 &+ \lambda(\partial_n u_n^h + J^{-1}(\partial_s u_s^h + \kappa u_n^h)) \\
 \sigma_{ns}(u^h) &= \sigma_{sn}(u^h) = \\
 &= \mu(\partial_n u_s^h + J^{-1}(\partial_s u_n^h - \kappa u_s^h)) \\
 \sigma_{sz}(u^h) &= \sigma_{zs}(u^h) = \\
 &= \mu(J^{-1}\partial_s u_z^h + \partial_z u_s^h) \\
 \sigma_{zn}(u^h) &= \sigma_{nz}(u^h) = \mu(\partial_n u_z^h + \partial_z u_n^h)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

При этом $\kappa(s)$ — кривизна контура переменного знака, т.е. отрицательная на вогнутых участках дуги $\partial\omega \ni s$, а $J(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ — якобиан. Кроме того, n_i — проекция на ось y_i единичного вектора двумерной нормали к границе сечения ω , $i = 1, 2$, а проекции вектора смещений u^h на оси криволинейной системы координат заданы формулами

$$u_n^h = n_1 u_1^h + n_2 u_2^h, \quad u_s^h = -n_2 u_1^h + n_1 u_2^h, \quad u_z^h = u_3^h$$

Наконец, запишем в координатах n, s и z систему уравнений (1.4)

$$\begin{aligned}
 -\partial_n \sigma_{nn}(u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{ns}(u^h) + \right. \\
 \left. + \kappa(\sigma_{nn}(u^h) - \sigma_{ss}(u^h)) \right) - \\
 - \partial_z \sigma_{nz}(u^h) = \Lambda^h u_n^h \\
 -\partial_n \sigma_{sn}(u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{ss}(u^h) + 2\kappa \sigma_{sn}(u^h) \right) - \\
 - \partial_z \sigma_{sz}(u^h) = \Lambda^h u_s^h
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
 & -\partial_n \sigma_{zn} (u^h) - J^{-1} \left(\partial_s \sigma_{zs} (u^h) + \kappa \sigma_{zn} (u^h) \right) - \\
 & \quad - \partial_z \sigma_{zz} (u^h) = \Lambda^h u_z^h
 \end{aligned}$$

Для построения пограничного слоя, как обычно, произведем растяжение координат

$$n \mapsto \eta = h^{-1}n, z \mapsto \zeta = h^{-1}z, \quad (2.3)$$

но сохраним прежний масштаб для длины дуги s на контуре $\partial\omega$. В результате (3×3) -матрица L^h дифференциальных операторов второго порядка из левых частей уравнений (2.2), действующая на вектор (u_n^h, u_z^h, u_s^h) , допускает расщепление

$$\begin{aligned}
 & L^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) = \\
 & = h^{-2} L^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) + h^{-1} L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + \\
 & \quad + L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) + \dots
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом

$$L^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) = - \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 & (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_\zeta & 0 \\ (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_\eta & (\lambda + 2\mu)\partial_\zeta^2 + \mu\partial_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta^2 + \mu\partial_\zeta^2 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$L^{(1)}(s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = - \begin{pmatrix} 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta & 0 & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\eta \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\zeta & \mu\kappa(s)\partial_\eta & (\lambda + \mu)\partial_s\partial_\zeta \\ (\lambda + \mu)\partial_\eta\partial_s & (\lambda + \mu)\partial_\zeta\partial_s & -\mu\kappa(s)\partial_\eta \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
 & L^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_\zeta, \partial_s) = \\
 & = \begin{pmatrix} -\mu\partial_s^2 + 2(\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\eta - 2\mu\kappa(s)^2 & 0 & L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ (\lambda + \mu)\kappa(s)^2\eta\partial_\zeta & -\mu\partial_s^2 + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta & L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \\ L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{sz}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) \end{pmatrix} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Следующие скалярные операторы из матрицы (2.7) востребованы в вычислениях не будут:

$$\begin{aligned}
 L_{ns}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) & = 2(\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\eta\partial_s + \\
 & \quad + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_s - \mu\partial_s\kappa(s)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{sn}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) &= -(\lambda + 2\mu)\partial_s \kappa(s) + \\
&\quad + (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\eta\partial_s - \mu\kappa(s)\partial_s \\
L_{zs}^{(2)}(\eta, s, \partial_z, \partial_s) &= (\lambda + \mu)\kappa(s)\eta\partial_\zeta\partial_s \\
L_{s\zeta}^{(2)}(\eta, s, \partial_\zeta, \partial_s) &= (\lambda + \mu)\kappa(s)\partial_\zeta\partial_s \\
L_{ss}^{(2)}(\eta, s, \partial_\eta, \partial_s) &= -(\lambda + 2\mu)\partial_s^2 + \\
&\quad + \mu\kappa(s)^2\eta\partial_\eta + \mu\kappa(s)^2
\end{aligned}$$

Аналогичные, но более простые расщепления верны для дифференциальных операторов первого порядка из формул (2.1) для напряжений. Далее понадобятся соотношения

$$\begin{aligned}
B^h(n, z, s, \partial_n, \partial_z, \partial_s) &= h^{-1}B^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) + \\
&\quad + B^{(1)}(s, \partial_s) + hB^{(2)}(\eta, s, \partial_s) + \dots
\end{aligned}$$

$$B^{(0)}(\partial_\eta, \partial_\zeta) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_\eta & \lambda\partial_\zeta & 0 \\ \mu\partial_\zeta & \mu\partial_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \mu\partial_\eta \end{pmatrix}$$

$$B^{(1)}(s, \partial_s) = \begin{pmatrix} \lambda\kappa(s) & 0 & \lambda\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu\partial_s & 0 & -\mu\kappa(s) \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$B^{(2)}(\eta, s, \partial_s) = \begin{pmatrix} -\lambda\kappa(s)^2\eta & 0 & -\lambda\kappa(s)\eta\partial_s \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mu\kappa(s)\eta\partial_s & 0 & -\mu\kappa(s)^2\eta \end{pmatrix}$$

для матрицы дифференциальных операторов из выражения

$$B^h u^h = \left(\sigma_{nm}(u^h), \sigma_{nz}(u^h), \sigma_{ns}(u^h) \right) \text{ в левой части краевого условия Неймана (1.6).}$$

После выделения главных асимптотических частей (2.4) дифференциальных операторов и замены $h^2\Lambda^h \mapsto M$ нормированного спектрального параметра получим из системы (1.4) двумерную систему уравнений теории упругости для вектора смещений $U' = (U_1, U_2)$ в полуполосе Π (формула (1.13) и рис. 2)

$$-\mu\Delta_\xi U' - (\lambda + \mu)\nabla_\xi \cdot \nabla_\xi U' = MU' \text{ в } \Pi, \quad (2.9)$$

а также уравнение Гельмгольца для скаляра U_3 (депланации)

$$-\mu\Delta_\xi U_3 = MU_3 \text{ в } \Pi \quad (2.10)$$

При этом M — новое обозначение спектрального параметра, координаты $\eta = \xi_1$ и $\zeta = \xi_2$ интерпретируем как декартовы на плоскости $\mathbb{R}^2 \supset \Pi$, а U_1, U_2 и U_3 — как образы компонент u_n, u_z и u_s вектора смещений. Вместе с тем в разд. 5 и 6 при операциях с трехмерным вектором U обозначаем проекции на оси криволинейной системы координат через U_n, U_z и U_s .

Уравнение (2.10) с проистекающими от исходных условий (1.5) и (1.6) смешанными краевыми условиями

$$U_3(\xi_1, 0) = U_3(\xi_1, 1) = 0; \xi_1 < 0 \tag{2.11}$$

$$\mu \frac{\partial U_3}{\partial \xi_1}(0, \xi_2) = 0; \xi_2 \in (0, 1) \tag{2.12}$$

изучается посредством метода Фурье. В частности, дискретный спектр задачи (2.10) — (2.12) пуст, а ее непрерывный спектр — луч с точкой отсечки

$$M_{\dagger} = \pi^2 \mu \tag{2.13}$$

При $M = M_{\dagger}$ у задачи (2.10) — (2.12) есть ограниченное, стабилизирующееся на бесконечности решение

$$U_3^{\dagger}(\xi) = \sin(\pi \xi_2) \tag{2.14}$$

Иными словами, наблюдается пороговый резонанс [10], простой и правильный по терминологии [11]. Наконец, при постановке условия Дирихле

$$U_3 = 0; \xi \in \partial \Pi \tag{2.15}$$

всюду на границе полуполосы непрерывный и дискретный спектры скалярной задачи Дирихле остаются без изменений, но пороговый резонанс исчезает, так как у задачи с параметром (2.13) нет ограниченных решений, а только линейно растущее $c \xi_1 \sin(\pi \xi_2)$ и счетный набор малоинтересных решений с экспоненциальным ростом при $\xi_1 \rightarrow -\infty$.

Изучен [12–15] спектр \wp двумерной системы (2.9) в упругой изотропной полуполосе Π с разнообразными краевыми условиями на ее боковых сторонах и торце

$$\begin{aligned} \wp_j &= \{ \xi : \xi_1 < 0, \xi_2 = j \} \\ j = 0, 1, \text{ и } \wp_{\bullet} &= \{ \xi : \xi_1 = 0, \xi_2 \in (0, 1) \} \end{aligned}$$

Сократим обозначение производных: $\partial_j = \partial / \partial \xi_j; j = 1, 2$. Для вытекающих из формул (1.5) и (1.6) смешанных краевых условий

$$U_1(\xi) = U_2(\xi) = 0; \xi \in \wp_0 \cup \wp_1 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(U; \xi) &:= (\lambda + 2\mu) \partial_1 U_1(\xi) + \\ &+ \lambda \partial_2 U_2(\xi) = 0; \xi \in \wp_{\bullet} \\ \sigma_{12}(U; \xi) &:= \mu \partial_2 U_1(\xi) + \mu \partial_1 U_2(\xi) = 0; \xi \in \wp_{\bullet} \end{aligned} \tag{2.17}$$

проверено [14], что непрерывный спектр \wp_c оператора системы Ламе — луч $[M_{\dagger}, +\infty)$ с точкой отсечки (2.13), а дискретный спектр \wp_d содержит по крайней мере одну

точку $M_1 \in (0, M_+)$, причем сопутствующая захваченная волна $\bar{U}_{(1)} \in H_0^1(\Pi; \bar{\omega}_0 \cup \bar{\omega}_1)^2$ затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Краевые условия (2.17) и (2.12) получены при учете расщепления (2.8). Косвенная аргументация, основанная на геометрической и материальной симметрии задачи подсказывает, что M_1 — единственная точка в \wp_d . Далее используем это свойство дискретного спектра, хотя его строгое обоснование до сих пор не найдено.

Вариационная постановка задачи (2.9), (2.16), (2.17) сводится к интегральному тождеству [1,2]

$$E(U', \Psi; \Pi) = M(U', \Psi)_{\Pi}, \quad \Psi \in H_0^1(\Pi; \partial\P \setminus \bar{\omega}_\bullet)^2 \quad (2.18)$$

В плоском случае удвоенная упругая энергия, порожденная вектором смещений $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)$ в полуполосе, имеет вид

$$E(\Psi, \Psi; \Pi) = \int_{\Pi} \left(\begin{aligned} &2\mu \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} \right|^2 + 2\mu \left| \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} \right|^2 + \\ &+ \mu \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_1} \right|^2 + \lambda \left| \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial \xi_2} \right|^2 \end{aligned} \right) d\xi \quad (2.19)$$

Собственную вектор-функцию $U_{(1)}$ нормируем в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$.

При помощи классического приема [16] доказано [13], что при постановке на торце условия Дирихле

$$\bar{U}(\xi) = 0; \quad \xi \in \bar{\omega}_\bullet \quad (2.20)$$

у задачи (2.9), (2.16), (2.20) захваченных волн нет на любых частотах, т.е. пуст и точечный спектр (дискретный спектр плюс собственные числа, вкрапленные в непрерывный спектр). Более того, отсутствует пороговый резонанс.

Вопрос о реализации порогового резонанса в смешанной краевой задаче (2.9), (2.16), (2.17), т.е. наличии у нее при $M = M_+$ ограниченного (вещественного) решения

$$U^\dagger(\xi) = K_+ \sin(\pi \xi_2) e_{(1)} + \tilde{U}^\dagger(\xi) \quad (2.21)$$

с экспоненциально затухающим остатком $\tilde{U}^\dagger(\xi)$, коэффициентом K_+ и ортом $e_{(1)}$ оси ξ_1 , остается открытым, но ответ на него в данной работе не востребован по существу. Из-за наличия собственного числа $M_1 \in \wp_d$ правдоподобна гипотеза: пороговый резонанс отсутствует и у смешанной краевой задачи, и вместо ограниченного решения (2.21) появляется имеющее линейный рост на бесконечности (опять-таки вещественное) решение

$$U^\#(\xi) = (\xi_1 + K_\#) \sin(\pi \xi_2) e_{(1)} + \tilde{U}^\#(\xi) \quad (2.22)$$

с каким-то коэффициентом $K_\#$ и экспоненциально затухающим остатком $\tilde{U}^\# \in H_0^1(\Pi; \bar{\omega}_0 \cup \bar{\omega}_1)^2$. При этом в принципе не исключено возникновение затухающего ($K_+ = 0$) решения (2.21), т.е. захваченной волны, при которой M_+ — истинное собственное число, а сам пороговый резонанс — мнимый (терминология

[11]). Если же $K_{\dagger} \neq 0$, то решение (2.22) заведомо отсутствует, а почти стоячая волна (2.21) порождает правильный пороговый резонанс. Таким образом, в скалярной задаче (2.10) — (2.12) пороговый резонанс правильный, а почти стоячая волна (2.14) устроена очень просто, так как остаток U^{\dagger} нулевой.

3. Двумерная модель тонкой пластины с полностью зафиксированной поверхностью. Изложим с некоторыми исправлениями результат [8] для задачи Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) в цилиндрической пластине $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ — сопутствующие вычисления используются и далее в статье. Подставим асимптотические разложения ее собственных пар (малые остатки обозначены многоточием)

$$\Lambda^h = h^{-2}M_{\dagger} + \beta + \dots = h^{-2}\mu\pi^2 + \beta + \dots \quad (3.1)$$

$$u^h(x) = \frac{1}{h} \sum_{i=1,2} (v_i(y)\sin(\pi\zeta)e_{(i)} + hV_i'(\zeta, y)) + V_3(\zeta)\nabla_y v(y)e_{(3)} + \dots \quad (3.2)$$

в систему уравнений (1.4) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра h . В результате при учете условия Дирихле на основаниях пластины получим скалярную задачу для функции V_3 из разложения (3.2)

$$\begin{aligned} & -(\lambda + 2\mu)\partial_{\zeta}^2 V_3(\zeta) - M_{\dagger}V_3(\zeta) = \\ & = (\lambda + \mu)\pi\cos(\pi\zeta); \zeta \in (0,1) \\ & V_3(0) = V_3(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

и явное выражение

$$\begin{aligned} V_3(\zeta) &= \frac{1}{\pi} \left(\cos(\pi\zeta) - \cos(\pi\alpha\zeta) + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \cos(\pi\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} \sin(\pi\alpha\zeta) \right) \\ \alpha &= \sqrt{\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}} \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.4)$$

При этом $s \in (\pi\alpha\zeta) > 0$.

Условия разрешимости

$$\int_0^1 \sin(\pi\zeta) F'(y, \zeta) d\zeta = 0 \in \mathbb{R}^2$$

очередной задачи для вектора $V' = (V_1', V_2')$

$$\begin{aligned} & -\mu\Delta_y V' - M_{\dagger}V' = \\ & = F' := (\beta v + \mu\Delta_y v + (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y v)\sin(\pi\zeta) + \\ & + (\lambda + \mu)\partial_{\zeta} V_3 \nabla_y \nabla_y v \text{ при } \zeta \in (0,1) \end{aligned}$$

$$V'(0) = V'(1) = 0$$

принимает вид двумерной системы дифференциальных уравнений Ламе для ингредиентов $v = (v_1, v_2)$ и β разложений (3.2) и (3.1)

$$-\mu\Delta_y v(y) - 2\theta\nabla_y \nabla_y v(y) = \beta v(y); y \in \omega \quad (3.5)$$

В самом деле, согласно равенствам (2.13) и (3.3) имеем

$$\begin{aligned} & (\lambda + \mu) \int_0^1 \sin(\pi\zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = -(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \partial_\zeta \cos(\pi\zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta + \\ & \quad + \mu \int_0^1 \sin(\pi\zeta) \partial_\zeta V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi\zeta) \partial_\zeta^2 V_3(\zeta) d\zeta + \theta + \\ & \quad + \mu\pi \int_0^1 \cos(\pi\zeta) V_3(\zeta) d\zeta = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\lambda + \mu) \pi \cos^2(\pi\zeta) d\zeta + \theta = \\ & = \frac{1}{2}(\lambda + \mu) + b \\ \theta = \theta(\alpha) & := (\lambda + 2\mu) \frac{1}{\pi} \left(\frac{dV_3}{d\zeta}(1) + \frac{dV_3}{d\zeta}(0) \right) = \\ & = (\lambda + 2\mu) \frac{2\alpha}{\pi} \frac{1 + \cos\pi\alpha}{\sin\pi\alpha} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, при формировании системы (3.5) коэффициент (3.6) при $\nabla_y \nabla_y v$ умножается на два и уничтожается последнее слагаемое в следующей простой формуле для оставшейся части выражения F' :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin(\pi\zeta) (\beta v + \mu\Delta_y v + (\lambda + \mu)\nabla_y \nabla_y v) \times \\ & \quad \times \sin(\pi\zeta) d\zeta = \frac{1}{2} (\beta v + \mu\Delta_y v) + \\ & \quad + \frac{1}{2} (\lambda + \mu) \nabla_y \nabla_y v \end{aligned}$$

Функция $\left[0, 2^{-\frac{1}{2}} \right] \ni \alpha \mapsto \lambda_*(\alpha) := 2\theta(\alpha) - \mu$ монотонно убывает от $+\infty$ до отрицательного значения, чуть меньшего $-\mu/9$. Таким образом, новые постоянная Ламе $\lambda_*(\alpha)$ и коэффициент Пуассона $\nu_*(\alpha) = \frac{\lambda_*(\alpha)}{2(\lambda_*(\alpha) + \mu)}$ в системе (3.5) становятся

отрицательными при малом коэффициенте Пуассона $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + 2\mu)}$ самого материала пластины, хотя сумма $\lambda_*(\alpha) + \mu$ всегда положительна.

Найденную систему (3.5) замыкаем краевыми условиями

$$v_j(y) = 0; y \in \partial\omega, j = 1, 2 \quad (3.7)$$

Гипотетически появление условий Дирихле (3.7) объясняется исходными краевыми условиями (1.11) на боковой поверхности пластины, но правильный их вывод [8], основанный на методе сращиваемых асимптотических разложений (см. монографии [17–19, гл. 2], а также разд. 8, 1°) учитывает одновременное отсутствие дискретного спектра и порогового резонанса в задачах об упругой полуполосе (1.12), плоской (2.9), (2.16), (2.20) и антиплоской (2.10), (2.15).

Поскольку $\lambda_*(\alpha) + \mu > 0$, задача Дирихле (3.5), (3.7) имеет дискретный спектр, образующий положительную монотонную неограниченную последовательность собственных чисел, составленную при учете их кратностей

$$0 < \beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3 \leq \dots \leq \beta_m \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (3.8)$$

Проверено [8], что для любого натурального m найдутся положительные величины h_m и c_m , при которых собственные числа (1.10) и (3.8) соответственно задач (1.4), (1.5), (1.11) и (3.5), (3.7) находятся в отношении

$$\left| \Lambda_m^h - h^{-2} M_{\dagger} - \beta_m \right| \leq c_m h^{\frac{1}{2}} \text{ при } h \in (0, h_m] \quad (3.9)$$

Оценка погрешности (3.9) показывает, что двумерная модель тонкой прокладки с полностью закрепленной поверхностью построена корректно. На первый взгляд кажется, что в случае прокладки с боковой поверхностью, свободной от внешнего воздействия, краевые условия Неймана (1.6) дают в качестве предельной задачи систему двумерных уравнений (3.5) с обычными краевыми условиями в напряжениях. Этот вывод скоропалителен по двум причинам. Во-первых, в очередных разделах установлено, что низкочастотный диапазон спектра задачи (1.4) — (1.6) о цилиндрической пластине $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ определяется одномерными (а вовсе не двумерной) задачами на контуре $\partial\omega$ или на целой оси \mathbb{R} . Во-вторых, в разд. 8, 1° пояснено, что тип краевых условий для системы (3.5), которая в некотором смысле служит для описания среднечастотного диапазона спектра трехмерной задачи, определен не исходными краевыми условиями на боковой поверхности Γ^h , а явлением порогового резонанса в задачах (2.9), (2.16), (2.17) и (2.10) — (2.12) о пограничных слоях.

4. О затухании собственных мод вне окрестности кромки прокладки. Для цилиндрической пластины $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ с боковой поверхностью, свободной от внешних воздействий, доказано [8], что при ограничении

$$\Lambda_m^h \leq \frac{M_{\dagger}}{h^2} - \frac{\varepsilon}{h^2} \quad (4.1)$$

с некоторыми $m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ найдется такая положительная величина $h_m(\varepsilon)$, что для

$h \in (0, h_m(\varepsilon)]$ и $p = 1, \dots, m$ собственные моды $u_{(p)}^h$ затухают при удалении от боковой поверхности (1.3) с экспоненциальной скоростью $e^{-\delta_p \text{dist}(y, \partial\omega)/h}$ при положительных показателях δ_p .

У задачи Дирихле (1.4), (1.6), (1.11) собственных чисел (4.1) нет по причине одномерного неравенства Фридрихса

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |\partial_\zeta W(\zeta)|^2 d\zeta \geq \\ & \geq \pi^2 \int_0^1 |W(\zeta)|^2 d\zeta; W \in H^1(0,1) \\ & W(0) = W(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

проинтегрированного по переменным $y \in \omega$, и совпадения функционалов упругой энергии (1.9) и так называемой квазиэнергии [2]

$$\int_{\Omega^h} \left(\mu |\nabla_x u^h(x)|^2 + (\lambda + \mu) |\nabla_x u^h(x)|^2 \right) dx$$

Убедимся в том, что начальные члены последовательности (1.10) собственных чисел задачи (1.4) — (1.6) в самом деле удовлетворяют неравенству (4.1).

Поскольку билинейная форма (1.9) из левой части интегрального тождества (1.8) симметрична, положительно определена и замкнута в пространстве Соболева $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$, задаче (1.4) — (1.6) ставится в соответствие [20, гл. 10, § 1] неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор A^h в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega^h)^3$. Дискретный спектр (1.10) этого оператора вычисляется при помощи максиминимального принципа [20, теорема 10.2.2]

$$\Lambda_m^h = \max_{L_m^h} \inf_{\psi^h \in L_m^h \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{E}(\psi^h, \psi^h; \Omega^h)}{\|\psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2}; m \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

в котором L_m^h — любое подпространство в пространстве $H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$ с коразмерностью $m - 1$, в частности, $L_1^h = H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$.

Зафиксируем натуральное число $m \in \mathbb{N}$ и выделим на контуре $\partial\omega$ непустые попарно непересекающиеся открытые дуги $\gamma_1, \dots, \gamma_m$. Для нетривиальных функций $\phi_p \in C_c^\infty(\gamma_p)$; $p = 1, \dots, m$, обращаясь в нуль около концевых точек дуг, определим проекции вектор-функций $\Phi_{(p)}^h$ на оси n, z и s равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_{(p)n}^h(x) &= \chi_\omega(y) \phi_p(s) U_{(1)n}(h^{-1}n, h^{-1}z) \\ \Phi_{(p)z}^h(x) &= \chi_{\omega(y)\phi_p(s)} U_{(1)z}(h^{-1}n, h^{-1}z), \Phi_{(p)s}^h(x) = 0 \end{aligned}$$

При этом χ_ω — гладкая срезающая функция, равная единице при $y \in N_{d/2}$ и нулю вне окрестности N_d контура $\partial\omega$, а $U_{(1)}' \in H_0^1(\Pi; \partial\Pi \setminus \mathfrak{A})^2$ — собственная вектор-функция задачи (2.9), (2.16), (2.17), отвечающая собственному числу $M_1 < M_1^\dagger$ и нормированная в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$. В силу равенства (2.18) при $\Psi = U_{(1)}' u$ $M = M_1$ имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi_{(p)}^h; L^2(\Omega^h)\| &= \int_{\partial\omega} \int_{-d}^0 \int_0^h |\chi_{\omega(y)}|^2 |\Phi_p(s)|^2 \times \\ &\quad \times \left| U_{(1)}' \left(\frac{n}{h}, \frac{z}{h} \right) \right|^2 J(n,s) dn dz ds = \\ &= h^2 \|\Phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 \left(\|U_{(1)}'; L^2(\Pi)\|^2 + O(h) \right) = \\ &= h^2 \|\Phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (1 + O(h)) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(\Phi_{(p)}^h, \Phi_{(p)}^h; \Omega^h) &= \|\Phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 \times \\ &\quad \times \left(E(U_{(1)}', U_{(1)}'; \Pi) + O(h) \right) = \\ &= \|\Phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 \left(M_1 \|U_{(1)}'; L^2(\Pi)\|^2 + O(h) \right) = \\ &= \|\Phi_p; L^2(\gamma_p)\|^2 (M_1 + O(h)) \end{aligned}$$

Здесь были учтены представление для якобиана $J(n,s) = 1 + O(|n|)$ и экспоненциальное затухание моды $U_{(1)}'(\xi)$ при $h^{-1}n = \xi_1 \rightarrow -\infty$.

Положив $\Psi_{(p)}^h = \|\Phi_{(p)}^h; L^2(\Omega^h)\|^{-1} \Phi_{(p)}^h$, получим набор ортонормированных в пространстве $L^2(\Omega^h)^3$ пробных вектор-функций $\Psi_{(1)}^h, \dots, \Psi_{(m)}^h \in H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$, причем согласно соотношениям (4.4) для любой линейной комбинации $\Psi^h = a_1^h \Psi_{(1)}^h + \dots + a_m^h \Psi_{(m)}^h$ с нормированным столбцом коэффициентов $(a_1^h, \dots, a_m^h) \in \mathbb{R}^m$ выполнена оценка

$$\mathfrak{E}(\Psi^h, \Psi^h; \Omega^h) \leq (M_1 h^{-2} + C_m h^{-1}) \|\Psi^h; L^2(\Omega^h)\|^2 \quad (4.5)$$

с некоторым общим множителем C_m . Итак, любое подпространство $L_m^h \subset H_0^1(\Omega^h; \Sigma^0 \cup \Sigma^h)^3$ с коразмерностью $m-1$ содержит свою нетривиальную линейную комбинацию $\Psi^h(L_m^h)$ построенных вектор-функций. В результате выводим из формул (4.3) и (4.5) соотношение

$$\Lambda_m^h \leq \max_{L_m^h} \frac{\mathcal{E}(\Psi^h(L_m^h), \Psi^h(L_m^h); \Omega^h)}{\|\Psi^h(L_m^h); L^2(\Omega^h)\|^2} \leq \frac{M_1}{h^2} + \frac{C_m}{h}$$

Отсюда вытекает неравенство (4.1) при любом $\varepsilon \in \left(0, \frac{M_1 - M_1}{2}\right)$ и достаточно малом $h > 0$.

5. Прокладка в форме кругового цилиндра. В ситуации (ii) сечение ω — единичный круг \mathbb{B}_1 , а $(r, \varphi, z) = (1 + n, s, z)$ — система цилиндрических координат. Кроме того, кривизна κ постоянная, но ее значение $\kappa(s) = \kappa_0 = 1$ часто не конкретизируем для использования формул в очередном разделе.

Собственные пары задачи (1.4) — (1.6) ищем в виде

$$\Lambda^h = h^{-2}M_1 + h^{-1}A + \beta + \dots \quad (5.1)$$

$$u^h(x) = U_{(1)}(\eta, \zeta)v(s) + hW(\eta, \zeta, s; v) + h^2Z(\eta, \zeta, s; v) + \dots \quad (5.2)$$

Как и ранее, многоточие замещает младшие асимптотические члены, $\{M_1; U_{(1)}'\}$ — первая собственная пара задачи (2.9), (2.16), (2.17), экспоненциально затухающая вектор-функция $U_{(1)}' = (U_{(1)1}, U_{(1)2}) := (U_{(1)n}, U_{(1)z})$ нормирована в пространстве $L^2(\Pi)^2$, а компонента $U_{(1)s}$ вектора $U_{(1)}$ взята нулевой в формуле (5.2). Остальные ингредиенты введенных разложений подлежат определению.

Подставим соотношения (5.1), (5.2) и (2.4) в систему (1.4) и соберем множители при h^{-2} и h^{-1} . При учете формул (2.9) и (2.5), (2.6) видим, что старшие асимптотические члены взаимно уничтожаются. Первое поправочное слагаемое представим в виде

$$W(\eta, \zeta, s; v) = (v(s)W_n(\eta, \zeta), v(s)W_z(\eta, \zeta), \partial_s v(s)W_s(\eta, \zeta)) \quad (5.3)$$

В итоге для двумерного вектора $W' = (W_1, W_2) := (W_n, W_z)$ получим систему уравнений

$$-\mu \Delta_\xi W''(\xi) - (\lambda + \mu) \nabla_\xi \nabla_\xi W''(\xi) - M_1 W''(\xi) = AU_{(1)}'(\xi) + \kappa(s)F'(\xi); \xi \in \Pi \quad (5.4)$$

$$F' = (F_1', F_2'), F_1' = 2(\lambda + \mu) \partial_\eta U_{(1)1} \\ F_2' = (\lambda + \mu) \partial_\zeta U_{(1)2} + \mu \partial_\eta U_{(1)2} \quad (5.5)$$

Однородные условия Дирихле (2.16) для вектор-функции W' на боковых сторонах полуполосы очевидны, а формулы (2.8), (2.17) и (5.3) обеспечивают следующие краевые условия на ее торце ∂_\bullet :

$$\sigma_{1j}(W'; 0, \xi_2) = \kappa(s)G'_j(\xi_2); \xi_2 \in (0,1), j = 1,2 \tag{5.6}$$

$$G' = (G'_1, G'_2), G_1(\xi_2) = -\lambda U_{(1)1}(0, \xi_2), G_2(\xi_2) = 0 \tag{5.7}$$

В случае простого собственного числа M_1 задача (2.16), (5.4), (5.6) имеет решение при выполнении соотношения

$$A \int_{\Pi} |U_{(1)}(\xi)|^2 d\xi + \kappa_0 \times \left(\int_{\Pi} U'_{(1)}(\xi) F'(\xi) d\xi - \int_0^1 U'_{(1)}(0, \xi_2) G'(\xi_2) d\xi_2 \right) = 0, \tag{5.8}$$

которое при помощи формулы интегрирования по частям, а также соотношений (5.5), (5.7) и $\|U'_{(1)}; L^2(\Pi)\| = 1$ превращаем в равенство

$$A = -\frac{\kappa_0}{2} \int_{\mathfrak{w}_\bullet} \left(2\mu |U_{(1)1}(\xi)|^2 + \mu |U_{(1)2}(\xi)|^2 \right) d\xi_2 < 0 \tag{5.9}$$

Интеграл по торцу \mathfrak{w}_\bullet положителен в силу теоремы о единственности продолжения [21, гл. 4], означающей, что вектор $U'_{(1)}$ не может целиком обратиться в нуль всюду на и, кроме того, $\kappa_0 = 1$. Таким образом, равенство (5.9) определяет первый поправочный член в разложении (5.9) собственного числа, и он отрицательный.

Согласно формулам (2.6) и (2.8), для последней компоненты вектора (5.3) получим неоднородное уравнение Гельмгольца

$$-\mu \Delta_{\xi} W_s(\xi) - M_1 W_s(\xi) = (\lambda + \mu) \nabla_{\xi} U'_{(1)}(\xi); \xi \in \Pi \tag{5.10}$$

вместе с краевыми условиями Дирихле (2.11) и Неймана

$$\mu \partial_{\eta} W_s(0, \xi_2) = -\mu U_{(1)n}(0, \xi_2); \xi_2 \in (0,1) \tag{5.11}$$

Поскольку $M_1 < M_+$, задача (5.10), (2.11), (5.11) имеет единственное решение, затухающее на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

Скалярная задача для слагаемого Z_s , третьей компоненты вектор-функции Z из разложения (5.2) однозначно разрешима — она не играет роли в вычислениях из данного раздела. В силу формул (5.1), (5.2) и (2.5) — (2.8) вектор $Z' = (Z'_1, Z'_2) := (Z'_n, Z'_z)$, образованный первыми двумя компонентами, удовлетворяет задаче вида (5.4), (2.16), (2.17) с правыми частями $F'' = (F''_1, F''_2)$ в системе уравнений на полуполосе Π и $G'' = (G''_1, G''_2)$ в краевом условии на ее торце \mathfrak{w}_\bullet .

$$\begin{aligned} F'' &= \beta U'_{(1)} - L^{(1)'}(W'v) - \\ &- L^{(1)}_{(s)}(W_s \partial_s v) - L^{(2)'}(U'v) = \\ &= \beta U'_{(1)} v + \left(\mu U_{(1)} + (\lambda + \mu) \nabla_{\xi} W_s \right) \partial_s^2 v + f'' v \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} G_1'' &= -\lambda W_s \partial_s^2 v + g_1'' v, G_2'' = \\ &= 0; g_1'' = -\lambda \kappa W_1 - \lambda \kappa^2 \eta U_{(1)1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Здесь $L^{(1)'}$, $L^{(2)'}$ и $L_{(s)}^{(1)}$, $L_{(s)}^{(2)}$ — верхние левые (2×2) -блоки и правые столбцы высотой два в матрицах (2.6), (2.7) соответственно. Условие разрешимости такой задачи

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \int_{\Pi} |U'_{(1)}(\xi)|^2 d\xi v(s) - \int_{\Pi} U'_{(1)}(\xi) F''(\xi) d\xi - \\ &- \int_{\mathfrak{B}} U'_{(1)}(0, \zeta) G''(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (5.14)$$

принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения на единичной окружности

$$-B \partial_s^2 v(s) + b v(s) = \beta v(s); s \in \partial\omega = \partial\mathbb{B}_1 \quad (5.15)$$

Поясним проделанные вычисления. Первое слагаемое в правой части равенства (5.14) превращается в левую часть уравнения (5.15) по причине нормировки собственной вектор-функции $U'_{(1)}$ в пространстве Лебега $L^2(\Pi)^2$. Согласно формулам (2.6), (2.7) и (5.3), первая производная $\partial_s v$ отсутствует в выражениях (5.12) и (5.13), где отделена вторая производная $\partial_s^2 v$, появляющаяся только в слагаемых $L_s^{(1)'}$ $W_s \partial_s v$, $L^{(2)'}$ $U' v$ и G_1'' . Поэтому выполнены соотношения

$$\begin{aligned} B &= \mu \int_{\Pi} |U'_{(1)}(\xi)|^2 d\xi + \\ &+ (\lambda + \mu) \int_{\Pi} U'_{(1)}(\xi) \nabla_{\xi} W_s(\xi) d\xi - \\ &- \lambda \int_0^1 U'_{(1)}(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \mu - D \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} D &= (\lambda + \mu) \int_{\Pi} W_s(\xi) \nabla_{\xi} \cdot U'_{(1)}(\xi) d\xi - \\ &- \mu \int_0^1 U'_{(1)}(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= - \int_{\Pi} W_s(\xi) (\mu \Delta_{\xi} W_s(\xi) + M W_s(\xi)) d\xi - \\ &- \mu \int_0^1 U'_{(1)}(0, \xi_2) W_s(0, \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \int_{\Pi} \left(\mu |\nabla_{\xi} W_s(\xi)|^2 - M_1 |W_s(\xi)|^2 \right) d\xi > 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

В выкладке (5.17) помимо равенств (5.10) и (5.11) использованы формулы интегрирования по частям, включение $M_1 \in (0, \mu\pi^2)$, а также неравенство Фридрихса (4.2).

Постоянный коэффициент

$$\begin{aligned} b &= \int_{\Pi} U'_{(1)}(\xi) f''(\xi) d\xi - \\ &- \int_0^1 U'_{(1)}(0, \xi_2) g''(0, \xi_2) d\xi_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

вычисленный при учете равенств (2.6) — (2.8) и (5.12), (5.13), не играет существенной роли в формулах для собственных чисел и функций обыкновенного дифференциального уравнения (5.15)

$$\begin{aligned} \beta_k &= \mathbf{B}^{-1}k^2 - \mathbf{b}, \quad v_k(s) = e^{iks} \\ k \in \mathbb{Z} &:= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Вместе с тем принципиально важен знак разности

$$\mathbf{B} = \mu - \int_{\Pi} \left(\mu |\nabla_{\xi} W_s(\xi)|^2 - M_1 |W_s(\xi)|^2 \right) d\xi \quad (5.20)$$

Именно, при $\mathbf{B} > 0$ собственные числа β_j неограниченно возрастают при $j \rightarrow +\infty$, но при $\mathbf{B} < 0$ они убывают. Отметим, что равенство $\mathbf{B} = 0$ возможно лишь для изолированных значений постоянной Ламе $\lambda > 0$ ввиду аналитической зависимости величины (5.20) от коэффициента Пуассона ν .

К сожалению, из-за незнания собственного числа M_1 выяснение знака величины (5.20) остается открытым вопросом. Так, простые выкладки, доступные без какой-либо информации о собственной паре $\{M_1; U_{(1)}\}$ задачи (5.20) в полуполосе Π

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \|\nabla_{\xi} U'_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 &\leq E(U'_{(1)}; U'_{(1)}; \Pi) = \\ &= M_1 \|U'_{(1)}; L^2(\Pi)\|^2 = M_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^2 &:= \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\|^2 - M_1 \|W_s; L^2(\Pi)\|^2 = \\ &= \lambda (W_s, \nabla_{\xi} U')_{\Pi} - \mu (\nabla_{\xi} W_s, U')_{\Pi} \leq \\ &\leq \lambda \|W_s; L^2(\Pi)\| \|\nabla_{\xi} U'; L^2(\Pi)\| + \\ &+ \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \|U'; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \lambda \|W_s; L^2(\Pi)\| \|\nabla_{\xi} U'; L^2(\Pi)\| + \\ &+ \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \|U'; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} \|W_s; L^2(\Pi)\| + \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\| \leq \\ &\leq \frac{T}{\sqrt{\mu - M_1 \pi^{-2}}} \left(\pi \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} + \mu \right) \end{aligned}$$

не приводят к нужному выводу, поскольку постоянная Ламе μ строго меньше мажоранты в финальной оценке

$$\begin{aligned} \mu \|\nabla_{\xi} W_s; L^2(\Pi)\|^2 - M_1 \|W_s\|^2 \\ L^2(\Pi) \|^2 \leq \frac{1}{\mu - M_1 \pi^{-2}} \left(\mu + \pi \frac{\lambda \sqrt{M_1}}{\sqrt{\lambda + \mu}} \right)^2 \end{aligned}$$

Как и в скалярной задаче для несколько иной геометрии [12], при помощи классической леммы о “почти собственных” числах и векторах (см. первоисточник [22]), обеспеченной спектральным разложением резольвенты [20, гл. 6, §1], проверяется, что при указанных ограничениях для любого целого $k \in \mathbb{Z}$ найдутся такие положительные величины h_k, c_k и собственное число $\Lambda_{N_k(h)}^h$ задачи (1.4)–(1.6), что верна оценка

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{N_k(h)}^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} - \beta_k \right| &\leq \\ &\leq c_k h^{1/2} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Коэффициенты A и β_k взяты из формул (5.9) и (5.18)–(5.20). Несмотря на то, что собственное число $\beta_k = \beta_{-k}$ при $k \in N$ двукратное, номера $N_k(h)$ и $N_{-k}(h)$ членов последовательности (1.10) различны. Вместе с тем неизвестно, как эти номера зависят от параметра h , поскольку по причине отсутствия детальной информации о собственной паре $\{M_1; U_{(1)}\}$, в частности, о знаке коэффициента (5.20), не удалось доказать обычное утверждение о сходимости: предельный переход

$$\Lambda_k^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} \rightarrow \Lambda_k \text{ при } h \rightarrow +0 \quad (5.22)$$

дает какое-то собственное число $\hat{\Lambda}_k$ дифференциального уравнения (5.15).

При $B > 0$ упорядоченная по возрастанию последовательность $\{\beta_m\}_{m \in N}$ собственных чисел (5.19) монотонно возрастающая, и поэтому из (непроверенного) результата (5.22) можно вывести, что $N_0(h) = 1$ и $N_{\pm m}(h) = 2m, 2m + 1$ при $m \in \mathbb{N}$ (собственные числа β_0 и β_m простое и двукратное соответственно). Если же $B < 0$ и последовательность $\{\beta_m\}_{m \in N}$ монотонно убывающая, то индексы $N_{\pm k}(h)$ сложным образом зависят от h , т.е. асимптотическое строение спектра (1.10) оказывается серьезно запутанным.

6. Цилиндрическая прокладка с сечением произвольной формы. Если кривизна κ контура $d\omega$ переменная, то соблюсти условие разрешимости задачи (5.4) путем выбора постоянного коэффициента A во втором члене разложения (5.1) не удастся. Уточним требование (iii) из разд. 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \kappa_0 - ms^2 + O(|s|^3) \\ m &\neq 0, m\kappa(s) < m\kappa_0 \text{ при } s \neq 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

При этом случай $m > 0$ отвечает строгому глобальному максимуму, а случаи $m < 0$ — такому же минимуму.

Реализуя асимптотическую процедуру [12], в дополнение к заменам (2.3) введем на контуре $d\omega$ растянутую координату

$$\tau = h^{-1/4} s \quad (6.2)$$

и модифицируем асимптотические разложения собственных пар задачи (1.4) — (1.6)

$$\Lambda^h = h^{-2} M_1 + h^{-1} A + h^{-1/2} \beta + \dots \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
 u^h(x) &= U_{(1)}(\eta, \zeta)v(\tau) + \\
 &+ h^{3/4}W^h(\eta, \zeta, \tau; v) + h^{3/2}Z^h(\eta, \zeta, \tau; v) + \dots
 \end{aligned}
 \tag{6.4}$$

Здесь v — функция на оси \mathbb{R} , подлежащая определению и затухающая на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Сохраним выражение (5.9) для величины A , взяв постоянный коэффициент κ_0 из требования (6.2), но в соответствии с заменой (6.1) и аналогично формуле (5.3) положим

$$W^h(\eta, \zeta, \tau; v) = \left(h^{1/4}v(\tau)W_n(\eta, \zeta), h^{1/4}v(\tau)W_z(\eta, \zeta), \partial_\tau v(\tau)W_s(\eta, \zeta) \right)$$

Компонента W_s определяется из прежней — однозначно разрешимой — задачи (5.4), (2.16), (2.17). При учете дополнительных невязок в системе дифференциальных уравнений в полуполосе Π и в краевом условии на ее торце \mathfrak{w} .

$$\begin{aligned}
 h^{-1}(\kappa(s) - \kappa_0)F'(\xi) &= \\
 = h^{-1}ms^2F'(\xi) + \dots = h^{-1/2}m\tau^2F'(\xi) + \dots \\
 (\kappa(s) - \kappa_0)G'(\xi) &= \\
 = ms^2G'(\xi) + \dots = h^{1/2}m\tau^2G'(\xi) + \dots
 \end{aligned}$$

содержащих векторы (5.5), (5.7) и появившихся в результате подстановки $\kappa(s) \mapsto \kappa_0$, согласно представлению (6.1), обнаруживаем, что правые части F'' и G'' задачи вида (5.4), (2.16), (2.17) для слагаемого $Z' = (Z_1, Z_2)$ разложения (6.4) определены равенствами, отличающимися от указанных формулами (5.12)

$$\begin{aligned}
 F''(\xi, \tau) &= -\left(\mu \partial_\tau^2 v(\tau) + \beta v(\tau) \right) U'_{(1)}(\xi) + \\
 &+ m\tau^2 F'(\xi)v(\tau) - (\lambda + \mu) \partial_\tau^2 v(\tau) \nabla_\xi W_s(\xi) \\
 G''(\zeta, \tau) &= m\tau^2 G'(\xi)v(\tau) - \\
 &- \mu \partial_\tau^2 v(\tau) W_s(0, \zeta), G'_z(\zeta, \tau) = 0
 \end{aligned}$$

Теперь прежние выкладки (5.8), (5.9) и (5.14), (5.16) придают условию разрешимости задачи для вектор-функции Z' из разложения (6.4) вид обыкновенного дифференциального уравнения гармонического осциллятора [9]

$$-B\partial_\tau^2 v(\tau) + Am\tau^2 v(\tau) = \beta v(\tau); \tau \in R
 \tag{6.5}$$

с коэффициентами из формул (5.20), (5.10) и (6.1).

Для того чтобы обеспечить нужные свойства собственных пар уравнения (6.5), опять приходится разбирать разные случаи. Именно при $B > 0$ приходится предположить, что $m > 0$ и в точке $s = 0$ реализуется максимум кривизны κ , но при $B < 0$ требуется отрицательный коэффициент m в соотношении (6.1), обеспечивающий минимум кривизны. В указанных ситуациях собственные числа уравнения (6.5) приобретают вид

$$\beta_k = (2k - 1) \operatorname{sign} \mathbf{B} \sqrt{\frac{|\operatorname{Am}|}{|\mathbf{B}|}}; k \in \mathbb{N} \quad (6.6)$$

Здесь фигурирует знак $\operatorname{sign} \mathbf{B} = \mathbf{B} / |\mathbf{B}|$ выражения (5.20). Как и в разд. 5, в случае $\mathbf{B} > 0$ собственные числа (6.6) образуют монотонно возрастающую положительную последовательность, но в случае $\mathbf{B} < 0$ последовательность отрицательная и монотонно убывающая. В итоге комментарии к оценке точности асимптотического приближения

$$\begin{aligned} \left| \Lambda_{N_k(h)}^h - M_1 h^{-2} - A h^{-1} - h^{-1/2} \beta_k \right| \leq \\ \leq c_k h^{-1/4} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (6.7)$$

справедливой при любом индексе $k \in \mathbb{N}$ и некоторых положительных величинах c_k, h_k , повторят дословно комментарии к оценке (5.21) в разд. 5.

7. Упругая прокладка переменной толщины. Рассмотрим пластину (1.1) переменной толщины $hH(y)$ и уточним требование (i) из разд. 1 следующим образом:

$$\begin{aligned} H(y) = H_0 - q(y) + O(|y|^3) \\ H(y) < H_0 \text{ при } y = (y_1, y_2) \in \dot{\omega} = \omega \setminus O \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} q(y) = q_{11} y_1^2 + 2q_{12} y_1 y_2 + q_{22} y_2^2 \\ q_{11}, q_{22} > 0, q_{12}^2 < q_{11} q_{22} \end{aligned} \quad (7.2)$$

Собственные пары задачи (1.4) — (1.6) ищем в виде

$$\Lambda^h = h^{-2} M_{\dagger} H_0^{-2} + h^{-1} \beta + \dots \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned} u^h(x) = \sum_{i=1,2} \left(v_i(\eta) \sin\left(\frac{\pi \zeta}{H(y)}\right) + h V_i(\zeta, \eta) \right) e_{(i)} + \\ + \sqrt{h} V_3(\zeta, y) e_{(3)} \nabla_{\eta} v(\eta) + \dots \end{aligned} \quad (7.4)$$

Как и ранее, многоточие замещает младшие асимптотические члены, $e_{(j)}$ — орты x_j и $\zeta = h^{-1} z$ — растянутая поперечная координата. Вместе с тем новая система растянутых продольных координат имеет вид

$$\eta = (\eta_1, \eta_2) := h^{-1/2} y \quad (7.5)$$

Число β и вектор-функции $v = (v_1, v_2)$, $V' = (V_1, V_2)$ подлежат определению, а V_3 — найденное по прежнему правилу (3.4) выражение

$$V_3(\zeta, y) = \frac{H(y)}{\pi} \left(\cos\left(\frac{\pi\zeta}{H(y)}\right) - \cos\left(\frac{\pi\alpha\zeta}{H(y)}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1 + \cos(\pi\alpha)}{\sin\pi\alpha} \sin\left(\frac{\pi\alpha\zeta}{hH(y)}\right) \right) \quad (7.6)$$

Подставим разложения (7.3) и (7.4) в систему (1.4) и просуммируем множители при h^{-2} , $h^{-3/2}$ и h^{-1} в образовавшейся невязке. Заметим, что

$$\begin{aligned} & -\left(\mu \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\pi^2\mu}{h^2 H_0^2}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(\frac{2q(y)}{H_0^3} + O(|y|^3)\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) = \\ & = \frac{\pi^2\mu}{h^2} \left(2\frac{q(\eta)}{H_0^3} + O(\sqrt{h}|\eta|^3)\right) \sin\left(\frac{\pi z}{hH(y)}\right) \quad (7.7) \\ & \sqrt{h}(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \nabla_y V_3\left(\frac{\zeta}{hH(y)}\right) \nabla_\eta v(\eta) = \\ & = \frac{1}{h}(\lambda + \mu) \left(\frac{1}{H_0} + O(h^2|\eta|^2)\right) \times \\ & \quad \times \partial_\zeta V_3\left(\frac{\zeta}{hH(y)}\right) \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta) \end{aligned}$$

Итак, при учете множителей при h^{-1} в выражениях (7.7), а также выбора числа $M_\dagger = \pi^2\mu$ и функции (7.6), удовлетворяющей уравнению (3.3) на отрезке $(0, H(y)) \ni \zeta$, обнаружим, что главные члены невязки уничтожаются, а вектор-функцию $V' = (V_1, V_2)$ нужно искать из задачи Дирихле

$$\begin{aligned} & -\mu H_0^{-2} \partial_\zeta^2 V'(\zeta, \eta) - M_\dagger H_0^{-2} V'(\zeta, \eta) = \\ & = F'(\zeta, \eta) := \left(\begin{array}{l} \beta v(\eta) + \mu \Delta_\eta v(\eta) + (\lambda + \mu) \times \\ \times \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta) - 2\mu \frac{\pi^2}{H_0^3} q(\eta) v(\eta) \end{array} \right) + \quad (7.8) \\ & + (\lambda + \mu) H_0^{-1} \partial_\zeta V_3(\zeta) \nabla_\eta \nabla_\eta v(\eta); \zeta \in (0, H_0) \end{aligned}$$

$$V'(0, \eta) = V'(1, \eta) = 0$$

Поскольку $M_{\dagger} H_0^{-2}$ — простое собственное число, при помощи выкладок из разд. 3, преобразуем единственное условие разрешимости задачи (7.8)

$$\int_0^{H_0} \sin\left(\frac{\pi}{H_0}\zeta\right) F'(\zeta, \eta) d\zeta = 0$$

в пару дифференциальных уравнений на плоскости для компонент вектора $v = (v_1, v_2)$

$$-\mu\Delta_{\eta}v(\eta) + \mu Q(\eta)v(\eta) = \beta v(\eta); \eta \in \mathbb{R}^2 \quad (7.9)$$

При этом в соответствии с формулами (7.1)

$$Q(\eta) := 2\pi^2 H_0^{-3} q(\eta) \geq c_q |\eta|^2; c_q > 0 \quad (7.10)$$

Уравнение (7.9) в частных производных вполне аналогично обыкновенному дифференциальному уравнению гармонического осциллятора (6.5). Для удобства читателя приведем исследование спектра задачи (7.9), вариационная постановка которой

$$\begin{aligned} B(v, \psi) &:= \mu(\nabla_{\eta} v, \nabla_{\eta} \psi)_{\mathbb{R}^2} + b(\nabla_{\eta} v, \nabla_{\eta} \psi)_{\mathbb{R}^2} + \\ &+ \mu(Qv, \psi)_{\mathbb{R}^2} = \beta(v, \psi)_{\mathbb{R}^2}, \psi \in W(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad (7.11)$$

осуществляется на пространстве $W(\mathbb{R}^2)$, полученном пополнением линейного множества $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ гладких финитных вектор-функций по весовой норме

$$\|v; W(\mathbb{R}^2)\| := \left(\|\nabla_{\eta} v; L^2(\mathbb{R}^2)\|^2 + \|\rho v; L^2(\mathbb{R}^2)\|^2 \right)^{1/2} \quad (7.12)$$

Из-за присутствия в норме (7.12) растущего множителя $\rho = |\eta|$ вложение $W(\mathbb{R}^2) \subset L^2(\mathbb{R}^2)$ компактно, а значит, спектр задачи (7.11) является дискретным и образует положительную монотонную неограниченную последовательность (3.8). Соответствующие собственные вектор-функции $\omega_{(m)} \in W(\mathbb{R}^2)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(w_{(m)}, w_{(n)})_{\mathbb{R}^2} = \delta_{m,n}; m, n \in \mathbb{N}$$

При малом положительном показателе δ проверим включения

$$e^{\delta\rho^2} \nabla_{\eta} v_{(m)} \in L^2(\mathbb{R}^2)^{2 \times 2}; \rho e^{\delta\rho^2} v_{(m)} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$$

С этой целью введем непрерывную кусочно-гладкую весовую функцию

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_R^{\delta}(\eta) &= e^{\delta\rho^2} \text{ при } \rho \leq R \text{ и } \mathcal{R}_R^{\delta}(\eta) = \\ &= e^{\delta R^2} \text{ при } \rho > R \end{aligned} \quad (7.13)$$

Подставим в интегральное тождество (7.11) пробную вектор-функцию $\psi = \mathcal{R}_R^{\delta} V_{(m)}^{\delta}$, где $V_{(m)}^{\delta} = \mathcal{R}_R^{\delta} v_{(m)}$. Поскольку весовой множитель (7.13) постоянен вне круга $\mathbb{B}_R \ni \eta$,

произведение $(\mathcal{R}_R^\delta)^2 v_{(m)}$ попадает в пространство $W(\mathbb{R}^2)$. Добавив в левую и правую части полученного равенства величину $K \|V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1)\|^2$ с некоторым коэффициентом $K > 0$, после простых преобразований получим формулу

$$\begin{aligned} & \left(\mu \| \nabla_\eta V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \| \sqrt{Q} V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + K \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \right)^{-} \\ & - \left(\mu \| V_{(m)R}^\delta \mathcal{R}_R^{-\delta} \nabla_\eta \mathcal{R}_R^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \beta_m \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 \right) = \\ & = K \| V_{(m)R}^\delta; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \leq K e^{2\delta} \| v_{(m)}; L^2(\mathbb{B}_1) \|^2 \leq K e^{2\delta} \end{aligned} \quad (7.14)$$

Рассмотрим разность $I_R^\delta - I_R^{\delta-}$ из левой части формулы (7.14). Согласно неравенствам (7.10) и

$$\mathcal{R}_R^{-\delta}(\eta) \left| \nabla_\eta \mathcal{R}_R^\delta(\eta) \right| \leq 2\delta\rho,$$

обнаружим, что $I_R^\delta \geq 2I_R^{\delta-}$ при малом $\delta := \delta_m > 0$ и большом $K := K_m > 0$. В итоге приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_R^{\delta_m} \nabla_\eta v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 + \rho \mathcal{R}_R^{\delta_m} v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 \leq \\ & \leq \left(\nabla_\eta V_{(m)R}^{\delta_m}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 + \rho V_{(m)R}^{\delta_m}; L^2(\mathbb{R}^2)^2 \right) \leq C_m \end{aligned} \quad (7.15)$$

Левая часть соотношения (7.15) монотонно возрастает при увеличении параметра R , т.е. предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и определение (7.13) дают желанную оценку

$$\| e^{\delta_m \rho^2} \nabla_\eta v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 + \| e^{\delta_m \rho^2} v_{(m)}; L^2(\mathbb{R}^2) \|^2 \leq C_m \quad (7.16)$$

Решение эллиптической системы дифференциальных уравнений (7.9) бесконечно дифференцируемо всюду на плоскости, и известные приемы [22] предоставляют весовые гельдеровские (поточечные) оценки собственных вектор-функций, которые тем самым вместе со всеми своими производными исчезают на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Показатель δ_m в оценке (7.16) зависит от собственного числа β_m .

Схема обоснований асимптотических формул в аналогичных скалярных задачах [24–30] приспособляется и к векторной задаче теории упругости. В результате для каждого натурального $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины h_k и c_k , что члены последовательностей (1.10) и (3.8) собственных чисел задач (1.4) — (1.6) и (7.11) соответственно связаны неравенством

$$\begin{aligned} & \left| \Lambda_k^h - h^{-2} \pi^2 \mu H_0^{-2} - h^{-1} \beta_k \right| \leq \\ & \leq c_k h^{-1/2} \text{ при } h \in (0, h_k] \end{aligned} \quad (7.17)$$

Обратим внимание на важное отличие формулы (7.17) от оценок (5.21) и (6.7): индексы собственных чисел Λ_k^h и β_k совпадают, так как нетрудно проверить похожую на предельный переход (5.22) сходимость

$$h(\Lambda_k^h - h^{-2}\pi^2\mu H_0^{-2}) \rightarrow \hat{\beta}_k$$

к какому-то собственному числу $\hat{\beta}_k$ системы уравнений (7.9).

Предложенные асимптотические конструкции годятся и для локальных строгих максимумов профильной функции H пластины (1.1), однако в аналогичной (7.17) оценке номер собственного числа $\Lambda_{N_k}^h$ в последовательности (1.10) отличается от номера m члена последовательности (3.8) собственных чисел системы (7.9), причем индекс $N_k(h)$ неограниченно возрастает при $h \rightarrow +0$, так как начальные члены последовательности (1.10) приобретают разложения (7.3) с глобальным максимумом H_0 функции H .

Поскольку по предположению максимум (7.1) достигается во внутренней точке $\mathcal{O} \in \omega$ и собственные вектор-функции затухают экспоненциально при удалении от нее, асимптотическая формула (7.17) малочувствительна к краевым условиям на боковой поверхности Γ_H^h , удаленной от \mathcal{O} , в частности, формула (7.17) сохраняется и при условии Дирихле (1.11). Более того, если глобальный строгий максимум профильной функции H реализуется в точке \mathcal{O} на границе $\partial\omega$, то вне зависимости от кривизны $\kappa(\mathcal{O})$ предельная задача для собственных пар $\{\beta_m; v_{(m)}\}$ в представлениях (7.1) и (7.3) получается сужением системы уравнений (7.9) на полуплоскость и постановки условий Неймана или Дирихле на ее границе, однако все общие свойства собственных пар краевых задач такие же, как у собственных пар вариационной задачи (7.11).

8. Замечания.

1. *Краевые условия в двумерной модели пластины.* Даже в случае боковой поверхности Γ^h , свободной от внешних воздействий, в среднечастотном диапазоне спектра задачи (1.4) — (1.6) возникают асимптотические серии собственных чисел, порожденные двумерной задачей на продольном сечении ω . При этом формальный вывод самой системы (3.5) не претерпевает изменений, однако вопрос о постановке краевых условий на границе сечения ω остается открытым, так как неизвестно, имеется или нет у задачи (2.9), (2.16), (2.17) пороговый резонанс. Дело в том, что согласно общим результатам [31, 32] и [19, гл. 16] искомые краевые условия назначаются обязательно при учете явления пограничного слоя. Так, именно отсутствие какого-либо порогового резонанса в задачах Дирихле для дифференциальных уравнений (2.9) и (2.10) повлекло за собой краевое условие (3.7) в смещениях. В скалярной смешанной краевой задаче (2.10), (2.11) есть простой правильный пороговый резонанс, и поэтому одно из краевых условий для системы (3.5) сомнений не вызывает

$$\sigma_{ns}^*(v; y) = 0; y \in \partial\omega \quad (8.1)$$

Если правильный пороговый резонанс присутствует и в задаче (2.9), (2.16), (2.17), то второе краевое принимает вид

$$\sigma_{nn}^*(v; y) = 0; y \in \partial\omega, \quad (8.2)$$

но при отсутствии такого резонанса — вид

$$v_n(y) = 0; y \in \partial\omega \quad (8.3)$$

Здесь v_n — нормальная компонента вектора смещений $v = (v_1, v_2)$, а компоненты $\sigma_{nn}^*(v)$ и $\sigma_{ns}^*(v)$ вектора нормальных напряжений на границе $\partial\omega$, как обычно, вычисляются по декартовым компонентам тензора напряжений

$$\sigma_{jk}^*(v) = \mu(\partial_k v_j + \partial_j v_k) + \lambda_* \delta_{j,k} (\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2) \\ j, k = 1, 2$$

Пояснить указанные выводы можно при помощи метода сращиваемых асимптотических разложений [17, 18, 19, гл. 2]. Если у задачи (2.9), (2.16), (2.17) есть почти стоячая волна (2.21) с коэффициентом $K_{\dagger} \neq 0$, то главный член внешнего асимптотического разложения собственной вектор-функции (3.2)

$$h^{-1} \left(\begin{array}{c} v_n(n,s)e_{(n)} + \\ + v_s(n,s)e_{(s)} + 0e_{(z)} \end{array} \right) \Big|_{n=0} \sin(\pi h^{-1} z)$$

удаётся сратить с линейной комбинацией, представляющей собой внутреннее — приемлемое около кромки пластины — разложение

$$h^{-1} v_n(0,s) K_{\dagger}^{-1} U_{\dagger} (h^{-1} n, h^{-1} z) + \\ + h^{-1} v_s(0,s) e_{(s)} \sin(\pi \zeta) \tag{8.4}$$

Таким образом, на следы $v_n(0,s)$ и $v_s(0,s)$ компонент вектора v на контуре $\partial\omega$ ограничения накладывать не нужно, и согласно общим результатам [31–33] возникают парные краевые условия Неймана (8.1) и (8.2). Если же ограниченное решение (2.21) отсутствует или коэффициент K_{\dagger} в нем равен нулю, то из линейной комбинации (8.4) приходится изъять первое слагаемое, а значит, процедура сращивания аннулирует компоненту v_n на $\partial\omega$, т.е. приводит к частичному условию Дирихле (8.3).

Подчеркнем, что для каждого собственного числа β_k системы (3.5) с краевыми условиями (8.1) и (8.2) или (8.3) найдется собственное число $\Lambda_{N_k(h)}$ задачи (1.4) — (1.6), расположенное в среднечастотном диапазоне спектра и удовлетворяющее неравенству

$$\left| \Lambda_{N_k(h)}^h - \mu \pi^2 h^{-2} - \beta_k \right| \leq c_k h^{\frac{1}{2}} \\ \text{при } h \in (0, h_k] \text{ и некотором } h_k > 0 \tag{8.5}$$

Существенное различие между оценками (3.9) и (8.5) состоит в том, что первая включает число Λ_m^h , имеющее тот же номер m , что и β_m , но во второй номер $N_k(h)$ не совпадает с k и, более того, этот номер неограниченно возрастает при уменьшении относительной толщины пластины. Причина понятна: асимптотические серии собственных чисел, найденные в разд. 5 и 6, расположены ниже точки $h^{-2} M_{\dagger}$, причем по доказанному кратность спектра (1.7) на интервале $(0, h^{-2} M_{\dagger})$ стремится к бесконечности при $h \rightarrow +0$.

2. *Многосвязные сечения и негладкие контуры.* В разд. 5 знак постоянной кривизны не играет роли, т.е. результат сохраняется и для сечения ω в виде круга с несколькими

круговыми отверстиями (рис. 3а). Кривизна границ отверстий отрицательная, т.е. коэффициент (5.9) в разложении (5.1) собственных чисел задачи (1.4) — (1.6) становится положительным, и следовательно, соответствующие асимптотические серии в спектре расположены выше основной серии, найденной в разд. 5 для внешней окружности. Таким образом, как и в формуле (8.5), номер собственных чисел $\Lambda_{N_k}^h(h)$ из неравенств вида (5.21) для собственных чисел предельных обыкновенных уравнений на внутренних окружностях зависит от малого параметра h .

На границе яйцевидной области на рис. 3б есть только по одной точке максимума и минимума кривизны и асимптотические результаты верны в представленном в разд. 6 виде. Однако для эллипса на рис. 3в таких точек уже по паре, и поэтому в оценках (5.21) точности приближения следует учесть две серии собственных чисел, т.е. каждое собственное число в последовательности (1.10) — двукратное.

Конструкции из разд. 6 годятся и для локальных максимумов кривизны. Например, у эллиптического кольца на рис. 3г есть две пары точек максимумов положительной и отрицательной кривизны. Во второй паре максимум локальный, и в случае $B > 0$ порожденные им серии располагаются ниже основных потому, что величина (5.9) становится положительной при отрицательной кривизне. В случае $B < 0$ приходится иметь дело с двумя парами точек минимумов кривизны, но выводы вполне аналогичны. Оценка погрешности (6.7) сохраняется вместе с комментариями о номерах собственных чисел $\Lambda_{N_k}^h(h)$ в последовательности (1.10)

Граница $\partial\omega$ сечения пластины на рис. 4а состоит из двух полуокружностей и двух прямолинейных отрезков. На каждой из этих частей кривизна постоянна, и потому применим подход из разд. 5, однако непонятно, какие условия сопряжения следует назначить в концевых точках • полуокружностей и отрезков. Точно так же в случае

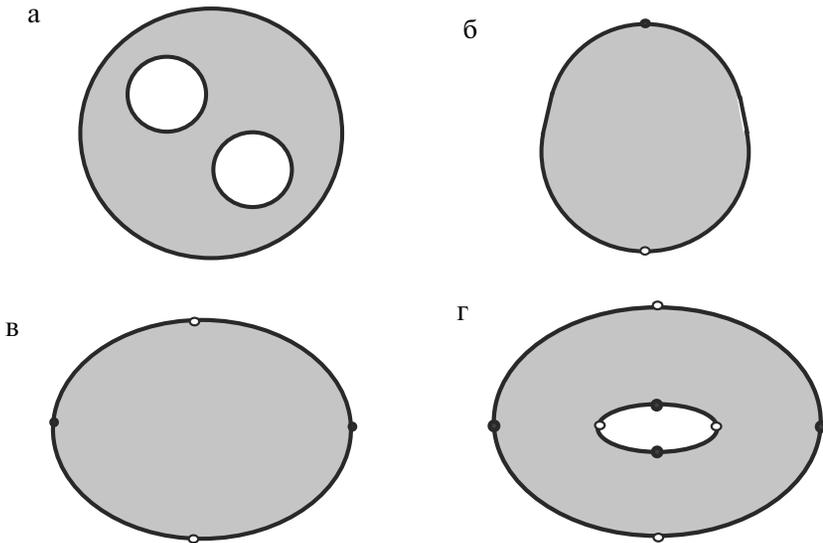


Рис. 3. Круглая пластина с вырезанными кругами (а), яйцевидная область (б), эллипс (в), эллиптическое кольцо (г). Точки глобальных и локальных максимумов и минимумов кривизны указаны метками • и ○ соответственно.

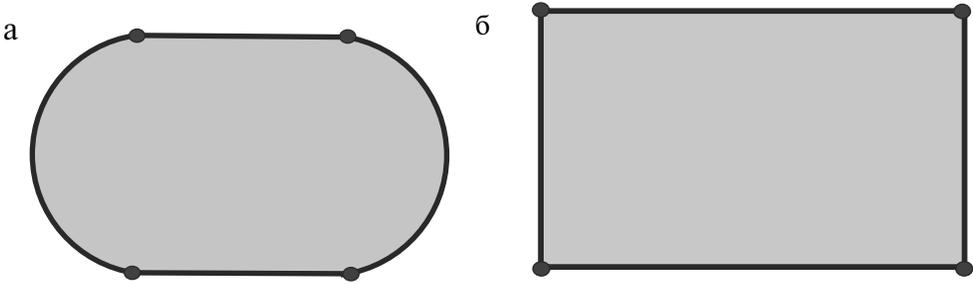


Рис. 4. Составной контур — пара полуокружностей и пара прямых отрезков (а). Угловые точки на контуре (б), точки скачков кривизны контура (а) указаны меткой ●.

прямоугольного сечения остался открытым вопрос о постановке условий сопряжения или краевых условий в угловых точках ●.

3. *Нестрогие экстремумы.* При нестрогом глобальном или локальном максимуме соотношения (7.2) для пластины (1.1) переменной толщины $hH(y)$ заменяются соотношениями

$$\begin{aligned} q(ty) &= t^{2p}q(y) \\ p > 1, q(y) &\geq q_0|y|^{2p} \\ q_0 &> 0, \end{aligned} \tag{8.6}$$

а в формуле Тейлора (7.1) остаток становится равным $O(|y|^{2p+1})$. В этом случае выкладки и рассуждения сохраняются в целом, но вместо замены (7.5) приходится делать замену $y \mapsto \eta = h^{-\kappa}y$ при $\kappa = 1 / (1 + p)$ и вместо слагаемого $h^{-1}\beta$ поместить в разложение (7.3) слагаемое $h^{-2\kappa}\beta$. Свойства предельной системы (7.12) с новым весом множителем (7.10), содержащим функцию (8.6), сохраняются полностью.

В случае цилиндрической пластины $\Omega^h = \omega \times (0, h)$ в формуле (6.1) для нестрогих экстремумов кривизны к границы продольного сечения нужны замены $ms^2 \mapsto m|s|^{2p}$ и $O(|s|^3) \mapsto O(|s|^{2p})$; здесь $p > 1$. При этом коэффициент растяжения (6.2) координа-

ты на контуре $\partial\omega$ становится равным $h^{-\frac{1}{2(1+p)}}$, а последнее слагаемое в представлении (6.3) собственного числа задачи (1.4) — (1.6) превращается в $h^{-\frac{1}{(1+p)}}\beta$. Собственные пары $\{\beta_m; v_m\}$ возникающего предельного уравнения

$$-B\partial_\tau^2 v(\tau) + Am\tau^{2p}v(\tau) = \beta v(\tau); \tau \in \mathbb{R}$$

сохраняют основные свойства собственных пар уравнения гармонического осциллятора (6.5) (ср. выкладки и рассуждения из разд. 7).

4. *Искривленная кромка пластины.* Если кромка пластины (1.1) искривлена (рис. 5а), т.е. определена формулой

$$\Gamma_H^h = \left\{ \begin{array}{l} x \in N_d \times (0, h) : h^{-1}n < \\ < H(h^{-1}z); z \in (0, h) \end{array} \right\}$$

с неотрицательной профильной функцией $H \in C^\infty[0, 1]$, то для задачи Дирихле (1.4), (1.5), (1.11) результаты из разд. 3 не претерпевают никаких изменений. В случае смешанной краевой задачи (1.4) — (1.6) асимптотическое строение спектра (1.7) существенно зависит от свойств задачи (2.9), (2.16), (2.17) в полуполосе с искривленным торцом

$$\Pi_H^* = \{\xi : \xi_1 < H(\xi_2), \xi_2 \in (0, 1)\} \quad (8.7)$$

Именно в зависимости от того, происходит или нет захват упругой волны полуполосой (8.7), нужно пользоваться тем или иным из изложенных подходов к асимптотическому анализу. Результаты спектрального анализа плоской задачи теории упругости в полуполосе Π_H^* можно найти в статьях [14, 15].

5. *Выступы за края штампов.* При $t > 0$ и $H = 1$ пластина (рис. 5б)

$$\Omega^h(t) = \Omega^h \cup \{x \in N_d \times (0, h) : z \in (0, h), n < ht\}$$

шире поверхностей штампов (1.2), и поэтому краевое условие (1.6) переносится на поверхность $\partial\Omega^h(t)$. Изменяются и задачи о пограничном слое: уравнения (2.9) и (2.10) ставятся на полуполосе $\Pi(t) = (-\infty, t) \times (0, 1)$ (рис. 5в), краевые условия Дирихле (2.16) и (2.11) сохраняются полностью, но краевые условия Неймана (2.17) и (2.12) распространяются на ломаную $\mathfrak{w}_\bullet(t) = \{\xi \in \partial\Pi(t) : \xi_1 > 0\}$. Доказано [13–15], что кратности дискретных спектров обеих задач, векторной и скалярной, неограниченно возрастают при $t \rightarrow +\infty$. Это обстоятельство тиражирует асимптотические конструкции из разд. 5 и 6, которые, в частности, характеризуются локализацией собственных вектор-функций в малой окрестности множества $\Omega^h(t)$, и позволяет

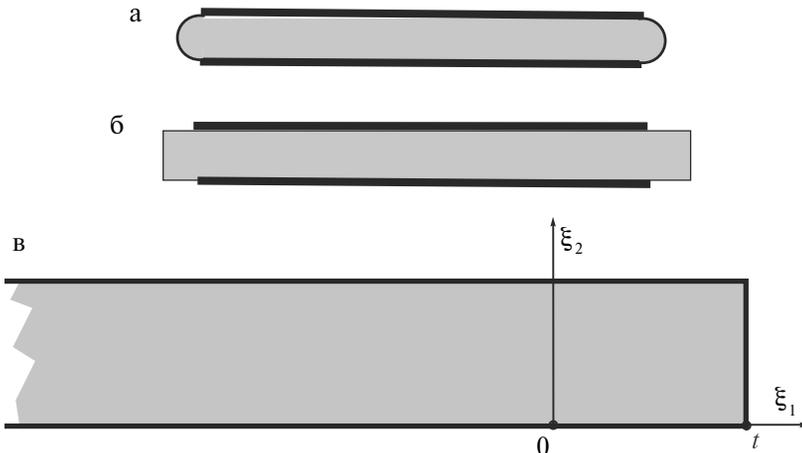


Рис. 5. Пластины с закругленной поверхностью (а), выступающая за кромки штампов, обозначенных полужирными линиями (б), полуполоса, служащая для описания пограничного слоя (в).

найти множество асимптотических серий собственных чисел выше основной серии. Вместе с тем известно [11], что приращение кратности происходит за счет отщепления собственных чисел от края (2.13) непрерывного спектра в результате возникновения пороговых резонансов для неограниченной монотонной положительной последовательности $\{t_j\}_{j \in N}$ значений параметра t . Поскольку при $t \neq t_j$ пороговый резонанс отсутствует, двумерной моделью служит задача Дирихле (3.5), (3.7), однако в случае $t = t_j$ согласно разд. 8, 1 двумерная система уравнений теории упругости

снабжается краевыми условиями иных типов в зависимости от качества порогового резонанса. Процесс перехода от одних краевых условий к другим в зависимости от времениподобного параметра $t - t_j$ требует отдельного исследования.

Еще один открытый вопрос связан с описанием процесса отслоения поверхности прокладки от штампов, когда на участках $N_{a,t} \cap \Sigma^0$ и $N_{a,t} \cap \Sigma_0^1$ оснований (1.2) при малом t фиксированных положительных a_0, a_1 вместо условий (1.6) выставляются односторонние связи (условия Синьорини). В рамках механики трещин задачи об отслоении пластины допускают разнообразные постановки.

6. *Несжимаемый материал.* Для того чтобы осуществить предельный переход $\nu \rightarrow 1/2$ к несжимаемой цилиндрической прокладке Ω^h , введем аналог гидростатического давления p^h по формуле

$$(1 - 2\nu)p^h(x) = -\nabla_x u^h(x) \quad (8.8)$$

и перепишем систему (1.4), умноженную на μ^{-1} , в виде

$$-\Delta_x u^h(x) + \nabla_x \cdot p^h(x) = B^h u^h(x); x \in \Omega^h \quad (8.9)$$

Здесь $B^h = \mu^{-1} \Lambda^h$ — новый спектральный параметр. При $\nu = 1/2$ соотношение (8.8) превращается в дивергентное уравнение

$$-\nabla_x u^h(x) = 0; x \in \Omega^h \quad (8.10)$$

Полученная система уравнений Стокса (8.9), (8.10) остается эллиптической по Дуглису–Ниренбергу [34]. Однако спектральная задача (1.5), (1.11), (8.9), (8.10) отличается от задачи о пленочном течении несжимаемой жидкости, так как в ней собственные числа B^h приобретают иное содержание [35]. Вариационная постановка задачи Дирихле для системы уравнений Стокса

$$\begin{aligned} & \left(\nabla_x u^h, \nabla_x \psi^h \right)_{\Omega^h} = \\ & = B^h \left(u^h, \psi^h \right)_{\Omega^h}; \psi^h \in H_{\nabla}^1 \left(\Omega^h; \partial \Omega^h \right)^3 \end{aligned} \quad (8.11)$$

осуществляется на пространстве Соболева $H_{\nabla}^1 \left(\Omega^h; \partial \Omega^h \right)^3$ соленоидальных (удовлетворяющих соотношению (8.10)) вектор-функций, обращающихся в нуль на поверхности $\partial \Omega^h$ (в гидромеханике — условие прилипания [35]). При этом определение (8.8) показывает, что среднее давление p^h по области Ω^h равно нулю, т.е. система (8.9), (8.10) должна быть снабжена дополнительным условием

$$\int_{\Omega^h} p^h(x) dx = 0 \quad (8.12)$$

В итоге постоянное “давление” $p^h = \text{const}$ и нулевой вектор смещений” $u^h = 0$ не образуют собственную вектор-функцию при любом $B^h \in C$, и, следовательно, задача Дирихле (1.5), (1.11), (8.9), (8.10), (8.12) обладает дискретным спектром $\{B_m^h\}_{m \in N}$ (последовательность вида (1.10)), а соответствующие собственные вектор-

функции $(u_{(m)}^h, p_{(m)}^h) \in H_0^1(\Omega^h; \partial\Omega^h)^3 \times L^2(\Omega^h)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки (1.12).

Асимптотическое разложение

$$B^h = \frac{\pi^2}{h^2} + \beta + \dots \quad (8.13)$$

собственных чисел задачи Дирихле для системы Стокса дополним разложениями

$$u_i^h(x) = \frac{1}{h} v_i(y) \sin(\pi\zeta) + \dots; \quad i = 1, 2, u_3^h(x) = \dots \quad (8.14)$$

$$p^h(x) = \frac{1}{h^2} q(y) + \dots \quad (8.15)$$

Подставив формулы (8.13)–(8.15) в систему дифференциальных уравнений (8.9), (8.10), обнаруживаем, что, как и в разд. 3, младшие асимптотические члены (для краткости не указанные в асимптотических разложениях) удастся построить лишь в том случае, если выполнены соотношения

$$\int_0^1 \sin(\pi\zeta) \begin{pmatrix} \sin(\pi\zeta) (\Delta_y v(y) + \beta v(y)) \\ -\nabla_y q(y) \end{pmatrix} dy = 0 \Rightarrow$$

$$-\Delta_y v(y) + \frac{4}{\pi} \nabla_y q(y) = \beta v(y); \quad y \in \omega \quad (8.16)$$

$$-\nabla_y v(y) = 0; \quad y \in \omega \quad (8.17)$$

Итак, для вектора продольных смещений $v = (v_1, v_2)$ и «давления» q получена двумерная система уравнений Стокса, которую замкнем условиями Дирихле

$$v(y) = 0; \quad y \in \partial\omega \quad (8.18)$$

Последовательность (3.8) собственных чисел задачи (8.16)–(8.18) конкретизирует поправочный член разложения (8.13), а соответствующие собственные вектор-функции $\left\{ (v_{(m)}, q_m) \right\}_{m \in N} \in H_0^1(\omega; \partial\omega)^2 \times L^2(\omega)$ — поправочные члены разложений (8.14), (8.15). Место для уравнения

Из формулы (3.6) вытекает, в частности, что для коэффициента Пуассона ν_* в предельной системе (3.5) справедливо соотношение

$$v_* \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \text{ при } v \rightarrow \frac{1}{2} - 0 \quad (8.19)$$

Таким образом, в случае несжимаемого материала пластины предельная система Стокса (8.16), (8.17) может быть получена из предельной системы Ламе (3.5) для слабосжимаемого материала при помощи предельного перехода (8.19) по прежнему правилу, указанному в начале пункта для пространственной задачи.

Аналогичные предельные переходы доступны и в задаче Дирихле (2.9), (2.20) или смешанной краевой задачи (2.9), (2.16), (2.17) об упругой полуполосе (1.12). Так, в задаче Дирихле для двумерной системы Стокса в полуполосе Π точечный спектр пуст и пороговый резонанс отсутствует. Обсуждать смешанную краевую задачу для уравнений Стокса не будем, так как неполные результаты из разд. 2 и 5, 6 также легко приспособляются к ней.

Построены [36–38] двумерные асимптотические модели динамики упругих волн в бесконечных слоях из мало- и несжимаемых материалов. Такие модели указывают предельные системы дифференциальных уравнений, однако в случае тонких ограниченных пластин для постановки краевых условий дополнительно требуется исследование явления пограничного слоя около их кромок, как раз и проделанное в данной статье.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 22–11–00046).

Автор чрезвычайно благодарен анонимным рецензентам, чьи замечания позволили устранить арифметические ошибки и улучшить изложение материала работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
3. Шойхет Б.А. Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // ПММ. 1973. Т. 37. № 5. С. 913–924.
4. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity, II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and Its Applications. V. 27. Amsterdam: SIAM, 1997.
5. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domaines modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
6. *Назаров С.А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
7. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. Dordrecht: Springer, 2005.
8. *Назаров С.А.* Двумерные асимптотические модели тонких цилиндрических упругих прокладок // Дифф. ур-я. 2022. Т. 58. № 12. С. 1666–1682.
9. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1974.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys. 2007. V. 273. № 2. P. 533–559.
11. *Назаров С.А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 6. С. 73–130.
12. *Камоцкий И.В., Назаров С.А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // в сб: Пробл. матем. анализа. Вып. 19. Новосибирск: Науч. книга, 1999. С. 105–148.
13. *Назаров С.А.* Дискретный спектр коленчатых квантовых и упругих волноводов // ЖВММФ. 2016. Т. 56. № 5. С. 879–895.
14. *Назаров С.А.* Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев // Акуст. ж. 2023. Т. 69. № 4. С. 338–409.

15. Назаров С.А. Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с заземленными боковыми сторонами и искривленным или изломанным торцом // ПММ. 2023. Т. 87. № 2. С. 265–279.
16. Rellich F. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver. 1943. Bd. 53. Abt. 1. S. 57–65.
17. Ван Дайк М.Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967. 310 с.
18. Ильин А.М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
19. Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. 1 & 2 Berlin: Akademie, 1991.
20. Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
21. Leis R. Initial boundary value problems of mathematical physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
22. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
23. Мазья В.Г., Пламеневский Б.А. Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1977. Bd. 77. S. 25–82.
24. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15. № 2. P. 238–242.
25. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
26. Borisov D., Freitas P. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. 2009. V. 26. № 2. P. 547–560.
27. Borisov D., Freitas P. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. № 3. P. 893–912.
28. Назаров С.А. Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // Сиб. матем. ж. 2013. Т. 54. № 3. С. 655–672.
29. Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc. 2016. V. 368. № 7. P. 4787–4829.
30. Gómez D., Nazarov S.A., Pérez-Martinez M.-E. Localization effects for Dirichlet problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands // J. Diff. Eqns. 2021. V. 270. P. 1160–1195.
31. Назаров С.А. Структура решений эллиптических краевых задач в тонких областях // Вестн. ЛГУ. Сер. 1. 1982. Вып. 2 (№ 7). С. 65–68.
32. Grieser D. Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97. № 3. P. 718–752.
33. Назаров С.А. Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
34. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Commun. on Pure & Appl. Math. 1962. V. 17. № 1. P. 3–92.
35. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961.
36. Pichugin A.V., Rogerson G.A. A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies // IMA J. Appl. Math. 2001. V. 66. P. 357–385.
37. Pichugin A.V., Rogerson G.A. An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate // Proc. R. Soc. London A. 2002. V. 458. P. 1447–1468.
38. Kaplanov Y.D., Nolde Y.V. Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55. № 3. P. 345–356.

Localization of Natural Oscillations of Thin Elastic Gaskets

S. A. Nazarov^{a, #}

^a*Institute of Mechanical Engineering Problems, RAS, Saint-Petersburg, Russia*

[#]*e-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk*

We study natural oscillations of thin homogeneous isotropic gaskets of constant or variable thickness whose bases are rigidly fixed. It is shown that the traditional two-dimensional model, namely the plane problem of the elasticity theory in the longitudinal section with the Dirichlet condition at the boundary, gives correct results for eigenfrequencies of the thin spatial solid only for the plate of a constant thickness with clamped lateral surface. In other cases the asymptotic analysis provides another models of reduced dimension, in particular, ordinary differential equations, while modes of natural oscillations enjoy concentration near the lateral side or some points on the boundary.

Keywords: thin homogeneous isotropic plate, gasket between rigid stamps, dimension reduction, localization of natural oscillations

REFERENCES

1. *Ladyzhenskaya O.A.* The Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Appl. Math. Sci., vol. 49. N.Y.: Springer, 1985.
2. *Fichera G.* Existence Theorems in Elasticity. Berlin: Springer, 1972.
3. *Shoikhet B.A.* On asymptotically exact equations of thin plates of complex structure // JAMM, 1973, vol. 37, no. 5, pp. 867–877.
4. *Ciarlet P.G.* Mathematical Elasticity. II: Theory of Plates. Studies in Mathematics and Its Applications. Vol. 27. Amsterdam: SIAM, 1997.
5. *Le Dret H.* Problemes variationnels dans les multi-domaines modélisation des jonctions et applications. Paris: Masson, 1991.
6. *Nazarov S.A.* Asymptotic Theory of Thin Plates and Rods. Vol.1. Dimension Reduction and Integral Estimates. Novosibirsk: Nauch. Kniga, 2002.
7. *Panasenko G.* Multi-Scale Modelling for Structures and Composites. Dordrecht: Springer, 2005.
8. *Nazarov S.A.* Two-dimensional asymptotic models of thin cylindrical elastic gaskets // Diff. Eqns., 2022, vol. 58, no.12, pp. 1651–1667.
9. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Quantum Mechanics. Non-Relativistic Theory. Oxford: Pergamon, 1963.
10. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Comm. Math. Phys., 2007, vol. 273, no. 2, pp. 533–559.
11. *Nazarov S.A.* Threshold resonances and virtual levels in the spectrum of cylindrical and periodic waveguides // Math. Izv., 2020, vol. 84, no. 6, pp. 1105–1180.
12. *Kamotskii I.V., Nazarov S.A.* On eigenfunctions localized in a neighborhood of the lateral surface of a thin domain // J. Math. Sci., 2000, vol. 101, no. 2, pp. 2941–2974.
13. *Nazarov S.A.* Discrete spectrum of cranked quantum and elastic waveguides // Comput. Math.&Math. Phys., 2016, vol. 56, no. 5, pp. 864–880.
14. *Nazarov S.A.* Natural oscillations of elastic semi-strip for different distribution of the fixation parts of the edge // Acoust. Phys., 2023, vol. 69, no. 4, pp. 424–435.
15. *Nazarov S.A.* Elastic waves trapped by a semi-strip with fixed lateral sides and curved or broken butt-end // Mech. Solids, 2023, vol. 58, no. 7, pp. 172–183.
16. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten // Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1943, bd. 53, abt. 1, s. 57–65.
17. *Van-Dyke M.* Perturbation Methods in Fluid Mechanics. N.Y.: Acad. Press, 1964.
18. *Il'in A.M.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1992.
19. *Maz'ya V., Nazarov S., Plamenevskij B.* Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains. Vol. 1, 2. Basel: Birkhäuser, 2000.
20. *Birman M.S., Solomyak M.Z.* Spectral Theory and Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. Dordrecht: Reidel, 1987.

21. *Leis R.* Initial Boundary Value Problems of Mathematical Physics. Stuttgart: B.G. Teubner, 1986.
22. *Visik M.I., Ljusternik L.A.* Regular degeneration and boundary layer of linear differential equations with small parameter // Amer. Math. Soc. Transl., 1962, vol. 20, pp. 239–364.
23. *Maz'ya V.G., Plamenevskii B.A.* Estimates in L_p and in Hölder classes and the Miranda–Agmon maximum principle for solutions to elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary // Amer. Math. Soc. Transl. (Ser. 2), 1984, vol. 123, pp. 1–56.
24. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys., 2008, vol. 15, no. 2, pp. 238–242.
25. *Friedlander L., Solomyak M.* On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math., 2009, vol. 170, pp. 337–354.
26. *Borisov D., Freitas P.* Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire, 2009, vol. 26, no. 2, pp. 547–560.
27. *Borisov D., Freitas P.* Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d // J. Funct. Anal., 2010, vol. 258, no. 3, pp. 893–912.
28. *Nazarov S.A.* The localization for eigenfunctions of the Dirichlet problem in thin polyhedra near the vertices // Sib. Math. J., 2013, vol. 54, no. 3, pp. 517–532.
29. *Nazarov S.A., Perez E., Taskinen J.* Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // Trans. Amer. Math. Soc., 2016, vol. 368, no. 7, pp. 4787–4829.
30. *Gómez D., Nazarov S.A., Pérez-Martínez M.-E.* Localization effects for Dirichlet problems in domains surrounded by thin stiff and heavy bands // J. Diff. Eqns., 2021, vol. 270, pp. 1160–1195.
31. *Nazarov S.A.* The structure of solutions of elliptic boundary value problems in slender domains // Vestn. Leningr. Univ. Math., 1983, vol. 15, pp. 99–104.
32. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc., 2008, vol. 97, no. 3, pp. 718–752.
33. *Nazarov S.A.* A general scheme for averaging self-adjoint elliptic systems in multidimensional domains, including thin domains // St. Petersburg Math. J., 1996, vol. 7, no. 5, pp. 681–748.
34. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Commun. on Pure and Appl. Math., 1962, V. 17, no. 1, pp. 35–92.
35. *Ladyzhenskaya O.A.* The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. N.Y.: Gordon&Breach, 1969.
36. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* A two-dimensional model for extensional motion of a pre-stressed incompressible elastic layer near cut-off frequencies // IMA J. Appl. Math., 2001, vol. 66, pp. 357–385.
37. *Pichugin A.V., Rogerson G.A.* An asymptotic membrane-like theory for long-wave motion in a pre-stressed elastic plate // Proc. R. Soc. London A, 2002, vol. 458, pp. 1447–1468.
38. *Kaplunov Y.D., Nolde Y.V.* Long-wave vibrations of a nearly incompressible isotropic plate with fixed faces // Quart. J. Mech. Appl. Math., 2002, vol. 55, no. 3, pp. 345–356.