

УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА, УПРАВЛЯЕМОГО ПОСРЕДСТВОМ ВНУТРЕННЕЙ МАССЫ, В СРЕДЕ С СОПРОТИВЛЕНИЕМ

© 2024 г. Т. В. Глазков^{1,*}, Ф. Л. Черноусько^{1,**}¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

*e-mail: t.glazkov@bk.ru

**e-mail: chern@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 27.12.2023 г.

После доработки 15.01.2024 г.

Принята к публикации 20.01.2024 г.

Рассматривается поступательное движение тела, управляемое при помощи периодических перемещений внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением. В зависимости от наложенных ограничений оценена средняя скорость движения и найдены условия, при которых достигается наибольшая средняя скорость.

Ключевые слова: мобильные роботы, нелинейные системы, квадратичное сопротивление, оптимизация

DOI: 10.31857/S0032823524010046 EDN: YUQAMC

1. Введение. Мобильные роботы, управляемые посредством подвижных внутренних масс, в последнее время привлекают значительное внимание. Такие системы, называемые капсульными роботами или вибророботами, не имеют внешних подвижных элементов, а их корпуса могут быть гладкими и герметичными. Миниатюрные капсульные роботы нашли применение в медицине для диагностики и доставки медикаментов. Такие роботы могут использоваться для перемещения в различных средах.

Одной из первых работ по этой тематике была статья [1]. Периодические движения виброробота в среде с квадратичным сопротивлением изучались в работах [2, 3]. Динамика мобильных систем с внутренними массами в средах с сопротивлением, включая оптимизацию таких движений, исследовалась в статьях [4–8].

В данной работе, продолжающей исследования [9–11], рассматривается поступательное движение твердого тела, управляемое посредством внутренней подвижной массы. Предполагается, что внутренняя масса перемещается относительно тела с кусочно-постоянной скоростью. Движение тела происходит во внешней среде при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости тела и зависящем от направления движения. Построены периодические движения системы, и оценена средняя скорость ее перемещения. В зависимости от наложенных ограничений, определена наибольшая средняя скорость перемещения.

2. Управляемая система. Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух твердых тел: корпуса массы M и внутреннего подвижного тела массы m (рис. 1). Внутреннее тело снабжено актюатором и движется в полости внутри тела. Оба тела

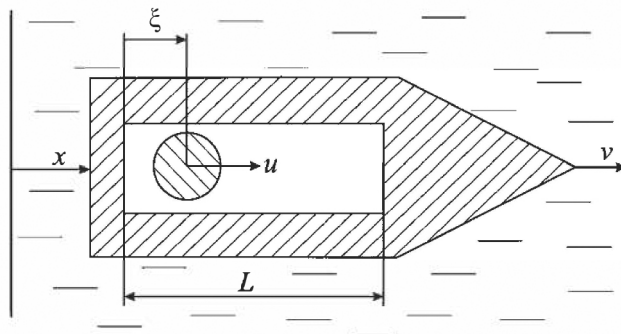


Рис. 1. Механическая система.

движутся прямолинейно и поступательно. Обозначим через x смещение корпуса, а через ξ смещение внутренней массы относительно корпуса. Через v обозначим скорость корпуса, а через u и w — скорость и ускорение внутренней массы относительно корпуса соответственно. Тогда кинематические соотношения можно представить в виде:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{\xi} = u, \quad \dot{u} = w \quad (2.1)$$

Обозначим через F силу, с которой корпус действует на внутреннюю массу, а через R силу сопротивления среды, действующую на корпус и пропорциональную квадрату его скорости v . Предполагается, что, кроме сил F и R , нет других сил, действующих на систему. Уравнения движения системы имеют вид:

$$M\dot{v} = R - F, \quad m(\dot{v} + w) = F \quad (2.2)$$

Введем обозначения

$$r = \frac{R}{M + m}, \quad \mu = \frac{m}{M + m} \quad (2.3)$$

Складывая уравнения (2.2) и принимая во внимание обозначения (2.3), получим уравнение

$$\dot{v} = -\mu w + r(v) \quad (2.4)$$

Нормированная сила сопротивления $r(v)$ равна

$$r(v) = \begin{cases} -c_+ v^2 & \text{при } v \geq 0 \\ c_- v^2 & \text{при } v < 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где c_+ и c_- — коэффициенты сопротивления при движении корпуса вперед (вдоль оси x) и назад (против оси x) соответственно.

Заметим, что коэффициенты c_+ и c_- имеют размерность, обратную длине, и могут быть представлены в виде

$$c_+ = L_+^{-1}, \quad c_- = L_-^{-1} \quad (2.6)$$

Здесь величины L_+ и L_- характеризуют расстояния, на которых скорость тела уменьшается в e раз при движении тела по инерции вперед и назад соответственно [11]. Предпочитая движение вперед и выбирая соответствующую обтекаемую форму тела, имеем $c_+ < c_-$ и $L_+ > L_-$. Введем безразмерный параметр

$$\sigma = c_+/c_- = L_-/L_+ < 1 \quad (2.7)$$

3. Периодическое движение. Рассматриваем простейшее периодическое движение системы с периодом T , при котором относительная скорость $u(t)$ внутренней массы m кусочно-постоянна и задается соотношениями

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1 > 0; & t \in (0, t_1) \\ u(t) &= -u_2 < 0; & t \in (t_1, t_1 + t_2) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь u_1 и u_2 — положительные постоянные, а t_1 и t_2 — длительности интервалов времени движения массы m вперед и назад соответственно. В начале и в конце периода (при $t = 0$ и $t = T$) внутренняя масса находится на левом конце полости (при этом $\xi = 0$), а в момент $t = t_1$ — на ее правом конце, при $\xi = L$, где L — длина полости. Зависимости $u(t)$ и $\xi(t)$ изображены на рис. 2.

Справедливы соотношения

$$u_1 t_1 = u_2 t_2 = L, \quad t_1 + t_2 = T, \quad (3.2)$$

откуда вытекает равенство

$$L(u_1 + u_2) = T u_1 u_2 \quad (3.3)$$

Сделанное допущение (3.1) представляет собой упрощение реальной ситуации и предполагает ударное взаимодействие тел при крайних положениях внутренней массы на концах полости. Однако при этом допущении получаем замкнутые расчетные формулы.

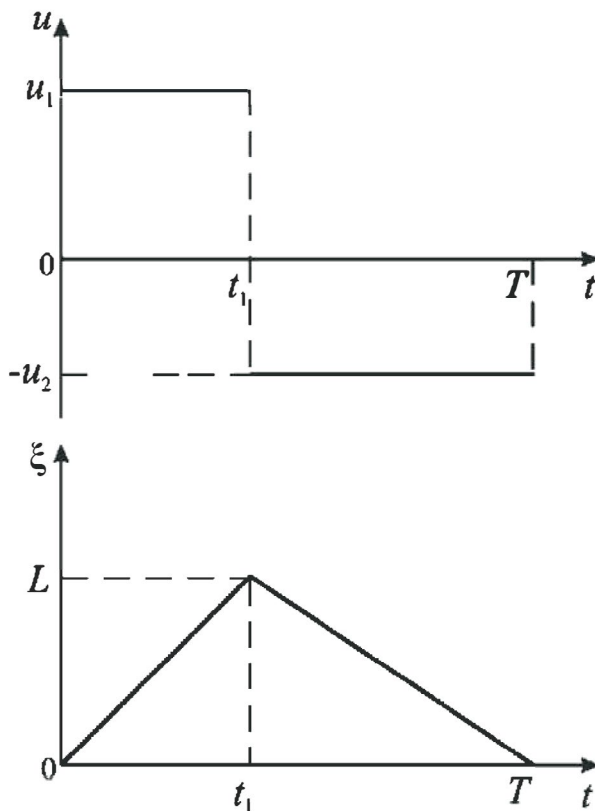


Рис. 2. Движение внутренней массы.

Относительное ускорение $w(t)$ внутреннего тела в силу соотношений (3.1) представляется как сумма дельта-функций

$$w(t) = (u_1 + u_2)[\delta(t) - \delta(t - t_1)] \quad (3.4)$$

Из уравнений (2.4) и (3.4) вытекает, что скорость корпуса $v(t)$ испытывает в моменты $t = 0$ и $t = t_1$ разнонаправленные скачки, равные по величине $\mu(u_1 + u_2)$.

Будем для определенности рассматривать периодическую зависимость $v(t)$ от момента непосредственно перед $t = 0$ до момента непосредственно перед $t = T$ и введем обозначения

$$\begin{aligned} v_0 &= v(-0), \quad v_1 = v(+0), \quad v_2 = v(t_1 - 0) \\ v_3 &= v(t_1 + 0), \quad v_4 = v(T - 0) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Тогда условия на скачках примут вид

$$v_1 = v_0 - U, \quad v_3 = v_2 + U, \quad (3.6)$$

где введено обозначение

$$U = \mu(u_1 + u_2) \quad (3.7)$$

Ниже будет построено решение, при котором скорость $v(t)$ изменяется по схеме, изображенной на рис. 3, при этом

$$\begin{aligned} v(t) &< 0 \text{ при } t \in (0, t_1); \quad v(t) > 0 \text{ при } t \in (t_1, T) \\ 0 &< v_0 < U, \quad v_1 < v_2 < 0, \quad v_3 > v_4 > 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

4. Вычисление скорости. Путем интегрирования уравнения (2.4) с учетом равенств (3.4) — (3.8) определим скорость $v(t)$ на интервале $(0, T)$.

На интервале $(0, t_1)$ имеем

$$\dot{v} = c_- v^2$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(+0) = v_1$ из (3.5), получим

$$v(t) = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t}; \quad t \in (0, t_1) \quad (4.1)$$

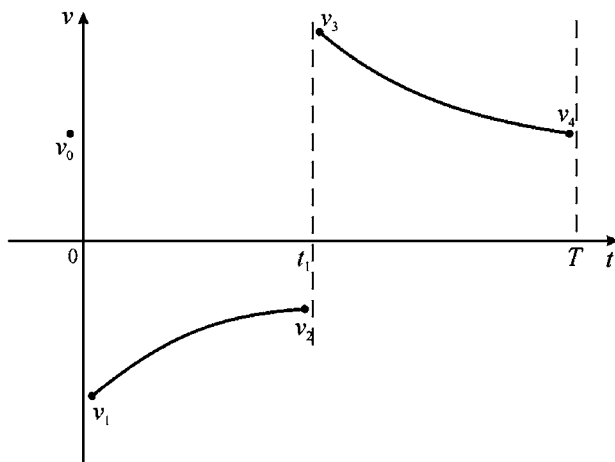


Рис. 3. Скорость корпуса.

Подставляя $t = t_1$ в соотношение (4.1) и используя (3.5), найдем

$$v_2 = \frac{v_1}{1 - c_- v_1 t_1} \quad (4.2)$$

На интервале (t_1, T) имеем уравнение

$$\dot{v} = -c_+ v^2$$

Интегрируя это уравнение при начальном условии $v(t_1 + 0) = v_3$ из (3.5), находим

$$v(t) = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3(t - t_1)}; \quad t \in (t_1, T) \quad (4.3)$$

Подставим $t = t_1 + t_2$ в соотношение (4.3) и примем во внимание равенство $v_4 = v(T-0)$ из (3.5). Получим

$$v_4 = \frac{v_3}{1 + c_+ v_3 t_2} \quad (4.4)$$

Введем обозначения

$$a_1 = c_- t_1, \quad a_2 = c_+ t_2 \quad (4.5)$$

и определим последовательно v_i , $i = \overline{0, 4}$, используя равенства (3.6), (4.2) и (4.4). Получим

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 - U \\ v_2 &= \frac{v_0 - U}{1 - a_1(v_0 - U)} \\ v_3 &= \frac{v_0(1 - a_1 U) + a_1 U^2}{1 - a_1(v_0 - U)} \\ v_4 &= \frac{v_0(1 - a_1 U) + a_1 U^2}{v_0(a_2 - a_1 - a_1 a_2 U) + 1 + a_1 U + a_1 a_2 U^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Условие периодичности скорости $v(t)$ выражается равенством $v_4 = v_0$, которое в силу последнего равенства (4.6) приводит к квадратному уравнению для v_0 :

$$(a_1 - a_2 + a_1 a_2 U) v_0^2 - a_1 U(2 + a_2 U) v_0 + a_1 U^2 = 0 \quad (4.7)$$

Следуя работе [11], введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = a_2 U, \quad V = \frac{v_0}{U} \quad (4.8)$$

и с их помощью выразим корни квадратного уравнения (4.7) в виде

$$V_{\pm} = \frac{2 + \beta \pm \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)} \quad (4.9)$$

Из первого неравенства (3.8) следует, что искомое значение безразмерной скорости V должно удовлетворять неравенствам $0 < V < 1$. Как показано в [11], только решение V_- из (4.9) удовлетворяет этим условиям при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

Итак, искомое периодическое решение для скорости $v(t)$ полностью определено соотношениями (4.1), (4.3) и формулами (4.5), (4.6) и (4.8). Безразмерная начальная скорость V задана соотношением из (4.9) в виде

$$V = \frac{2 + \beta - \sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2(1 - \alpha + \beta)}; \quad \beta \neq \alpha - 1 \quad (4.10)$$

В случае $\beta = \alpha - 1$ в соотношении (4.10) имеет место неопределенность вида $0/0$. Для разрешения неопределенности положим $\beta = \alpha - 1 + \varepsilon$ в равенстве (4.10) и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В результате получим

$$V = (\alpha + 1)^{-1} < 1 \quad \text{при} \quad \beta = \alpha - 1$$

Таким образом, в особом случае $\beta = \alpha - 1$ также выполняются условия $0 < V < 1$.

5. Вычисление перемещения. Определим полное перемещение системы $x(T)$ за период движения T . Интегрируя скорость $v(t)$, заданную равенствами (4.1) и (4.3) на соответствующих интервалах $(0, t_1)$ и (t_1, T) , получим

$$x(T) = -\frac{1}{c_-} \ln(1 - a_1 v_1) + \frac{1}{c_+} \ln(1 + a_2 v_3) \quad (5.1)$$

Здесь использованы обозначения (4.5). В полученное равенство (5.1) подставим соотношения (4.6) для v_1 и v_3 и выразим параметры a_1, a_2 и v_0 через α, β и V при помощи равенств (4.8). Затем в полученное выражение для $x(T)$ подставим равенство (4.10) для V . В результате получим

$$x(T) = -\frac{1}{c_-} f_1(\alpha, \beta) + \frac{1}{c_+} f_2(\alpha, \beta), \quad (5.2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \beta) &= \ln \frac{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha + \beta)} \\ f_2(\alpha, \beta) &= \ln \frac{(2\alpha + \beta^2)(1 - \alpha) + \beta^3 + 2\alpha\beta + \beta(1 - \alpha + \beta)\sqrt{4\alpha + \beta^2}}{2\alpha(1 - \alpha) + \beta^2 + \beta\sqrt{4\alpha + \beta^2}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Введем безразмерный параметр

$$\lambda = L/L_+, \quad (5.4)$$

равный отношению длины полости внутри корпуса к характерному расстоянию, проходимому системой по инерции в сопротивляющейся среде. С учетом соотношений (2.6), (2.7) и (5.4) равенство (5.2) примет вид

$$x(T) = \frac{L}{\lambda} F(\alpha, \beta, \sigma), \quad (5.5)$$

где введено обозначение

$$F(\alpha, \beta, \sigma) = -\sigma f_1(\alpha, \beta) + f_2(\alpha, \beta) \quad (5.6)$$

Средняя скорость движения определяется формулой

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{L}{\lambda T} F(\alpha, \beta, \sigma) \quad (5.7)$$

6. Ограничения и параметры. Естественно считать скорость внутренней массы относительно корпуса ограниченной некоторой постоянной величиной u_0 :

$$0 \leq u_1 \leq u_0, \quad 0 \leq u_2 \leq u_0 \quad (6.1)$$

Введем безразмерные скорости z_1 и z_2 соотношениями

$$z_1 = u_1/u_0, \quad z_2 = u_2/u_0 \quad (6.2)$$

Тогда ограничения (6.1) примут вид

$$0 \leq z_1 \leq 1, \quad 0 \leq z_2 \leq 1 \quad (6.3)$$

Из равенства (3.3) вытекает соотношение

$$z_1 + z_2 = (u_0 T/L) z_1 z_2 \quad (6.4)$$

Выразим параметры α и β , введенные соотношениями (4.8), через z_1 и z_2 , используя равенства (4.5), (2.7), (3.2), (3.7) и (5.4):

$$\alpha = \frac{a_2}{a_1} = \frac{c_+ t_2}{c_- t_1} = \sigma \frac{u_1}{u_2} = \sigma \frac{z_1}{z_2} \quad (6.5)$$

$$\beta = a_2 U = \frac{c_+ L \mu}{u_2} (u_1 + u_2) = \mu \lambda \frac{z_1 + z_2}{z_2}$$

Заметим, что параметры α и β , определяемые соотношениями (6.5), и зависящие от них функции f_1 и f_2 , заданные формулами (5.3), зависят от следующих безразмерных параметров:

- 1) конструктивных параметров σ , μ и λ ;
 - 2) управляющих параметров z_1 и z_2 , определяющих движение внутренней массы.
- При этом в соотношениях (6.5) параметры μ и λ входят только в виде комбинации

$$\mu_1 = \mu \lambda, \quad (6.6)$$

поэтому можно считать, что есть только два конструктивных параметра: σ и μ_1 . Величины параметров σ и λ зависят от сил сопротивления и тем самым от формы тела. Чем меньше эти параметры, тем более эффективным будет рассматриваемый способ перемещения тела. Можно полагать, что эти параметры существенно меньше единицы.

Что касается параметра μ , введенного в (2.3), то обычно он предполагается малым, так как внутренняя масса рассматривается как вспомогательная. Однако внутренняя масса может использоваться для размещения некоторых полезных грузов, например источников энергии. Поэтому представляет интерес рассмотреть различные значения μ и тем самым не только малые μ_1 .

Управляющие параметры z_1 и z_2 целесообразно выбрать с целью оптимизации средней скорости перемещения системы. Ниже задача оптимизации скорости $\bar{v}$ из (5.7) по параметрам z_1 и z_2 при ограничениях (6.3) рассматривается в двух случаях: при фиксированном и нефиксированном периоде движения T .

7. Случай фиксированного T . Введем еще безразмерный параметр

$$k = u_0 T/L, \quad (7.1)$$

который следует добавить к конструктивным параметрам σ и μ_1 в случае фиксированного T . Из равенства (6.4) получим

$$z_2 = \frac{z_1}{k z_1 - 1} \quad (7.2)$$

Из соотношений (6.4) и (7.1) вытекает неравенство

$$k = z_1^{-1} + z_2^{-1} \geq 2 \quad (7.3)$$

Подставляя соотношение (7.2) в равенства (6.5), получим

$$\alpha = \sigma(kz_1 - 1), \quad \beta = \mu_1 k z_1 \quad (7.4)$$

Таким образом, выражение (5.5) и средняя скорость (5.7) зависят, помимо конструктивных параметров, от одной переменной $z_1 \in (0,1)$, подлежащей выбору. Анализ показал [11], что в случае малого μ (или μ_1) максимум средней скорости достигается при $z_1 = 1$.

Как показали численные расчеты при различных $\sigma < 1$, $k \geq 2$ и $\mu_1 < 1$, искомый максимум скорости (5.7) по $z_1 \in (0,1)$ при фиксированном T всегда достигается при $z_1 = 1$. Следовательно, оптимальные значения параметров z_1 и z_2 в силу (7.2) равны

$$z_1 = 1, \quad z_2 = (k - 1)^{-1} \leq 1 \quad (7.5)$$

Итак, максимальная средняя скорость поступательного движения реализуется, если внутренняя масса движется с наибольшей допустимой скоростью относительно корпуса вперед, как бы отталкиваясь от среды. Этот вывод представляется естественным.

В силу равенств (7.4) имеем при $z_1 = 1$:

$$\alpha = \sigma(k - 1), \quad \beta = \mu_1 k, \quad \mu_1 = \mu \lambda \quad (7.6)$$

Для вычисления наибольшей средней скорости $\bar{v}$ при малом μ_1 подставим равенства (7.6) в соотношения (5.3) и разложим функции f_1 и f_2 в ряды по $\mu_1 \ll 1$. Ограничиваясь первым приближением по μ_1 , в результате по формулам (5.5) — (5.7) получим [11]:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{kL\mu(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{T\sqrt{k-1}\left[1 + \sqrt{\sigma(k-1)}\right]} = \\ &= \frac{\mu u_0(\sqrt{k-1} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{k-1}\left[1 + \sqrt{\sigma(k-1)}\right]} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Расчет максимальной скорости $\bar{v}$ при различных значениях параметров проводился численно. При помощи формул (7.1) и (7.6) равенство (5.7) можно представить в виде

$$\bar{v} = \frac{LF}{\lambda T} = \frac{u_0}{k\lambda} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] = \frac{u_0}{\lambda} \Phi, \quad (7.8)$$

где введено обозначение

$$\Phi(\sigma, k, \mu_1) = k^{-1} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] \quad (7.9)$$

Значения величины Φ из (7.9) при различных значениях параметров σ , k и μ_1 показаны на рис. 4–6. Исходя из зависимостей, представленных на этих рисунках, можно сделать следующие выводы.

При любых допустимых параметрах k и μ_1 значение максимальной скорости $\bar{v}$ монотонно убывает с ростом параметра σ . С механической точки зрения это соответствует тому факту, что при большем коэффициенте сопротивления движению вперед c_+ и меньшем коэффициенте сопротивления движению назад c_- максимальная средняя скорость движения корпуса за период будет меньше.

Как видно из рис. 4 и 5, при любых допустимых параметрах σ и k значение максимальной скорости $\bar{v}$ монотонно возрастает с ростом параметра μ_1 .

Как видно из рис. 6, графики зависимостей $\Phi(\sigma)$, соответствующие разным значениям k , пересекаются, что, в свою очередь, говорит о немонотонном характере

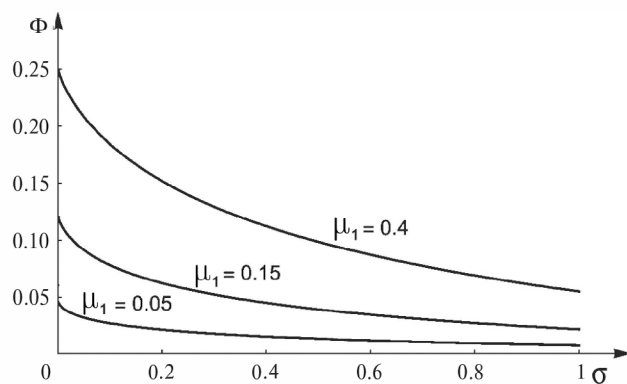


Рис. 4. Зависимость Φ от параметра σ при $k = 3.5$.

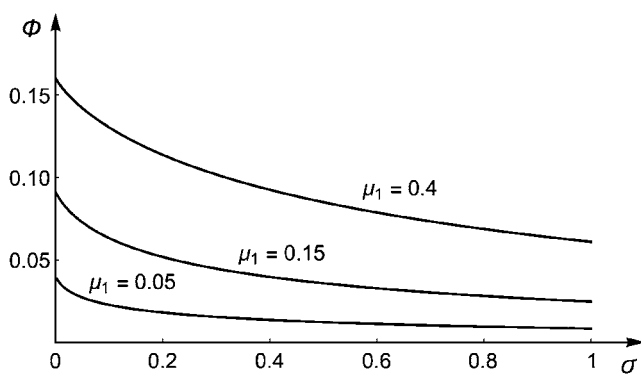


Рис. 5. Зависимость Φ от параметра σ при $k = 10$.

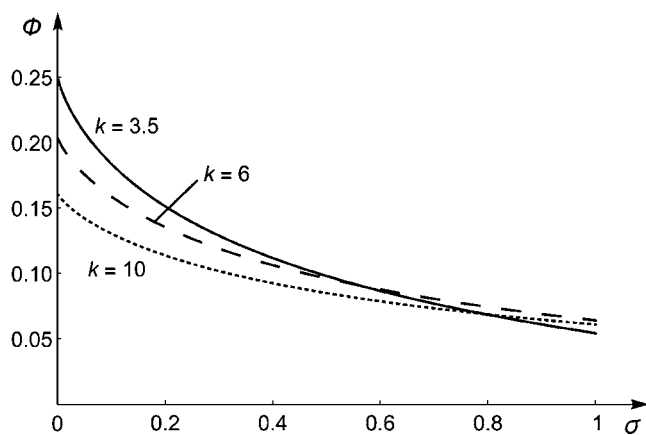


Рис. 6. Зависимость Φ от параметра σ при $\mu_1 = 0.4$.

зависимости величины максимальной скорости $\bar{v}$ от k , при фиксированных значениях параметров σ и μ_1 .

8. Случай нефиксированного T . В этом случае следует выбирать параметры z_1 и z_2 , удовлетворяющие ограничениям (6.3) и доставляющие максимум средней скорости (5.7). Введем новый безразмерный параметр

$$\eta = z_1/z_2 \quad (8.1)$$

и запишем равенства (6.5) в виде

$$\alpha = \sigma\eta, \quad \beta = \mu_1(\eta + 1) \quad (8.2)$$

Равенство (6.4) с учетом обозначений (6.2) и (8.1) примет вид

$$T = \frac{L(\eta + 1)}{u_0 z_1} \quad (8.3)$$

Теперь выражение (5.7), принимая во внимание соотношения (5.6) и (8.3), можно представить в форме

$$\bar{v} = \frac{u_0 z_1 (-\sigma f_1 + f_2)}{\lambda(\eta + 1)} \quad (8.4)$$

Функции f_1 и f_2 в силу соотношений (8.2) зависят от переменной η . Поэтому максимум скорости (8.4) по z_1 и z_2 сводится к независимой максимизации ее по переменным z_1 и η . Очевидно, что максимум выражения (8.4) по z_1 при условиях (6.3) достигается при $z_1 = 1$. Согласно равенствам (8.2), выражение (8.4) для $\bar{v}$ примет вид:

$$\bar{v} = \frac{u_0}{\lambda} Q(\eta), \quad (8.5)$$

где введено обозначение

$$Q(\eta) = \frac{-\sigma f_1[\sigma\eta, \mu_1(\eta + 1)] + f_2[\sigma\eta, \mu_1(\eta + 1)]}{\eta + 1} \quad (8.6)$$

Наибольшая средняя скорость $\bar{v}$ из (8.5) определяется из условия

$$\bar{v}_{\max} = \frac{u_0}{\lambda} \max Q(\eta); \quad \eta \geq 1, \quad (8.7)$$

где функция $Q(\eta)$ задана соотношением (8.6), а максимум следует искать по η при $\eta \geq 1$. Искомое оптимальное значение параметра $\eta = \eta_*$ определяется условием

$$\eta_* = \arg \max Q(\eta); \quad \eta \geq 1 \quad (8.8)$$

Заметим, что соответствующее оптимальное значение периода в случае, когда этот период не фиксирован, определяется из условия (8.3) в виде

$$T = \frac{L(\eta_* + 1)}{u_0} \quad (8.9)$$

Рассмотрим сначала случай малого μ_1 . Разложим функции f_1 и f_2 в (8.6) в ряды по малому μ_1 и получим в первом приближении

$$Q(\eta) = \frac{\mu_1 (\sqrt{\eta} - \sqrt{\sigma})}{\sqrt{\eta} (1 + \sqrt{\sigma\eta})} \quad (8.10)$$

Максимум функции $Q(\eta)$ из (8.10) по $\eta \geq 1$ достигается при

$$\eta = \eta_* = \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^2 \quad (8.11)$$

и равен

$$Q(\eta_*) = \frac{\mu_1}{\left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^2} = \frac{\mu\lambda}{\eta_*} \quad (8.12)$$

Оптимальные значения переменных z_1 и z_2 , согласно равенствам (8.1) и (8.11), равны

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \eta_*^{-1} = \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^{-2} < 1 \quad (8.13)$$

Максимальная средняя скорость определяется соотношениями (8.7) и (8.12) в виде

$$\bar{v} = u_0 \mu \left(\sqrt{\sigma} + \sqrt{\sigma + 1} \right)^{-2}$$

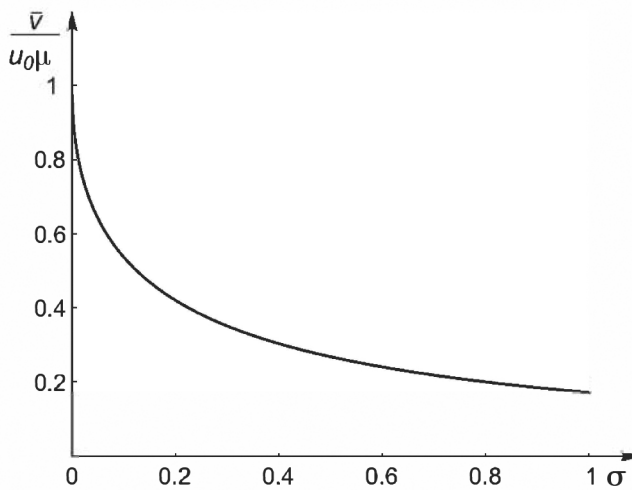


Рис. 7. Зависимость нормированной максимальной скорости $\bar{v}$ от параметра σ при $\mu \ll 1$.

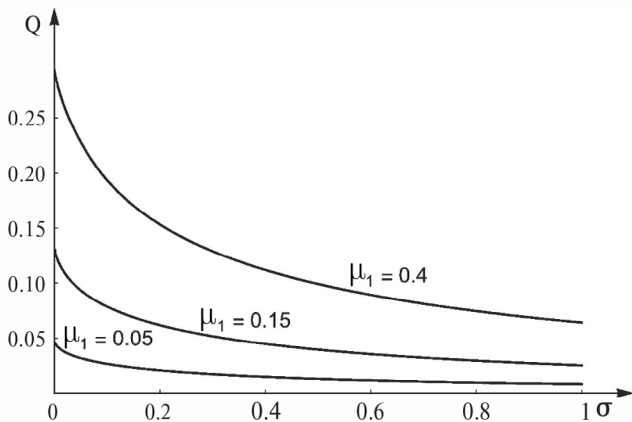


Рис. 8. Зависимость величины Q от параметра σ .

Зависимость нормированной максимальной скорости $\bar{v}$ от параметра σ показана на рис. 7.

В общем случае немало μ_1 максимум функции $Q(\eta)$ из (8.6) определяется численно. Графики зависимости величины Q от безразмерного параметра σ при различных μ_1 представлены на рис. 8. Из графика видно, что величина Q и, следовательно, максимальная скорость $\bar{v}$ монотонно убывают с ростом параметра σ , а с ростом параметра μ_1 монотонно возрастают.

9. Предельный случай $\sigma = 0$. Из численных расчетов, проиллюстрированных на рис. 4–8, следует, что величина максимальной средней скорости $\bar{v}$ растет с убыванием параметра σ . Таким образом, при более обтекаемой передней части корпуса и менее обтекаемой задней части расстояние, пройденное корпусом за период, становится больше (в пределе $L_- \rightarrow 0$ и $c_- \rightarrow \infty$). Это означает, что движение корпуса назад (влево) практически не происходит в силу особой формы корпуса. Тогда в случае фиксированного и нефиксированного периода движения в силу формул (7.6) и (8.2) имеем $\alpha = 0$. Учитывая это равенство, выражение для средней скорости (5.7) с учетом равенств (5.5), (5.6) и (5.3) принимает следующий вид

$$\bar{v} = \frac{x(T)}{T} = \frac{L}{\lambda T} \left[-\sigma \ln \frac{\beta^2}{\alpha(1+\beta)} + \ln(1+\beta) \right]$$

В первом слагаемом этого выражения при $\sigma = 0$, $\alpha = 0$ имеет место неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Для определения максимальной средней скорости при $\sigma = 0$ рассмотрим пределы функций (7.8) и (8.7) при $\sigma \rightarrow 0$ для случаев фиксированного и нефиксированного периода движения соответственно.

В случае фиксированного периода движения, учитывая формулы (5.3) и (5.6), вычисляя предел функции (7.8) при $\sigma \rightarrow 0$, получим

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v}_{\max} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{u_0}{\lambda k} F[\sigma(k-1), \mu_1 k, \sigma] = \\ &= \frac{u_0}{\lambda k} \ln(1 + \mu_1 k) \end{aligned} \quad (9.1)$$

Отметим, что значение предела убывает с ростом параметра $k \geq 2$.

Теперь рассмотрим случай нефиксированного периода движения. Учитывая обозначение (8.6), найдем сначала предел функции Q при $\sigma \rightarrow 0$, а затем вычислим максимальную среднюю скорость $\bar{v}$ согласно (8.7).

В результате получим

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v} &= \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{u_0}{\lambda(\eta+1)} Q[\sigma\eta, \mu_1(\eta+1), \sigma] = \\ &= \frac{u_0}{\lambda(\eta+1)} \ln[1 + \mu_1(\eta+1)] \end{aligned} \quad (9.2)$$

Нетрудно проверить, что значение предела (9.2) убывает с ростом параметра $\eta \geq 1$. Таким образом, максимум средней скорости при $\sigma \rightarrow 0$ достигается при $\eta_* = 1$ и равен

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \bar{v}_{\max} = \frac{u_0}{2\lambda} \ln(1 + 2\mu_1) \quad (9.3)$$

Значения пределов (9.1) и (9.3) в случае фиксированного и нефиксированного периода движения совпадают при $k = 2$.

10. Численные примеры. В табл. 1 и 2 приведены значения максимальной средней скорости $\bar{v}$ в зависимости от конструктивных параметров в случае фиксированного и нефиксированного периода движения соответственно. Для всех расчетов, представленных в табл. 1 и 2, значения параметров L (длина полости), m (масса внутреннего подвижного тела) и M (масса корпуса) брались равными $L = 1 \text{ м}$, $m = 1 \text{ кг}$, $M = 9 \text{ кг}$. Тогда в силу (2.3) и (7.1) безразмерные параметры μ и k равны: $\mu = 0.1$ и $k = 3$.

Отметим, что в случае нефиксированного T период движения меняется в зависимости от выбранных параметров, указанных в табл. 2, в диапазоне от 2.4 с до 4.73 с.

Таблица 1. Значения максимальной скорости $\bar{v}$ в м/с в случае фиксированного T ($u_0 = 1 \text{ м/с}$, $T = 3 \text{ с}$)

L_+ , м	λ	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.5$
1	1	0.0628	0.0530	0.0376	0.0249
5	0.2	0.0639	0.0536	0.0379	0.0250

Таблица 2. Значения максимальной скорости $\bar{v}$ в м/с в случае нефиксированного T ($u_0 = 1 \text{ м/с}$)

L_+ , м	λ	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.25$	$\sigma = 0.5$
1	1	0.0633	0.0531	0.0379	0.0266
5	0.2	0.0641	0.0536	0.0382	0.0268

Закключение. Построено периодическое прямолинейное движение механической системы, управляемой посредством внутренней массы, в среде с квадратичным сопротивлением при различных коэффициентах сопротивления при движении в положительном и отрицательном направлении. Для случаев фиксированного и нефиксированного периода движения найдено значение максимальной средней скорости за период и исследовано ее поведение в зависимости от конструктивных параметров. Полученные результаты могут представлять интерес для управления аппаратами, перемещающимися в жидкости.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00128 <https://rscf.ru/project/23-11-00128/>.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нагаев Р.Ф., Тамм Е.А. Вибрационное перемещение в среде с квадратичным сопротивлением движению // Машиновед. 1980. № 4. С. 3–8.
2. Герасимов С.А. О вибрационном полете симметричной системы // Изв. вузов. Машиностр. 2005. № 8. С. 3–7.
3. Егоров А.Г., Захарова О.С. Оптимальное квазистационарное движение виброробота в вязкой среде // Изв. вузов. Математика. 2012. № 2. С. 57–64.
4. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // Int. J. Mech. Sci. 2013. V. 66. P. 2–11.
5. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // J. Mech. Engng. 2016. V. 62. P. 430–439.

6. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // J. Sound&Vibr. 2011. V. 330. P. 4002–4018.
7. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn. 2019. V. 98. P. 2651–2669.
8. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // Nonlin. Dyn. 2021. V. 104. P. 2201–2217.
9. Черноусько Ф.Л. Оптимальные периодические движения двухмассовой системы в сопротивляющейся среде // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 202–215.
10. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н. Динамика мобильных систем с управляемой конфигурацией. М.: Физматлит, 2022. 464 с.
11. Черноусько Ф.Л. Оптимизация движения тела с внутренней массой при квадратичном сопротивлении // Докл. РАН. Физика, технич. науки. 2023. Т. 513. С. 80–86.

Optimal Motion of a Body Controlled by an Internal Mass in the Resistive Environment

T. V. Glazkov^{a, #}, F. L. Chernousko^{a, ##}

^a*Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: t.glazkov@bk.ru*

^{##}*e-mail: chern@ipmnet.ru*

Translational movement of a body controlled by means of periodical motions of an internal mass within the environment with the quadratic resistance is considered. The average speed of motion depending on the constraints imposed is evaluated, and the conditions are found that correspond to the maximum average speed.

Keywords: mobile robots, nonlinear systems, quadratic resistance, optimization

REFERENCES

1. Nagaev R.F., Tamm E.A. Vibrational displacement in a medium with quadratic resistance to motion // Mashinoved., 1980, no. 4, pp. 3–8. (in Russian)
2. Gerasimov S.A. On vibrational flight of a symmetric system // Izv. vuzov. Mashinostr., 2005, no. 8, pp. 3–7. (in Russian)
3. Yegorov A.G., Zakharova O.S. Optimal quasistationary motion of a vibro-robot in a viscous medium // Izv. vuzov. Matematika, 2012, no. 2, pp. 57–64. (in Russian)
4. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu. Y. Modeling of a vibro-impact capsule system // Int. J. Mech. Sci., 2013, vol. 66, pp. 2–11.
5. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Optimization of the vibroimpact capsule system // J. Mech. Engng., 2016, vol. 62, pp. 430–439.
6. Fang H.B., Xu J. Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // J. Sound&Vibr., 2011, vol. 330, pp. 4002–4018.
7. Xu J., Fang H. Improving performance: recent progress on vibration-driven locomotion systems // Nonlin. Dyn., 2019, vol. 98, pp. 2651–2669.
8. Tahmasian S. Dynamic analysis and optimal control of a drag-based vibratory systems using averaging // Nonlin. Dyn., 2021, vol. 104, pp. 2201–2217.
9. Chernousko F.L. The optimal periodic motions of a two-mass system in a resistant medium // JAMM, 2008, vol. 72, iss. 2, pp. 116–125.
10. Chernousko F.L., Bolotnik N.N. Dynamics of Mobile Systems with Controlled Configuration. Moscow: Fizmatlit, 2022. 464 p. (in Russian)
11. Chernousko F.L. Optimization of motion of a body with an internal mass under quadratic resistance // Dokl. Phys., 2023, vol. 513, pp. 80–86. (in Russian)