

УДК 531

О ПРЕЦЕССИИ ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

© 2024 г. Г. М. Розенблат^{1,*}¹Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ), Москва, Россия

*e-mail: gr51@mail.ru

Поступила в редакцию 12.12.2023 г.

После доработки 25.12.2023 г.

Принята к публикации 27.12.2023 г.

В статье получены гарантированные оценки снизу и сверху для приращения угла прецессии за период по углу нутации при невырожденных движениях динамически симметричного твердого тела (волчка) вокруг неподвижной точки в случае Лагранжа для произвольных значений начальных условий и параметров тела. Вся область начальных условий задачи разбита на два множества: в одном из этих множеств имеет место прецессия, среднее направление которой совпадает с направлением закрутки тела вокруг оси динамической симметрии, а в другом множестве — направление прецессии противоположно направлению этой закрутки.

Ключевые слова: волчок Лагранжа, нутация, прецессия, гарантированные оценки, динамика твердого тела

DOI: 10.31857/S0032823524010035 **EDN:** YUSNWJ

1. Введение. Как известно, волчком Лагранжа называется тяжелое твердое тело с закрепленной точкой O , центром тяжести в точке G , имеющее динамическую ось симметрии, проходящую через линию OG . Иными словами, эллипсоид инерции тела, построенный для неподвижной точки O , является эллипсоидом вращения, а центр тяжести G тела лежит на положительной части оси динамической симметрии этого эллипсоида.

Движение тела определяется при помощи трех углов Эйлера θ , ψ , φ , где θ — угол нутации (угол, образуемый положительной частью динамической оси симметрии тела с восходящей вертикалью в неподвижной точке); ψ — угол прецессии (угол, образуемый подвижной плоскостью, проходящей через ось динамической симметрии тела и восходящую вертикаль в неподвижной точке, и каким-либо начальным положением этой плоскости); φ — угол собственного вращения (поворота) твердого тела вокруг оси динамической симметрии.

Любое невырожденное движение такого волчка (вырожденные асимптотические движения были указаны Клейном и Зоммерфельдом [1]) представляет собой T — периодическое изменение угла нутации $\theta(t)$ в некоторых пределах: $\theta_2 \leq \theta(t) \leq \theta_3$. Величины T , θ_2 , θ_3 определяются начальными условиями задачи и значениями параметров волчка, а сама функция $\theta(t)$ выражается через эллиптические функции.

Изменение угла прецессии $\psi(t)$ происходит таким образом, что его производная по времени $\dot{\psi}(t)$ является также T -периодической функцией времени и выражается

через эллиптические интегралы 3-го рода. Поэтому для произвольного момента времени t , считая, что $\psi(0) = 0$, можно записать следующие равенства

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_0^t \dot{\psi}(s) ds = \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \\ &+ \int_{nT}^t \dot{\psi}(s) ds = \int_0^{nT} \dot{\psi}(s) ds + \int_0^{\tau} \dot{\psi}(s) ds = nT\dot{\psi} + \psi(\tau) \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\psi}(s) ds = \frac{\psi(T) - \psi(0)}{T} = \frac{\Delta\psi}{T} \\ t &= nT + \tau, \tau \in [0, T]\end{aligned}$$

Согласно приведенным соотношениям, представляет интерес задача определения приращения $\Delta\psi = \psi(T) - \psi(0)$ угла $\psi(t)$ за указанный период времени T изменения угла нутации $\theta(t)$. Это эквивалентно определению средней (за период времени T) угловой скорости прецессии волчка.

В данной работе для произвольных значений начальных условий и параметров тела получены гарантированные оценки снизу и сверху приращения $\Delta\psi$, выраженные через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи. Кроме того, получены необходимые и достаточные соотношения на начальные условия задачи, которые определяют направление средней прецессии волчка. Работа является расширением и развитием результатов, полученных ранее в статье автора [2].

Отметим, что ранее такого рода задача об оценках решалась при исследовании эффекта Магнуса для симметричного гироскопа в подвесе Кардана. Были получены [3] гарантированные оценки снизу и сверху для средней угловой скорости прецессии внешней рамки подвеса такого гироскопа. Более подробное обсуждение этой задачи содержится в книге [4, стр. 51].

2. Обозначения и основные уравнения задачи. Пусть $O\xi\eta\zeta$ — подвижная, жестко связанная с телом, правая система координат, оси которой направлены вдоль главных осей инерции тела. Ось $O\zeta$ направлена по положительной части оси динамической симметрии тела, проходит через центр тяжести G и ориентирована так, что $OG = \zeta_0 > 0$. Обозначим A, A, C — главные моменты инерции тела относительно, соответственно, осей $O\xi, O\eta, O\zeta$. Ось $O\zeta$ — это ось динамической симметрии тела или гироскопическая ось. Пусть $Oxyz$ — неподвижная правая система координат, ось Oz которой направлена по вертикали вверх, M — масса тела, g — ускорение силы тяжести, θ, ψ, φ — углы Эйлера (см. выше), ω — вектор угловой скорости тела.

В этом случае имеют место следующие классические первые интегралы движения:

1. Интеграл энергии

$$A(\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2) + C\omega_\zeta^2 + 2Mg\zeta_0 \cos\theta = h = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$A(\dot{\psi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + C\omega_\zeta^2 + 2Mg\zeta_0 \cos\theta = h$$

2. Интеграл проекции момента количества движения тела на неподвижную вертикальную ось Oz

$$A \sin \theta (\omega_{\zeta} \sin \varphi + \omega_{\eta} \cos \varphi) + C \omega_{\zeta} \cos \theta = K = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$A \psi \sin^2 \theta + C \omega_{\zeta} \cos \theta = K$$

3. Интеграл проекции момента количества движения тела на подвижную ось динамической симметрии тела $O\zeta$ (интеграл Лагранжа)

$$C \omega_{\zeta} = \text{const} \leftrightarrow \omega_{\zeta} = \text{const}$$

или в углах Эйлера

$$\psi \cos \theta + \phi = \omega_{\zeta} = \text{const}$$

Константы h, K, ω_{ζ} первых интегралов определяются начальными условиями задачи: $\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0)$. Углы ψ, ϕ являются циклическими (“скрытыми”) координатами данной задачи, поэтому полагаем всегда $\psi(0) = \phi(0) = 0$.

Далее будем предполагать без ограничения общности, что $\omega_{\zeta} = \text{const} > 0$.

Вводим следующие параметры

$$a = 2Mg\zeta_0 / A, \quad b = C / A$$

$$\alpha = (h - C\omega_{\zeta}^2) / A$$

$$\beta = K / A, \quad u_0 = K / (C\omega_{\zeta})$$

Отметим, что параметры (константы) a, b , определяемые формой и массовыми характеристиками твердого тела, должны удовлетворять условиям физической реализуемости $0 \leq a \leq a_0, 0 \leq b \leq 2$, где a_0 находится из условия Яхьи [5]:

$$a_0 = g \sqrt{\frac{2M(2-b)}{A}} \rightarrow \zeta_0 < \sqrt{\frac{2A-C}{2M}}$$

Параметры (константы) $\alpha, \beta, u_0, \omega_{\zeta}$ однозначно определяются заданными начальными условиями задачи: $\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0), \phi(0), \dot{\phi}(0)$. Параметры же a, b определяются заданным динамически симметричным распределением масс тела (волчка Лагранжа).

Из приведенных интегралов и кинематических уравнений Эйлера получим следующие дифференциальные соотношения для трех углов Эйлера θ, ψ, ϕ

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= af(u), \quad \dot{\psi} = b\omega_{\zeta} \frac{u_0 - u}{1 - u^2}, \quad \dot{\phi} = \omega_{\zeta} - u\dot{\psi} \\ af(u) &= (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_{\zeta}^2(u_0 - u)^2 \\ u &= \cos \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть $u_{00} = \cos \theta_0, \theta_0 = \theta(0)$ — некоторое начальное условие задачи для угла нутации θ (остальные начальные условия для скоростей $\dot{\theta}(0), \dot{\psi}(0), \dot{\phi}(0)$ являются произвольными). Тогда кубический полином $f(u)$ в правой части первого уравнения системы (2.1), коэффициенты которого определяются начальными условиями и параметрами волчка, обладает следующими свойствами:

$$f(\pm 1) < 0, f(u_{00}) > 0, f(+\infty) > 0, f(-\infty) < 0$$

Отсюда получаем, что кубическое уравнение $f(u) = 0$ имеет три вещественных корня u_1, u_2, u_3 , которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} -1 < u_3 \leq u_{00} \leq u_2 < 1 < u_1 < +\infty \\ f(u) > 0; u \in (u_3, u_2) \cup (u_1, +\infty) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из первого уравнения (2.1) и неравенств (2.2) следует, что функция $\theta(t) = \arccos u(t)$ изменяется периодическим образом от нижнего угла $\theta_3 = \arccos u_3$ до верхнего угла $\theta_2 = \arccos u_2$ и находится путем интегрирования дифференциального уравнения первого порядка вида

$$\frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}} = \pm dt; u \in [u_3, u_2] \quad (2.3)$$

В уравнении (2.3) знак “+” соответствует проходу функции $u(t)$ от меньшего значения u_3 до большего значения u_2 , а знак “-” соответствует обратному проходу функции $u(t)$ от значения u_2 до значения u_3 . Ясно, что по времени эти проходы равны между собой, а полный период функций $u(t)$ и $\theta(t)$ дается формулой

$$T = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{a(u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3)}} \quad (2.4)$$

Решая уравнение (2.3) и подставляя результат во второе и третье уравнения системы (2.1), найдем законы изменения функций $\psi(t)$, $\varphi(t)$.

3. Постановка и обсуждение задачи. В работе рассматривается задача об оценках снизу и сверху приращения $\Delta\psi$ угла прецессии $\psi(t)$ на интервале времени, равном периоду T из формулы (2.4), то есть на интервале времени, соответствующем одному полному колебанию угла нутации $\theta(t)$ волчка. Согласно второму уравнению системы (2.1), эта величина определяется из следующего соотношения

$$\Delta\psi = b\omega_\zeta \int_0^T \frac{u_0 - u(t)}{1 - u^2(t)} dt \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) можно переписать в таком виде

$$\Delta\psi = \frac{b\omega_\zeta}{2} \left[(1 + u_0) \int_0^T \frac{dt}{1 + u(t)} - (1 - u_0) \int_0^T \frac{dt}{1 - u(t)} \right] \quad (3.2)$$

Отметим, что ранее функция $\psi(t)$ находилась при помощи квадратур из второго уравнения системы (2.1) и выражалась через эллиптические интегралы 3-го рода [6, 7]. Соответственно, для получения конкретных оценок приращения этой функции за какой-либо промежуток времени требовались дополнительные исследования эллиптических интегралов. В частности, используя эти формулы, сложно аналитически определить знак рассматриваемой величины $\Delta\psi$ в зависимости от параметра u_0 , который дается формулой

$$u_0 = \frac{K}{C\omega_\zeta} = \frac{A}{C\omega_\zeta} \dot{\psi} \sin^2 \theta + \cos \theta,$$

в том случае, когда $u_0 \in (u_3, u_2)$.

Из формулы (3.1), очевидно, следует, что при $u_0 > u_2$ имеем $\Delta\psi > 0$ (знак $\Delta\psi$ совпадает со знаком ω_ζ), а при $u_0 < u_3$ будет $\Delta\psi < 0$ (знак $\Delta\psi$ не совпадает со знаком ω_ζ). В частности (т.к. $u_3 > -1$), последнее обстоятельство будет наверняка

соблюдаться при $u_0 < -1$. Далее будет показано, что в силу специфики кубического полинома $f(u)$ из (2.1) неравенства $-1 < u_0 < u_3$ не могут быть реализованы. Поэтому условие $u_0 < u_3$, на самом деле, следует заменить неравенством $u_0 < -1$. Далее в статье будет показано, что неравенство $u_0 < -1$ является необходимым и достаточным условием для реализации “попятной” (обратной) прецессии.

Отметим, что во всех, известных автору, источниках, кроме статьи [8], изучавших задачу о волчке Лагранжа, нереализуемость неравенств $-1 < u_0 < u_3$ не обсуждалась (возможно, что авторам этих источников этот факт не был известен). В работе [8, стр. 118, лемма 2], где этот факт был отмечен, нереализуемость неравенств $-1 < u_0 < u_3$ была показана при помощи методов контурного интегрирования из теории функций комплексного переменного (теорема Коши). В настоящей статье доказательство этого факта осуществляется при помощи элементарных алгебраических средств.

Адамаром [9] было дано краткое доказательство того факта, что $\Delta\psi \neq 0$, и знак $\Delta\psi$ совпадает со знаком ω_ζ также и при $u_0 \in (u_3, u_2)$ (т.е. $\Delta\psi > 0$ при $\omega_\zeta > 0$). Для этого были использованы методы контурного интегрирования из теории функций комплексного переменного (теорема Коши и теория вычетов). Более подробно результат Адамара был изложен в известной книге В.Д. Мак-Миллана [10]. Предложены, [11, 12] качественные объяснения этого факта, использующие теорему об изменении кинетического момента, которые, однако, весьма расплывчаты, запутанны и не лишены (на наш взгляд) некоторых неточностей (см. ниже обсуждение в разд. 5 настоящей статьи).

Полученные в данной работе оценки позволяют, в частности, элементарно обосновать результат Адамара о том, что $\Delta\psi > 0$ при $\omega_\zeta > 0$ в некоторых случаях (“попутная” прецессия). Метод, который был использован в данной статье для получения оценок средней угловой скорости прецессии волчка, аналогичен методу, предложенному ранее в работах [13, 14].

Кроме того, в настоящей работе получены необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять начальные данные задачи $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\psi(0)$, $\dot{\psi}(0)$, чтобы имел место противоположный факт, то есть $\omega_\zeta > 0$, $\Delta\psi < 0$ (“попятная” прецессия). Таким образом, вся область начальных условий $\{\theta(0), \dot{\theta}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0)\}$ данной задачи (при $\omega_\zeta > 0$) разбивается на два множества: в одном из этих множеств имеет место “попутная”, а в другом — “попятная” прецессии оси волчка.

4. Формулировка и обоснование результатов. Для интегралов из (3.2), используя соотношение (2.3), получим:

$$I_1 = \int_0^T \frac{dt}{1+u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1+u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1+u(t)} = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1+u)\sqrt{af(u)}} \quad (4.1)$$

$$I_2 = \int_0^T \frac{dt}{1-u(t)} = \int_0^{T/2} \frac{dt}{1-u(t)} + \int_{T/2}^T \frac{dt}{1-u(t)} = 2 \int_{u_3}^{u_2} \frac{du}{(1-u)\sqrt{af(u)}} \quad (4.2)$$

В (4.1) и (4.2) функция $f(u)$ дается формулой

$$f(u) = (u_1 - u)(u_2 - u)(u - u_3); \quad u \in [u_3, u_2], \quad (4.3)$$

где u_1, u_2, u_3 — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам (2.2).

Делаем в интегралах из (4.1) и (4.2) замену переменной $u \rightarrow \gamma$:

$$u(\gamma) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) + \frac{1}{2}(u_2 - u_3)\sin\gamma; \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (4.4)$$

Тогда, используя (4.3), получим

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1-u}}, \quad I_2 = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1-u}} \quad (4.5)$$

В (4.5) функция $u = u(\gamma)$ дается выражением из (4.4). Таким образом, равенство (3.2) принимает следующий вид

$$\Delta\Psi = \alpha_0 \left[(1+u_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1+u)\sqrt{u_1-u}} - (1-u_0) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{(1-u)\sqrt{u_1-u}} \right]; \alpha_0 = \frac{b\omega_\zeta}{\sqrt{a}}, \quad (4.6)$$

где функция $u = u(\gamma)$ также дается выражением из (4.4). При $\gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ из (4.4) имеем $u_3 \leq u(\gamma) \leq u_2$. В (4.6) необходимо заменить параметр $u_0 = K / (C\omega_\zeta)$ функцией от величин u_1, u_2, u_3 , которая находится из следующего соотношения (см. [10]):

$$\left(\frac{1-u_0}{1+u_0}\right)^2 = \mu, \mu = \lambda_1\lambda_2\lambda_3, \quad (4.7)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{u_1-1}{u_1+1} > 0, \quad \lambda_2 = \frac{1-u_2}{1+u_2} > 0, \quad \lambda_3 = \frac{1-u_3}{1+u_3} > 0$$

Из уравнения (4.7) находим два возможных значения для u_0 : u_{01}, u_{02} , определяемые формулами:

$$u_{01} = \frac{1-\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}, \quad u_{02} = \frac{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}} \quad (4.8)$$

$$q_1 = (u_1+1)(1+u_2)(1+u_3), \quad q_2 = (u_1-1)(1-u_2)(1-u_3)$$

Далее, используя (4.8), несложно показать, что при любых u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2.2), выполнены следующие неравенства и включения:

$$1) \text{ если } u_2 + u_3 > 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2\lambda_3 \in (0,1), \quad u_{01} \in (u_5,1), \quad u_{02} \in (1, 1/u_5), \quad u_1 \in (1,+\infty)$$

$$2) \text{ если } u_2 + u_3 < 0, \text{ то } \lambda_0 = \lambda_2\lambda_3 \in (1,+\infty), \quad u_{01} \in (u_5,1), \quad u_1 \in (1,+\infty) \quad (4.9)$$

$$u_{02} \in (1,+\infty) \text{ при } u_1 \in (1, u_6); \quad u_{02} \in (-\infty, 1/u_5) \text{ при } u_1 \in (u_6, +\infty)$$

$$u_5 = (1-\sqrt{\lambda_0}) / (1+\sqrt{\lambda_0}) \in (u_3, u_2); \quad u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) \in (1, +\infty)$$

Отметим, что соотношение (4.7) получается из условия тождественности кубических многочленов

$$(\alpha - au)(1-u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)^2 = a(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) = af(u),$$

где надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях u . Подробности изложены в [10] и здесь опускаются (см. Приложение).

Соотношения (4.6) — (4.9) с учетом замены (4.4) являются основными для получения оценок сверху и снизу величины $\Delta\psi$. Ясно, что эти оценки существенно зависят от значений параметра u_0 . Поэтому сформулируем лемму, определяющую все возможные значения параметра u_0 в зависимости от допустимых значений корней u_1, u_2, u_3 .

Лемма. Для произвольных значений корней u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам (2.2), возможные значения параметра u_0 , определяемого из (4.7) и принимающего значения u_{01} , либо u_{02} из (4.8), могут находиться в следующих интервалах:

1. $u_0 = u_{01} \in (u_5, 1) \subseteq (u_3, 1)$, $u_1 \in (1, +\infty)$, независимо от знака $u_2 + u_3$
2. $u_0 = u_{02} \in (1, 1 / u_5) \subseteq (1, +\infty)$, при $u_2 + u_3 > 0$, $u_1 \in (1, +\infty)$
3. $u_0 = u_{02} \in (1, +\infty)$, при $u_2 + u_3 < 0$, $u_1 \in (1, u_6)$
4. $u_0 = u_{02} \in (-\infty, 1 / u_5) \subseteq (-\infty, -1)$, при $u_2 + u_3 < 0$, $u_1 \in (u_6, +\infty)$

Здесь u_{01} , u_{02} , u_5 , u_6 определены в (4.7) — (4.9), причем, как было отмечено в (4.9), выполняется включение $u_5 \in (u_3, u_2)$.

Доказательство леммы следует из соотношений (4.9) и осуществляется непосредственной проверкой.

Замечание 1. Из леммы следует, что параметр $u_0 = u_{01}$ в области 1 удовлетворяет неравенствам $-1 < u_3 < u_5 < u_{01} < 1$, в областях 2 и 3 леммы параметр $u_0 = u_{02}$ удовлетворяет неравенству $u_{02} > 1$, а в области 4 леммы параметр $u_0 = u_{02}$ удовлетворяет неравенствам $-\infty < u_{02} < 1 / u_5 < -1$.

Таким образом, параметр u_0 не может находиться в следующих областях.

$$1) \text{ Если } u_2 + u_3 > 0, \text{ то } u_0 \notin (-1, u_5),$$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (0, 1), u_5 \in (u_3, u_2)$$

$$2) \text{ Если } u_2 + u_3 < 0, \text{ то } u_0 \notin \left(\frac{1}{u_5}, u_5\right),$$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3 \in (1, +\infty), u_5 \in (u_3, u_2) \cup (-1, 0), \frac{1}{u_5} \in (-\infty, -1)$$

Из приведенных соотношений следует, что во всех допустимых случаях имеем $u_0 \notin (-1, u_5)$. А отсюда, т.к. $u_5 \in (u_3, u_2)$, в частности, следует, что $u_0 \notin (-1, u_3)$. Это доказывает также, что угловая скорость прецессии $\dot{\psi}$ не может обращаться в нуль при максимальном (нижнем) угле нутации θ_3 (т.е. при минимальном значении $u = u_3$).

Замечание 2. Из приведенной леммы следует, что параметр u_0 , удовлетворяющий соотношению (4.7), может находиться только в следующих областях-интервалах:

1. При $u_2 + u_3 < 0$ (тогда $\lambda_0 \in (1, +\infty)$):

$$\begin{cases} u_0 \in (-\infty, 1 / u_5), \text{ если } u_1 > u_6 \\ u_0 \in (u_5, +\infty), \text{ если } 1 < u_1 < u_6 \end{cases}$$

2. При $u_2 + u_3 \geq 0$ (тогда $\lambda_0 \in (0,1]$): $u_0 \in (u_5, 1 / u_5)$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}} \in (u_3, u_2), u_6 = \frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1}, \lambda_0 = \lambda_2 \lambda_3, \lambda_k = \frac{1 - u_k}{1 + u_k}; k = 2, 3$$

Кроме того, при $u_2 + u_3 \rightarrow \pm 0$ имеем $u_5 \rightarrow \pm 0$.

Теперь сформулируем и докажем теорему об оценках снизу и сверху для величины $\Delta\psi$ из (4.6). Сначала вычислим интегралы

$$S_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1 + u(\gamma)}, S_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\gamma}{1 - u(\gamma)} \quad (4.10)$$

$$u(\gamma) = \frac{1}{2}(u_2 + u_3) + \frac{1}{2}(u_2 - u_3)\sin \gamma; \gamma \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Для этого воспользуемся неопределенным табличным интегралом

$$\int \frac{d\gamma}{m - n \sin \gamma} = \frac{2}{m\sqrt{1 - \lambda^2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \lambda}{\sqrt{1 - \lambda^2}} \right]; \lambda = \frac{n}{m}, |\lambda| < 1 \quad (4.11)$$

Тогда для интегралов из (4.10), используя (4.11), получим выражения

$$S_1 = \frac{\pi}{\sqrt{(1 + u_2)(1 + u_3)}}, S_2 = \frac{\pi}{\sqrt{(1 - u_2)(1 - u_3)}} \quad (4.12)$$

Справедлива следующая теорема об оценках величины $\Delta\psi$.

Теорема 1. 1) В области 1 леммы, определяемой соотношениями:

$$u_0 = u_{01} \in (u_5, 1) \subseteq (u_3, 1)$$

при $u_1 \in (1, +\infty)$, $u_2 + u_3 > 0$ или $u_2 + u_3 < 0$

$$u_5 = \frac{1 - \sqrt{\lambda_0}}{1 + \sqrt{\lambda_0}} \in (u_3, u_2), \lambda_0 = \frac{(1 - u_2)(1 - u_3)}{(1 + u_2)(1 + u_3)}$$

имеют место оценки

$$\alpha_0 \left(S_1 \frac{1 + u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_3}} - S_2 \frac{1 - u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_2}} \right) < \Delta\psi < \alpha_0 \left(S_1 \frac{1 + u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_2}} - S_2 \frac{1 - u_{01}}{\sqrt{u_1 - u_3}} \right) \quad (4.13)$$

2) В областях 2 и 3 леммы, определяемых соотношениями:

$$u_0 = u_{02} \in (1, 1 / u_5) \subseteq (1, +\infty), \text{ при } u_2 + u_3 > 0, u_1 \in (1, +\infty)$$

или

$$u_0 = u_{02} \in (1, +\infty), \text{ при } u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (1, u_6), u_6 = \frac{\lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1} \in (1, +\infty),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_3}} [(1 + u_{02})S_1 + (-1 + u_{02})S_2] &< \Delta\Psi < \\ &< \alpha_0 \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}} [(1 + u_{02})S_1 + (-1 + u_{02})S_2] \end{aligned} \quad (4.14)$$

3) В области 4 леммы, определяемой соотношениями:

$$u_0 = u_{02} \in (-\infty, 1 / u_3) \subseteq (-\infty, -1), \text{ при } u_2 + u_3 < 0, u_1 \in (u_6, +\infty),$$

имеют место оценки

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1 - u_2}} [(-1 - u_{02})S_1 + (1 - u_{02})S_2] &< \Delta\Psi < \\ &< -\frac{\alpha_0}{\sqrt{u_1 - u_3}} [(-1 - u_{02})S_1 + (1 - u_{02})S_2] \end{aligned} \quad (4.15)$$

В формулах (4.13) – (4.15) параметр α_0 определен вторым из равенств (4.6), величины S_1, S_2 – из (4.12), u_{01} и u_{02} – из (4.7), (4.8). Отметим, что все значения параметра u_0 , не вошедшие в перечисленные выше области, не могут быть реализованы ни при каких корнях u_1, u_2, u_3 , удовлетворяющих неравенствам из (2.2).

Доказательство теоремы 1 следует непосредственно из формул (4.6) – (4.10), (4.12) и неравенств

$$\frac{1}{\sqrt{u_1 - u_3}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u_2}}, \text{ при } u_3 \leq u \leq u_2 < 1 < u_1$$

Отметим, что полученные оценки являются более точными, чем оценки [13–15]

$$\frac{1}{\sqrt{u_1 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u_1 - 1}}, \text{ при } -1 \leq u \leq 1 \leq u_1$$

Следствие 1. Для теоремы 1 часть 1) выпишем более конкретные формулы оценок (выраженные только через значения корней u_1, u_2, u_3), используя соотношения (4.8) для параметра u_{01} и формулы (4.12) для интегралов S_1, S_2 . Кроме того, используем формулу для параметра $\alpha_0 = b\omega_\zeta / \sqrt{a}$ из равенств (4.6), которая получается из приравнивания коэффициентов при первой степени u в равенстве

$$(\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_{01} - u)^2 = a(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = af(u)$$

Эта формула имеет вид

$$\alpha_0 = \alpha_{01} = \sqrt{\frac{b^2\omega_\zeta^2}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 - q_2}{u_{01}}} = \frac{1}{2} (\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}),$$

где q_1, q_2 определены в (4.8).

Приведем окончательные результаты, опуская промежуточные алгебраические выкладки

$$\Delta\Psi > \pi \frac{u_1(2 + u_3 - u_2) - u_2 - u_3}{\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\sqrt{(u_1 + 1)(u_1 - u_2)} + \sqrt{(u_1 - 1)(u_1 - u_3)} \right]} \quad (4.16)$$

$$\Delta\psi < \pi \frac{u_1(2 + u_2 - u_3) - u_2 - u_3}{\sqrt{(u_1 - u_2)(u_1 - u_3)} \left[\sqrt{(u_1 + 1)(u_1 - u_3)} + \sqrt{(u_1 - 1)(u_1 - u_2)} \right]}, \quad (4.17)$$

где $u_1 \in (1, +\infty)$.

Тогда, используя неравенства

$$u_1(2 + u_3 - u_2) - u_2 - u_3 > 2 - 2u_2 > 0, \quad u_1(2 + u_2 - u_3) - u_2 - u_3 > 2 - 2u_3 > 0,$$

из (4.16) и (4.17), в частности, получаем результат Адамара [9]: знак приращения угла прецессии за период положителен и совпадает со знаком $\omega_\zeta > 0$ (см. также [10, стр. 223]). Отметим, что для теоремы 1 часть 2) результат Адамара очевиден.

Аналогичные формулам (4.16), (4.17) выражения для оценок только через корни u_1, u_2, u_3 могут быть выписаны и для теоремы 1 части 2) и 3). Приведем здесь конечные результаты, которые получаются после подстановки в (4.14), (4.15) формул (4.12), соотношения из (4.8) для величины u_{02} и следующего равенства для соответствующего α_0 :

$$\alpha_0 = \alpha_{02} = \sqrt{\frac{b^2 \omega_\zeta^2}{a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{q_1 - q_2}{u_{02}}} = \frac{|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}|}{2}$$

Для теоремы 1 часть 2) имеем

$$\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_3}} < \Delta\psi < \pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_2}}$$

Причем здесь: при неравенстве $u_2 + u_3 > 0$ корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_1 < +\infty$, а при неравенстве $u_2 + u_3 < 0$ корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_1 < u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) = -(1 + u_2 u_3) / (u_2 + u_3)$.

Для теоремы 1 часть 3) имеем

$$-\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_2}} < \Delta\psi < -\pi \frac{\sqrt{u_1 + 1} + \sqrt{u_1 - 1}}{\sqrt{u_1 - u_3}}$$

Причем здесь обязательно соблюдается неравенство $u_2 + u_3 < 0$, а корень u_1 изменяется в интервале $1 < u_6 < u_1 < +\infty$, где, как и выше,

$$u_6 = (\lambda_0 + 1) / (\lambda_0 - 1) = -(1 + u_2 u_3) / (u_2 + u_3)$$

Следствие 2. В части 3) теоремы 1, согласно последним неравенствам из Следствия 1, знак приращения угла прецессии за период не совпадает со знаком ω_ζ (“попятная” прецессия). Это можно получить также из (4.15) и неравенства $u_0 = u_{02} < 1 / u_5 < -1$, справедливого для этого пункта, т.к. квадратные скобки в неравенствах (4.15) в этом случае положительны. Таким образом, условие $u_2 + u_3 < 0$ является необходимым (но не достаточным) для реализации “попятой” прецессии волчка Лагранжа. Для достаточности нужно еще выполнение неравенства $u_0 = u_{02} < 1 / u_5 < -1$, где u_{02} дается формулой из (4.8).

Отметим, однако, что эти необходимые и достаточные условия для “попятой” прецессии даются через корни полинома 3-го порядка $f(u)$ из (2.1), а не через исходные начальные условия задачи, что затрудняет их практическое использование.

Как известно (см., напр., [11]), условие $u_2 + u_3 < 0$ всегда выполнено при колебаниях сферического маятника. Следовательно, для реализации “попятой” прецессии необходимо, чтобы волчок Лагранжа осуществлял движения типа сферического маятника.

Теперь сформулируем и докажем результаты, касающиеся необходимых и достаточных условий для начальных данных задачи, при которых реализуется “попятная” прецессия волчка Лагранжа.

Теорема 2. Пусть заданы начальные условия $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ для некоторого движения волчка Лагранжа. Предположим, что интеграл Лагранжа $C\omega_\zeta = \text{const}$ для этих начальных условий удовлетворяет неравенству $\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) + \dot{\phi}(0) = \omega_\zeta > 0$ (т.е. проекция кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$ является положительной). Этим начальным условиям соответствует полином 3-го порядка $f(u)$ из (2.1), коэффициенты которого зависят известным образом от начальных условий $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$ и распределения масс волчка в соответствии с введенными выше обозначениями. В выражении для полинома $f(u)$ (2.1) параметр u_0 вычисляется по формуле

$$u_0 = \frac{K}{C\omega_\zeta} = \frac{1}{b\omega_\zeta} \dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0) + \cos\theta(0) \quad (4.18)$$

Тогда для реализации “попятной” прецессии необходимо и достаточно выполнения следующих четырех неравенств

$$f(u_0) < 0, f'(u_0) > 0, f''(u_0) < 0, \dot{\psi}(0) < 0 \quad (4.19)$$

Штрих означает производную по переменной u .

Доказательство теоремы 2 следует из геометрических соображений и специфического вида функции $f(u)$ (рис. 1), которая является полиномом третьего порядка и имеет локальные максимум и минимум, соответственно, на отрезках $[u_3, u_2]$ и $[u_2, u_1]$ (рис. 1). Из теоремы 1 следует, что для “попятной” прецессии необходимо и достаточно выполнения неравенства $u_0 < u_3$ (так как по доказанному в теореме 1, при $u_0 > u_3$ средняя прецессия всегда “попутная”). В таком случае (так как $f(u) \geq 0, u \in [u_3, u_2]$) должно быть выполнено неравенство $f(u_0) < 0$. Чтобы исключить случай $u_2 < u_0 < u_1$, при котором также реализуется неравенство $f(u_0) < 0$, нужно потребовать (рис. 1), чтобы $u_0 < u_{\max}$, где $u_{\max} \in (u_3, u_2)$ — точка локального максимума функции $f(u)$, в которой $f'(u_{\max}) = 0$. Следовательно (так как $f'(u)$ квадратный полином — парабола с “усами” вверх), должно быть выполнено неравенство $f'(u_0) > 0$. Наконец, чтобы исключить для параболы $f'(u)$ случай $u_{\min} < u_0 < u_1$, где u_{\min} — точка локального минимума функции $f(u)$, для которой имеем $f'(u_{\min}) = 0$ и для которой $f'(u)$ — квадратный полином с “усами” вверх, уже необходимо и достаточно потребовать $f''(u_0) < 0$ (ведь ясно, что $f''(u_0) > 0$ при $u_{\min} < u_0 < u_1$).

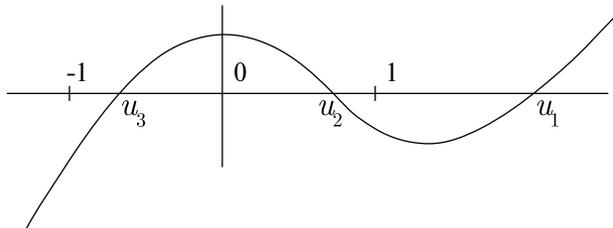


Рис. 1. Вид гироскопической функции $f(u)$. $-1 < u_3 < u_2 < 1 < u_1 < +\infty$, $u_0 \notin (-1, u_3]$.

Условие $\dot{\psi}(0) < 0$, фигурирующее в (4.19), является, вообще говоря, условием согласованности, так как при $\dot{\psi}(0) > 0$ из второго уравнения соотношений (2.1) следует неравенство $u_0 > u(0) = \cos\theta(0) > u_3$. А в этом случае, как было указано выше в Теореме 1, средняя прецессия обязательно является “попутной”. Теорема 2 полностью доказана.

Следствие 3. Необходимые и достаточные условия для реализации “попятной” прецессии в явном виде (через начальные условия задачи).

Для реализации “попятной” прецессии волчка Лагранжа при $\omega_\zeta > 0$ необходимо и достаточно выполнения неравенства $u_0 < -1$, где u_0 дается формулой

$$u_0 = K / (C\omega_\zeta) = \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b[\dot{\phi}(0) + \dot{\psi}(0)\cos\theta(0)]} + \cos\theta(0)$$

Доказательство Следствия 3: используя неравенства из (4.19), можно получить необходимые и достаточные условия для реализации “попятной” прецессии (при $\omega_\zeta > 0$) в явном виде. Действительно, используя явный вид функции $f(u)$ из (2.1), получим формулы

$$\begin{aligned} af(u) &= (\alpha - au)(1 - u^2) - b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u)^2 \\ af'(u) &= 3au^2 - 2\alpha u - a + 2b^2\omega_\zeta^2(u_0 - u) \\ af''(u) &= 6au - 2\alpha - 2b^2\omega_\zeta^2 \end{aligned}$$

Тогда первые три неравенства из (4.19) примут следующий вид

$$(\alpha - au_0)(1 - u_0^2) < 0, \quad 3au_0^2 - 2\alpha u_0 - a > 0, \quad 3au_0 - \alpha - b^2\omega_\zeta^2 < 0 \quad (4.20)$$

Можно показать, что для “попятной” прецессии соблюдается неравенство $u_0^2 > 1$. Действительно, при $u_0^2 < 1$ из первого неравенства в (4.20) получим неравенство $u_0 > \alpha / a$. Вспоминая явный вид параметров u_0, α ,

$$u_0 = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta}, \quad \frac{\alpha}{a} = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a}, \quad (4.21)$$

получим неравенство

$$\frac{\dot{\psi}(0)}{b\omega_\zeta} \sin^2\theta(0) > \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a} > 0,$$

которое противоречиво при $\dot{\psi}(0) < 0$ (см. четвертое неравенство в (4.19)).

При $u_0^2 > 1$ можно утверждать, что обязательно должно быть $u_0 < -1$ (при $u_0 > +1$, как это следует из второго соотношения в (2.1), будет всегда $\dot{\psi}(t) > 0$, то есть “попутная” прецессия). С учетом неравенства $u_0 < -1$ три соотношения (4.20) приобретают вид

$$u_0 < \frac{\alpha}{a}, \quad u_0 < \frac{\alpha}{3a} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{9a^2} + \frac{1}{3}}, \quad u_0 < \frac{\alpha + b^2\omega_\zeta^2}{3a}$$

Ясно, что последние три неравенства эквивалентны двум (третье неравенство есть следствие второго)

$$u_0 < \frac{\alpha}{a}, u_0 < \frac{\alpha}{3a} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{9a^2} + \frac{1}{3}} \quad (4.22)$$

Рассматривая различные значения для параметра $z = \alpha/a$ на всей вещественной оси, приходим к следующим двум неравенствам, эквивалентным неравенствам (4.22):

$$u_0 < z, \text{ при } -\infty < z < -1 \quad (4.23)$$

$$u_0 < \frac{z}{3} - \sqrt{\frac{z^2}{9} + \frac{1}{3}}, \text{ при } -1 \leq z < +\infty \quad (4.24)$$

Покажем, что неравенство (4.23) не может быть выполнено. Действительно, используя вторую формулу из (4.21), из (4.23) получим неравенство

$$\begin{aligned} z = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{b\omega_\zeta} < -1 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{b\omega_\zeta} < -1 - \cos\theta(0) < 0 \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречиво, так как в левой его части стоит положительная величина.

Таким образом, остается исследовать только неравенство (4.24), имеющее вид

$$u_0 < h(z) = \frac{1}{3}\left(z - \sqrt{z^2 + 3}\right); \quad z > -1 \quad (4.25)$$

Покажем, что функция $h(z)$ является монотонно возрастающей. Имеем

$$h'(z) = \frac{1}{3} \frac{\sqrt{z^2 + 3} - z}{\sqrt{z^2 + 3}} > 0$$

Следовательно, при $z > -1$ получим $h(z) > h(-1) = -1 > u_0$. Таким образом, неравенства (4.25) выполнены заведомо при условиях $u_0 < -1$, $z = \alpha/a > -1$. Полученные условия (т.е. неравенства $u_0 < -1$ и $\alpha/a > -1$) и являются необходимыми и достаточными условиями реализации “попятной” прецессии. Выпишем эти условия, используя формулы (4.21)

$$u_0 = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta} < -1, \quad \frac{\alpha}{a} = \cos\theta(0) + \frac{\dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0)}{a} > -1$$

Второе неравенство, очевидно, выполняется тождественно. Таким образом, в качестве необходимого и достаточного условия реализации “попятной” прецессии остается всего лишь одно неравенство $u_0 < -1$, которое в исходных начальных условиях задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\psi}(0)\sin^2\theta(0)}{b\omega_\zeta} < -(1 + \cos\theta(0)) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\dot{\psi}(0)\sin^2\left[\frac{\theta(0)}{2}\right] < -b\omega_\zeta = -b[\dot{\phi}(0) + \dot{\psi}(0)\cos\theta(0)] \end{aligned}$$

Итак, получаем следующее необходимое и достаточное условие реализации “попятной” прецессии, которое выражено только через начальные условия задачи и параметр $b = C/A$ ($b \in (0, 2)$) волчка Лагранжа,

$$\dot{\psi}(0)\left[2\sin^2\frac{\theta(0)}{2} + b\cos\theta(0)\right] + b\dot{\phi}(0) < 0 \quad (4.26)$$

Отметим, что неравенство (4.26), совместно с наложенным ранее условием положительности проекции кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$, которое имеет вид $\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) + \dot{\phi}(0) = \omega_\zeta > 0$, дает следующее *двухстороннее* неравенство для реализации “попятной” прецессии

$$-\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) < \dot{\phi}(0) < -\dot{\psi}(0)\cos\theta(0) - \frac{2}{b}\dot{\psi}(0)\sin^2\frac{\theta(0)}{2} \quad (4.27)$$

Нарушение одного из неравенств в (4.27) указывает на то, что либо происходит “попутная” прецессия, либо проекция кинетического момента тела на ось динамической симметрии $O\zeta$ является отрицательной. Следствие 3 доказано.

Отметим, что неравенство (4.27) при фиксированном $\dot{\psi}(0) < 0$ дает интервал $\Delta\dot{\phi}(0)$ изменения начального условия $\dot{\phi}(0)$, при котором реализуется “попятная” прецессия:

$$\Delta\dot{\phi}(0) = \frac{2}{b}|\dot{\psi}(0)|\sin^2\frac{\theta(0)}{2}$$

Как видим, этот интервал тем больше, чем больше модуль угловой скорости начальной прецессии $\dot{\psi}(0)$, и тем меньше, чем меньше начальный угол нутации $\theta(0)$. Например, при $\theta(0) = \pi/2$ (горизонтальный волчок) получим из (4.27) неравенства

$$0 < \dot{\phi}(0) < -\frac{\dot{\psi}(0)}{b}$$

При соблюдении этих строгих неравенств волчок будет совершать прецессию в “попятном” направлении.

Замечание 3. Результат следствия 3 показывает, что при $u_0 > -1$, $\omega_\zeta > 0$ прецессия (может быть, в среднем при $u_0 \in (u_3, u_2)$) будет “попутной”. Однако при $-1 < u_0 < u_3$ (где $u_3 \in (-1, +1)$ — меньший корень уравнения $f(u) = 0$) прецессия, согласно второму уравнению из (2.1), будет “попятной”. Такое утверждение часто встречается в литературе, посвященной волчку Лагранжа (см., напр., [15–17]). Таким образом, если соблюдается условие $-1 < u_0 < u_3$, то знак прецессии $\dot{\psi}$ определяется неоднозначно. Следовательно, мы должны заключить, что неравенства $-1 < u_0 < u_3$ не могут быть реализованы, а в действительности могут реализоваться лишь неравенства $-1 < u_3 < u_0$. Этот факт подтверждается также результатами вышеприведенной леммы (см. неравенства для области 4 в формулировке леммы, а также результаты, приведенные в Замечании 1 к лемме). Можно, наконец, и непосредственно доказать следующее утверждение.

Утверждение. Если $u_0 > -1$, то обязательно выполнено неравенство $u_0 > u_3$, где $u_3 \in (-1, +1)$ — меньший корень уравнения $f(u) = 0$.

Действительно, положим $u_0 = -1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малая величина. Тогда имеем $af(-1) = -b^2\omega_\zeta^2\varepsilon^2 < 0$, $af(-1 + \varepsilon) = 2\varepsilon(\alpha + a) + O(\varepsilon^2) > 0$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$, с учетом того, что

$$\alpha + a = a(1 + \cos\theta(0)) + \dot{\psi}^2(0)\sin^2\theta(0) + \dot{\theta}^2(0) > \dot{\theta}^2(0) > 0$$

Следовательно, корень u_3 уравнения $f(u) = 0$ находится в интервале $(-1, -1 + \varepsilon)$, и, значит, выполнено неравенство $-1 < u_3 < u_0 = -1 + \varepsilon$. Далее постепенно увеличиваем ε и пользуемся тем известным фактом, что равенство $u_0 = u_3$ невозможно (см., напр., [11], но, кстати, равенство $u_0 = u_2$ возможно). Тогда из свойства непрерывности следует, что $u_0 > u_3$ при всех допустимых $\varepsilon > 0$. Утверждение доказано.

Замечание 4. Неравенство $u_0 = K / (C\omega_\zeta) < -1$ для части 3) теоремы 1 может быть реализовано при любом $\omega_\zeta > 0$, за счет выбора соответствующего K (константа интеграла кинетического момента тела относительно вертикальной оси Oz). Таким образом, установлено, что при $u_0 < -1$ приращение угла прецессии за период имеет знак, противоположный знаку ω_ζ , за счет допустимого выбора соответствующих начальных условий для других компонентов вектора угловой скорости ω , то есть величин $\omega_\zeta(0)$, $\omega_\eta(0)$. Подробнее выбор начальных условий волчка при заданных корнях гироскопической функции приведен ниже, в разд. *Приложение*.

5. Некорректные объяснения Валле Пуссена в его учебнике [12] о “попутной” прецессии волчка Лагранжа. В учебнике [12] содержатся некорректные (на наш взгляд) качественные объяснения о прецессии волчка Лагранжа в попутном направлении. Действительно, автор цитируемого учебника приписывает повороту конца вектора кинетического момента волчка попутному действию момента силы тяжести относительно точки подвеса волчка (теорема Резаля). На основании этого делается вывод о попутной же прецессии также и оси динамической симметрии волчка. Однако если начальные условия для волчка в неподвижной системе координат таковы, что ось динамической симметрии изначально поворачивается в попятном направлении (начальная угловая скорость прецессии $\dot{\psi}(0)$ отрицательна), то направление момента силы тяжести (в неподвижной системе координат) меняется, и результирующий поворот вектора кинетического момента может происходить также и в попятном направлении. Правильные качественные и количественные выводы дают уравнения Эйлера, которые, по сути, корректно записывают теорему Резаля в подвижной системе координат, связанной жестко с волчком. Как показано в настоящей статье, для обоснования среднего направления прецессии приходится преодолевать некоторые аналитические трудности, которые следуют из интегралов точных динамических уравнений Эйлера.

Заключение. В работе для произвольных невырожденных движений волчка Лагранжа получены следующие результаты.

Даны доказательства формул (4.13)–(4.15) (в элементарных функциях) для гарантированных оценок снизу и сверху средней угловой скорости прецессии, не использующие эллиптические функции и методы теории функций комплексного переменного. Эти оценки выражены через вещественные корни кубического уравнения, коэффициенты которого определяются параметрами волчка и начальными условиями задачи.

Из полученных оценок следует известный результат Адамара о совпадении (в некоторых случаях) знаков средней угловой скорости прецессии и проекции угловой скорости волчка на ось динамической симметрии.

Получены необходимые и достаточные условия (4.27), которым должны удовлетворять начальные данные задачи и параметры волчка, чтобы имела место “попятная”

прецессия волчка при положительной его закрутке вокруг оси динамической симметрии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Klein F., Sommerfeld A. *Über die Theorie des Kreisels*. New York: E.A. Johnson Repr. Corp., 1965. 966 p.
2. Розенблат Г.М. Об оценках средней угловой скорости прецессии волчка Лагранжа // Докл. РАН. 2019. Т. 485. № 2. С. 176–181.
3. Журавлёв В.Ф. К вопросу об оценках эффекта Магнуса // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 3. С. 541–543.
4. Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М. Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.
5. Yehia H.M. On the relation between the first and second moments of distributions // J. Phys. A: Math.&General. V. 35. 2002. № 30. P. 6505–6508.
6. Scarpello G.M., Ritelli D. Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode. // Celest. Mech. Dyn. Astr. 2018. V. 130. Art. № 42. DOI: 10. 1007/s10569-018-9837-5
7. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977. 328 с.
8. Kohn W. Contour integration in the theory of spherical pendulum and the heavy symmetrical top. // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 59. pp. 107–131.
9. Hadamard J. Sur la precession dans le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe. // Bul l. des Sci. Math. 1895. V. 19. P. 228–230.
10. Мак-Миллан В.Д. Динамика твердого тела. М.; Л.: Изд-во иностр. лит., 1951. 468 с.
11. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. М.: Изд-во МГУ, 2000. 719 с.
12. Валле Пуссен Ш.Ж. Лекции по теоретической механике. Т. 2. М.: ИЛ, 1949. 327 с.
13. Diaz J.B., Metcalf F.T. On a result of Hadamard concerning the sign of precession of a heavy symmetrical top // Proc. Amer. Math. Soc. 1962. V. 13. P. 669–670.
14. Diaz J.B., Metcalf F.T. Upper and lower bounds for the apsidal angle in the theory of the heavy symmetrical top // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. V. 16. P. 214–229.
15. Leimanis E. *The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point*. New York: Springer, 1965. 337 p.
16. Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. М.: Физматлит, 2001. 478 с.
17. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. М.: Наука, 1987. 368 с.

Приложение. Определим все начальные условия задачи $\theta(0)$, $\dot{\theta}(0)$, $\psi(0)$, $\dot{\psi}(0)$, $\phi(0)$, $\dot{\phi}(0)$, которые соответствуют заданным заранее корням u_1 , u_2 , u_3 гироскопической функции $f(u)$, удовлетворяющим условиям

$$-1 < u_3 < u_2 < 1 < u_1 < +\infty$$

Начальное условие $\theta(0) \in (0, \pi)$ выбираем произвольно так, чтобы $\cos\theta(0) \in (u_3, u_2)$. Далее, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях u в равенстве

$$(\alpha / a - u)(1 - u^2) - k(u_0 - u)^2 = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = f(u), \quad (\text{П.1})$$

где обозначено

$$\begin{aligned} k &= b^2 \omega_\zeta^2 / a > 0, \quad u_0 = \cos\theta(0) + [\dot{\psi}(0) \sin^2 \theta(0)] / (b \omega_\zeta) \\ \alpha &= a \cos\theta(0) + [\dot{\psi}^2(0) \sin^2 \theta(0) + \dot{\theta}^2] \\ a &= 2Mg\zeta_0 / A \quad (\zeta_0 > 0), \quad b = C / A, \quad \omega_\zeta = \dot{\psi}(0) \cos\theta(0) + \dot{\phi}(0), \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 &= \alpha / a + k \\ 1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2 &= 2u_0 k \\ u_1 u_2 u_3 &= -\alpha / a + k u_0^2 \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

Решим систему (П.3) относительно трех неизвестных $\{u_0, k, \alpha / a\}$. Система (П.3) частично решалась ранее [10]. Решение, однако, не было доведено до своего логического конца, т.е., до полного выражения всех начальных условий задачи через заданные три корня гироскопической функции.

Сложив первое и третье уравнения системы (П.3), получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3 &= (u_0^2 + 1)k \\ 1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2 &= 2u_0 k \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Воспользовавшись обозначениями для q_1, q_2 из (4.8) и легко проверяемыми тождествами

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 2(u_1 + u_2 + u_3 + u_1 u_2 u_3) \\ q_1 - q_2 &= 2(1 + u_1 u_2 + u_1 u_3 + u_3 u_2), \end{aligned}$$

получим из (П.4) уравнения

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 2(u_0^2 + 1)k \\ q_1 - q_2 &= 4u_0 k \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Из (П.5) получаем два решения для u_0 : u_{01}, u_{02} , которые даются формулами из (4.8), и, соответственно, два значения для k , которые даются формулами

$$k_i = \frac{q_1 - q_2}{4u_{0i}}; \quad i = 1, 2 \quad (\text{П.6})$$

Из (П.6), используя обозначение для k из (П.2), получим два значения для начального условия $\omega_\zeta > 0$

$$\omega_{\zeta 1} = \frac{\sqrt{a}}{2b}(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}), \quad \omega_{\zeta 2} = \frac{\sqrt{a}}{2b}|\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}| \quad (\text{П.7})$$

Используя обозначение для u_0 из (П.2) и формулы (П.7), получим следующие два значения для начального условия $\psi(0)$

$$\psi(0)_{1,2} = \frac{\sqrt{a}}{2\sin^2 \theta(0)} \left[(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2}) - (\sqrt{q_1} \pm \sqrt{q_2}) \cos \theta(0) \right] \quad (\text{П.8})$$

Далее, используя (П.7, П.8) и обозначение для ω_ζ из (П.2), получим следующие два значения для начального условия $\phi(0)$

$$\phi(0)_{1,2} = \omega_{\zeta 1,2} - \psi(0)_{1,2} \cos \theta(0) \quad (\text{П.9})$$

В (П.9) $\omega_{\zeta 1,2}$, $\psi(0)_{1,2}$ даются формулами (П.7), (П.8).

Нам осталось определить последнее начальное условие $\dot{\theta}(0)$. Чтобы это сделать, воспользуемся, например, третьим уравнением системы (П.3), из которого находим

$$\frac{\alpha}{a} = ku_0^2 - u_1u_2u_3 \quad (\text{П.10})$$

Воспользовавшись формулами (П.6) и обозначениями из (П.2), из (П.10) получим

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\theta}(0)^2}{a} + \cos\theta(0) + \frac{1}{4\sin^2\theta(0)} [(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2}) - (\sqrt{q_1} \pm \sqrt{q_2})\cos\theta(0)]^2 = \\ = \frac{1}{4}(\sqrt{q_1} \mp \sqrt{q_2})^2 - u_1u_2u_3 \end{aligned}$$

Проводя несложные алгебраические выкладки, из последнего соотношения получим

$$\dot{\theta}(0)^2 \sin^2\theta(0) = a(u_1 - \cos\theta(0))(u_2 - \cos\theta(0))(\cos\theta(0) - u_3) > 0$$

Последнее соотношение корректно определяет начальное условие $\dot{\theta}(0)$. Отметим, что начальная угловая скорость нутации $\dot{\theta}(0)$ не зависит от того, какое начальное условие для u_0 мы выбрали (т.е. $u_0 = u_{01}$ или $u_0 = u_{02}$), в отличие от угловых скоростей прецессии и собственного вращения $\dot{\psi}(0)$, $\dot{\phi}(0)$, которые (см. формулы (П. 8, П. 9)) зависят от выбора значения для u_0 .

On Precession of Lagrange's Top

G. M. Rozenblat ^{a, #}

^aMoscow State Automobile and Road Technical University (MADI), Moscow, Russia

[#]e-mail: gr51@mail.ru

The article describes the results obtained for the upper and lower bounds (estimates) for the apsidal angle (precession angle) in the theory of the motion of the heavy symmetrical solid body about fixed point (Lagrange's case) for arbitrary initial conditions and parameters of the body. All regions of initial conditions is divided into two sets. In the first set there is a direct precession of the top, in the second set there is a retrograde precession of the top.

Keywords: Lagrange's top, nutation, precession, guaranteed estimates, rigid body dynamics

REFERENCES

1. Klein F., Sommerfeld A. *Über die Theorie des Kreisels*. N.Y.: E.A. Johnson Reprint Corp., 1965. 966 p.
2. Rozenblat G.M. Estimates of the average angular velocity of the precession of Lagrange's top // *Dokl. Phys.*, 2019, vol. 64, no. 3, pp. 114–119.
3. Zhuravlev V.Ph. К вопросу об оценках эффекта Magnusa // *Dokl. AN SSSR*, 1976, vol. 226, no. 3, pp. 541–543. (in Russian)
4. Zhuravlev V.Ph., Rozenblat G.M. *Paradoxes, Counterexamples and Mistakes in Mechanics*. Moscow: Lenand, 2017. 240 p. (in Russian)
5. Yehia H.M. On the Relation between the First and Second Moments of Distributions // *J. Phys. A: Math.&General*, 2002, vol. 35, no. 30, pp. 6505–6508.
6. Scarpello G.M., Ritelli D. Motions about a fixed point by hypergeometric functions: new non-complex analytical solutions and integration of the herpolhode // *Celest. Mech. Dyn. Astr.*, 2018, vol. 130, art. no. 42. DOI: 10.1007/s10569-018-9837-5
7. Arhangelsky Yu.A. *Analytical Dynamics of Rigid Body*. Moscow: Nauka, 1977, 328 p. (in Russian)
8. Kohn W. Contour integration in the theory of spherical pendulum and the heavy symmetrical top // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1946, vol. 59, pp. 107–131.

9. *Hadamard J.* Sur la precession dans le mouvement d'un corps pesant de revolution fixe par un point de son axe // *Bull. des Sci. Math.*, 1895, vol. 19, pp. 228–230.
10. *MacMillan W.D.* Dynamics of Rigid Bodies. N.Y.; London: 1936. 478 p.
11. *Golubev Yu.Ph.* Fundamentals of Theoretical Mechanics. Moscow: MSU Publ., 2000. 719 p. (in Russian)
12. *De la Vallee Poussin Ch.-J.* Lecons de Mecanique Analytique. 1925. T. 2, 328 p.
13. *Diaz J.B., Metcalf F.T.* On a result of Hadamard concerning the sign of precession of a heavy symmetrical top // *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1962, vol. 13, pp. 669–670.
14. *Diaz J.B., Metcalf F.T.* Upper and lower bounds for the apsidal angle in the theory of the heavy symmetrical top // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1964, vol. 16, pp. 214–229.
15. *Leimanis E.* The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin: Springer, 1965. 337 p.
16. *Lidov M.L.* Course of Lectures on Theoretical Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2001. 478 p. (in Russian)
17. *Chetaev N.G.* Theoretical Mechanics. Moscow: Nauka, 1987. 368 p. (in Russian)