

УДК 531.36+517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

© 2024 г. В. В. Козлов^{1,*}¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*e-mail: vvkozlov@presidium.ras.ru

Поступила в редакцию 10.11.2023 г.

После переработки 15.12.2023 г.

Принята к публикации 15.12.2023 г.

Рассмотрена задача об устойчивости невырожденных линейных систем, допускающих первый интеграл в виде невырожденной квадратичной формы. Установлены новые алгебраические критерии устойчивости, а также полной неустойчивости таких систем в виде равенства нулю следов произведений матриц, куда входит дополнительная симметрическая матрица. Эти условия тесно связаны с симплектической геометрией фазового пространства, которая определяется матрицей исходной линейной системы и симметрической матрицей, задающей первый интеграл. Результаты общего характера применяются к нахождению условий полной неустойчивости линейных гироскопических систем.

Ключевые слова: линейные системы, квадратичные интегралы, след, симплектическая структура, гамильтоновы системы, нормальные формы Вильямсона, степени устойчивости и неустойчивости, полная неустойчивость, пучки квадратичных форм, гироскопические системы

DOI: 10.31857/S0032823524010017 EDN: YUZUZH

1. Условия устойчивости. Предположим, что линейная система

$$\dot{x} = Ax; \quad x \in \mathbb{R}^m \quad (1.1)$$

допускает квадратичный первый интеграл

$$f = (Bx, x) / 2, \quad B^* = B \quad (1.2)$$

Матрицы A и B связаны следующим соотношением:

$$BA = -A^*B \quad (1.3)$$

В дальнейшем предполагается *невырожденность* матриц A и B . В частности, m четно. Действительно, согласно (1.3), матрица BA кососимметрическая. Она может быть невырожденной только при четном m . Положим $m = 2n$. Если $|AB| \neq 0$, то система (1.1) на самом деле *гамильтонова*, причем f будет функцией Гамильтона [1]. Но только она представлена не в канонических переменных. Согласно [2], система (1.1) допускает семейство квадратичных первых интегралов

$$f_k = \left(A^k{}^* B A^k x, x \right) / 2; \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.4)$$

Конечно, не все они независимы. В типичном случае, когда матрица A не имеет кратных собственных значений, функции

$$f_0 = f, f_1, \dots, f_{n-1} \quad (1.5)$$

независимы (см. [2]). Более того, они попарно находятся в инволюции относительно естественной симплектической структуры, относительно которой система (1.1) будет гамильтоновой. Спектр матрицы A симметричен не только относительно вещественной, но и относительно чисто мнимой оси. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= |A - \lambda E| = |B^{-1}| |BA - \lambda B| = |B^{-1}| \times \\ &\times |-A^* B - \lambda B| = |A^* + \lambda E| = |A + \lambda E| \end{aligned}$$

Степенью устойчивости s системы (1.1) назовем число пар чисто мнимых собственных значений матрицы A , а *степень неустойчивости* u — это количество собственных значений A в правой комплексной полуплоскости. Если матрица A невырождена, то

$$s + u = n \quad (1.6)$$

Пусть i^- , i^+ — индексы инерции квадратичной формы (1.2). Если эта форма невырождена, то, очевидно,

$$i^- + i^+ = 2n \quad (1.7)$$

Так как $-f$ также квадратичный интеграл системы (1.1), то без ущерба для общности можно считать, что

$$i^- \leq i^+ \quad (1.8)$$

В [3] установлено неравенство

$$i^+ - i^- \leq 2s \quad (1.9)$$

Точнее, в [3] доказано более сильное неравенство, но в дальнейшем оно нам не понадобится. С другой стороны, в [2] доказано неравенство

$$u \leq i^- \quad (1.10)$$

Его частные варианты были известны ранее (см., например, [4]). С учетом соотношений (1.6), (1.7) и соглашения (1.8), неравенства (1.9) и (1.10) на самом деле эквивалентны (хотя их доказательства в [2] и [3] основаны на разных идеях).

Систему (1.1) назовем *вполне неустойчивой*, если $s = 0$ и $u = n$. В этом случае степень неустойчивости принимает максимально возможное значение и (согласно (1.8) и (1.10)) $i^- = i^+ = n$. Так что в этом случае фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}$ с квадратичной формой (1.2) в качестве псевдоевклидовой метрики будет *пространством Артина*.

В «противоположном» случае, когда $u = 0$, а $s = n$, систему (1.1) будем называть *устойчивой*. В типичном случае, когда спектр матрицы A простой (именно его в дальнейшем и будем рассматривать), положение равновесия $x = 0$ устойчивой системы устойчиво по Ляпунову (как в прошлом, так и в будущем).

В [1] показано, что линейная система с квадратичным интегралом устойчива тогда и только тогда, когда она допускает первый интеграл в виде положительно определенной квадратичной формы. С другой стороны, рассмотрим конус в $\mathbb{R}^{2n}$:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^{2n} : f_0(x) = \dots = f_{n-1}(x) = 0\}$$

Как было показано [2], критерий устойчивости системы (1.1) состоит в выполнении условия $K = \{0\}$. Более того, в этом случае положительно определенный квадратичный интеграл можно найти в виде пучка квадратичных интегралов (1.4)

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f_i; \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Укажем несколько необычные алгебраические критерии полной неустойчивости и устойчивости линейной системы с квадратичным интегралом. Будем предполагать, что матрица A не имеет кратных собственных значений. Это означает, что дискриминант ее характеристического многочлена отличен от нуля.

Теорема 1. Система (1.1) вполне неустойчива тогда и только тогда, когда найдется положительно (или отрицательно) определенная симметрическая матрица S такая, что

$$\operatorname{tr}\left(SA^k{}^*BA^k\right)=0 \quad (1.11)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$.

В силу соотношения (1.3) условие (1.11) эквивалентно условию

$$\operatorname{tr}\left(SBA^{2k}\right)=0 \quad (1.12)$$

Выбирая в качестве S единичную матрицу, сразу получаем:

Следствие. Если

$$\operatorname{tr}\left(BA^{2k}\right)=0 \quad (1.13)$$

для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$, то линейная система вполне неустойчива.

Конечно, условие (1.13) редко выполняется. Однако если A не имеет чисто мнимых собственных значений, то в нормальных канонических переменных Вильямсона матрица B вполне неустойчивой системы имеет нулевую диагональ. Как показано в [2], этим же свойством обладают и все матрицы BA^{2k} .

Теорема 2. Система (1.1) устойчива тогда и только тогда, когда для любой симметрической матрицы $S \neq 0$, удовлетворяющей условию (1.11), квадратичная форма (Sy, y) , $y \in \mathbb{R}^{2n}$ принимает значения разных знаков.

Следствие. Система (1.1) неустойчива тогда и только тогда, когда найдется ненулевая симметрическая матрица S такая, что $(Sy, y) \geq 0$ (или ≤ 0) для всех $y \in \mathbb{R}^{2n}$.

Теорема 3. Среди симметрических невырожденных матриц S , удовлетворяющих соотношениям (1.11), всегда найдется такая, что индексы инерции квадратичной формы (Sy, y) равны s и $2u + s$.

Если система вполне неустойчива, то $s = 0$ и матрица S будет дефинитной (что соответствует заключению теоремы 1). В устойчивом случае $u = 0$, и поэтому квадратичная форма (Sy, y) будет артиновой формой (очевидно принимающей значения разных знаков). Теорема 3 не допускает обращения. Это показывает простой пример линейной системы на плоскости ($n = 1$). Система

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2$$

имеет квадратичный интеграл $f = x_1x_2$. Здесь $s = 0$, а $u = 1$. Соотношению (1.11), очевидно, удовлетворяют симметрические матрицы

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Индексы инерции квадратичной формы (S_1y, y) равны $i^+ = 2$, $i^- = 0$ (что отвечает заключению теоремы 3), а квадратичная форма (S_2y, y) будет артиновой ($i^+ = i^- = 1$).

Каков инвариантный смысл соотношения (1.11) (или (1.12))? При линейной подстановке $x \mapsto Cx$ матрицы A и B преобразуются по следующим правилам:

$$A \mapsto C^{-1}AC, \quad B \mapsto C^*BC$$

Если симметрическая матрица S преобразуется по правилу

$$S \mapsto C^{-1}SC^{*-1}, \quad (1.14)$$

то

$$SBA^{2k} \mapsto C^{-1}SBA^{2k}C,$$

и, следовательно, $\text{tr}(SBA^{2k})$ не изменится.

Введем векторное пространство $R^{2n*} = \{y\}$, сопряженное к $R^{2n} = \{x\}$. Каноническое спаривание $y \cdot x$ (значение ковектора на векторе) будет инвариантом, если векторы из R^{2n*} преобразуются по ковариантному закону:

$$y \mapsto C^{*-1}y \quad (1.15)$$

Следовательно, согласно (1.14), симметрическую матрицу S следует считать матрицей квадратичной формы в сопряженном пространстве. Подчеркнем, что в результате линейной подстановки (1.15) сохраняется дефинитность, полудефинитность или знакопеременность квадратичной формы (Sy, y) .

2. Доказательства. Теоремы 1–3 доказываются с помощью теории вещественных нормальных форм линейных дифференциальных уравнений Гамильтона, к которым невырожденным линейным преобразованием приводится линейная система (1.1) с квадратичным интегралом (1.2). Согласно Вильямсону, фазовое пространство R^{2n} распадается в прямую сумму косоортогональных (относительно соответствующей симплектической структуры) подпространств так, что гамильтониан представляется в виде суммы квадратичных форм (частичных гамильтонианов) на этих подпространствах, при этом:

а) вещественной паре $\pm a$ ($a \neq 0$) собственных чисел отвечает гамильтониан $-apq$ (здесь и далее p, q обозначают пару сопряженных канонических переменных),

б) чисто мнимой паре $\pm ib$ ($b \neq 0$) — $b(p^2 + q^2) / 2$,

в) четверке собственных значений $\pm a \pm ib$ ($ab \neq 0$) —

$$-a(p_1q_1 + p_2q_2) + b(p_1q_2 - p_2q_1).$$

При сделанных в разд. 1 предположениях о невырожденности системы (1.1) с гамильтонианом (1.2) и об отсутствии кратных корней других частичных гамильтонианов нет. В этих переменных матрица квадратичного интеграла f имеет блочно-диагональный вид, где по диагонали расположены матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -a & 0 & b \\ -a & 0 & -b & 0 \\ 0 & -b & 0 & -a \\ b & 0 & -a & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

отвечающие случаям (а–в). Как показано в [2], симметрическая матрица $A^m BA^m$ в этих координатах имеет тот же вид, что и матрица B , но только в случаях (а) и (б) перед блоками на диагонали присутствуют множители $(-1)^m a^{2m}$ и b^{2m} соответственно. Что касается случая (в), то ограничение квадратичного интеграла f_m на плоскость с каноническими координатами p_1, q_1, p_2, q_2 принимает следующий вид:

$$\mu_m(p_1q_1 + p_2q_2) + \nu_m(p_1q_2 - p_2q_1),$$

где

$$\mu_m = \text{Re}(-1)^{m+1}(a - ib)^{2m+1}, \quad \nu_m = \text{Im}(-1)^{m+1}(a - ib)^{2m+1}$$

Следует отметить, что число $a - ib$ является одним из четверки собственных значений матрицы A .

После этих предварительных замечаний докажем сначала более простую теорему 3. Используя нормальные канонические координаты, будем искать невырожденную симметрическую матрицу S в диагональном виде. Для блоков, отвечающих случаям (а) и (в), на диагонали матрицы S поместим 1, а в каждом блоке случая (б) на диагонали поместим 1 и -1 . Ясно, что в нормальных канонических переменных выполнены все n соотношений (1.11). Поскольку каждому блоку вида (а) и (в) отвечает пара вещественных и четверка комплексных собственных значений матрицы A , а блоку вида (б) отвечает пара чисто мнимых собственных значений, то сигнатура квадратичной формы (S, y) есть $2u + s$ и s . Остается воспользоваться замечаниями из разд. 1 и вспомнить, что сигнатура квадратичной формы не меняется при невырожденных линейных заменах переменных.

Докажем теперь теорему 1. Согласно теореме 3, если линейная система вполне неустойчива (то есть $s = 0$), то найдется дефинитная симметрическая матрица S , удовлетворяющая всем соотношениям (1.11).

Обратно, пусть найдется такая дефинитная симметрическая матрица S . Покажем, что $S = 0$. Предположим противное, что $s \geq 1$. Воспользуемся нормальными каноническими координатами Вильямсона. Если $s \geq 1$, то найдется двумерная инвариантная плоскость, отвечающая случаю (б).

Пусть симметрическая матрица S удовлетворяет всем n соотношениям (1.11) или, что то же самое, (1.12)). Поскольку матрицы BA^{2k} имеют описанный выше блочный вид (2.1), то матрицу S тоже следует считать блочно-диагональной с теми же размерами, что и размеры блоков матрицы B . Остальные элементы матрицы S (вне этих блоков) не участвуют в соотношениях (1.11).

Итак, пусть

$$BA^{2k} = \text{diag}[D_1^{(k)}, D_2^{(k)}, \dots], \quad S = \text{diag}[S_1, S_2, \dots],$$

причем квадратичные симметрические матрицы $D_j^{(k)}$ и S_j имеют одинаковые размеры (2×2 или 4×4). Соотношения (1.11) принимают следующий вид:

$$\sum_j \text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (2.2)$$

Если матрица $D_j^{(k)}$ отвечает случаю (а), то

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = -a^{2k+1} (2s_{12}^{(j)}), \quad (2.3)$$

где $s_{12}^{(j)}$ — внедиагональный элемент симметрической 2×2 -матрицы S_j .

В случае (б) этот след, очевидно, равен

$$b^{2k+1} \text{tr} S_j \quad (2.4)$$

В случае (в) имеем

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 2\mu_k (s_{12}^{(j)} + s_{34}^{(j)}) + 2\nu_k (-s_{14}^{(j)} + s_{23}^{(j)}), \quad (2.5)$$

где $s_{pq}^{(j)}$ — элементы симметрической 4×4 -матрицы S_j .

Учитывая формулы (2.3)-(2.5), заключаем, что n соотношений (2.2) дают замкнутую однородную систему n линейных уравнений для нахождения комбинаций элементов матриц S_j :

$$s_{12}^{(j)}, \quad \text{tr} S_j, \quad s_{12}^{(j)} + s_{34}^{(j)}, \quad -s_{14}^{(j)} + s_{23}^{(j)}$$

Так как спектр матрицы A простой, то определитель $n \times n$ — матрицы коэффициентов этой системы отличен от нуля (этот факт уже установлен при доказательстве функциональной независимости квадратичных форм $f_0 = f, f_v, \dots, f_{n-1}$). В частности, rS_j в случае (б). Значит, если матрица A имеет хотя бы одну пару чисто мнимых собственных значений (то есть $s \geq 1$), то симметрическая матрица S не может быть дефинитной, поскольку (по критерию Сильвестра) все диагональные элементы должны иметь один знак. Однако этот вывод противоречит нашему предположению о дефинитности матрицы S , что доказывает теорему 1.

Нам осталось доказать теорему 2. Пусть линейная система (1.1) устойчива. Тогда в нормальных канонических координатах Вильямсона матрица B имеет следующий блочно-диагональный вид:

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}, \dots \right),$$

причем вещественные числа $b_1, b_2, \dots$ (и их квадраты) все различны и не равны нулю. Матрица BA^{2k} имеет тот же вид:

$$\text{diag} \left(\begin{bmatrix} b_1^{2k+1} & 0 \\ 0 & b_1^{2k+1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_2^{2k+1} & 0 \\ 0 & b_2^{2k+1} \end{bmatrix}, \dots \right)$$

Пусть s_1, s_2, s_{2n} — диагональные элементы матрицы S . Тогда соотношения (1.11) дают нам следующую линейную систему

$$b_1^{2k+1}(s_1 + s_2) + b_2^{2k+1}(s_3 + s_4) + \dots = 0; \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Так как $b_1, b_2, \dots$ различны, то определитель этой системы (определитель Вандермонда) отличен от нуля. Следовательно,

$$s_1 + s_2 = 0, \quad s_3 + s_4 = 0, \dots$$

Но в этом случае квадратичная форма (Sy, y) принимает значения разных знаков, если, конечно, $S \neq 0$.

Обратно, предположим, что всякая квадратичная форма (Sy, y) принимает как положительные, так и отрицательные значения, если ненулевая симметрическая матрица S удовлетворяет соотношениям (1.11) и при этом линейная система (1.1) неустойчива. Это означает, что в специальных нормальных координатах Вильямсона матрица B имеет диагональный блок вида (а) или (в). Такой же по виду блок имеют и все матрицы $D^{(k)} = BA^{2k}$. В качестве соответствующего блока S_j матрицы S возьмем единичную матрицу. Тогда

$$\text{tr}(S_j D_j^{(k)}) = 0; \quad 0 \leq k \leq n-1$$

Полагая остальные блоки матрицы S равными нулю, получаем ненулевую симметрическую матрицу S , удовлетворяющую всем соотношениям (1.11), однако $(Sy, y) \geq 0$ для всех y . Таким образом, в этом случае найдется ненулевая симметрическая матрица S такая, что выполнено условие (1.11), но квадратичная форма (Sy, y)

не принимает значения разных знаков. Полученное противоречие доказывает устойчивость линейной системы (1.1). Что и требовалось.

Замечание. В работах [4,5] (см. также обзор [6]) рассмотрена задача о наличии в пучке симметрических матриц $T_1, \dots, T_{\text{tau}}$ (он состоит из линейных комбинаций $\sum \mu_j T_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$) дефинитной матрицы. Для этого необходимо и достаточно, чтобы из условий $\text{tr}(ST_j) = 0$, $1 \leq j \leq r$ вытекала индефинитность симметрической матрицы S . Это утверждение можно было бы использовать для доказательства теоремы 2 (вместе с тем фактом, что матрица любого квадратичного интеграла линейной системы (1.1) принадлежит пучку симметрических матриц BA^{2k} , $0 \leq k \leq n-1$). Там же указаны условия существования в пучке матриц индефинитной и полудефинитной матриц. Однако все эти условия не пригодны для доказательства теорем 1 и 3, которые (как и теорема 2) имеют симплектическую природу.

3. Ганкелевы формы. Укажем еще один алгебраический критерий устойчивости линейных систем с квадратичным интегралом. Как уже было сказано в разд. 1, характеристический многочлен матрицы A не содержит нечетных степеней спектрального параметра:

$$\lambda^{2n} + \alpha_1 \lambda^{2n-2} + \dots + \alpha_n \quad (3.1)$$

Поскольку (согласно предположению) этот многочлен не имеет кратных корней, то его дискриминант отличен от нуля.

Равновесие $x = 0$ системы (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда все корни многочлена n -й степени

$$\mu^n + \alpha_1 \mu^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad (3.2)$$

вещественные отрицательные числа. Следовательно, *необходимое* условие устойчивости заключается в выполнении неравенств $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$.

Пусть $\mu_1, \dots, \mu_n$ — простые корни многочлена (3.2). Положим

$$h_k = \mu_1^k + \dots + \mu_n^k, \quad h_0 = n$$

Числа h_k выражаются через коэффициенты по следующим формулам Ньютона:

$$2h_m + h_{m-1}\alpha_1 + \dots + h_1\alpha_{m-1} + m\alpha_m = 0; \quad m \leq n$$

$$h_m + h_{m-1}\alpha_1 + \dots + h_{m-n}\alpha_n = 0; \quad m > n$$

Отсюда $h_1 = -\alpha_1$, $h_2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_2$, $h_3 = -\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_3, \dots$ Введем симметрическую матрицу n -го порядка

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_n \\ \dots & & \\ h_{n-1} & h_n & h_{2n-2} \end{bmatrix}$$

и ганкелеву квадратичную форму $\Phi(z) = (Hz, z)$, $z \in \mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что $D = |H|$.

Теорема 4. Равновесие $x = 0$ системы (1.1) устойчиво тогда и только тогда, когда $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ и функция Φ имеет в точке $z = 0$ строгий минимум.

Доказательство. Так как $D \neq 0$, то многочлен (3.2) не имеет кратных корней. В этом случае критерий вещественности всех корней многочлена (3.2) есть условие положительной определенности квадратичной формы Φ [7]. Остается воспользоваться следующим фактом, вытекающим из правила Декарта: многочлен (3.2) без комплексных корней имеет n отрицательных корней тогда и только тогда, когда все его коэффициенты положительны. Что и требовалось.

Пусть I^+ , I^- — индексы инерции ганкелевой формы Φ . Так как $D = |\Phi| \neq 0$, то $I^+ + I^- = n$. В этом случае разность $n - |I^+ - I^-|$ всегда четна.

Теорема 5. Пусть ганкелева форма Φ невырождена. Тогда в спектре матрицы A имеется ровно $(n - |I^+ - I^-|) / 2$ различных комплексных четверок (чисел $\pm a \pm ib$, $ab \neq 0$).

В технической литературе наличие комплексных четверок в спектре линейной системы принято связывать с неустойчивостью типа *флаттера*. Если же в правой комплексной полуплоскости имеются только вещественные собственные значения, то в этом случае говорят о неустойчивости типа *дивергенции* (см., напр., [8, 9]).

Следствие 1. Пусть ганкелева форма Φ не имеет в начале координат минимума. Тогда в линейной системе будет неустойчивость типа флаттера.

Следствие 2. Если $D = |H| < 0$, то $x = 0$ — неустойчивое равновесие, имеющее тип флаттера.

Действительно, в этом случае ганкелева форма Φ невырождена, но не имеет минимума (согласно критерию Сильвестра).

Следствие 3. Пусть форма Φ положительно определена, а хотя бы один из коэффициентов характеристического многочлена (3.1) отрицательный. Тогда равновесие $x = 0$ системы (1.1) неустойчиво, причем эта неустойчивость имеет тип дивергенции.

Это утверждение вытекает из теорем 4 и 5. Вообще, если Φ положительно определена, то степень неустойчивости системы (1.1) равна числу перемен знаков коэффициентов многочлена (3.1).

Сама теорема 5 является следствием известного результата о ганкелевых квадратичных формах [7]: если $D \neq 0$, то количество вещественных корней многочлена (3.2) равно $|I^+ - I^-|$. Далее вещественному корню (3.2) отвечает либо пара вещественных, либо пара чисто мнимых корней многочлена (3.1). А каждой паре комплексных корней $\alpha \pm i\beta$ ($\beta \neq 0$) многочлена (3.2) (таких пар $(n - |I^+ - I^-|) / 2$) отвечает комплексная четверка корней (3.1). Что и требовалось.

4. Пример из теории гироскопической стабилизации. В качестве примера рассмотрим классическую задачу о гироскопической стабилизации неустойчивого равновесия линейной механической системы с двумя степенями свободы. Она описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + \gamma \dot{x}_2 - ax_1 = 0, \quad \ddot{x}_2 - \gamma \dot{x}_1 - bx_2 = 0 \quad (4.1)$$

Здесь a и b — положительные постоянные, параметр γ определяет интенсивность гироскопических сил. Размерность фазового пространства равна четырем; так что $n = 2$.

Уравнения (4.1) допускают квадратичный интеграл энергии

$$f = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - ax_1^2 - bx_2^2) / 2$$

Дополнительный интеграл (1.4):

$$f_1 = [(-\gamma \dot{x}_2 + ax_1)^2 + (\gamma \dot{x}_1 + bx_2)^2 - a\dot{x}_1^2 - b\dot{x}_2^2] / 2$$

Оба интеграла имеют одинаковые индексы инерции: $i^+ = i^- = 2$. Согласно [1], степень неустойчивости u и индекс инерции i^- имеют одинаковую четность.

Следовательно, если система (4.1) неустойчива, то $u = 2$. В этом случае свойства неустойчивости и полной неустойчивости линейной системы совпадают.

Условия гироскопической стабилизации системы (4.1) хорошо известны (см., например, [9, гл. 6]). Воспроизведем диаграмму степеней устойчивости в удобном для нас виде. Характеристический многочлен линейной системы (4.1) есть

$$\lambda^4 + \lambda^2(\gamma^2 - a - b) + ab \quad (4.2)$$

Считая $\gamma \neq 0$, положим $b = b'\gamma^2$, $a = a'\gamma^2$ и $\lambda = \lambda'\lambda^2$. Тогда (4.2) принимает следующий вид:

$$\gamma^4[\lambda'^4 + \lambda'^2(1 - a' - b') + a'b']$$

Для задачи об устойчивости наличие множителя γ^4 не играет никакой роли. Диаграмма степеней устойчивости на плоскости параметров a' , b' изображена на рис. 1. Дискриминантная кривая (где дискриминант $D = (a' - b')^2 - 2(a' + b' + 1)$ обращается в нуль) является параболой, которая касается осей a' и b' точках (1, 0) и (0, 1) соответственно. В каждой из областей изображено расположение собственных значений (кратные собственные значения более «жирные»). Точки $a' = 1, b' = 0$ и $a' = 0, b' = 1$ отвечают нулевому корню кратности 4. Рисунок наглядно показывает смену расположения характеристических корней при переходе через бифуркационные кривые. Область параметров, отвечающих полной неустойчивости системы (4.1), заштрихована. Кстати сказать, области устойчивости и неустойчивости, а также области флаттера и дивергенции сразу же определяются из заключений теорем 4 и 5 (и их следствий).

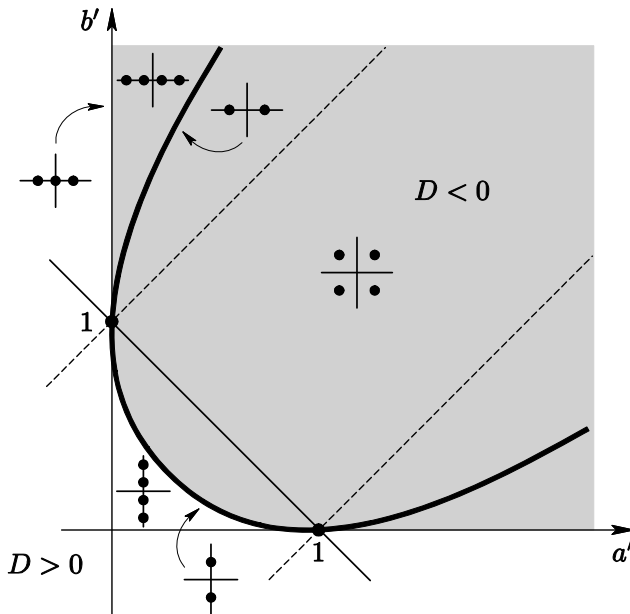


Рис. 1

Исследуем вопрос об условиях полной неустойчивости системы (4.1), опираясь на теорему 1. Матрицы квадратичных форм f_0 и f_1 суть

$$B = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } BA^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & a\gamma \\ 0 & b^2 & -b\gamma & 0 \\ 0 & -b\gamma & \gamma^2 - a & 0 \\ a\gamma & 0 & 0 & \gamma^2 - b \end{bmatrix}$$

Будем искать симметрическую матрицу S в следующем виде:

$$S = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & s_5 \\ 0 & s_2 & s_6 & 0 \\ 0 & s_6 & s_3 & 0 \\ s_5 & 0 & 0 & s_4 \end{bmatrix}$$

Условие ее положительной определенности сводится к четырем неравенствам:

$$s_1 > 0, \quad s_2 > 0, \quad s_2 s_3 > s_6^2, \quad s_1 s_4 > s_5^2 \quad (4.3)$$

При этом, конечно, $s_3 > 0$ и $s_4 > 0$. Запишем в явном виде два соотношения:

$$as_1 + bs_2 = s_3 + s_4 \quad (4.4)$$

$$a^2 s_1 + b^2 s_2 + (\gamma^2 - a)s_3 + (\gamma^2 - b)s_4 + 2a\gamma s_5 - 2b\gamma s_6 = 0 \quad (4.5)$$

Надо найти решения этих двух уравнений, удовлетворяющих неравенствам (4.3).

Положим

$$s_3 = bs_2, \quad s_4 = as_1 \quad (4.6)$$

Если при этом $s_5 = s_6 = 0$, то уравнение (4.5)

$$a(\gamma^2 - b + a)s_1 + b(\gamma^2 - a + b)s_2 = 0 \quad (4.7)$$

имеет решение с положительными s_1, s_2 при условии

$$\gamma^2 < |a - b| \quad (4.8)$$

Но тогда диагональная матрица S будет положительно определенной и линейная система (4.1) оказывается вполне неустойчивой (по теореме 1). На диаграмме степеней устойчивости условие (4.8) задает две связные области, расположенные выше и ниже двух прямых, обозначенных пунктиром. При этом спектр линейной системы (4.1) может состоять из двух пар вещественных чисел, или быть четверкой комплексных чисел.

В общем случае (когда s_5 и s_6 отличны от нуля) соотношение (4.7) принимает следующий вид:

$$a(\gamma^2 - b + a)s_1 + b(\gamma^2 - a + b)s_2 + 2a\gamma s_5 - 2b\gamma s_6 = 0$$

Положим

$$(\gamma^2 - a + b)s_2 - 2\gamma s_6 = 0 \text{ и } (\gamma^2 - b + a)s_1 + 2\gamma s_5 = 0$$

Учитывая (4.6), получаем, что два последних неравенства (4.3) удовлетворяются, если

$$(\gamma^2 - a + b)^2 < 4b\gamma^2 \text{ и } (\gamma^2 - b + a)^2 < 4a\gamma^2 \quad (4.9)$$

соответственно. Но эти оба неравенства совпадают и определяют на диаграмме степеней устойчивости область $D < 0$. Таким образом, объединение областей, задаваемых неравенствами (4.8) и (4.9), совпадает с областью полной неустойчивости линейной гироскопической системы (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В. Линейные системы с квадратичным интегралом // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 900–906.
2. Kozlov V.V. Linear hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // R&C Dyn. 2018. V. 23. № 1. P. 26–46.
3. Каранетян А.А., Козлов В.В. О степени устойчивости // Дифф. ур-я. 2005. Т. 41. № 2. С. 186–192.
4. John F. A note on the maximum principle for elliptic differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1938. V. 44. P. 268–271.
5. Dines L.L. On linear combinations of quadratic forms // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. V. 49. P. 388–393.
6. Uhlig F. A Recurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey // Linear Algebra and Its Appl. 1979. V. 25. P. 219–237.
7. Гантмахер Ф.П. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004. 560 с.
8. Kirillov O.N. Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Berlin: De Gruyter, 2013.
9. Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. М.: Физматлит, 2009. 399 с.

On the Stability of Linear Systems with a Quadratic Integral

V. V. Kozlov^{a, #}

^a*Steklov Mathematical Institute RAS, Moscow, Russia*

[#]*e-mail: vvkozlov@presidium.ras.ru*

The problem of stability of non-degenerate linear systems admitting a first integral in the form of a non-degenerate quadratic form is considered. New algebraic criteria for stability, as well as complete instability of such systems, have been established in the form of equality to zero of traces of products of matrices, which include an additional symmetric matrix. These conditions are closely related to the symplectic geometry of the phase space, which is determined by the matrix of the original linear system and the symmetric matrix defining the first integral. General results are applied to finding conditions for complete instability of linear gyroscopic systems.

Keywords: linear systems, quadratic integrals, trace, symplectic structure, Hamiltonian systems, Williamson normal forms, degrees of stability and instability, complete instability, bundles of quadratic forms, gyroscopic systems

REFERENCES

1. Kozlov V.V. Linear systems with a quadratic integral // JAMM, 1992, vol. 56, iss. 6, pp. 803–809. DOI: 10.1016/0021-8928(92)90114-N
2. Kozlov V.V. Linear hamiltonian systems: quadratic integrals, singular subspaces and stability // R.&C. Dyn., 2018, Vol. 23, no 1, pp. 26–46.
3. Kozlov V.V., Karapetyan A.A. On the stability degree // Differ. Eqns., 2005, vol. 41, no. 2, pp. 195–201.

4. *John F.* A note on the maximum principle for elliptic differential equations // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1938, vol. 44, pp. 268–271.
5. *Dines L.L.* On linear combinations of quadratic forms // *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1943, vol. 49, pp. 388–393.
6. *Uhlig F.* A Reccurring theorem about pairs of quadratic forms and extensions: a survey // *Linear Algebra and Its Appl.*, 1979, vol. 25, pp. 219–237.
7. *Gantmakher F.R.* Matrix Theory. Moscow: Fizmatlit, 2004. 560 p. (in Russian)
8. *Kirillov O.N.* Nonconservative Stability Problems of Modern Physics. Berlin: De Gruyter, 2013.
9. *Mailybaev A.A., Seyranyan A.P.* Multiparameter Stability Problems. Theory and Applications in Mechanics. Moscow: Fizmatlit, 2009. 399 p. (in Russian)