ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА 2023, том 87, № 5, с. 820–828

УДК 517.956.223

Светлой памяти Л.Д. Акуленко

ОГРАНИЧЕННЫЕ И ГЛАДКИЕ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ В СИСТЕМАХ, ЗАДАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Т. Н. Бобылева[1],*, И. М. Гусев[2],, А. С. Шамаев[3],*****

[1]Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Москва, Россия

[2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

[3]Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

**e-mail: tatyana2211@outlook.com*

***e-mail: gusevilya94@yandex.ru*

****e-mail: sham@rambler.ru*

Поступила в редакцию 29.05.2023 г.
После доработки 02.08.2023 г.
Принята к публикации 10.08.2023 г.

В работе рассматривается задача о гашении колебаний мембраны и пластины с помощью сил, распределенных по всей площади мембраны и пластины. Предлагаемый метод позволяет рассматривать ограничения не только на абсолютную величину управления, но и на абсолютную величину производных от функций, задающих управление. Приводятся достаточные условия на начальные условия, при которых задача приведения системы в покой за конечное время разрешима, оценивается время приведения в покой.

Ключевые слова: управление, колебательная система, распределенные и сосредоточенные силы, малые управляющие силы, интегро-дифференциальные системы

DOI: 10.31857/S0032823523050053, **EDN:** QHPNCH

1. Введение. Вопрос о гашении колебаний упругих систем с помощью граничных и распределенных сил является одним из классических вопросов теории управления. Исследованиям в этой области посвящено очень большое количество работ как российских, так и зарубежных авторов. Впервые систематически такие задачи рассматривались в [1], подробный и довольно полный обзор приведен в [2]. В этих работах рассматриваются в основном задачи граничного управления. В работе [3] рассматривается вопрос о приведении различных систем, заданных дифференциальными уравнениями, в состояние покоя за конечное время с помощью распределенных малых по абсолютной величине сил. В этой работе с помощью разложений в ряд Фурье по собственным функциям задача сводится к счетной системе простейших колебательных звеньев, для каждого из которых строится синтез оптимального по быстродействию управления. Задача о гашении колебаний квадратной пластины с помощью граничного управления была рассмотрена в [4]. В этой работе задача управления также сводится к счетной системе связанных между собой простейших колебательных звеньев.

Аналогичные вопросы рассматривались и для интегро-дифференциальных уравнений с интегральными слагаемыми типа свертки. В работах [5–10] показано, что для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений задача о гашении колебаний может и не иметь решения, но при этом с помощью сколь угодно малых возмущений в ядрах свертки для нелокальных членов система может быть приведена к вполне управляемой. Это означает, что для указанных интегро-дифференциальных систем свойство полной управляемости не является устойчивым.

В настоящей работе предложен метод, с помощью которого можно показать, что колебательные системы, соответствующие мембране и пластине, могут быть приведены в состояние покоя распределенным управлением, у которого ограничена не только абсолютная величина управляющей силы, но и абсолютная величина ее производных от функции, которая задает эту силу. Мы полагаем, что такое же свойство имеет место и для систем с граничным управлением, однако этот результат еще не опубликован. Системы же с интегро-дифференциальными операторами, как правило, не являются вполне управляемыми с помощью граничных сил, на что впервые было указано в работе [10].

2. Управление колебаниями маятника с помощью внешней силы. Рассмотрим задачу управления

$$\ddot{u} + \omega^2 u = f(t), \tag{2.1}$$

$|f(t)| \le \varepsilon$, $f(t)$ – внешняя управляющая сила, $\varepsilon = \mathrm{const} > 0$, с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1 \tag{2.2}$$

Задача: Найти $T > 0$ и $f(t)$, $|f(t)| \le \varepsilon$ такие, чтобы $u(T) = \dot{u}(T) = 0$ и $f(t) \equiv 0$ для всех $t \ge T$.

Решение этой задачи даже в случае поиска оптимального по быстродействию решения хорошо известно [15]. Управляющая функция содержит конечное число переключений. В настоящей работе мы получим неоптимальное по быстродействию, но гладкое и явное выражение для управляющей функции.

Теорема 1. Существует решение поставленной задачи управления, именно, существует $T > 0$, такое что функция $f(t,T) = C_1(T)\sin(\omega t) + C_2(T)\cos(\omega t)$ удовлетворяет неравенству $|f(t,T)| \le \varepsilon$, $u(t) \equiv 0$ при $t \ge T$. Кроме того, справедлива оценка

$$|f(t)| \le \frac{2}{T}\left[(1+\omega)|u_0| + 2|u_1|\right] + \frac{1}{2T^2}\left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega}\right)$$

Доказательство: На основании хорошо известных формул решения линейного неоднородного уравнения (2.1) условия гашения колебаний принимают вид

$$0 = u(T) = u_0\cos\omega T - \frac{u_1}{\omega}\sin\omega T + \int_0^T \frac{\sin\omega(T-\tau)}{\omega}\left\{C_1(T)\sin(\omega\tau) + C_2(T)\cos(\omega\tau)\right\}d\tau \tag{2.3}$$

$$0 = \dot{u}(T) = u_0\omega\sin\omega T + u_1\cos\omega T + \int_0^T \cos\omega(T-\tau)\left\{C_1(T)\sin(\omega\tau) + C_2(T)\cos(\omega\tau)\right\}d\tau \tag{2.4}$$

Будем искать управляющую силу $f(t)$ в виде

$$f(\tau,T) = C_1(T)\sin(\omega\tau) + C_2(T)\cos(\omega\tau),$$

постоянные $T, C_1(T), C_2(T)$ подлежат определению.

Введем обозначения

$$\bar{U} = \begin{Vmatrix} -\omega u_0\cos\omega t + u_1\sin\omega t \\ \omega u_0\sin\omega t - u_1\cos\omega t \end{Vmatrix}$$ – вектор размерности 2,

$\bar{C} = \left\|\begin{matrix} C_1(T) \\ C_2(T) \end{matrix}\right\|$ — вектор размерности 2,

$$A = \left\|\begin{matrix} \int_0^T \sin\omega(T-\tau)\sin(\omega\tau)d\tau & \int_0^T \cos\omega(T-\tau)\sin(\omega\tau)d\tau \\ \int_0^T \cos\omega(T-\tau)\sin(\omega\tau)d\tau & \int_0^T \cos\omega(T-\tau)\cos(\omega\tau)d\tau \end{matrix}\right\|$$ — матрица размерности 2×2.

Тогда уравнение для определения постоянных $T, C_1(T), C_2(T)$ можно записать в виде

$$A\bar{C} = \bar{U} \tag{2.5}$$

Используя хорошо известные тригонометрические формулы, матрицу A можно записать в виде

$$A = \left\|\begin{matrix} -\dfrac{T}{2}\cos\omega T + \dfrac{\sin\omega T}{2\omega} & \dfrac{T}{2}\sin\omega T \\ \dfrac{T}{2}\sin\omega T & \dfrac{T}{2}\cos\omega T + \dfrac{\sin\omega T}{2\omega} \end{matrix}\right\|$$

Тогда

$$\det A = \frac{\sin^2\omega T}{4\omega^2} - \frac{T^2}{4}, \tag{2.6}$$

откуда

$$|\det A| \geq \frac{T^2}{4} - \frac{1}{4\omega^2}, \tag{2.7}$$

и, следовательно, для достаточно больших T система (2.5) разрешима.

Найдем теперь постоянные $C_1(T), C_2(T)$, пользуясь правилом Крамера. Для этого обозначим $M_1(T)$ и $M_2(T)$ определители матриц, полученных заменой в матрице A первого и второго столбцов на вектор $\bar{U}$ соответственно. Тогда

$$C_1(T) = \frac{M_1(T)}{\det A}, \quad C_2(T) = \frac{M_2(T)}{\det A}$$

Вычисления показывают, что

$$C_1(T) = (\det A)^{-1}\left\{\frac{T}{2}[\omega u_0 - 2u_1\sin(2\omega T)] + \frac{u_1}{2\omega}\sin^2(\omega T) - \frac{u_0}{2}\sin(2\omega T)\right\} \tag{2.8}$$

$$C_2(T) = (\det A)^{-1}\left\{-\frac{T}{2}u_1\cos(2\omega T) - \frac{u_0}{2}\sin^2(\omega T) + \frac{u_1}{2\omega}\sin(2\omega T)\right\} \tag{2.9}$$

Отсюда при достаточно больших T очевидно вытекают неравенства

$$|C_1(T)|, |C_2(T)| \leq (\det A)^{-1}\left\{\frac{T}{2}\left[(1+\omega)|u_0| + 2|u_1|\right] + \frac{1}{2}\left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega}\right)\right\} \tag{2.10}$$

С учетом формулы (2.6) можно утверждать, что

$$|f(t)| \leq \frac{2}{T}\left[(1+\omega)|u_0| + 2|u_1|\right] + \frac{1}{2T^2}\left(|u_0| + \frac{|u_1|}{\omega}\right),$$

поэтому для больших $T > 0$ выполнено требуемое неравенство $|f(t)| \leq \varepsilon$.

Следствие. Время остановки колебаний $T \sim C\varepsilon^{-1}$, для малых $\varepsilon > 0$, где $C = \mathrm{const}$ не зависит от $\varepsilon > 0$.

3. Задача остановки колебаний мембраны и пластины с помощью малой и гладкой внешней силы. Рассмотрим теперь задачу об оптимальном управлении колебательными процессами, которые задаются системами уравнений с частными производными с краевыми условиями в области Ω, которая может иметь размерность $d = 2, 3$. Границу области будем считать гладкой. Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\ddot{u} = \Delta u + f(t, x) \text{ в } \Omega \tag{3.1}$$

$$\ddot{u} + \Delta^2 u = f(t, x) \text{ в } \Omega \tag{3.2}$$

Функция $f(t, x)$ является управляющим воздействием, приводящим системы в покой и которую необходимо найти как гладкую функцию. Краевые условия: $u_{|\partial\Omega} = 0$ для уравнения (3.1) и $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\Delta u\big|_{\partial\Omega} = 0$ для уравнения (3.2), начальные условия для уравнений (3.1)–(3.2) имеют вид: $u\big|_{t=0} = u_0(x)$, $\dot{u}\big|_{t=0} = u_1(x)$.

Для случая уравнения колебания пластины мы для простоты формулировки ограничиваемся начальным условием типа шарнирного закрепления, все полученные результаты будут верны и для случая общих граничных условий, удовлетворяющих условию Шапиро–Лопатинского, поскольку приводимая ниже оценка для модуля собственных функций справедлива в самом общем случае.

Ниже будет исследован вопрос о том, при каких начальных условиях u_0, u_1 существуют гладкая функция $f(t, x)$ по абсолютной величине меньше $\varepsilon > 0$ и постоянная $T > 0$, такие что $u \equiv 0$ при $t > T$.

4. Вспомогательные математические утверждения. *Определение* 1. Будем обозначать $f \in H_D^k(\Omega)$, если $f \in H^k(\Omega)$ и $f\big|_{\partial\Omega} = \ldots = \Delta^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} f\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Теорема 2. Если $f \in H_D^k(\Omega)$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 |\lambda_n|^k < \infty$, где f_n – коэффициенты ряда Фурье при разложении по собственным функциям задачи Дирихле для уравнения Лапласа, λ_n – собственные значения $\Delta u_n = \lambda_n u_n$ в Ω [12].

Определение 2. Будем обозначать $f \in A_p$, если $|c_n| \leq \dfrac{C}{n^p}$, c_n – коэффициенты в разложении в ряд Фурье функции f по собственным функциям соответствующих задач на собственные значения и собственные функции.

Утверждение 1. Связь между параметрами p и k в определении пространств A_p и $H_D^k(\Omega)$ имеет вид: $p = k/2$ (для оператора Лапласа).

Утверждение 1 является следствием асимптотики Куранта–Вейля, $\lambda_n \sim n^{\frac{2m}{d}}$, $2m$ – порядок оператора, d – размерность пространства.

Теорема 3. Пусть $\{\Phi_k(x)\}$ – собственные функции задачи Дирихле для уравнения Лапласа, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$. Тогда $\max\limits_{\Omega} |\Phi_k(x)| \leq \omega_k^{\frac{d-1}{2}} \ln \omega_k$, $\omega_k^2 \equiv \lambda_k$ [13].

Теорема 4. Пусть $\{\Phi_k(x)\}$ – семейство собственных функций оператора L порядка $2m$, $\omega_k^{2m} = \lambda_k$, $\|\Phi_k(x)\|_{L_2(\Omega)} = 1$, с краевыми условиями, удовлетворяющими общим граничным условиям Шапиро–Лопатинского. Тогда $\max\limits_{\Omega} |\Phi_k(x)| \leq \omega_k^{\frac{d}{2}}$ [14].

Таблица 1.

	Произвольная мембрана	Квадратная мембрана	Произвольная пластина	Квадратная пластина
Гашение начального отклонения	$p > 1\frac{3}{4}$	$p > 1\frac{1}{2}$	$p > 3$	$p > 2$
Гашение начальной скорости	$p > 1\frac{1}{4}$	$p > 1$	$p > 2$	$p > 1$

Теорема 5. Пусть $f(z)$ – целая функция, $\{\mu_k\}$ – совокупность ее нулей. Пусть $\Pi\left(\{\mu_k\}\right) \equiv \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{\pi}{2}\frac{1}{r}\int\limits_0^r \frac{n(s)}{s}ds$, где $n(s)$ – количество нулей в круге радиуса s. Если $\Pi\left(\{\mu_k\}\right) = \infty$, то по некоторому направлению $f(z)$ растет быстрее любой экспоненты [17].

5. Достаточные условия разрешимости задач управления. *Теорема* 6. В таблице, приведенной ниже, даны условия для начальных функций $u_0(x)$, $u_1(x)$, при которых колебания мембраны и пластины можно погасить (табл. 1).

Числа в данной таблице указывают на принадлежности начальных функций классу A_p, которые для указанных значений p обеспечивают возможность приведения мембраны и пластинки в состояние покоя (достаточные условия). С помощью Утверждения 1 можно переформулировать эти достаточные условия в терминах принадлежности пространствам Соболева с дополнительными граничными условиями.

Доказательство. Введем собственные значения ω_k^2 и собственные функции Φ_k задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta\Phi_k + \omega_k^2\Phi_k = 0 \text{ в } \Omega$$
$$\|\Phi_k\|_{L_2(\Omega)} = 1$$

Обозначим $m_k = \sup\limits_{x\in\Omega}|\Phi_k(x)|$. Будем искать решения $f(t,x)$ задач управления (3.1)–(3.2) в виде разложения $f(t,x)$, а также решения уравнений $u(t,x)$ в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\Phi_k\}$.

Пусть

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\Phi_k(x), \quad u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\Phi_k(x)$$

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k\Phi_k(x), \quad u_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_1^k\Phi_k(x)$$

Подставляя данные разложения в уравнения (3.1)–(3.2), а также в начальные условия для этих уравнений, получим системы из колебательных звеньев, которые связаны только через ограничения на управляющие воздействия, которые в сумме по абсолютной величине не должны превосходить $\varepsilon > 0$.

Управление каждым маятником по отдельности было уже построено в явном виде (Теорема 1), нужно только выдержать суммарное условие на абсолютную величину управления всех колебательных звеньев. Для волнового уравнения эти условия принимают вид:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{T_k}\left(1 + |\omega_k|\right)\left(|u_0^k| + 2|u_1^k|\right)m_k \le \varepsilon \tag{5.1}$$

Пусть $\{\varepsilon_k\}$ – последовательности положительных чисел, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k = \varepsilon$.

Условие (5.1) будет выполнено, если

$$\left(1+|\omega_k|\right)\left(|u_0^k|+2|u_1^k|\right)m_k \le \varepsilon_k$$

в силу ранее полученных оценок (член порядка T^2 в знаменателе был отброшен, в силу его малости при больших T). Тогда

$$T_k \ge \frac{2\left(1+|\omega_k|\right)\left(|u_0^k|+2|u_1^k|\right)m_k}{\varepsilon_k} \tag{5.2}$$

Нам необходимо, чтобы время успокоения каждого маятника в системе было ограничено числом, не зависящим от номера колебательного звена (маятника). Нетрудно видеть, что в (5.2) независимость от k в оценке T_k можно обеспечить за счет достаточно быстрого убывания коэффициентов в разложении в ряд Фурье начальных условий. Это, в свою очередь, обеспечивается гладкостью $u_0(x), u_1(x)$ и некоторыми дополнительными краевыми условиями для этих функций на $\partial\Omega$.

Величина m_k оценивалась в указанной выше работе (Теоремы 3, 4), согласно которой для задачи Дирихле для уравнения Лапласа имеет место неравенство $m_k \le C\,\omega_k^{\frac{d-1}{2}}\ln\omega_k$, где d – размерность пространства, постоянная $C > 0$ не зависит от k.

Пользуясь классическими асимптотическими формулами для величины собственных значений задачи Дирихле, имеем:

$$\omega_k \sim k^{\frac{1}{d}}, \quad m_k \le Ck^{\frac{d-1}{2d}}\ln k$$

Отсюда видно, что для существования решения задачи (3.1) достаточно

$$|u_0^k| \sim k^{\frac{2d}{1-5d}}, \quad |u_1^k| \sim k^{\frac{2d}{1-3d}}$$

Для времени остановки колебаний в задаче (3.1) имеет место оценка $C\varepsilon^{-1}$.

Согласно Утверждению 1 определенные скорости убывания коэффициентов Фурье начальных условий отвечают принадлежности к пространствам $H^s(\Omega)$ с некоторыми дополнительными краевыми условиями. Таким образом, можно переформулировать достаточные условия возможности гашения колебаний на начальные функции в терминах их гладкости по Соболеву и наличия некоторых дополнительных граничных условий на $\partial\Omega$. Для случая пластины доказательство проводится аналогично, только вместо Теоремы 2 следует применить Теорему 3.

Замечание. Если в исходной постановке задачи ввести ограничения на абсолютную величину конечного числа производных по времени от управляющей функции, то, очевидно, для разрешимости задачи управления нужно просто ужесточить условия на начальные значения смещения и скорости в терминах пространств A_p. Это можно сделать простым расчетом.

6. Уравнение Гуртина–Пипкина. Рассмотрим теперь для сравнения с приведенными результатами интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина и аналогичную задачу управления для него, имеющую следующий вид:

$$\dot{u} = \int_0^t K(t-\tau)\Delta u(x,\tau)d\tau + f(t,x) \text{ в } \Omega$$

$$|f| \le \varepsilon, \quad K(t-\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\mu_k(t-\tau)}; \quad \mu_k \ge 0, \quad \mu_k \to \infty$$

$$u(0) = u_0, \quad u \equiv 0 \quad \text{при} \quad t \ge T, \quad f - \text{управление}$$

Интегро-дифференциальное уравнение Гуртина–Пипкина является интересным объектом исследований, поскольку в зависимости от свойств ядра свертки имеет качественные свойства как параболических, так и гиперболических уравнений, см., например [10]. Приведем следующее утверждение о разрешимости данной задачи в целях сравнения с доказанными выше результатами для волнового уравнения и уравнения колебаний пластины.

Теорема 7. Если ряд для ядра свертки $K(t-\tau)$ конечен, то задача управления разрешима. Если ряд для $K(t-\tau)$ содержит бесконечное число членов, то μ_k можно выбрать так, что задача управления не будет иметь решения. Именно, выберем μ_k так, что $\Pi(\{\mu_k\}) = \infty$, тогда система не будет вполне управляемой.

Доказательство приведено в [17]. Оно основано на теореме 4 из разд. 4.

7. Числовой пример. Пусть начальные условия для волнового уравнения

$$u_1^0 = 1, \quad u_2^0 = \frac{1}{2}, \quad u_3^0 = \frac{1}{4}, \quad u_3^0 = \dots = u_k^0 = \dots = 0, \quad u_k' = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда время гашения трех мод колебаний в соответствии с методом Ф.Л. Черноусько $T^* \le \dfrac{5.08}{\varepsilon}$ для квадратной мембраны. Согласно методу настоящей работы $T^* \le \dfrac{10.1}{\varepsilon}$. Увеличение времени быстродействия связано, конечно, с тем, что в работе [3] для каждого колебательного звена применяется метод оптимального управления, а в нашем случае управление приводит звено в покой, но оптимальным по быстродействию не является. При этом метод настоящей работы может быть без труда распространен и на случай, когда ограниченной по абсолютной величине является и производная от функции управления, только время приведения в покой будет большим, чем случай без ограничения на производную, и потребуется наложить некоторые дополнительные условия на гладкость начальных функций, а также дополнительные краевые условия для этих функций.

Заключение. В работе предложен метод исследования задач остановки колебаний мембраны и пластины, позволяющий установить важное качественное свойство этих задач. Именно, если повышать требования к гладкости управляющей функции с ограничением на абсолютную величину производных от нее, то задача приведения в полный покой будет разрешима, нужно только повысить требования к гладкости в смысле Соболева для начальных функций и потребовать выполнения некоторых дополнительных краевых условий для начальных функций на границе области. Можно назвать этот эффект свойством “повышения гладкости”. Есть основания полагать, что для задач граничного управления эффект “повышения гладкости” также имеет место. Статья с доказательством этого утверждения еще не вышла, сейчас готовится к печати.

Для сравнения нами приведен пример задачи об управлении интегро-дифференциального уравнения Гуртина–Пипкина с помощью распределенной ограниченной силы и некоторые ранее полученные результаты, относящиеся к этой задаче. Здесь ситуация иная: такая задача с ограничением только на абсолютную величину управляющей функции может быть неразрешимой, свойство полной управляемости не является устойчивым по отношению к малым возмущениям ядра свертки нелокального члена в уравнении.

Метод, предлагаемый в данной работе, применим и к системам с диссипацией механической энергии (трение о внешнюю среду, трение Кельвина–Фойгхта), здесь вполне вероятно, что эффект "повышения гладкости" также имеет место, доказательство этого в стадии оформления.

Благодарности. Авторы посвящают эту работу памяти профессора Л.Д. Акуленко, работы которого в области теории управления системами с распределенными параметрами существенно повлияли на работы коллектива отдела механики управляемых систем ИПМех РАН в данной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 21-11-00151).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.
2. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev. 1988. V. 30. № 1. P. 1–68. https://doi.org/10.1137/1030001
3. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченные управления в системах с распределенными параметрами // ПММ. 1992. Т. 56. № 5. С. 810–826.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst. 2013. V. 19. № 4. P. 611–623.
5. *Romanov I., Shamaev A.* Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integrodifferential equation // J. Optimiz. Theory&Appl. 2016. V. 170. P. 772–782.
6. *Romanov I., Shamaev A.* Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci. 2018. V. 234. № 4. P. 470–484.
7. *Романов И.В.* Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе // Докл. РАН. Теория управления. 2016. Т. 170. № 1. С. 22–25.
8. *Romanov I., Shamaev A.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput.&Syst. Sci. Int. 2020. V. 59. № 3. P. 371–380. https://doi.org/10.1134/S1064230720030144
9. *Romanov I., Shamaev A.* Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. Optimiz. Theory&Appl. 2021. V. 188. № 3. P. 925–938.
10. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl. 2009.
11. *Акуленко Л.Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия // ПММ. 2000. Т. 45. № 6. С. 1095–1103.
12. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
13. *Эйдус Д.М.* Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107. № 6. С. 796–798.
14. *Егоров Ю.В., Кондратьев В.А.* О некоторых оценках собственных функций эллиптического оператора // Вестн. МГУ, Сер. 1. Мат. и мех. 1985. № 4. С. 32–34.
15. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
16. *Левин Б.Я.* Распределение нулей целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956. 632 с.
17. *Романов И.В.* Исследование управляемости для некоторых систем с распределенными параметрами, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Изв. РАН. ТиСУ. 2022. № 2. С. 58–61.

Limited and Smooth Controls of Oscillations in Systems Given by Differential and Integro-Differential Equations

T. N. Bobyleva[a,#], I. M. Gusev[b,##], and A. S. Shamaev[c,###]

[a] *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russia*
[b] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[c] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*
[#] *e-mail: tatyana2211@outlook.com*
[##] *e-mail: gusevilya94@yandex.ru*
[###] *e-mail: sham@rambler.ru*

The paper considers the problem of damping vibrations of a membrane and a plate with the help of forces distributed over their entire area. The proposed method allows us to consider restrictions not only on the absolute value of the control, but also on the absolute value of the derivatives of the functions that specify the control. Sufficient conditions are given for the initial conditions under which the problem of bringing the system to rest in a finite time is solvable, and the time of bringing to rest is estimated.

Keywords: control, oscillatory system, distributed and concentrated forces, small control forces, integro-differential systems

REFERENCES

1. *Butkovsky A.G.* Control Methods of the Systems with Distributed Parameters. Moscow: Nauka, 1965. 474 p. (in Russian)
2. *Lions J.L.* Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems // SIAM Rev., 1988, vol. 30, no. 1, pp. 1–68.
3. *Chernous'ko F.L.* Bounded controls in distributed-parameter systems // JAMM, 1992, vol. 56, no. 3, pp. 707–723.
4. *Romanov I., Shamaev A.* Exact controllability of the distributed system, governed by string equation with memory // J. Dyn.&Control Syst., 2013, vol. 19, no. 4, pp. 611–623.
5. *Romanov I., Shamaev A.* Noncontrollability to rest of the two-dimensional distributed system governed by the integro-differential equation // J. Optimiz. Theory&Appl., 2016, vol. 170, pp. 772–782.
6. *Romanov I., Shamaev A.* Some problems of distributed and boundary control for systems with integral aftereffect // J. Math. Sci., 2018, vol. 234, no. 4, pp. 470–484.
7. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* Exact bounded boundary controllability of vibrations of a two-dimensional membrane // Dokl. Math., 2016, vol. 94, no. 2, pp. 607–610.
8. *Romanov I., Shamaev A.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // J. Comput.&Syst. Sci. Int., 2020, vol. 59, no. 3, pp. 371–380.
9. *Romanov I., Shamaev A.* Exact bounded boundary controllability to rest for the two-dimensional wave equation // J. Optimiz. Theory&Appl., 2021, vol. 188, no. 3, pp. 925–938.
10. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equation with memory: lack of controllability to rest // J. Math. Anal.&Appl., 2009, vol. 355, no. 1, pp. 1–11.
11. *Akulenko L.D.* Bringing an elastic system to a given state by means of a force boundary impact // JAMM, 1981, vol. 45, iss. 6, pp. 1095–1103.
12. *Mikhailov V.P.* Partial Differential Equations. Moscow: Mir, 1978. 396 p.
13. *Eidus D.M.* Some inequalities for eigenfunctions // DAN USSR, 1956, vol. 107, no. 6, pp. 796–798.
14. *Kondratiev V.A., Egorov Yu.V.* Some estimates for eigenfunctions of an elliptic operator // Vestn. Mosk. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1985, no. 4, pp. 32–34.
15. *Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishechenko E.F.* The Mathematical Theory of Optimal Processes. N.Y.: Wiley&Sons, 1962. 360 p.
16. *Levin B.Ya.* Distribution of Zeros of Entire Functions. N.Y.: Amer. Math. Soc., Providence, 1980. 523 p.
17. *Romanov I.V.* Investigation of controllability for some dynamic systems with distributed parameters described by integro-differential equations // J. Comp. Sys. Sci. Int., 2022, vol. 61, no. 2, pp. 191–194.