

УДК 534.113

**ВЛИЯНИЕ СРЕДНЕГО ДАВЛЕНИЯ И ЖЕСТКОСТИ ЗАКРЕПЛЕНИЯ
НА ИЗГИБ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**© 2023 г. М. А. Ильгамов^{1,2,3,*}¹Институт машиноведения им А.А. Благонравова РАН, Москва, Россия²Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия³Институт механики УФИЦ РАН, Уфа, Россия

*e-mail: ilgatov@anrb.ru

Поступила в редакцию 26.12.2022 г.

После доработки 14.04.2023 г.

Принята к публикации 20.05.2023 г.

Дан вывод уравнения изгиба длинной цилиндрической оболочки с учетом статических и динамических давлений, действующих на обе ее поверхности. Особое внимание уделено роли граничных условий и давления, среднего между действующими на поверхности статическими давлениями. Учитывается обжатие стенки по толщине. Изучен линейный изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора. Как особый случай рассмотрен изгиб замкнутой цилиндрической оболочки.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, панель, опоры, среднее давление, изгиб

DOI: 10.31857/S0032823523040069, **EDN:** MJKFSN

1. Введение. Изучение поведения вертикальных колонн, труб, шлангов, кабелей под действием гидростатического давления имеет давнюю историю [1–7]. К этим работам примыкает исследование устойчивости упругой полосы при действии всестороннего давления (включая ее кромки) на основе соотношений трехмерной теории упругости [8, 9]. Обзор ранних исследований в этом направлении содержится, например, в [10, 11]. Последний обзор по статике и динамике трубопроводов содержится в [12].

Особенностью изгиба круглых стержней, труб, контактирующих с жидкостью и газом, является появление поперечной распределенной силы

$$q = \pi R^2 p \kappa, \quad (1.1)$$

где R – радиус внешней поверхности, κ – кривизна осевой линии, p – давление. Сила q направлена в сторону вогнутости осевой линии. Вместе с продольной сжимающей силой от действия давления p на свободно перемещающиеся концевые сечения площадью πR^2 сила (1.1) приводит к известному результату об абсолютной устойчивости стержня [8]. Если одно из концевых сечений свободно опертого круглого стержня длиной L изолировано от давления p , то сила (1.1) приводит к значению эффективной изгибной жесткости $D(1 + \alpha)$, где

$$D = \frac{\pi E R^4}{4}, \quad \alpha = \frac{p}{E} \left(\frac{2L}{\pi R} \right)^2 \quad (1.2)$$

В случае стального стержня с модулем упругости $E = 2 \times 10^5$ МПа, отношением размеров $2L/(\pi R) = 10^2$ при давлении окружающей среды $p = 10$ МПа безразмерный параметр $\alpha = 0.5$. Таким образом, при таких реальных данных имеется сильное влияние

равномерного давления окружающей среды на изгиб тонкого тела. Если такое же давление действует на концевое сечение, то, как указано выше, исчезает влияние его на изгиб.

Внутреннее давление p в трубе приводит к появлению поперечной силы по формуле (1.1), где под R подразумевается внутренний радиус трубы. Эта сила направлена в сторону выпуклости осевой линии трубы и поэтому дает уменьшение эффективной изгибной жесткости (в (1.2) безразмерный параметр α с отрицательным знаком). Если, например, один конец изогнутой трубы неподвижно закреплен, а другой свободно перемещается в продольном направлении, причем закрыт днищем, то продольная растягивающая сила $\pi R^2 p$ приводит к поперечной силе, направленной против силы q . Приведенные примеры показывают качественное влияние условий закрепления тела на его деформацию под действием давления.

В теории тонких пластин и оболочек принимается, что поперечная распределенная сила равна $q = p_1 - p_2$, где p_1, p_2 — давления, действующие на их поверхности [13–18]. Более точное выражение q , показанное в недавних работах [19–22], зависит также от среднего давления p_m и прогиба w и в случае пластины толщиной h имеет вид

$$q = p_1 - p_2 + p_m h \nabla^2 w, \quad p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2), \quad (1.3)$$

где ∇^2 — лапласиан. В теории статического и динамического изгиба микро- и нанопленок, резонаторов последний член формулы (1.3) трактуется как проявление поверхностного эффекта, который становится значительным для тонких пластин, проволоки, струн. Его вклад сравним с другим поверхностным эффектом, обусловленным различием упругих характеристик приповерхностного слоя и основного объема тонкого тела [22, 23]. Отмеченное влияние распределенной силы (1.1), (1.3) на изгиб объясняется тем, что с уменьшением толщины h пластины или радиуса R стержня сила q уменьшается пропорционально h и R^2 , а изгибная жесткость — пропорционально h^3 и R^4 .

Названные выше исследования выполнены в рамках модели балки и тонкой пластины (исключение составляет статья [21], где выражение для силы q получено по соотношениям теории упругости). Это относится и к изгибу трубы, при рассмотрении которого предполагается, что ее поперечное сечение остается круговым и перпендикулярным к изогнутой осевой линии.

Насколько известно, не изучено влияние среднего давления на изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора. Данная работа посвящена рассмотрению изгиба в окружном направлении длинной цилиндрической оболочки (без изгиба в продольном направлении) с учетом указанного влияния в более общей постановке. Отметим, что теории устойчивости длинной цилиндрической оболочки или арки в классической постановке (без учета взаимодействия среднего давления и изменения кривизны) посвящена большая литература, в частности [16, 17, 24–28].

2. Постановка задачи. Равномерные статические давления p_1 и p_2 действуют на внутреннюю и внешнюю поверхности длинной тонкостенной цилиндрической оболочки радиусом R срединной поверхности и толщиной h стенки. Оболочка может быть замкнутой и незамкнутой (цилиндрическая панель). Предполагается, что давления действуют по нормали к деформированной поверхности, оболочка одинаково изгибается по длине и находится в плоском деформированном состоянии. Все искомые величины относятся к единичной длине вдоль оболочки.

При анализе изгиба с волнообразованием по окружности длинной цилиндрической оболочки обычно принимается допущение о неизменности длины ds элемента срединной поверхности [15–17]. При этом имеет место соотношение

$$ds = R d\theta = R_* d\theta_*, \quad (2.1)$$

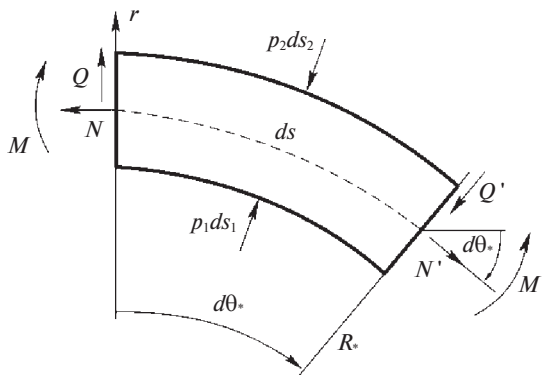


Рис. 1. Элемент оболочки длиной ds изогнутой срединной поверхности с перпендикулярными сечениями к ней.

где радиус R и центральный угол $d\theta$ относятся к состоянию до деформации, а R_* , $d\theta_*$ — после деформации (рис. 1).

Соотношение (2.1) следует также из равенства $ds_* = (1 + \epsilon_\theta) ds$, где ввиду малости окружной деформации ϵ_θ по сравнению с единицей принимается $ds_* = ds$. Элементарные длины на внутренней и внешней поверхностях изогнутой оболочки в соответствии с первой гипотезой Кирхгоффа—Лява равны

$$ds_1 = \left(R_* - \frac{h}{2}\right) d\theta_*, \quad ds_2 = \left(R_* + \frac{h}{2}\right) d\theta_*$$

С учетом (2.1) и изменения кривизны [15–17]

$$\kappa = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_*} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\partial v}{R ds}, \quad (2.2)$$

выраженного через компоненты перемещения в окружном и радиальном направлениях v и w , получаем

$$ds_1 = \left(1 - \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds, \quad ds_2 = \left(1 + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{R} - \kappa\right)\right) ds$$

Распределенная поперечная сила на элемент ds равна $q ds = p_1 ds_1 - p_2 ds_2$. С учетом ds_1 , ds_2 имеем

$$q = p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} (1 - R\kappa) \quad (2.3)$$

Если оболочка контактирует с жидкостью или газом, то давления взаимодействия $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ зависят от v , w , угла θ и времени t . Тогда линейное выражение (2.3) приобретает вид

$$q = p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - (p_m + \bar{p}_m) \frac{h}{R} + p_m h \kappa, \quad \bar{p}_m = \frac{1}{2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2) \quad (2.4)$$

Как указано выше, давления p_1 и p_2 являются постоянными по всей поверхности и времени. Так как $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ зависят от прогиба, то нелинейным является член $\bar{p}_m h \kappa$, поэтому в (2.4) он не учтен.

В уравнениях динамического изгиба (рис. 1)

$$\begin{aligned} -N + N' \cos d\theta_* - Q' \sin d\theta_* - \rho h d s \ddot{v} \cos(d\theta_*/2) &= 0 \\ Q - Q' \cos d\theta_* - N' \sin d\theta_* + q d s \cos(d\theta_*/2) - \rho h d s \ddot{w} \cos(d\theta_*/2) &= 0 \\ M - M' + Q' d s &= 0, \end{aligned}$$

точки над буквами обозначают производные по времени t , q определяется выражением (2.4). Из (2.1) и (2.2) следует $\partial\theta_*/\partial s = R^{-1} - \kappa$. С учетом $\cos d\theta_* = 1$, $\sin d\theta_* = d\theta_*$, $N' = N + (\partial N/\partial s)ds$, ... получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} - Q \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) - \rho h \ddot{v} &= 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + N \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) - q + \rho h \ddot{w} &= 0 \\ Q &= \frac{\partial M}{\partial s}; \quad M = D\kappa \end{aligned} \quad (2.5)$$

При определении N , M через напряжение σ_θ учтем обжатие по толщине средним давлением p_m . В условиях принятого плоского деформированного состояния ($\varepsilon_x = 0$) из закона Гука

$$E\varepsilon_\theta = \sigma_\theta - \nu(\sigma_z + \sigma_x), \quad E\varepsilon_z = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta), \quad \sigma_x = \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)$$

при $\sigma_z = -p_m$ следует $E\varepsilon_z = -\nu(1 + \nu)\sigma_\theta - (1 - \nu^2)p_m$, а также

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1 - \nu^2} \varepsilon_\theta - \frac{\nu}{1 - \nu} p_m \quad (2.6)$$

Так как $\varepsilon_\theta = dv/ds + w/R + \kappa$ [15–17], то с учетом (2.6) получаем

$$\begin{aligned} N &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = K \left(\frac{dv}{ds} + \frac{w}{R} \right) - \frac{\nu p_m h}{1 - \nu}, \quad K = \frac{Eh}{1 - \nu^2} \\ M &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta z dz = D\kappa, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, здесь не использована вторая гипотеза Кирхгофа–Лява (силовая, $\sigma_z = 0$). Результат этого будет рассмотрен далее. Сохранено обычное допущение для тонких оболочек о малости упругих деформаций по сравнению с единицей. Поэтому изменение толщины за счет деформации ε_z не учитывается в выражениях жесткостей K и D , однако в (2.6) и (2.7) вклад ε_z должен быть сохранен. Вопросы, связанные с точностью этих гипотез, рассмотрены во многих работах, в частности, в [29–33].

Для цилиндрической панели с углом раствора Θ (с длиной дуги S) примем следующие граничные условия (рис. 2)

$$\begin{aligned} N &= C\nu + P(p_1, p_2), \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = 0) \\ \nu &= 0, \quad M = 0, \quad w = 0 \quad (\theta = \Theta) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь C – жесткость опоры (например, безмассовой пружины) в направлении угла θ . Предполагается, что перемещение в левой опоре может происходить только по окружности радиуса R . Под $P(p_1, p_2)$ подразумевается растягивающая сила, действующая на площадку кромки $\theta = 0$. Если она образуется в результате действия давлений p_1, p_2 , то P имеет отрицательный знак. В случае изолированной от давлений кромки $P = 0$,

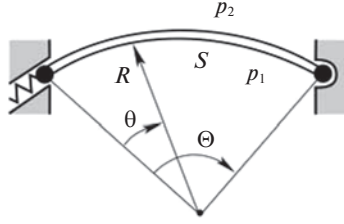


Рис. 2. Схема цилиндрической панели и опор.

при действии среднего давления p_m на нее $P = -p_m h$ и т.д. Конструкция правой опоры исключает появление окружной силы под действием давления на кромку.

Рассмотрим линейный статический изгиб панели по уравнениям (2.5)

$$\frac{dN}{ds} - \frac{dM}{Rds} = 0, \quad \frac{d^2 M}{ds^2} + N \left(\frac{1}{R} - \kappa \right) = q,$$

где сохранен член $N\kappa$, так как в составе N по (2.7) есть составляющая, не содержащая v , w . Из этих уравнений следует

$$N = \frac{M}{R} + A, \quad \frac{d^2 M}{ds^2} + \frac{M}{R^2} - \left(\frac{M}{R} + A \right) \kappa = q - \frac{A}{R} \quad (2.9)$$

Константа A определяется из условий при $\theta = 0$ в (2.8). Здесь $M(0) = 0$, $w(0) = 0$ и поэтому $N(0) = A$ по первому уравнению (2.9). При свободном движении левой кромки по углу θ жесткость $C = 0$ и $A = P$.

С учетом (2.7) первое уравнение (2.9) представим в виде

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{w}{R} + \frac{vp_m h}{K(1-v)} + \frac{D}{KR} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{A}{K}$$

Так как в соответствии с допущением при записи (2.1) угловая деформация срединной поверхности $\varepsilon_\theta = dv/ds + w/R \ll 1$, то приближение $dv/ds \approx -w/R$ используется в выражении изменения кривизны κ . В то же время в выражениях (2.7) учитывается конечность ε_θ . При интегрировании этого выражения от 0 до S левая часть становится равной $v(S) - v(0)$. Согласно условиям (2.8) $v(S) = 0$, $Cv(0) = A - P$. Поэтому

$$(1 + \lambda) A = \frac{K\lambda}{RS} \int_0^S w ds - \frac{D\lambda}{RS} \int_0^S \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) ds + P - \frac{v\lambda p_m h}{1-v}, \quad \lambda = \frac{CS}{K} \quad (2.10)$$

Отношение второго члена в правой части (2.10) к первому при функции прогиба $\sin(\pi s/S)$ имеет порядок $(h/R)^2$. Поэтому для тонких оболочек второй член в (2.10) должен быть опущен. С учетом сказанного из второго уравнения (2.9) и выражений (2.3) и (2.10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^4} - \frac{1}{D} \left(p_m h (1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) + \frac{K\lambda}{DR^2 S (1 + \lambda)} \int_0^S w ds = \\ = \frac{1}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h (1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right); \quad \chi = \frac{v\lambda}{(1-v)(1+\lambda)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

При большой жесткости опоры ($\lambda \gg 1$) в (2.11) исчезают члены с P , что объясняется тем, что нет передачи на оболочку окружных сил, приложенных к ее кромке. Кроме

того параметр $\chi = v(1 - v)^{-1}$, а множитель в последнем члене левой части становится равным $K(DR^2S)^{-1}$. Если жесткость опоры мала ($\lambda \ll 1$), то $\chi \approx 0$, исчезает последний член в левой части (2.11). При этом в случае действия на кромку давления p_m ($P = -p_m h$) члены, содержащие p_m , исчезают. Отказ от второй гипотезы Кирхгофа–Лява отражается в параметре χ . Если принять $\sigma_z = 0$, а также допустить возможность свободно расширяться по окружности при обжатии по толщине стенки ($\lambda = 0$) при выводе N в (2.7), то $\chi = 0$. Таким образом, условие $\sigma_z = -p_m$, приводит к уменьшению влияния среднего давления p_m на изгиб. Наибольшее влияние p_m имеется при $\lambda = 0$, $P = 0$. Тогда уравнение (2.11) приобретает вид

$$\frac{d^4 w}{ds^4} + \frac{2}{R^2} \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} - \frac{p_m h}{D} \left(\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} \right) = \frac{1}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h}{R} \right) \quad (2.12)$$

Для случая пластинки ($R = \infty$) из (2.12) следует уравнение, по которому было изучено влияние среднего давления p_m на изгиб [20, 23].

3. Статический линейный изгиб панели. Под преимущественным будем подразумевать изгиб, который происходит под действием в основном поперечных сил, а результат действия окружной силы мал. Такой изгиб имеет место, когда мал перепад давлений или левая кромка тонкой панели на рис. 2 легко перемещается по углу θ (окружная сжимающая сила N меньше ее критического значения). С применением соотношения $ds = R d\theta$ ($S = R\Theta$) уравнение (2.11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 w}{d\theta^2} + w - \frac{R^2}{D} \left(p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{1 + \lambda} \right) \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \right) + \frac{KR^2 \lambda}{D(1 + \lambda)} \int_0^\Theta w d\theta = \\ = \frac{R^4}{D} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Примем приближенное решение уравнения (3.1) в виде $w = W \sin(\pi\theta/\Theta)$, удовлетворяющем последним условиям в (2.8). Отметим, что при выводе уравнения (2.11) уже удовлетворены первые два условия при $\theta = 0$, $\theta = \Theta$ в (2.8). Подставив эту функцию в уравнение (3.1), умножив на нее и проинтегрировав по θ от нуля до Θ , находим значение прогиба в средней линии панели

$$\begin{aligned} \frac{W}{R} = \frac{4R}{\pi B} \left(p_1 - p_2 - \frac{p_m h(1 - \chi)}{R} - \frac{P}{R(1 + \lambda)} \right) \\ B = \frac{D}{R^2} \left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right)^2 + \left(p_m h(1 - \chi) + \frac{P}{(1 + \lambda)} \right) \left(\frac{\pi^2}{\Theta^2} - 1 \right) + \frac{8K\lambda}{\pi^2(1 + \lambda)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Член с p_m в числителе (3.2) соответствует распределенной поперечной силе, возникающей за счет разности площадей внешней и внутренней поверхностей панели деформации и направленной к центру кривизны. Она не зависит от изгиба и уменьшается с увеличением радиуса R и обращается в нуль для пластины. Член с p_m в знаменателе (3.2) соответствует поперечной силе, возникающей при изгибе. Она направлена в сторону поверхности, подвергающейся деформации сжатия. Поэтому эта сила препятствует изгибу, меняя направление в зависимости от изменения кривизны при изгибе.

Как видно из (3.2), при $p_1 > p_2$ среднее давление p_m приводит к уменьшению прогиба, так как $\chi < 1$. Если $p_1 = p_2$, $P = 0$ (изолированные от давления кромки), то давление p_m приводит только к отрицательному прогибу. При $\lambda = 0$, $P = -p_m h$ и $p_1 > p_2$ полу-

чается наибольшее положительное значение прогиба, а в случае $p_1 < p_2$ — отрицательное значение W/R . При всестороннем давлении ($p_1 = p_2 = p$, $\lambda = 0$, $P = -ph$) прогиб обращается в нуль. Как указано в начале статьи, для изгиба полосы и пластинки также имеется такой результат [8, 11].

С увеличением угла раствора Θ прогиб возрастает и достигает максимума при $\Theta = \pi$. Как видно по знаменателю (3.2), в последнем случае прогиб ограничивается только жесткостью опоры. Малая зависимость прогиба от жесткости K объясняется тем, что левая кромка (рис. 2) может перемещаться только по окружности радиуса R . В этом случае в решении отсутствует также влияние изгибной жесткости D . Она снова начинает сказываться при $\Theta > \pi$. Однако в этом случае принятое выше приближенное решение может не отражать картину изгиба. При больших значениях угла раствора Θ в решении нужно учитывать также более высокие гармоники.

Для построения графика зависимости $W(\Theta)$ примем $P = 0$, $\lambda = 0$, $E = 2 \times 10^5$ МПа, $\nu = 0.31$, $h/S = 10^{-2}$, $p_1 = 5.025$ МПа, $p_2 = 4.975$ МПа, $p_m = 5$ МПа. Тогда выражение (3.2) имеет вид

$$\frac{W}{S} = \frac{20(1 - \Theta)}{\pi \left[2(\pi^2 - \Theta^2)^2 + 5(\pi^2 - \Theta^2) \right]} \quad (3.3)$$

Рис. 3 построен по (3.3). Изгибу пластины соответствует угол раствора $\Theta = 0$. Как видно из рис. 3, с увеличением угла Θ (или, например, уменьшением радиуса R при постоянной длине S) при внутреннем перепаде давления ($p_1 > p_2$) действительный прогиб меньше (кривая 1), чем по обычной теории (без учета p_m , кривая 2) и уменьшается с ростом Θ . Если $p_1 = 4.975$ МПа, $p_2 = 5.025$ МПа, то происходит более быстрое увеличение прогиба к центру кривизны (кривая 3) по сравнению с результатом по обычной теории (кривая 4). При нулевом перепаде ($p_1 = p_2$, $p_m \neq 0$) изгиб происходит в направлении центра кривизны (в отличие от нулевого решения по обычной теории). Если условия опирания отличаются от принятых, то результаты могут измениться.

Отметим, при принятых выше числовых данных условия $\sigma_z = 0$ и $\sigma_z = -p_m h$ приводят к одинаковым результатам. Это объясняется тем, что параметру $\lambda = 0$ ($\chi = 0$) соответствуют нулевая жесткость опоры и свободное расширение оболочки по окружности при обжатии по ее толщине. В случае большой жесткости опоры ($\lambda \gg 1$, $\chi = \nu(1 - \nu)^{-1}$) проявляется наибольшее влияние на решение отказа от гипотезы $\sigma_z = 0$ и учета обжатия по толщине средним давлением ($\sigma_z = -p_m$). Это влияние тем больше, чем больше коэффициент Пуассона материала.

4. Изгиб замкнутой оболочки. В случае большой жесткости опоры S может возникнуть значительная окружная сила N при нагружении панели давлениями p_1 и p_2 (параметр λ не является малым по сравнению с единицей). В линейной теории максимальную сжимающую силу N ограничиваем ее критическим значением. Решения уравнений (2.5) отличаются при $p_1 > p_2$ и $p_1 < p_2$. В первом случае справедлива принятая выше аппроксимация прогиба $\sin(\pi\theta/\Theta)$, во втором необходимо принять $\sin(2\pi\theta/\Theta)$ (задача устойчивости круговой формы).

С целью более наглядного определения влияния среднего давления p_m рассмотрим изгиб замкнутой цилиндрической оболочки. Обозначим через N_0 , M_0 , K_0 , q_0 , ν_0 , w_0 величины, относящиеся к осесимметричному статическому состоянию оболочки, а без индексов — к неосесимметричному динамическому и статическому изгибу. Подставив

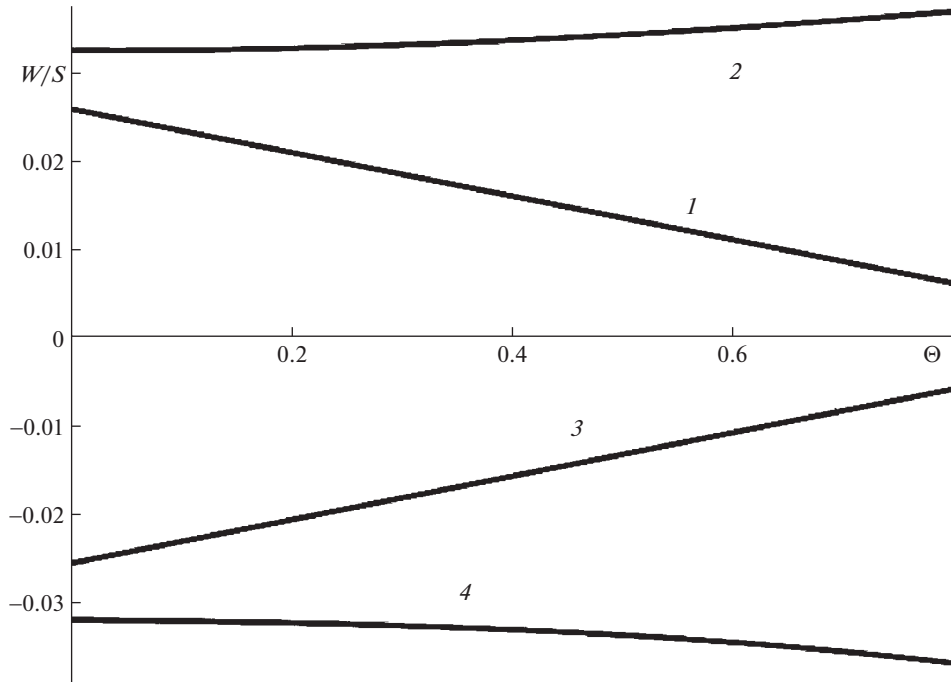


Рис. 3. Изменение безразмерной амплитуды прогиба W/S в зависимости от угла раствора Θ .

суммы $N_0 + N$, $M_0 + M$, $\kappa_0 + \kappa$, $q_0 + q$ в уравнения (2.5), получаем две системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial N_0}{\partial s} - \frac{\partial M_0}{\partial s} \left(\frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = 0 \\ \frac{\partial^2 M_0}{\partial s^2} + N_0 \left(\frac{1}{R} - \kappa_0 \right) = q_0 \\ \frac{\partial N}{\partial s} - \frac{\partial M}{R \partial s} - \rho h \dot{v} = 0 \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} - N_0 \kappa + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} = q \end{cases} \quad (4.1)$$

В соответствии с (2.2) $\kappa_0 = 0$. Так как $M_0 = D\kappa_0 = 0$ по всей окружности оболочки, то и производные M_0 по s равны нулю. Поэтому из (2.3) и первой системы (4.1) следует

$$N_0 = q_0 R = (p_1 - p_2) R - p_m h \quad (4.2)$$

Ввиду свободного расширения по окружности замкнутой оболочки в (4.2) отсутствует параметр χ (2.11).

С учетом (2.4) и (4.2) вторую систему (4.1) приводим к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 M}{R \partial s^2} - \rho h \frac{\partial \ddot{v}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} + \frac{N}{R} + \rho h \ddot{w} - (p_1 - p_2) R \kappa &= p_1 - p_2 + \bar{p}_1 - \bar{p}_2 - \frac{h \bar{p}_m}{R} \end{aligned} \quad (4.3)$$

При определении N_0 (4.2) не принимается во внимание малая динамическая составляющая. Поэтому давления $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ относятся только к неосесимметричному движению. Во втором уравнении (4.3) отсутствует член со средним давлением p_m .

Независимость изгиба замкнутой цилиндрической оболочки от среднего давления p_m (в отличие от изгиба цилиндрической незамкнутой оболочки) объясняется тем, что член $p_m h \kappa$ в составе $N_0 \kappa$ приводит к увеличению прогиба, например, по форме $W_n \sin n\theta$, а в составе q — к уменьшению на такую же величину.

Исключив N из уравнений (4.3) и с учетом приведенного выше равенства $\partial v / \partial s = -w / R$, получаем следующее уравнение относительно функций изменения кривизны и прогиба

$$\frac{\partial^4 \kappa}{\partial s^4} + \frac{\partial^2 \kappa}{R^2 \partial s^2} - \frac{(p_1 - p_2) R}{D} \frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{\rho h}{D} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial s^2} - \frac{\ddot{w}}{R^2} \right) = \frac{\partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial s^2}, \quad (4.4)$$

которое должно рассматриваться совместно с уравнением (2.2). Так как при динамическом взаимодействии изгибных движений оболочки и контактирующей жидкости давления $\bar{p}_1$ и $\bar{p}_2$ имеют близкие значения с разными знаками, то среднее давление $\bar{p}_m$ значительно меньше, чем $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$. Поэтому в (4.4) отброшен член, содержащий $\bar{p}_m$.

Система уравнений (4.4) и (2.2) может быть успешно использована при анализе статической устойчивости оболочки. Рассмотрим, например, устойчивость круговой формы замкнутой оболочки с одной открытой трещиной (или узким надрезом глубиной $h - h_0$) в точке $\theta = 0$ (и $\theta = 2\pi$). Ставятся условия

$$w = 0, \quad v = 0, \quad \kappa = \mp (h_0/h)^3 \partial^2 w / \partial s^2 \quad (\theta = 0, 2\pi) \quad (4.5)$$

Последние условия являются приближенными. Они лучше описывают реальную картину с уменьшением отношения толщины h_0 к длине надреза (при этом участок становится тонким). Как видно из (2.8), $v = 0$ соответствует значениям $C \rightarrow \infty$ и $P = 0$.

Решение уравнения (4.4) при $p_2 > p_1$ и замене s на $\theta = s/R$ имеет вид

$$\kappa = C_1 \sin \beta \theta + C_2 \cos \beta \theta + \frac{C_3 \theta}{\beta^2} + \frac{C_4}{\beta^2}, \quad \beta^2 = 1 + \frac{(p_2 - p_1) R^3}{D} \quad (4.6)$$

Выразим константы C_2 и C_3 через C_1 и C_4 в соответствии с последними условиями (4.5). При этом для упрощения вычислений примем, что толщина h_0 надреза значительно меньше толщины h оболочки, когда может быть принято $\kappa \approx 0$ ($\theta = 0, 2\pi$). Тогда из (2.2) имеем

$$\frac{d^2 w}{R^2 d\theta^2} + \frac{w}{R^2} = C_1 \sin \beta \theta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos \beta \theta) - \frac{\theta}{2\pi} \left(C_1 \sin 2\pi \beta + \frac{C_4}{\beta^2} (1 - \cos 2\pi \beta) \right)$$

Проинтегрировав это уравнение и удовлетворив первым условиям (4.5), получаем

$$\frac{w}{C_4 R^2} = W_1 \sin \theta + \frac{\cos \theta}{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{(1 - \cos 2\pi \beta) \sin \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2) \sin 2\pi \beta} - \frac{\cos \beta \theta}{\beta^2 (1 - \beta^2)} \quad (4.7)$$

Здесь первый член в правой части соответствует перемещению вокруг надреза без деформации оболочки. Поэтому он далее не рассматривается.

Как указано выше, перемещение v по окружности выражается через прогиб w как $v = -\int w d\theta + V$, где V соответствует вращению по окружности без деформации и далее не рассматривается. Проинтегрировав это выражение с учетом (4.7) и удовлетворив условиям (4.5) относительно v , приходим к уравнению

$$\cos 2\pi \beta - \pi \beta (\beta^2 - 1) \sin 2\pi \beta - 1 = 0 \quad (4.8)$$

Численное решение (4.8) дает наименьший корень, равный $\beta \approx 1.55$. С учетом обозначения β в (4.6) получаем следующее критическое значение перепада давления

$$p_2 - p_1 = \frac{(\beta^2 - 1)D}{R^3} = \frac{1.4D}{R^3} \quad (4.9)$$

Это известное критическое значение распределенной поперечной силы для кольца с шарниром [34]. Как известно [16, 26, 29, 34], критическое значение давления на замкнутую целостную оболочку (без надреза) определяется числом $\beta = 2$. Поэтому в этом случае в (4.9) вместо 1.4 коэффициент равен 3. Это число $\beta = 2$ означает число волн, укладываемых по окружности целостной оболочки. Формы потери устойчивости в указанных двух случаях описываются функциями $\cos 2\theta$ и (4.7), где $W_1 = 0$, $\beta = 1.55$.

Отметим, при использовании последних условий (4.5) без упрощения значение β меняется от 1.55 при $h_0/h \ll 1$ до $\beta = 2$ при $h_0/h = 1$, причем β отличается незначительно от 1.55 до $h_0/h = 0.4$. При увеличении отношения до $h_0/h = 1$ приближение к $\beta = 2$ происходит по закону $(h_0/h)^3$.

Если в уравнении (4.6) перейти к углу $\theta = s/R$ и функции $w(\theta, t)$, то оно приобретает вид

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{(p_1 - p_2)R}{D} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h R^4}{D} \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \theta^2} - \ddot{w} \right) = \frac{R^4 \partial^2 (\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}{D \partial \theta^2} \quad (4.10)$$

Из этого уравнения в частности получаются известные собственные частоты колебаний замкнутого кольца, нагруженного давлением [17, 26, 34]. Низшая частота обращается в нуль при достижении внешним перепадом давления критического значения. Уравнения (4.4) и (4.10) могут быть применены и в случае незамкнутой оболочки, если жесткость опоры достаточно большая. Исключение составляет полая оболочка ($\Theta \ll 1$) при $p_2 > p_1$, когда необходимо учитывать изменение сжимающей силы при изгибе и недостаточно линейной постановки задачи устойчивости [16, 28].

Заключение. В работе приведены уравнения изгиба длинной тонкостенной оболочки в виде панели и замкнутого цилиндра с учетом статических и динамических давлений на обе ее поверхности. Первая гипотеза Кирхгоффа–Лява (геометрическая) применяется при определении не только внутренних деформаций и напряжений, но и внешней поперечной силы. Появление этой силы обусловлено взаимодействием среднего давления на поверхности оболочки с изменением кривизны ее срединной поверхности. Показано, что она может быть существенной в случае относительно высоких давлений на обе поверхности тонких тел, что имеет место в природе и технике, например, в глубоководной среде и в оборудовании нефтехимии, транспорта, энергетики и т.д.

Вторая гипотеза Кирхгоффа–Лява (силовая) о малости нормальных напряжений между слоями стенки, параллельными срединной поверхности, не используется. Вводятся в рассмотрение обжатие по толщине стенки оболочки средним давлением и соответствующее расширение по ее окружности. Это приводит к зависимости уравнения изгиба от жесткости опоры в окружном направлении и от коэффициента Пуассона. Как известно, в обычной постановке линейного изгиба такая связь отсутствует. Другими словами, если в рассматриваемой задаче есть влияние среднего давления на изгиб, то нужно учитывать и обжатие по толщине стенки. Последний фактор становится заметным при высоких значениях коэффициента Пуассона материала и жесткости опор и оценивается безразмерными параметрами λ (2.10) и χ (2.11). Если учитывается обжатие стенки, то нужно принимать во внимание и уточненное значение поперечной силы.

Линейные уравнения относительно изменения кривизны и прогиба даются в условиях плоского деформированного состояния. Наиболее подробно изучен статический изгиб цилиндрической панели с произвольным углом раствора в случае относительно малой жесткости опоры. При нулевом угле раствора как частный случай следует известное уравнение цилиндрического изгиба пластины, где учитывается среднее давление на ее поверхности.

Показано, что при внутреннем перепаде давления с увеличением угла раствора панели ее прогиб уменьшается и в целом меньше, чем по классической теории. При внешнем перепаде с увеличением этого угла происходит более быстрый рост прогиба к центру кривизны, чем по обычной теории. Нулевому перепаду давления соответствует изгиб в направлении центра кривизны. Эти результаты справедливы при относительно малой жесткости одной из опор или малом перепаде давлений на поверхности, когда окружная сила меньше ее критического значения.

В случае большой жесткости опоры может возникнуть значительная окружная сила, обусловленная перепадом статических давлений. Это имеет место и в случае замкнутой оболочки. При этом необходимо рассматривать осесимметричное напряженное состояние оболочки под действием перепада давлений и неосесимметричный статический или динамический изгиб. В отличие от цилиндрической панели на изгиб замкнутой оболочки среднее давление не оказывает влияния. Кроме того, нет влияния обжатия стенки ввиду возможности свободного расширения по окружности. В таких случаях применение второй гипотезы Кирхгоффа—Лява не вносит погрешности в классическое уравнение изгиба. С этой точки зрения изгиб замкнутой оболочки представляет собой особый случай.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00578.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // *J. Appl. Mech.* 1946. V. 13. P. 198–200.
2. *Link H.* Über den garaden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur—Archiv.* 1962. B. 31. P. 149–167.
3. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.* 1963. V. 1. № 6. P. 1458–1459.
4. *Huang T., Dareing D.W.* Buckling and frequency of long vertical pipes // *J. Engng Mech. Div.* 1967. V. 95. P. 167–181.
5. *Sugiyama Y., Ashida K.* Buckling of long columns under their own weight // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.* 1978. V. 21 (158). P. 1228–1235.
6. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with movable boundaries // *J. Struct. Mech.* 1983. V. 11. № 3. P. 351–370.
7. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with nonmovable boundaries // *J. Struct. Engng.* 1983. V. 105. P. 2113–2128.
8. *Ишлинский А.Ю.* Исследование устойчивости упругих систем с точки зрения математической теории упругости // *Укр. матем. ж.* 1954. Т. 6. № 2. С. 140–146.
9. *Kerr A.D., Tang S.* The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // *J. Appl. Mech.* 1966. V. 33. P. 617–622.
10. *Светлицкий В.А.* Механика трубопроводов и шлангов. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
11. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. М.: Nauka, 1998. 208 p.
12. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems: a review of the literature // *J. Fluids&Struct.* 2015. V. 57. P. 277–297.
13. *Love A.A.* Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press. 1927. 643 p.
14. *Галеркин Б.Г.* Упругие тонкие плиты. Л.; М.: Госстройиздат, 1933. 372 с.
15. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Co. Inc., 1940. 399 p.
16. *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 568 с.

17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Физматлит, 1972. 442 с.
18. Shen H.Sh. Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong Univ., 2017. 675 p.
19. Ильгамов М.А. Взаимодействие неустойчивостей в гидроупругой системе // ПММ. 2016. Т. 80. Вып. 5. С. 566–579.
20. Ильгамов М.А. Влияние давления окружающей среды на изгиб тонкой пластины и пленки // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 4. С. 402–405.
<https://doi.org/10.7868/S086956521728009X>
21. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа // ПММ. 2019. Т. 83. № 1. С. 134–146.
<https://doi.org/10.1134/S0032823519010041>
22. Ильгамов М.А. Влияние поверхностных эффектов на изгиб и колебания нанопленок // ФТТ. 2019. Т. 61. Вып. 10. С. 1825–1830.
<https://doi.org/10.21883/FTT.2019.10.48255.381>
23. Ilgamov M.A., Khakimov A.G. Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // J. Appl. & Comput. Mech. 2021. V. 7. № 2. P. 977–983.
<https://doi.org/10.22055/JACM.2021.36470.2848>
24. Николаи Е.Л. Об устойчивости кругового кольца и круговой арки, сжатых давлением. Труды по механике. М.: Гостехиздат, 1955. 250 с.
25. Штаерман И.Я. Устойчивость упругих круговых арок под действием сосредоточенной силы // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 3. С. 45–50.
26. Джанелидзе Г.Ю., Радциг М.А. Динамическая устойчивость кольца под действием нормальных периодических сил // ПММ. 1940. Т. 4. Вып. 3. С. 37–41.
27. Динник А.Н. Устойчивость арок. М.; Л.: ОГИЗ, 1946. 127 с.
28. Муштари Х.М., Свирский И.В. Определение больших прогибов цилиндрической панели под действием внешнего нормального давления // ПММ. 1953. Т. 17. Вып. 6. С. 755–760.
29. Муштари Х.М. Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгофа–Лява // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 517–520.
30. Муштари Х.М. Об области применимости линейной теории упругих оболочек // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. № 6. С. 997–998.
31. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1975. 256 с.
32. Муштари Х.М., Терезулов И.Г. К теории оболочек средней толщины // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. № 6. С. 1144–1147.
33. Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. О роли поперечного обжатия в динамике оболочек // ПММ. 1996. Т. 6. Вып. 4. С. 644–650.
34. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Том 3. Под ред. И.А. Бургера и Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. 568 с.

Effect of Mean Pressure and Fixing Rigidity on the Bending of Cylindrical Shell

M. A. Ilgamov^{a,b,c,#}

^aA.A. Blagonravov Institute of Mechanical Engineering RAS, Moscow, Russia

^bUfa University of Science and Technology, Ufa, Russia

^cInstitute of Mechanics, UFIC RAS, Ufa, Russia

[#]e-mail: ilgamov@anrb.ru

The equation for the bending of a long cylindrical shell taking into account the static and dynamic pressures acting on both of its surfaces is given. Particular attention is paid to the role of boundary conditions and pressure, which is average between the static pressures acting on the surfaces. The compression of the wall in thickness is taken into account. The linear bending of a cylindrical panel with an arbitrary opening angle has been studied. The bending of a closed cylindrical shell is considered as a special case.

Keywords: cylindrical shell, panel, supports, average pressure, bending

REFERENCES

1. *Handelman G.H.* Buckling under locally hydrostatic pressure // *J. Appl. Mech.*, 1946, vol. 13, pp. 198–200.
2. *Link H.* Über den garaden Druckstab in Flüssigkeit // *Ingenieur-Archiv.*, 1962, b. 31, pp. 149–167.
3. *Peterson J.P.* Axially loaded column subjected to lateral pressure // *AIAA J.*, 1963, vol. 1, no. 6, pp. 1458–1459.
4. *Huang T., Dareing D.W.* Buckling and frequency of long vertical pipes // *J. Engng, Mech. Div.*, 1967, vol. 95, pp. 167–181.
5. *Sugiyama Y., Ashida K.* Buckling of long columns under their own weight // *Trans. Jap. Soc. Mech. Eng.*, 1978, vol. 21 (158), pp. 1228–1235.
6. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with movable boundaries // *J. Struct. Mech.*, 1983, vol. 11, no. 3, pp. 351–370.
7. *Bernitsas M.M., Kokkinis T.* Buckling of columns with nonmovable boundaries // *J. Struct. Engng.*, 1983, vol. 105, pp. 2113–2128.
8. *Ishlinsky A.Yu.* Investigation of the stability of elastic systems from the point of view of the mathematical theory of elasticity // *Ukr. Math. J.*, 1954, vol. 6, no. 2, pp. 140–146.
9. *Kerr A.D., Tang S.* The effect of lateral hydrostatic pressure on instability of elastic solids, particularly beams and plates // *J. Appl. Mech.*, 1966, vol. 33, pp. 617–622.
10. *Svelitsky V.A.* Mechanics of Pipelines and Hoses. Moscow: Mashinostroenie, 1982. 280 p.
11. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. Moscow: Nauka, 1998. 208 p.
12. *Li S., Karney B.W., Liu G.* FSI research in pipeline systems: a review of the literature // *J. Fluids&Struct.*, 2015, vol. 57, pp. 277–297.
13. *Love A.A.* Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Univ. Press, 1927. 643 p.
14. *Galerkin B.G.* Elastic Thin Plates. Leningrad; Moscow: Gostroyizdat, 1933. 372 p.
15. *Timoshenko S.* Theory of Plates and Shells. New York: McGraw – Hill Book Co. Inc., 1940. 399 p.
16. *Timoshenko S.P.* Stability of Elastic Systems. Moscow: GITTL, 1955. 568 p.
17. *Volmir A.S.* Nonlinear Dynamics of Plates and Shells. Moscow: Fizmatlit, 1972. 442 p.
18. *Shen H.Sh.* Postbuckling Behavior of Plates and Shells. Shanghai Jiao Tong Univ., 2017. 675 p.
19. *Ilgamov M.A.* The interaction of instabilities in a hydroelastic system // *AMM*, 2017, vol. 80, no. 5, pp. 400–408. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2017.02.007
20. *Ilgamov M.A.* Influence of the ambient pressure on thin plate and film bending // *Dokl. Phys.*, 2017, vol. 62, no. 10, pp. 461–464. DOI: 10.1134/S1028335817100020
21. *Ilgamov M.A.* Generalization of bending equation of thin plate under gas pressure // *Mech. Solids*, 2019, vol. 54, no. 2, pp. 348–355. DOI: 10.3103/S0025654419030130
22. *Ilgamov M.A.* The influence of surface effects on bending and vibrations of nanofilms // *Phys. Solid State*, 2019, vol. 61, no. 10, pp. 1779–1784. DOI: 10.1134/S1063783419100172
23. *Ilgamov M.A., Khakimov A.G.* Influence of pressure on the frequency spectrum of micro and nanoresonators on hinged supports // *J. Appl.&Comput. Mech.*, 2021, vol. 7, no. 2, pp. 977–983. DOI: 10.22055/JACM.2021.36470.2848
24. *Nikolai E.L.* Works on Mechanics. Moscow: Gostekhizdat, 1955. 250 p.
25. *Shtaerman I.Ya.* Stability of elastic circular arches under the action of a concentrated force // *AMM*, 1937, vol. 1, no. 3, pp. 45–50.
26. *Dzhanelidze G.Yu., Radtsig M.A.* Dynamic stability of a ring under the action of normal periodic forces // *AMM*, 1940, vol. 4, no. 3, pp. 37–41.
27. *Dinnik A.N.* Arch Stability. Moscow; Leningrad: OGIZ, 1946. 127 p.
28. *Mushtari Kh.M., Svirsky I.V.* Determination of large deflections of a cylindrical panel under the action of external normal pressure // *AMM*, 1953, vol. 17, no. 6, pp. 755–760.
29. *Mushtari Kh.M.* On the scope of applicability of the approximate theory of Kirchhoff–Love shells // *AMM*, 1947, vol. 11, no. 5, pp. 517–520.
30. *Mushtari Kh.M.* On the area of applicability of the linear theory of elastic shells // *Dokl. AN SSSR*, 1947, vol. 58, no. 6, pp. 997–998.
31. *Filin A.P.* Elements of Shell Theory. Leningrad: Stroyizdat, 1975. 256 p.
32. *Mushtari Kh.M., Teregulov I.G.* On the theory of shells of medium thickness // *Dokl. AN SSSR*, 1959, vol. 128, no. 6, pp. 1144–1147.
33. *Kaplunov Yu.D., Nolde E.V.* On the role of transverse compression in the dynamics of shells // *AMM*, 1996, vol. 6, no. 4, pp. 644–650.
34. *Strength, Stability, Vibrations. Vol. 3. Ed. by I.A. Birger and Ya.G. Panovko.* Moscow: Mashinostroenie, 1968. 568 p.