

УДК 539.3

СХЕМЫ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЯДЕР НЕКОТОРЫХ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ СРЕД С НЕРЕЛАКСИРУЮЩИМ ОБЪЕМОМ

© 2023 г. Д. В. Георгиевский^{1,2,3,*}

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

³Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

*e-mail: georgiev@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 14.10.2022 г.

После доработки 16.12.2022 г.

Принята к публикации 17.12.2022 г.

В рамках интегральных определяющих соотношений для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа в случае нерелаксирующего объема предложены возможные, дополняющие известные, установочные эксперименты по определению ядер операторов $\check{\xi}_\beta$ Ильюшина. Один из них базируется на использовании образца из вспомогательного вязкоупругого материала, материальные функции которого связаны с функцией ползучести и модулем объемного сжатия исходного материала. Также предложены аналогичные схемы установочных экспериментов для нахождения ядер операторов \check{h}_γ , в определенном смысле сопряженных с $\check{\xi}_\beta$.

Ключевые слова: вязкоупругость, ползучесть, релаксация, нерелаксирующий объем, разностный оператор, ядро, расшифровка оператора, материальная функция, установочный эксперимент

DOI: 10.31857/S003282352301006X, EDN: HVLOZC

1. Определяющие соотношения и материальные функции. Рассмотрим интегральные определяющие соотношения между напряжениями $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$ и малыми деформациями $\epsilon_{ij} = e_{ij} + \theta\delta_{ij}/3$ для линейных изотропных вязкоупругих сред с ядрами разностного типа:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t R(t - \tau) de_{ij}(\tau) \equiv \check{R}e_{ij}, \quad e_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t - \tau) ds_{ij}(\tau) \equiv \check{\Pi}s_{ij} \quad (1.1)$$

$$\sigma(t) = \int_0^t R_1(t - \tau) d\theta(\tau) \equiv \check{R}_1\theta, \quad \theta(t) = \int_0^t \Pi_1(t - \tau) d\sigma(\tau) \equiv \check{\Pi}_1\sigma, \quad (1.2)$$

где $R(t)$ и $R_1(t)$ – функции сдвиговой и объемной релаксации, $\Pi(t)$ и $\Pi_1(t)$ – функции сдвиговой и объемной ползучести [1–4]. Эти функции служат ядрами разностных операторов \check{R} , \check{R}_1 , $\check{\Pi}$ и $\check{\Pi}_1$, таких что $\check{R}\check{\Pi} = \check{\Pi}\check{R} = \check{I}$, $\check{R}_1\check{\Pi}_1 = \check{\Pi}_1\check{R}_1 = \check{I}$. Единичный оператор \check{I} в дальнейшем для простоты будет обозначаться единицей.

Для описания поведения сред во времени помимо упомянутых привлекаются безразмерные операторы $\check{\nu}$ (оператор Пуассона), $\check{\omega}$ и $\check{\pi}$:

$$\check{\nu} = \frac{3\check{R}_1 - \check{R}}{6\check{R}_1 + \check{R}} = \frac{3\check{\Pi} - \check{\Pi}_1}{6\check{\Pi} + \check{\Pi}_1}, \quad \check{\omega} = \frac{1}{3} \frac{\check{R}\check{\Pi}_1}{\check{R} + \check{R}_1} = \frac{1 - 2\check{\nu}}{1 + \check{\nu}}, \quad \check{\pi} = \frac{1}{\check{\omega}} = 3\check{R}_1\check{\Pi}, \quad (1.3)$$

а также оператор Юнга \check{E} :

$$\check{E} = \frac{9\check{R}\check{R}_1}{\check{R} + 6\check{R}_1} = \frac{9}{6\check{\Pi} + \check{\Pi}_1} \quad (1.4)$$

2. Оператор \check{g}_β . Набор $\{\check{R}, \check{R}_1, \check{\Pi}, \check{\Pi}_1\}$ составляет множество так называемых основных операторов, легко подлежащих расшифровке в силу того, что их ядра определяются из стандартных установочных экспериментов на релаксацию и ползучесть. Для расширения числа операторных функций, представимых в виде суммы произведений основных операторов, а следовательно, допускающих точную интегральную расшифровку, вводится оператор \check{g}_β Ильюшина

$$\check{g}_\beta = \frac{1}{1 + \beta\check{\omega}}; \quad 0 \leq \beta \in R \quad (2.1)$$

Его свойства подробно освещены в монографиях [1, 2].

Приведем пример задачи теории вязкоупругости, в которой введение \check{g}_β в число основных операторов позволяет избежать аппроксимационных методов и найти точное решение.

Пусть сплошной диск радиуса b из материала с определяющими соотношениями (1.1), (1.2) плотности ρ вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega(t)$. Требуется определить возникающее в результате центрифужного эффекта кольцевое напряжение $\sigma_{\theta\theta}(b, t)$ в точках границы диска.

Решение соответствующей задачи теории упругости о вращении тяжелого диска следующее (см., напр., ([5], с. 47)):

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \nu) \rho \Omega^2(t) \quad (2.2)$$

Согласно принципу Вольтерры и связи операторов $\check{\omega}$ и $\check{\nu}$ в задаче для вязкоупругого диска

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \check{\nu}) \rho \Omega^2(t) = \frac{b^2}{4} \phi(\check{\omega}) \rho \Omega^2(t); \quad \phi(\check{\omega}) = \frac{1 + 2\check{\omega}}{2 + \check{\omega}} \quad (2.3)$$

Дробно-линейную функцию $\phi(\check{\omega})$ нельзя представить конечной суммой произведений из набора $\{\check{R}, \check{R}_1, \check{\Pi}, \check{\Pi}_1\}$. Но в то же время

$$\phi(\check{\omega}) = 2 - \frac{3/2}{1 + \check{\omega}/2} = \sum_{n=0}^N c_n \check{g}_{\beta_n} \quad (2.4)$$

с параметрами $N = 1$, $\beta_0 = 0$, $c_0 = 2$, $\beta_1 = 1/2$, $c_1 = -3/2$. Таким образом, можно дать точное выражение для кольцевого напряжения:

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2 \rho}{8} \left(4 \int_0^t g_0(t - \tau) d\Omega^2(\tau) - 3 \int_0^t g_{1/2}(t - \tau) d\Omega^2(\tau) \right) \quad (2.5)$$

Возможные установочные эксперименты для непосредственного определения функции $g_\beta(t)$ описаны в ([1], с. 112; [2], с. 109). В общем случае связи шаровых частей (1.2) они достаточно сложны в осуществлении и различны для разных диапазо-

нов изменения β . Так, для $0 \leq \beta \leq 1/2$ к исследуемому образцу необходимо последовательно присоединить скручиваемый образец, изготовленный из того же материала, что и основной, и одной и той же силой растягивать первый и скручивать второй образец.

Проще ситуация в случае вязкоупругой модели с нерелаксирующим объемом ($R_1(t) \equiv K$, $\Pi_1(t) \equiv 1/K$), в которой шаровые части $\sigma(t)$ и $\theta(t)$ связаны упругим законом

$$\sigma(t) = K\theta(t) \quad (2.6)$$

с модулем объемного сжатия $K = \text{const}$. Тогда вместо скручиваемого второго образца в предыдущем эксперименте можно взять работающую на растяжение пружину заданной в зависимости от параметра β жесткости.

Остановимся в дальнейшем подробнее на случае (2.6) и предложим дополнительные возможные установочные эксперименты для определения ядра $g_\beta(t)$. Заметим, что операторы (1.3) и (1.4) примут вид

$$\tilde{\nu} = \frac{3K - \bar{R}}{6K + \bar{R}} = \frac{3K\bar{\Pi} - 1}{6K\bar{\Pi} + 1}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\bar{R}}{3K}, \quad \tilde{\pi} = 3K\bar{\Pi}, \quad \tilde{E} = \frac{9K\bar{R}}{\bar{R} + 6K}, \quad (2.7)$$

а сам оператор (2.1) будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{g}_\beta = \frac{1}{1 + \beta\bar{R}/(3K)} \quad (2.8)$$

Если две функции $x(t)$ и $y(t)$ связаны между собой операторным соотношением

$$y(t) = (\tilde{g}_\beta x)(t) \equiv \int_0^t g_\beta(t - \tau) dx(\tau), \quad (2.9)$$

то обратная связь имеет вид

$$x(t) = y(t) + \frac{\beta}{3K} \int_0^t R(t - \tau) dy(\tau) \quad (2.10)$$

Эксперимент 1. Соединим параллельно упругий элемент с модулем Юнга $E^{(1)}$ и слой из исследуемого вязкоупругого материала с определяющими соотношениями (1.1) и (2.6) (рис. 1). При действии осевым напряжением $\sigma(t)$ упругий элемент работает на растяжение, а слой на сдвиг. Так как деформация упругого элемента $\varepsilon(t)$ при параллельном соединении совпадает с деформацией сдвига слоя, то

$$\sigma(t) = E^{(1)}\varepsilon(t) + \int_0^t R(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (2.11)$$

Из сравнения выражений в (2.10) и (2.11) видно, что при переобозначении $x(t) = \sigma(t)$, $y(t) = E^{(1)}\varepsilon(t)$, $E^{(1)} = 3K/\beta$ они совпадут, а, следовательно, согласно (2.9)

$$E^{(1)}\varepsilon(t) = \int_0^t g_\beta(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (2.12)$$

Прикладывая напряжение ступенькой Хевисайда $\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$ и измеряя в эксперименте деформацию $\varepsilon_0(t)$, получим искомую функцию

$$g_\beta(t) = \frac{E^{(1)}}{\sigma_0} \varepsilon_0(t) \quad (2.13)$$

Эксперимент 2. Заменим в предыдущем эксперименте работающий на сдвиг слой из исследуемого материала на работающий на растяжение образец из другого (вспомога-

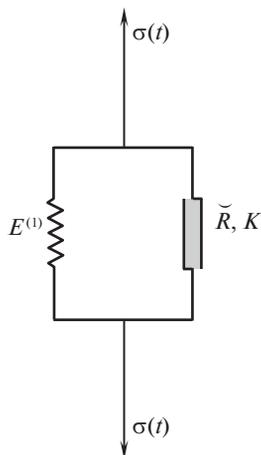


Рис. 1.

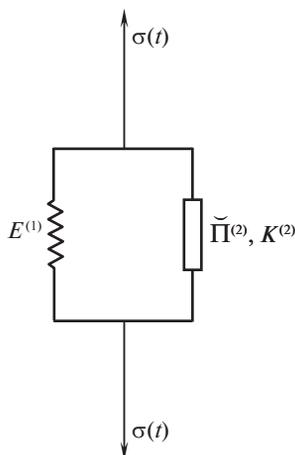


Рис. 2.

тельного) вязкоупругого материала с нерелаксирующим объемом и материальными функциями, которые будем обозначать верхним индексом (2). Упругий элемент в другом колене параллельного соединения оставим прежним (рис. 2).

Как следует из (2.11), вспомогательный материал должен быть таким, чтобы ядро $E^{(2)}(t)$ оператора Юнга $\check{E}^{(2)}$ для него совпадало с известной функцией $R(t)$ сдвиговой релаксации. Нетрудно показать, что это требование приводит к следующей связи материальных операторов исследуемой и вспомогательной сред:

$$\check{\Pi} = 2\check{\Pi}^{(2)}/3 + \frac{1}{9K^{(2)}} \quad (2.14)$$

В частности, если вспомогательный материал несжимаем, то

$$\check{\Pi} = 2\check{\Pi}^{(2)}/3 \quad (2.15)$$

Результаты эксперимента 2 можно интерпретировать и в обратную сторону. Если имеется образец из материала с нерелаксирующим объемом, функцией сдвиговой ползучести $\tilde{\Pi}_{(t)}^{(2)}$ и модулем объемного сжатия $K^{(2)}$, то, проведя серию экспериментов с упругими элементами с различными модулями Юнга $E^{(1)}$, можно построить серию функций $g_{\beta}(t)$ для материала с функцией сдвиговой ползучести $\Pi(t)$, вид которой следует из (2.14), и модулем объемного сжатия $K = \beta E^{(1)}/3$. Поскольку величины K и β везде входят только своим отношением, то для любого $a > 0$ ядро $g_{\beta}(t)$ вязкоупругой среды с материальными функциями $\Pi(t)$ и K будет совпадать с ядром $g_{a\beta}(t)$ среды с функциями $\Pi(t)$ и aK .

3. Оператор \tilde{h}_{γ} . С оператором \tilde{g}_{β} Ильюшина тесно связан другой оператор, который по аналогии с \tilde{g}_{β} назовем \tilde{h}_{γ} :

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1}{1 + \gamma\tilde{\pi}}; \quad 0 \leq \gamma \in R \quad (3.1)$$

Эта связь устанавливается взаимнообратными соотношениями

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1 - \tilde{g}_{\beta}}{1 - (1 - \beta\gamma)\tilde{g}_{\beta}}, \quad \tilde{g}_{\beta} = \frac{1 - \tilde{h}_{\gamma}}{1 - (1 - \beta\gamma)\tilde{h}_{\gamma}} \quad (3.2)$$

Так, решение (2.3) упоминаемой ранее задачи о вращении тяжелого диска можно записать и по-другому:

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2}{4} (1 - \bar{\nu}) \rho \Omega^2(t) = \frac{b^2}{4} \left(\frac{1}{2} + \frac{3/2}{1 + 2\pi} \right) \rho \Omega^2(t) \quad (3.3)$$

Точное решение (2.5) представимо и в терминах операторов \tilde{h}_{γ} :

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = \frac{b^2 \rho}{8} \left(\int_0^t h_0(t - \tau) d\Omega^2(\tau) + 3 \int_0^t h_2(t - \tau) d\Omega^2(\tau) \right) \quad (3.4)$$

В случае нерелаксирующего объема из (3.1) имеем

$$\tilde{h}_{\gamma} = \frac{1}{1 + 3\gamma K \tilde{\Pi}} \quad (3.5)$$

Предложим ряд экспериментов по непосредственному (безотносительно к \tilde{g}_{β}) нахождению ядра $h_{\gamma}(t)$. Заметим, что если две функции $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют операторному уравнению

$$y(t) = (\tilde{h}_{\gamma} x)(t) \equiv \int_0^t h_{\gamma}(t - \tau) dx(\tau) \quad (3.6)$$

с функцией \tilde{h}_{γ} в виде (3.5), то

$$x(t) = y(t) + 3K\gamma \int_0^t \Pi(t - \tau) dy(\tau) \quad (3.7)$$

Эксперимент 3. Последовательно соединим упругий элемент с модулем Юнга $E^{(1)}$ и слой из исследуемого материала с определяющими соотношениями (1.1), (2.6) (рис. 3).

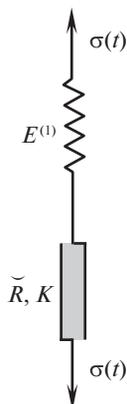


Рис. 3.

Так как напряжение $\sigma(t)$ в упругом элементе при последовательном соединении равно сдвиговому напряжению в слое, то

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E^{(1)}} + \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau) \quad (3.8)$$

Соотношения (3.7) и (3.8) тождественно совпадут при переобозначении $x(t) = \varepsilon(t)$, $y(t) = \sigma(t)/E^{(1)}$, $E^{(1)} = 3K\gamma$, так что согласно (3.6)

$$\sigma(t) = E^{(1)} \int_0^t h_\gamma(t - \tau) d\varepsilon(\tau) \quad (3.9)$$

Если фиксировать деформацию ступенькой Хевисайда $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t)$ и измерять в эксперименте осевое напряжение $\sigma_0(t)$ всей системы, то искомая функция $h_\gamma(t)$ вычисляется по формуле

$$h_\gamma(t) = \frac{\sigma_0(t)}{E^{(1)} \varepsilon_0} \quad (3.10)$$

По заданному $\gamma > 0$ упругий элемент выбирается так, чтобы его модуль Юнга был равен $3K\gamma$.

Эксперимент 4. Воспользуемся, как и в эксперименте 2, работающим на растяжение образцом из вспомогательного материала с нерелаксирующим объемом и соединим его последовательно с упругим элементом, имеющим модуль Юнга $E^{(1)}$ (рис. 4). Оператор $1/\bar{E}^{(2)}$ для этого материала должен совпадать с известным оператором $\bar{\Pi}$, а, следовательно, $\bar{E}^{(2)} = \bar{R}$. Таким образом, связь материальных операторов (2.14) исследуемой и вспомогательной сред остается такой же, как в эксперименте 2.

Проводя серию экспериментов на релаксацию с упругими элементами с различными модулями Юнга $E^{(1)}$, принципиально можно построить серию функций $h_\gamma(t)$ для материала с функцией сдвиговой ползучести, следующей из (2.14), и модулем объемного сжатия $K = E^{(1)}/(3\gamma)$. Так как K и γ входят только комбинацией своего произве-

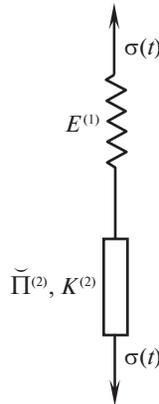


Рис. 4.

дения, то ядро $h_\gamma(t)$ вязкоупругой среды с материальными функциями $\Pi(t)$ и K не будет отличаться от ядра $h_{a\gamma}(t)$ среды, характеризующейся $\Pi(t)$ и K/a , $a > 0$.

4. Использование температурно-временной аналогии. Естественно, встает вопрос о подборе в экспериментах 2 и 4 реального вспомогательного материала с фиксированными реологическими свойствами, определяемыми связью (2.14) либо (2.15). Здесь на помощь может прийти температурно-временная аналогия, позволяющая в определенных случаях в качестве вспомогательного материала выбирать сам исследуемый материал.

Положим в (2.14) $K^{(2)} = K$ и запишем

$$\check{\Pi}^{(2)} = \frac{3\check{\Pi}}{2} - \frac{1}{6K} \quad (4.1)$$

Используем тот факт, что при повышении температуры $T > T_0$ явление ползучести во времени протекает быстрее, чем при $T = T_0$, и тем самым значение функции ползучести в каждый момент становится больше. Надлежащим образом устанавливая температурный режим $T(t)$ при проведении экспериментов 2 и 4, добьемся того, чтобы с удовлетворительной точностью выполнялось соотношение

$$\Pi(t, T(t)) \approx \frac{3\Pi(t, T_0)}{2} - \frac{1}{6K}; \quad t > t_1 \quad (4.2)$$

Тогда в качестве ядра $\check{\Pi}^{(2)}(t)$ оператора $\check{\Pi}^{(2)}$ в (4.1) можно взять функцию $\Pi(t, T(t))$.

Заметим, что проведенные рассуждения, связанные с приближенным подбором оператора $\check{\Pi}^{(2)}$ в (2.14) и (2.15), имеют место и в случаях, когда в качестве вспомогательного выбирается не сам исследуемый материал, а другой вязкоупругий материал, но эксперимент проводится при вычисленном для него температурном режиме $T(t)$.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-21-00077).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А., Победра Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

2. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1995. 366 с.
3. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е.* Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. № 1. С. 119–157.
4. *Georgievskii D.V.* Methods of investigation of boundary value problems in viscoelasticity theory // Rus. J. Math. Phys. 2007. V. 14. № 3. P. 262–274.
5. *Ильюшин А.А., Ломакин В.А., Шмаков А.П.* Задачи и упражнения по механике сплошной среды. М.: Изд-во МГУ, 1979. 200 с.

Schemes of the Experiments for Determining the Kernels of Some Difference-Type Operators for Media with Nonrelaxing Volume

D. V. Georgievskii^{a,b,c,#}

^a *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

^b *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russia*

^c *Moscow Centre for Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

[#] *e-mail: georgiev@mech.math.msu.su*

Within the framework of integral constitutive relations for linear isotropic viscoelastic media with difference-type kernels in the case of a nonrelaxing volume, possible, complementary to the known, setup experiments for determining the kernels of Ilyushin operators \check{g}_β are proposed. One of them is based on the use of a sample from an auxiliary viscoelastic solid, the material functions of which are related to the creep function and the volume compression module of the given material. Similar schemes of setup experiments for finding operator kernels \check{h}_γ , in a certain sense conjugated with \check{g}_β , are also proposed.

Keywords: viscoelasticity, creep, relaxation, nonrelaxing volume, difference-type operator, kernel, decoding of the operator, material function, setup experiment

REFERENCES

1. *Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.* Foundations of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity. Moscow: Nauka, 1970. 280 p. (in Russian)
2. *Pobedrya B.E.* Numerical Methods in Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow: MSU, 1995. 366 p. (in Russian)
3. *Georgievskii D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E.* Specific features of the behavior of viscoelastic models // Mech. Solids, 2004, vol. 39, no. 1, pp. 119–157.
4. *Georgievskii D.V.* Methods of investigation of boundary value problems in viscoelasticity theory // Rus. J. Math. Phys., 2007, vol. 14, no. 3, pp. 262–274.
5. *Ilyushin A.A., Lomakin V.A., Shmakov A.P.* Tasks and Exercises on Mechanics of Continuum. Moscow: MSU, 1995. 200 p. (in Russian)