

УДК 629.78

## ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПЕРЕЛЕТОВ К ЛУНЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ НА ТРАЕКТОРИИ ВРЕМЕННОГО ЗАХВАТА

© 2023 г. А. В. Иванюхин<sup>1, 2, \*</sup>, В. В. Ивашкин<sup>1, 3</sup>, В. Г. Петухов<sup>1</sup>, С. У. Юн<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики  
Московского авиационного института, Москва, Россия

<sup>2</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

<sup>3</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

<sup>4</sup>Московский авиационный институт, Москва, Россия

\*ivanyukhin.a@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.03.2023 г.

После доработки 29.03.2023 г.

Принята к публикации 02.04.2023 г.

Рассматривается задача расчета низкоэнергетических траекторий перелета космического аппарата с малой тягой к Луне на орбиту временного захвата. Перелет осуществляется с использованием транзитной траектории в окрестности одной из коллинеарных точек либрации  $L_1$  или  $L_2$  системы Земля–Луна. Использование транзитной траектории позволяет снизить затраты топлива на перелет за счет использования динамики движения космического аппарата в системе Земля–Луна. После выхода на орбиту временного захвата в зависимости от целей миссии может быть сформирована необходимая окололунная орбита или совершен маневр для выхода на отлетную межпланетную траекторию. Предлагается метод решения задачи, заключающийся в определении подходящей транзитной траектории и в расчете оптимальной траектории перелета космического аппарата с малой тягой с начальной околоземной орбиты на транзитную траекторию к Луне. В качестве двигателя рассматривается модель электроракетного двигателя ограниченной тяги. Для решения задачи оптимального управления и определения оптимальной точки выхода на транзитную траекторию используется принцип максимума Понтрягина в сочетании с методом продолжения по параметру. Приводятся численные примеры расчета низкоэнергетических траекторий перелета на окололунную орбиту временного захвата с оптимизацией точки выхода на транзитную траекторию.

DOI: 10.31857/S0023420623700164, EDN: XSEUTM

### ВВЕДЕНИЕ

Луна является ближайшим и одним из самых притягательных объектов Солнечной системы, ее исследования с помощью окололунных космических аппаратов (КА) начались всего через полтора года после запуска первого спутника Земли. Со временем стало понятно, что траектории лунных миссий сильно отличаются от перелетов в околоземном пространстве, что обусловлено сложностью гравитационного поля на траекториях, включающих в себя сближение с двумя разными массивными телами (Землей, Луной) и испытывающих воздействие удаленного массивного тела (Солнца).

В этих условиях очевидным направлением повышения эффективности транспортных лунных операций представляется целенаправленное использование эффектов динамики задач трех и четырех тел, что породило новый класс перелетов — низкоэнергетические траектории. Этот термин подразумевает минимальное изменение энергии при перелете между Землей и Луной.

Одним из перспективных инструментов для проектирования низкоэнергетических перелетов выступают траектории временного захвата, в частности осуществляющие транзит КА от одного массивного тела к другому. Такие траектории при проектировании лунных миссий начали исследоваться еще в середине прошлого века в работах В.А. Егорова [1–4], В.Г. Фесенкова [5], Девидсона [6] и др.

Егоров приводит условие, устанавливающее невозможность захвата Луной КА, “орбита которого начинается вблизи Земли” [2, 4]. Основная идея доказательства заключается в том, что запускаемый от Земли КА имеет слишком малую константу площадей, и селеноцентрическая скорость в апогее перелетной траектории значительно превышает местную параболическую скорость относительно Луны и, следовательно, КА, попав в сферу действия Луны, неминуемо ее покинет. Из этого делается вывод о невозможности захвата на первом витке траектории. Фесенков [5] также пытался теоретически обосновать невозможность

постоянного захвата с помощью анализа задачи трех тел и интеграла Якоби. Однако анализ задачи трех тел показывает существование транзитных траекторий, допускающих достаточно длительное пребывание КА у каждого массивного тела. Кроме того, использование символьной динамики и анализа финальных движений задачи трех тел позволило получить доказательство существования траекторий захвата с бесконечным временем пребывания в окрестности одного из тел [7]. Тем не менее эти результаты получены без интегрирования системы уравнений движения и определения параметров орбит, в связи с чем невозможно на их основе проектировать соответствующие траектории. Кроме того, с практической точки зрения КА не обязательно навсегда оставаться на орбите захвата, достаточно находиться на ней лишь некоторое конечное время.

Значительным шагом в проектировании траекторий временного захвата стало их рассмотрение в рамках четырех тел с учетом влияния Солнца, за счет которого оказалось возможным реализовать перелет по траектории с промежуточным оскулирующим апогеем, сопоставимым с размерами грависферы Земли, т.е. появление WSB-траекторий (*англ.* Weak Stability Boundary), предложенных Е.А. Белбруно [8, 9] и исследованных В.В. Ивашкиным [10–13].

Следуя работам Егорова [2, 4], Бельбруно [9] и Ивашкина [11] будем называть захватом пребывание в грависфере Луны КА, попавшего туда от Земли или из внешней части пространства, при отрицательных значениях селеноцентрической энергии. Соответствующий период времени определяется следующим образом:

$$h(t) = v^2(t) - \frac{2\mu}{r(t)} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_2], \quad (1)$$

где  $h$  – селеноцентрическая энергия;  $r$ ,  $v$  – положение и скорость относительно Луны;  $\mu$  – гравитационная постоянная Луны;  $t_1$  – момент гравитационного захвата;  $t_2$  – момент гравитационного освобождения.

Еще одним способом повышения эффективности лунных миссий представляется использование для их реализации электроракетных двигателей установок (ЭРДУ) с высоким удельным импульсом тяги, что позволяет существенно сократить затраты топлива на перелет. Использование ЭРДУ приводит к значительному увеличению длительности перелета к Луне, поскольку величина тяги ЭРДУ мала по сравнению с химическими ракетными двигателями. Это также означает, что требуемое число витков может исчисляться десятками и сотнями. Многовитковая задача становится многоэкстремальной – для фиксированной длительности перелета существует множество локально-оптимальных решений с разным числом витков. Эта особенность затрудняет обеспечение

вычислительной устойчивости применяемых численных методов оптимизации.

Одним из вариантов решения задачи проектирования многовитковых перелетов к Луне с малой тягой служит использование приближенных: локально-оптимальных законов управления на основе функций Ляпунова [14, 15] и квазиоптимального управления с обратной связью [16, 17].

Перелет с малой тягой трудно сочетать с WSB-траекторией ввиду необходимости достижения больших значений константы энергии (большой полуоси) и фактора, что траектории перелета с малой тягой характеризуются медленным изменением константы энергии. Поэтому типичная траектория перелета между околоземной и окололунной орбитой с малой тягой входит в сферу Хилла Луны через горловину в окрестности точки либрации  $L_1$ . Чем меньше величина реактивного ускорения, тем уже должна быть горловина константы Якоби в окрестности точки либрации. Целесообразным оказывается включение в траекторию перелета движения по инвариантным многообразиям точек либрации и гало-орбит [17–20], на основе которых тоже можно получить траектории временного захвата.

WSB-траектория перелета на орбиту временного захвата, предложенная Бельбруно [9], была впервые реализована на КА *Hiten* [21]. К настоящему времени успешно реализован перелет на окололунную орбиту КА с ЭРДУ *SMART-1* [22]. Низкоэнергетическая траектория перелета использовалась для выведения на гало-орбиту вокруг точки либрации  $L_2$  спутника-ретранслятора “*Цюэцяо*” (*пиньинь* Quediáo, “сорочий мост”) [23]. Планируется использовать ЭРДУ для выведения базового модуля лунной орбитальной станции [24], рассматриваются варианты использования КА и буксиров с ЭРДУ для обеспечения лунной пилотируемой программы [25–27].

Основной проблемой проектирования низкоэнергетических траекторий на основе орбит временного захвата считается получение этих орбит. Рассматриваются различные методы проектирования орбит временного захвата, в целом преобладают два подхода: первый заключается в определении двух- или трехимпульсного перелета для подходящего сближения с Луной [2, 4, 27–29], второй основан на подборе самой орбиты захвата относительно Луны [10, 11, 30]. Для проектирования перелетов с малой тягой эти варианты имеют недостаток: при их использовании энергетические характеристики траектории в момент транзита не представляют собой выбираемые параметры.

В данной работе предлагается метод определения орбиты захвата на основе анализа транзитных орбит, порожденных инвариантными многообразиями точек либрации  $L_1$  и  $L_2$ . Транзитные траектории такого типа позволяют получить не только орбиты долговременного захвата, но и отлетные траектории для межпланетных траекторий.

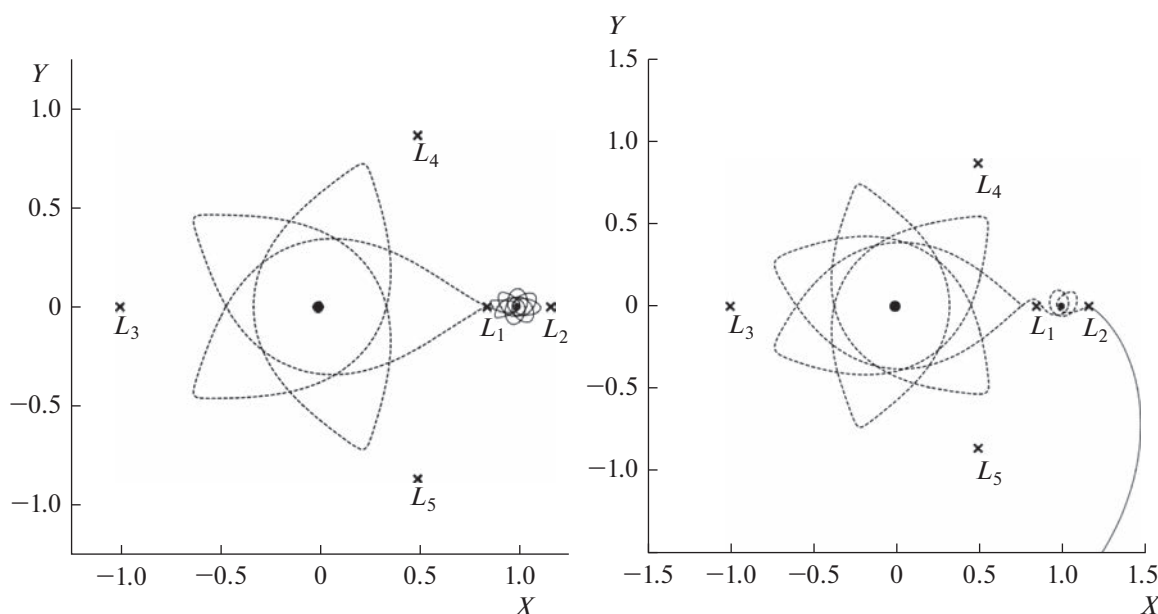


Рис. 1. Устойчивое (прерывистая линия) и неустойчивое (сплошная линия) многообразие у точек либрации  $L_1$  (слева) и  $L_2$  (справа).

### ОГРАНИЧЕННАЯ КРУГОВАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Для определения основных эффектов, влияющих на движение КА в системе Земля–Луна, рассмотрим математическую постановку ограниченной круговой задачи трех тел (ОКЗТТ).

Пусть три материальных точки (тела)  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  движутся под действием сил взаимного притяжения. Тела  $P_1$  и  $P_2$  имеют массы  $m_1$  и  $m_2$  ( $m_1 > m_2$ ), а масса тела  $P_3$  пренебрежимо мала и не влияет на движение  $P_1$  и  $P_2$ . То есть, тела  $P_1$  и  $P_2$  движутся вокруг их общего центра масс, и в случае, когда они движутся по круговым орбитам, задача называется ограниченной круговой задачей трех тел. Запишем движение третьего тела в безразмерной синодической барицентрической системе координат. Пусть единицей длины будет расстояние между  $P_1$  и  $P_2$ , единицей массы – сумма  $m_1$  и  $m_2$ , а единицу времени выберем так, чтобы период обращения этих точек вокруг их центра масс был равен  $2\pi$ . Направим ось  $x$  вдоль вектора от  $P_1$  к  $P_2$ , ось  $z$  – по вектору кинетического момента этих точек, а ось  $y$  дополняет систему до правой тройки. Тогда уравнения движения  $P_3$  можно записать в виде [31–33]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = U_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = U_y, \\ \ddot{z} = U_z, \end{cases} \quad (2)$$

где  $U = (x^2 + y^2)/2 + (1 - \mu)/r_1 + \mu/r_2$ ,  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ .

Точки либрации выступают стационарными решениями системы (2). Кроме того, система уравнений имеет один первый интеграл, найденный Якоби, который задает кривые нулевой скорости ( $v = 0$ ), ограничивающие область возможных движений точки  $P_3$ :

$$v^2 = 2U - C_J, \quad (3)$$

где  $C_J$  – константа Якоби;  $v$  – скорость.

Уравнения (2) имеют пять стационарных решений, называемых точками либрации. Так, Л. Эйлер заметил, что существует три равновесных решения:  $L_1$ ,  $L_2$  и  $L_3$ , которые лежат на прямой, проходящей через  $P_1$  и  $P_2$ , их называют прямолинейными точками либрации. Позднее Ж.Л. Лагранж обнаружил, что существует еще два частных решения, соответствующих движениям, для которых  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  образуют равносторонний треугольник – это треугольные точки либрации  $L_4$  и  $L_5$ . Расположение точек либрации во вращающейся системе координат приведено на рис. 1.

Прямолинейные и треугольные точки либрации имеют разные свойства, в данной работе нас интересуют точки  $L_1$  и  $L_2$ . Для анализа движения в их окрестности рассмотрим линеаризованную модель, которую можно получить из системы (2), перенеся начало координат в соответствующую точку либрации. После преобразований линейную модель движения можно представить в следующем виде [31, 32, 35]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} - (2c_2 + 1)x = 0, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} - (1 - c_2)y = 0, \\ \ddot{z} + c_2z = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где константа  $c_2$  определяется для одной из коллинеарных точек либрации следующим образом

$$c_2 = \begin{cases} \frac{1}{\gamma^3} \left( \mu + \frac{(1-\mu)\gamma^3}{(1 \pm \gamma)^3} \right) & \text{для } L_1^- \text{ и } L_2^+, \\ \frac{1}{\gamma^3} \left( 1 - \mu + \frac{\mu\gamma^3}{(1 + \gamma)^3} \right) & \text{для } L_3, \end{cases}$$

а константа  $\gamma$  связана с координатой  $x$  точки либрации

$$x_{L_1} = 1 - \mu - \gamma, \quad x_{L_2} = 1 - \mu + \gamma, \quad x_{L_3} = -\mu - \gamma.$$

Характеристическое уравнение системы (4) имеет корни

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 + \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm s, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{c_2 - 2 - \sqrt{c_2(9c_2 - 8)}}{2}} = \pm \omega_p i, \\ \lambda_{5,6} &= \pm \sqrt{c_2} = \pm \omega_v i. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

А решение системы (4) имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = \alpha e^{st} + \beta e^{-st} + A_x \cos(\omega_p t + \varphi_p), \\ y(t) = k_1 \alpha e^{st} - k_1 \beta e^{-st} - k_2 A_x \sin(\omega_p t + \varphi_p), \\ z(t) = A_z \cos(\omega_v t + \varphi_v), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha, \beta, A_x, A_z, \varphi_p, \varphi_v$  – константы интегрирования, зависящие от начальных условий; а коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  определяются следующим образом

$$k_1 = \frac{s^2 - 1 - 2c_2}{2s}, \quad k_2 = \frac{\omega_p^2 + 1 + 2c_2}{2\omega_p}. \quad (7)$$

Исходя из вида решения линеаризованной системы (6) в малой окрестности коллинеарных точек либрации можно выделить следующие типы движений [35]:

- плоские орбиты Ляпунова, при  $A_x \neq 0, A_z = \alpha = \beta = 0$ ;
- вертикальные орбиты Ляпунова, при  $A_z \neq 0, A_x = \alpha = \beta = 0$ ;
- квазипериодические орбиты, при  $A_x \neq 0, A_z \neq 0, \alpha = \beta = 0$ ;
- асимптотические траектории, при  $\alpha \neq \beta, \alpha\beta = 0$ ;
- транзитные траектории, при  $\alpha\beta < 0$ ;
- нетранзитные траектории, при  $\alpha\beta > 0$ .

Кроме того, существуют два множества асимптотических траекторий, связанных с точками либрации: устойчивые и неустойчивые многообразия. Траектории устойчивого многообразия стремятся к точке либрации при  $t \rightarrow \infty$ , в то время как траектории неустойчивого многообразия стремятся к

точке либрации при  $t \rightarrow -\infty$ . Наличие таких траекторий для точек либрации следует из присутствия положительного и отрицательного собственного значения в решении линеаризованной системы (5).

Для определения устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий точек либрации необходимо сделать малый сдвиг из нее в направлении соответствующего собственного вектора и проинтегрировать систему в обратном и прямом времени:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_s \\ \mathbf{v}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{v}_L \end{pmatrix} + \varepsilon \Lambda_s, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{r}_u \\ \mathbf{v}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{v}_L \end{pmatrix} + \varepsilon \Lambda_u, \quad (8)$$

где  $(\mathbf{r}_L, \mathbf{v}_L)$  – координаты и скорость точки либрации;  $\Lambda_s$  – собственный вектор; соответствующий отрицательному собственному значению (устойчивому многообразию);  $\Lambda_u$  – собственный вектор, соответствующий положительному собственному значению (неустойчивому многообразию);  $\varepsilon$  – малая вариация.

Вид устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий для точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  системы Земля–Луна в ОКЗТТ приведен на рис. 1.

За счет малости сдвига устойчивое и неустойчивое многообразие в совокупности формируют транзитную траекторию с пролетом точки либрации с околонулевой скоростью.

### ОГРАНИЧЕННАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

Ограниченная круговая задача трех тел позволяет получить представление о многих значимых эффектах движения КА в системе Земля–Луна, однако она представляет собой идеализированную модель. Поскольку орбита Луны является эллиптической с эксцентриситетом 0.0549, отметим ряд важных качественных отличий, влияющих на движение КА в окрестности точек либрации.

Уравнения (2) в барицентрической вращающейся системе координат после введения пульсирующей системы (связанной с непостоянством расстояния между массивными телами) могут быть записаны в следующем виде [31, 32]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_y, \\ \ddot{z} = \frac{1}{1 + e \cos \nu} U_z, \end{cases} \quad (9)$$

где функция  $U$  совпадает с аналогичной для системы (2),  $e, \nu$  – эксцентриситет и истинная аномалия орбиты меньшего из массивных тел (в данном случае Луны).

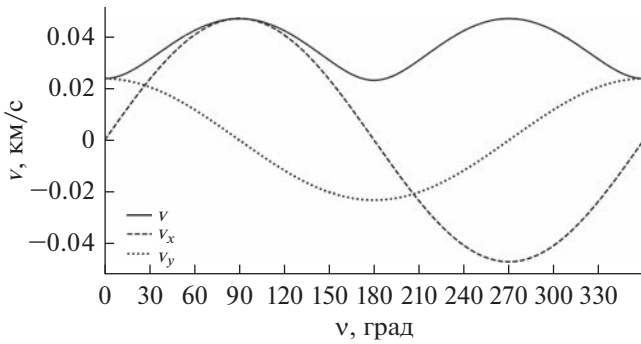


Рис. 2. Скорость и компоненты скорости оскулирующей точки либрации  $L_1$ .

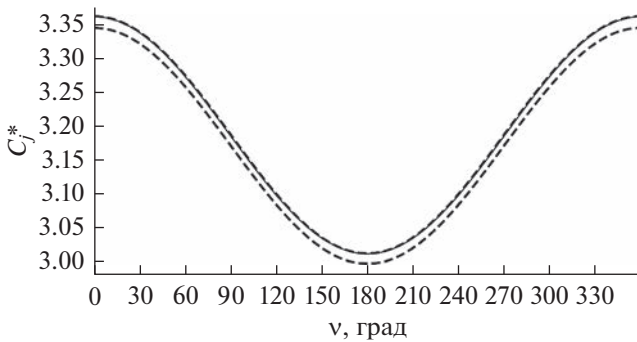


Рис. 3. Константа Якоби для точек либрации  $L_1$  (верхняя прерывистая линия),  $L_2$  (нижняя прерывистая линия) и оскулирующей точки либрации  $L_1$  (сплошная линия).

Очевидно, что система (9) не имеет стационарных решений, и обнуление правых частей возможно только при конкретном значении истинной аномалии, а значит и расстояния между массивными телами. Таким образом, можно говорить только о мгновенном положении точки либрации в пульсирующих координатах [31, 32]. Тогда точка либрации становится исключительно геометрическим понятием, вообще говоря, слабо связанным с динамикой эллиптической задачи трех тел. Однако остаются интересными траектории в окрестности оскулирующей точки либрации [36, 38, 39].

Кроме того, появление пульсации координат и зависимость потенциальной функции  $U$  от истинной аномалии препятствует получению интеграла Якоби в эллиптической задаче. Можно записать интегральное выражение, аналогичное интегралу Якоби (3) [32, 37]:

$$\frac{v^2(t)}{2} - U(t) = \frac{v^2(t_0)}{2} - U(t_0) - \int_{v(t_0)}^{v(t)} \frac{\partial U}{\partial v} dv. \quad (10)$$

Следуя исследованию [32] и рассматривая достаточно малый интервал времени, в течение которого основные тела описывают достаточно малые дуги, кривые нулевой скорости приближенно можно получить из уравнения

$$2U - C_J(1 + e \cos v) = v^2. \quad (11)$$

Это соотношение выполняется, если в уравнении (10) опущен интеграл, что приводит к пульсации кривых нулевой скорости, каждому моменту времени (или при каждом значении истинной аномалии) соответствует своя кривая нулевой скорости. Или, что то же самое, происходит перенормировка кривых нулевой скорости. Изменение текущего значения константы Якоби можно записать через константу Якоби из ОКЗТТ (3) в виде:

$$C_J^* = C_J(1 + e \cos v). \quad (12)$$

Поскольку оскулирующая точка либрации не является стационарным решением, она обладает скоростью во вращающейся системе, но при движении Луны сохраняется геометрическая пропорция ее положения. Следовательно, скорость оскулирующей точки либрации пропорциональна скорости Луны, поэтому траектория движения оскулирующей точки либрации не является решением системы (9). Так как вращающаяся система координат имеет местную круговую скорость, с учетом ориентации осей скорость точки либрации во вращающейся системе координат можно определить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} v_x^{L_i} &= x_{L_i} \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{p}} \sin v, \\ v_y^{L_i} &= x_{L_i} \sqrt{\frac{\mu_E + \mu_M}{p}} (1 + e \cos v - \sqrt{1 + e \cos v}), \\ v_z^{L_i} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где  $p$  – фокальный параметр орбиты Луны.

Таким образом, оскулирующая точка либрации имеет скорость, отличную от нуля, и это значит, что в ее окрестности всегда есть небольшая горловина, соединяющая области вокруг Земли и Луны, через которую может быть реализована транзитная траектория. Изменение компонент скорости и величина скорости оскулирующей точки либрации  $L_1$  показаны на рис. 2. На рис. 3 приведены значения константы Якоби для точек либрации  $L_1, L_2$ , вычисленных по формуле (12), и оскулирующей точки либрации как функции истинной аномалии (11) с учетом скорости (13). Как видно, значение для оскулирующей точки либрации всегда немного меньше значения для  $L_1$ , что и демонстрирует наличие горловины для перелета.

Однако для совершения транзита недостаточно одного подходящего значения константы Якоби, также необходима подходящая ориентация вектора скорости. Как видно из рис. 2 обе ненулевые компоненты вектора скорости меняют свое направление в зависимости от значения истинной аномалии. При этом очевидно, что для совершения транзита в первую очередь интересно направление вектора скорости, а не его величина.

Для определения ориентации скорости, обеспечивающей транзит через точку либрации, проанализируем, каким коэффициентам решения

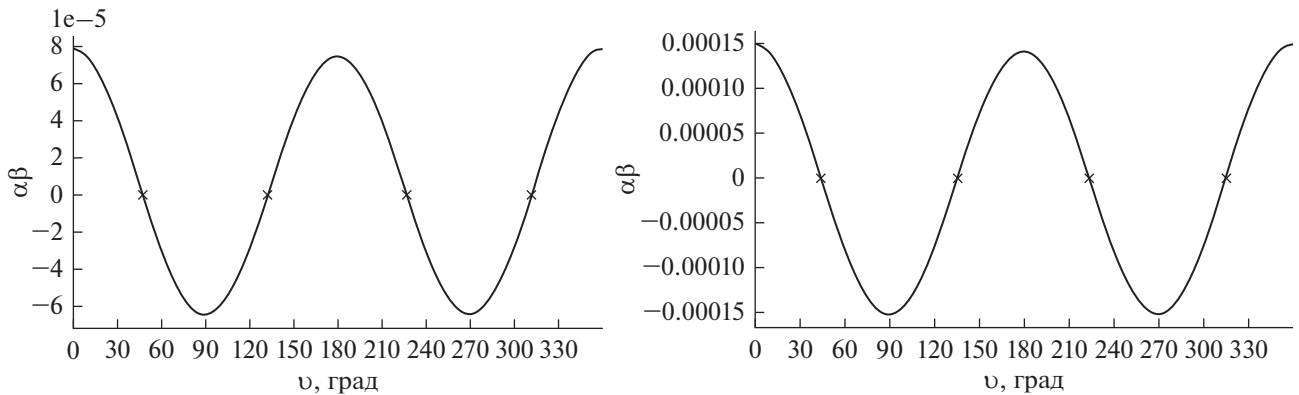


Рис. 4. Произведение  $\alpha\beta$  для точек  $L_1$  (слева) и  $L_2$  (справа).

линеаризованной системы (6) она соответствует. Продифференцируем уравнения (6) для получения соотношения для скоростей, положим  $t = 0$  и исключим периодические слагаемые. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений для определения констант  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\begin{pmatrix} s & -s \\ k_1 s & k_1 s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^{L_i} \\ v_y^{L_i} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

График зависимости произведения  $\alpha\beta$  от истинной аномалии Луны для точек  $L_1$  и  $L_2$  приведен на рис. 4. Как видно, транзит возможен только в определенных границах истинной аномалии, причем окрестности апоцентра и перигея исключены из них. Диапазоны значений истинной аномалии, допускающих транзит, находятся в окрестности  $90^\circ$  и  $-90^\circ$  по истинной аномалии, что соответствует области максимальных значений компоненты  $v_x$  в барицентрической системе координат (радиальной в орбитальной). При этом в этих областях транзит имеет различное направление, так для  $L_1$  в диапазоне  $47.64^\circ \dots 132.90^\circ$  перелет происходит от Луны к Земле, а при  $-47.64^\circ \dots -132.90^\circ$  – от Земли к Луне. При этом склонение скорости  $\theta$ , вычисленное во вращающейся системе координат  $\text{tg}(\theta) = v_x^{L_i} / v_y^{L_i}$ , в этих диапазонах меняется от  $65.29^\circ$  до  $114.71^\circ$  и от  $-65.29^\circ$  до  $-114.71^\circ$  соответственно. Для  $L_2$  истинная аномалия, подходящая для транзита от Луны во внешнюю часть пространства, изменяется от  $-44.53^\circ$  до  $-136.03^\circ$ , склонение вектора скорости при этом принимает значения от  $-63.05^\circ$  до  $-117.40^\circ$ . И для транзита к Луне из внешней области пространства наблюдается симметричная картина: для истинной аномалии от  $44.53^\circ$  до  $136.03^\circ$ , и склонение скорости от  $63.05^\circ$  до  $117.40^\circ$ .

### ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Для использования этих решений в рамках возмущенной эфемеридной модели необходимо сделать переход из вращающейся системы координат,

связанной с барицентром системы или точкой либрации, в неподвижную экваториальную гелиоцентрическую или селеноцентрическую систему координат, связанную с эпохой J2000.

Введем мгновенную синодическую систему координат, связанную с текущим положением и скоростью Луны ( $\mathbf{r}_M, \mathbf{v}_M$ ) в геоцентрической системе координат J2000. Для этого запишем единичные векторы этой системы в системе J2000 ( $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ ):

$$\mathbf{e}_x = \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|}, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M}{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}, \quad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x. \quad (15)$$

И мгновенную угловую скорость вращения Луны:

$$\dot{\vartheta} = \frac{|\mathbf{r}_M \times \mathbf{v}_M|}{|\mathbf{r}_M|^2}. \quad (16)$$

После этого положение и скорость КА относительно Земли в инерциальной системе координат можно получить из координат и скорости в синодической системе относительно Земли в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{r}_{J2000} \\ \mathbf{v}_{J2000} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z & 0 & 0 & 0 \\ \dot{\vartheta} \mathbf{e}_y & -\dot{\vartheta} \mathbf{e}_x & 0 & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{r}_M| \cdot \mathbf{r} \\ |\mathbf{v}_M| \cdot \mathbf{v} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  – безразмерные положение и скорость КА в синодической системе координат.

Преобразование (17) соответствуют введению координат Нехвилла в ограниченной эллиптической задаче трех тел [31, 32].

Расчеты будем проводить с учетом возмущения от Солнца в системе координат J2000 связанной с Землей, в этом случае уравнения, описывающие пассивные движения КА имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}} = & -\frac{\mu_E \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \mu_S \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_S}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_S|^3} + \frac{\mathbf{r}_S}{|\mathbf{r}_S|^3} \right) - \\ & - \mu_M \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_M}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_M|^3} + \frac{\mathbf{r}_M}{|\mathbf{r}_M|^3} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где  $\mu_E, \mu_S, \mu_M$  – гравитационные параметры Земли, Солнца и Луны;  $\mathbf{a}_S, \mathbf{r}_M$  – геоцентрические радиус-векторы Солнца и Луны соответственно. Векторы положения и скорости Солнца и Луны вычисляются с помощью эфемеридного обеспечения JPL (*англ.* Jet Propulsion Laboratory NASA) DE405.

Для анализа траектории в окрестности Луны и расчета соответствующих оскулирующих кеплеровских элементов будем использовать селеноцентрическую экваториальную систему координат J2000. Для перехода к ней воспользуемся следующей матрицей [34]:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(t) & \cos\alpha(t) & 0 \\ -\cos\alpha(t)\sin\delta(t) & -\sin\alpha(t)\sin\delta(t) & \cos\delta(t) \\ \cos\alpha(t)\cos\delta(t) & \sin\alpha(t)\cos\delta(t) & \sin\delta(t) \end{pmatrix}, \quad (19)$$

где  $\alpha(t), \delta(t)$  – координаты северного полюса Луны в момент времени  $t$ .

Вычисления координат северного полюса Луны проводились в соответствии с рекомендациями Международного астрономического союза (*англ.* International Astronomical Union – IAU), представленными в публикации [34].

Матрица перехода (19) связывает геоэваториальную  $\mathbf{r}_E(t)$  и селеноэваториальную  $\mathbf{r}_M(t)$  системы координат следующим образом:

$$\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{Q}\mathbf{r}_E(t), \quad \mathbf{r}_E(t) = \mathbf{Q}^T\mathbf{r}_M(t), \quad (20)$$

при этом оба вектора  $\mathbf{r}_E(t)$  и  $\mathbf{r}_M(t)$  селеноцентрические и отличаются только ориентацией.

Очевидно, что при переходе от эллиптической задачи трех тел к возмущенной модели четырех тел произойдет значительное возмущение полученных решений. В частности, интервалы захвата по оскулирующей истинной аномалии теряют симметрию, начинают двигаться и меняют свое значение примерно в пределах  $10^\circ$  каждый синодический период Луны.

Рассматриваемые факторы от возмущений орбиты Луны и воздействия Солнца имеют независимый характер и приводят к следующим эффектам. В целом в возмущенной задаче трех тел Земля–Луна – КА при использовании эфемеридной модели движения наблюдается подобие транзитных траекторий на каждом синодическом периоде Луны. В частности, удается определить траекторию временного захвата с длительностью пребывания у Луны порядка 1000 сут в окрестности значений оскулирующей истинной аномалии  $260^\circ \dots 280^\circ$ . Воздействие Солнца в качестве основного эффекта приводит к осцилляции эксцентриситета, что при существенных значениях большой полуоси порождает WSB-траектории. Кроме того, нарушается подобие транзитных траекторий между соседними синодическими периодами Луны, так как появляется еще одно близкое к периодическому возмущение. При этом указанные траектории длительного захвата сохраняются, но

типичная длительность сокращается до  $\sim 100$  сут. Однако внутри года остаются траектории захвата с длительностью более 1000 сут.

Например, в 2026 г. при пролете 3.VII.2026 в 15.05.50 (юлианская дата 2461256.12905) точки либрации  $L_1$  по транзитной траектории временного захвата, образованной ее инвариантными многообразиями, длительность пребывания у Луны превышает 1400 сут. Кеплеровская энергия относительно Луны и расстояние до Луны приведены на рис. 5 и рис. 6.

На рис. 7 и 8 представлены изменения большой полуоси, эксцентриситета и наклона в экваториальных гео- и селеноцентрических системах координат J2000. Можно отметить, что выбором даты пролета точки либрации удастся получить различные наклонение и расстояние пролета на селеноцентрическом участке. Наклонение на гелиоцентрическом участке практически не меняется при вариации даты пролета точки либрации и определяется оскулирующим наклоном орбиты Луны.

Кроме формирования орбиты длительного захвата транзитные траектории в окрестности точек либрации представляют интерес для формирования отлетной от Земли траектории с выходом на гелиоцентрическую траекторию. Хотя такие траектории в возмущенной модели можно получить и на основе многообразий  $L_1$ , предложенная методика наиболее полно описывает решения, полученные на основе многообразий  $L_2$ .

Наиболее эффективные по скорости пересечения грависферы Земли отлетные траектории формируются при совместном воздействии эффектов трех и четырех тел: перехода неустойчивого многообразия  $L_2$  в WSB-траекторию. Анализ совместного влияния Луны и Солнца на отлетную траекторию весьма затруднен. Численные расчеты транзитных траекторий у  $L_2$  позволяют подбором даты пролета получить несколько таких траекторий за год. Скорость при пересечении грависферы Земли на таких траекториях составляет порядка 0.7 км/с. Дополнительно повысить эту скорость может возврат к Земле после сближения с границей грависферы и совершение гравитационного маневра у Луны. После гравитационного маневра рассматриваемые траектории увеличивают скорость на грависфере до 1.3 км/с. Направление скорости при пересечении грависферы может как увеличивать скорость КА относительно Солнца по сравнению со скоростью Земли, так и уменьшать ее в зависимости от фазы Луны и Солнца. Такую траекторию удалось получить для пролета  $L_2$  10.V.2026 в 11.34.16, она изображена на рис. 9 и рис. 10 в геоцентрической неподвижной системе координат, за единицу расстояния взято среднее расстояние от Земли до Луны. На рис. 11 приведены геоцентрические оскулирующие орбитальные элементы отлетной траектории (боль-

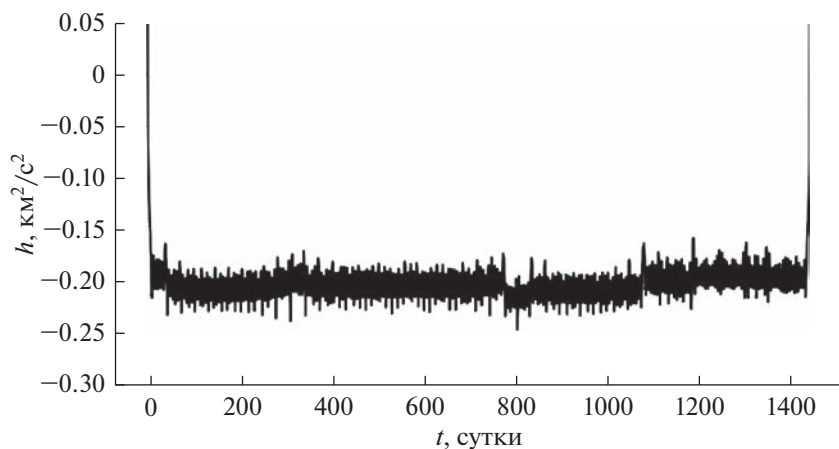


Рис. 5. Селеноцентрическая кеплеровская энергия на траектории временного захвата.

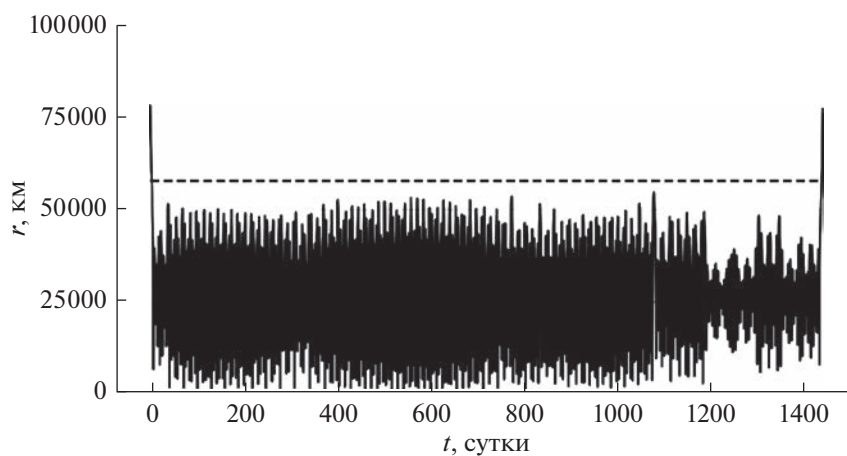


Рис. 6. Расстояние до Луны на траектории временного захвата.

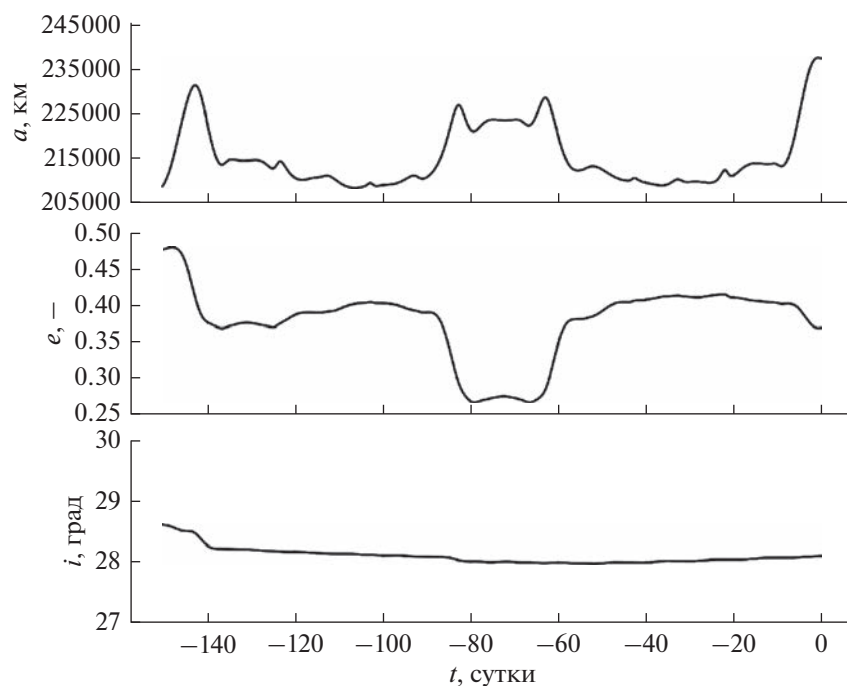


Рис. 7. Оскулирующие элементы околоземного участка транзитной траектории.



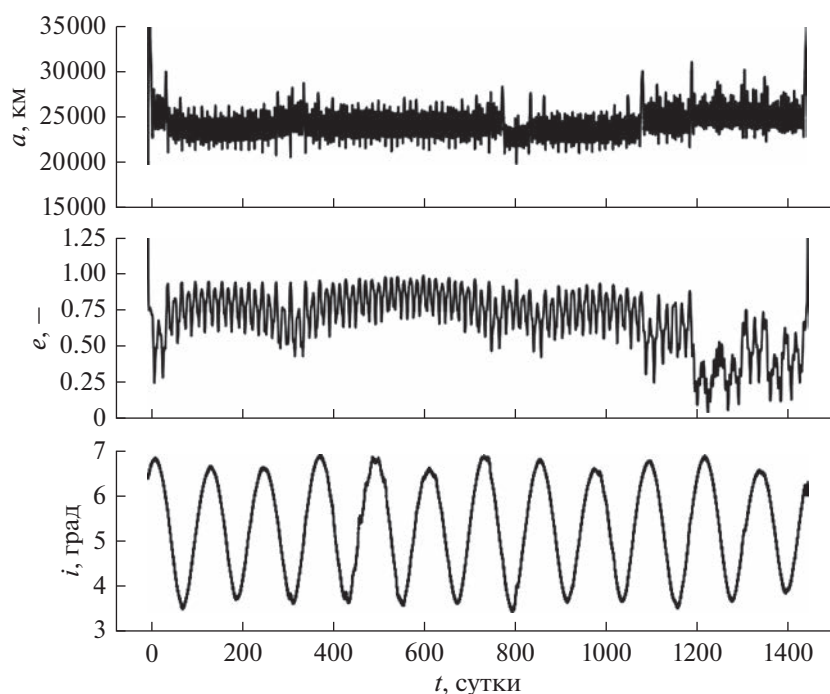


Рис. 8. Оскулирующие элементы окололунного участка траектории временного захвата.

шая полуось, эксцентриситет и наклонение). Первое сближение с Луной происходит через окрестность  $L_1$ , и длится 18.3 сут, после чего происходит выход во внешнюю часть пространства

через  $L_2$ , минимальное сближение с Луной происходит на расстоянии 1913 км. После пролета Луны под воздействием Солнца реализуется WSB-маневр длительностью 88.6 сут, за время которого эксцентриситет меняется с 0.47 до 0.87, а большая полуось возрастает в 2.1 раза. Следующий за этим гравитационный маневр переводит траекторию в гиперболу и через 11 сут происходит выход за пределы грависферы Земли. При совершении гравитационного маневра пролет Луны происходит с минимальным радиусом 9728 км, а время пребывания в грависфере Луны составляет 1.56 сут.

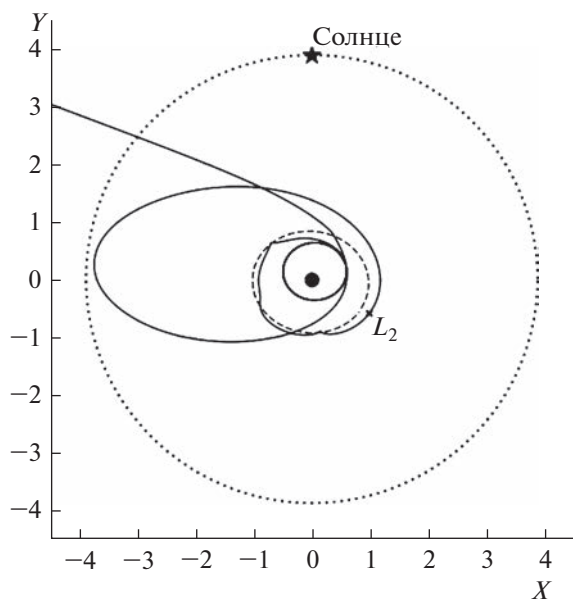


Рис. 9. Отлетная транзитная траектория в неподвижной геоцентрической системе (сплошная линия), орбита Луны (прерывистая линия) и грависфера Земли (точки) с отмеченным направлением на Солнце в момент пролета  $L_2$ .

#### ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Недавно авторами был предложен новый подход к оптимизации траекторий малой тяги с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета для оптимизации межорбитальных перелетов [40–42]. Отличительной особенностью предложенного подхода представляется использование новой независимой угловой переменной – вспомогательной долготы, которая в невозмущенном движении совпадает с истинной долготой. Этот подход позволяет эффективно оптимизировать время перелета при фиксированной угловой дальности.

Рассмотрим задачу оптимизации возмущенной многовитковой траектории перелета с малой тягой на устойчивое многообразие точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  для реализации полученных ранее траекторий и максимизирующую конечную массу КА с двигате-

лем ограниченной тяги. Будем использовать модифицированные равноденственные элементы и вспомогательную долготу  $K$ , совпадающую с истинной долготой в невозмущенном движении, в качестве независимой переменной так, как это представлено в работах [41–43]. Уравнения возмущенного движения КА с малой тягой при использовании вспомогательной долготы  $K$  имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dK} = \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \\ \frac{de_x}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ \sin La_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ -\cos La_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{di_x}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos La_n, \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin La_n, \\ \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi a_n, \quad \frac{dm}{dK} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 \frac{T}{c}, \\ \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2, \end{cases} \quad (21)$$

где  $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$ ;  $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$ ;  $i_x = \operatorname{tg}(i/2) \cos \Omega$ ;  $i_y = \operatorname{tg}(i/2) \sin \Omega$ ;  $L = \nu + \omega + \Omega$ ;  $s^2 = i_x^2 + i_y^2$ ;  $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$ ;  $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$ ;  $a_t = \delta(T/m) \cos \vartheta \cos \psi + a_{pt}$ ;  $a_r = \delta(T/m) \sin \vartheta \cos \psi + a_{pr}$ ;  $a_n = \delta(T/m) \sin \psi + a_{pn}$ ;  $T$  – тяга;  $c$  – скорость истечения;  $m$  – масса,  $\delta$  – функция дросселирования;  $\vartheta$  – тангаж;  $\psi$  – рысканье;  $a_{pt}$ ,  $a_{pr}$ ,  $a_{pn}$  – трансверсальная, радиальная и бинормальная компоненты возмущающего ускорения соответственно;  $p$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $i$ ,  $\Omega$  – кеплеровские орбитальные элементы (фокальный параметр, эксцентриситет, аргумент перигея, наклонение, долгота восходящего узла);  $L = K + L_K$  – истинная долгота;  $\nu$  – истинная аномалия,  $\mu$  – гравитационный параметр.

Рассмотрим перелет между двумя точками: положением на начальной орбите и заданной точкой в окрестности  $L_1$ . Известны начальная и конечная истинная долгота  $L_0$  и  $L_f$ , и соответственно угловая дальность перелета  $\Delta L = L_f - L_0$ . Время перелета не задано, известно время прибытия в конечную точку  $t(K_f) = t_{L_1}$ .

Функционал, минимизирующий затраты топлива при переходе к  $K$ , имеет вид:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{T}{c} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{T}{c} \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \quad (22)$$

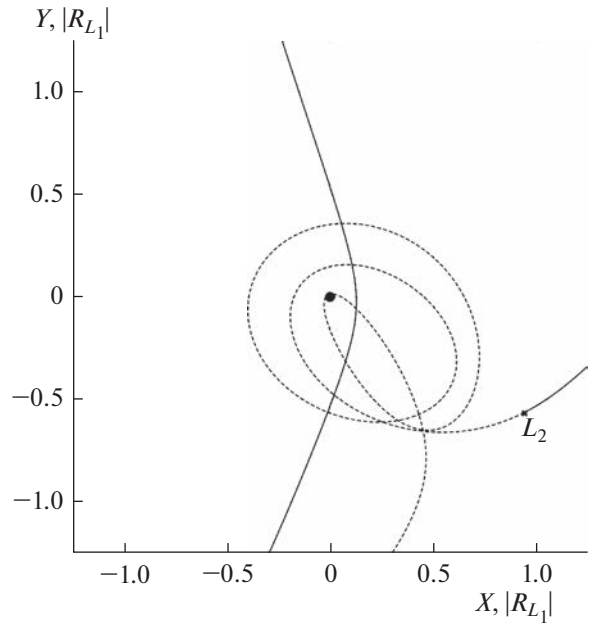


Рис. 10. Отлетная транзитная траектория в неподвижной селеноцентрической системе: устойчивое многообразие (прерывистая линия) и неустойчивое многообразие (сплошная линия)  $L_2$ .

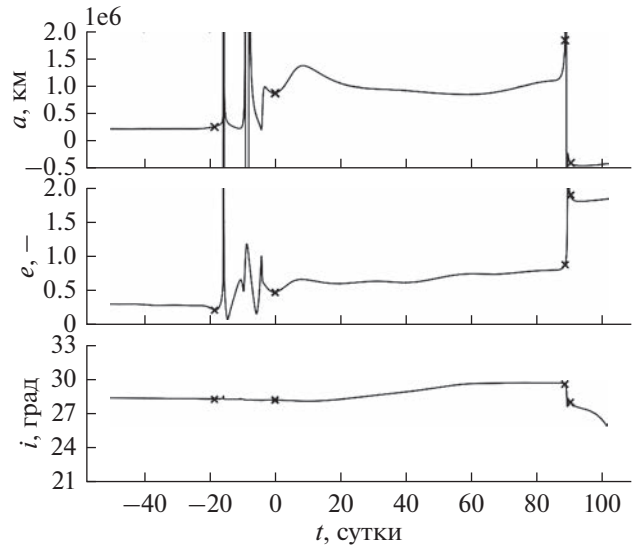


Рис. 11. Оскулирующие элементы отлетной транзитной траектория относительно Земли, маркерами отмечено пересечение грависферы Луны.

Функция Понтрягина рассматриваемой задачи имеет вид:

$$H = H_T + H_p + H_t, \quad (23)$$

где  $H_T$ ,  $H_p$ ,  $H_t$  – части функции Понтрягина, зависящие от тяги, возмущающих ускорений и сопряженной к времени переменной  $p_t$  соответственно:

$$\begin{aligned}
H_T &= \delta T k_1 \left( \frac{k_2}{m} (A_r \sin \vartheta \cos \psi + A_t \cos \vartheta \cos \psi + \right. \\
&\quad \left. + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{c} \right), \\
H_p &= k_1 k_2 (A_r a_{pr} + A_t a_{pt} + A_n a_{pn}), \\
H_t &= \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 p_t, \\
A_t &= 2 p p_p + [(q+1) \cos L + e_x] p_{ex} + \\
&\quad + [(q+1) \sin L + e_y] p_{ey}, \\
A_r &= q (\sin L p_{ex} - \cos L p_{ey}), \\
A_n &= \xi (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \\
&\quad + \frac{s^2}{2} (\cos L p_{ix} + \sin L p_{iy}),
\end{aligned}$$

$p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m$  – сопряженные переменные к  $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K$  и  $m$  соответственно.

Максимизируя выражение (23) по управлению  $\vartheta, \psi$  и  $\delta$ , получим следующие выражения для оптимального управления:

$$\left. \begin{aligned}
\sin \vartheta &= A_r / A_{rt}, & \cos \vartheta &= A_t / A_{rt}, \\
\sin \psi &= A_n / A, & \cos \psi &= A_{rt} / A, \\
\delta &= (1 + \text{sign} S) / 2, & S \neq 0, \delta \in [0; 1], & S = 0;
\end{aligned} \right\} (24)$$

где  $S = \frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m}{c}$  – функция переключения;  
 $A = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}$ .

В итоге краевая задача принципа максимума состоит из системы обыкновенных дифференциальных уравнений оптимального движения

$$\frac{dx}{dK} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \frac{dp_x}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (25)$$

с краевыми условиями для геоцентрического участка траектории, которые с учетом возможности установить  $K_0 = 0$  без потери общности можно записать в виде

$$\begin{aligned}
L_K(0) &= L_0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0(L_0), \quad m(0) = m_0, \\
p_t(0) &= 0, \quad p_{LK}(0) + H(0) = 0,
\end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
L_K(K_f) + K_f &= L_f, \quad \mathbf{x}(K_f) = \mathbf{x}_f(L_f), \\
t(K_f) &= t_{L1}, \quad p_m(K_f) = 0,
\end{aligned} \quad (27)$$

где  $\mathbf{x}^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t)$  – фазовый вектор;  $\mathbf{p}_x^T = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t)$  – вектор сопряженных переменных. Подробный вывод краевой задачи (25)–(27) для задачи перелета между околоземными орбитами приведен в работах [40–42].

В качестве конечной точки перелета для траектории долговременного захвата использовалась точка, определяющая устойчивое многообразие  $L_1$ , вычисляемая с помощью выражения (8). Для отлетной транзитной траектории в качестве конеч-

ной использовалась точка устойчивого многообразия  $L_2$  максимального сближения с  $L_1$ .

Для решения краевой задачи (25)–(27) использовалась методика автоматического дифференцирования на основе комплексно-дуальных чисел [43–45] и последовательного решения задачи с ограниченной мощностью (ОМ-задачи), задачи с минимальной тягой ( $T_{\min}$ -задачи) и задачи с ограниченной тягой (ОТ-задачи), представленные в работах [46–48].

## ПРИМЕРЫ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА

В качестве примера рассмотрим перелеты в системе Земля–Луна на транзитные траектории в окрестности точек либрации  $L_1$  и  $L_2$ , порожденные их инвариантными многообразиями. При этом работа двигательной установки КА предполагается только на геоцентрическом участке.

Для перелета на транзитную траекторию временного захвата конечным положением выступает точка инициализации устойчивого многообразия  $L_1$ , такой выбор в данной задаче позволяет автоматически оптимизировать выход на устойчивое многообразие в ОТ-задачи. Так как в точке оптимального выхода функция переключения (24) равна нулю, это соответствует выключению тяги и пассивному движению до конечного положения – точки инициализации устойчивого многообразия. Само инвариантное многообразие может быть получено интегрированием уравнений пассивного движения из любой его точки, таким образом, последний пассивный участок становится инвариантным многообразием точки  $L_1$ . Отметим, что этот подход не представляется универсальным и не подходит для ОМ-задачи и задачи на минимум тяги, так как в них на оптимальном решении отсутствуют участки пассивного движения.

На рис. 12 приведена траектория перелета КА на орбиту захвата с двигателем малой тяги, на рис. 13 приведены соответствующая функция тяги и функция переключения. Для расчетов были приняты следующие характеристики двигательной установки: тяга 0.32 Н, удельный импульс 3500 с., начальная масса 1000 кг. Начальная точка находилась на круговой орбите высотой 35793 км, наклоном  $28^\circ$ , долготой восходящего узла  $355^\circ$  и истинной долготой начальной точки  $9.3^\circ$ . Выбранная ориентация начальной орбиты соответствует оскулирующим элементам точки либрации в конечный момент перелета. Положение на начальной орбите определялось оскулирующей истинной долготой точки либрации и угловой дальностью перелета, которая в приведенном решении составляла 30 витков. В результате решения было получено, что длительность всего перелета к точке либрации с указанной угловой дальностью занимает 86.12 сут, а выход на инвариантное многообразие происходит за 8.06 сут до сближения с

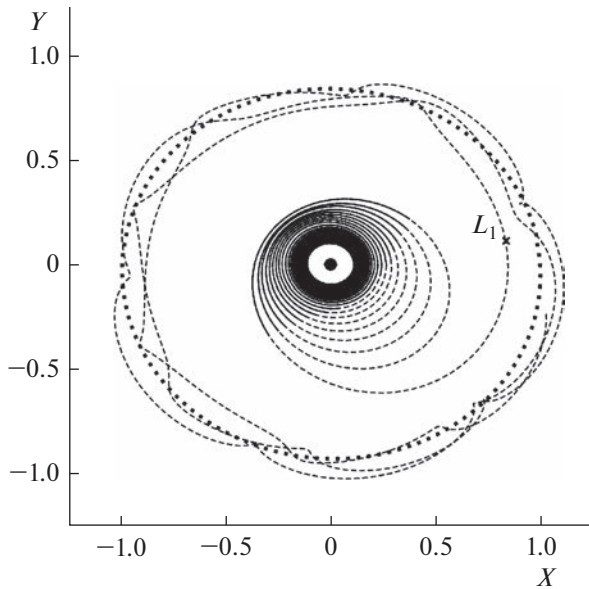


Рис. 12. Траектория перелета на транзитную траекторию временного захвата: активный участок (сплошная линия), пассивный участок (прерывистая линия), орбита Луны (точки).

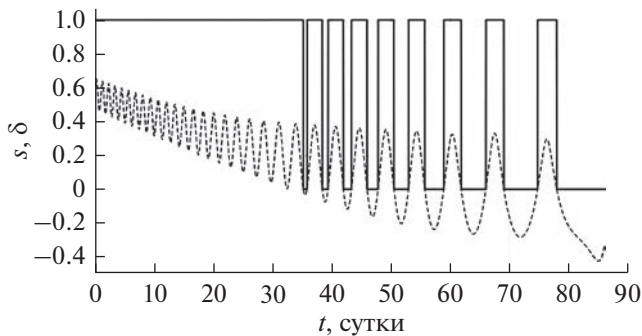


Рис. 13. Функция переключения (прерывистая линия) и функция тяги (сплошная линия) для траектории перелета на транзитную траекторию временного захвата.

точкой либрации. Конечная масса КА составила 953.51 кг.

В качестве второго примера рассматривается перелет на отлетную транзитную траекторию, приведенную на рис. 9 и рис. 10. Для расчетов были приняты следующие характеристики двигательной установки: тяга 0.30 Н, удельный импульс 3500 с, начальная масса 1000 кг. Начальная точка находилась на такой же круговой орбите, что и ранее, с истинной долготой  $110.2^\circ$ . Конечная точка перелета была выбрана как точка минимального сближения с  $L_1$  устойчивого многообразия  $L_2$ . Угловая дальность перелета составляла 30 витков. В результате решения было получено, что длительность всего перелета занимает 80.02 сут, а выход на инвариантное многообразие происходит за 5.82 сут до попадания в конечную точку. Конечная масса КА составила 951.9 кг. Ак-

тивный участок траектории представлен на рис. 14, на рис. 15 приведены соответствующая функция тяги и функция переключения.

Для оценки полученного результата можно отметить, что аналогичная задача набора параболической скорости с помощью трансверсального направления тяги за наименьшее время требует длительности маневра 97.7 сут, при этом конечная масса КА составит 926.25 кг, т.е. необходимая масса топлива в 1.5 раза больше, чем при использовании предложенной траектории, и пересечение грависферы Земли будет происходить с окололунулевой скоростью.

Приведенные численные примеры иллюстрируют возможность использования описанной методики определения транзитных траекторий для получения орбит длительного захвата и отлетных траекторий для межпланетных миссий. Затраты топлива в обоих приведенных случаях оказались эквивалентными и составили всего порядка 5% начальной массы, что обусловлено входом в грависферу Луны в окрестности точки  $L_1$  с близкими значениями константы Якоби в обоих случаях.

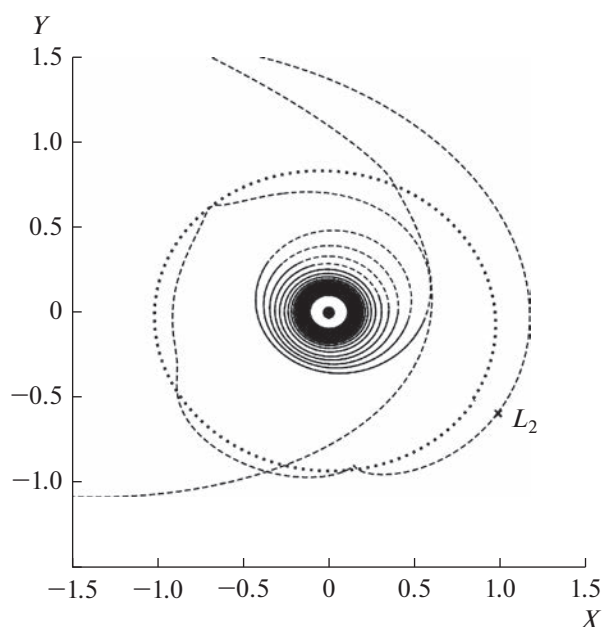
Выключение двигателя до достижения конечной точки, выбранной для расчетов, гарантирует, что и на всей остальной траектории движения по инвариантным многообразиям пассивное движение представляется оптимальным. То есть активный участок заканчивается до входа в грависферу Луны. Таким образом, единственными активными маневрами, необходимыми для реализации приведенных примеров, могут быть коррекции, связанные с экстремальными сближениями с Луной, однако они не потребуют больших затрат топлива.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

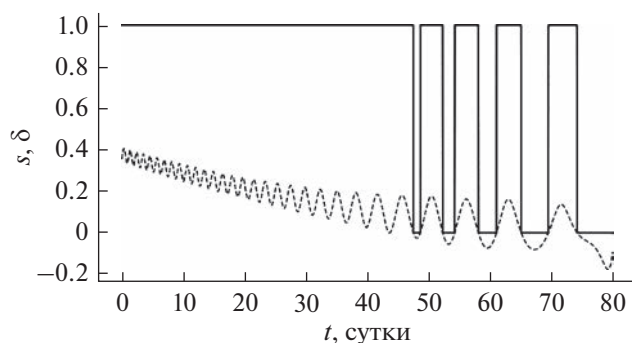
Разработан метод проектирования транзитных траекторий временного захвата на основе инвариантных многообразий точек либрации, позволяющий осуществлять проектирование низкоэнергетических перелетов космических аппаратов с электроракетными двигательными установками малой тяги к Луне, с длительным пребыванием в ее окрестности, и отлетных траекторий для межпланетных миссий.

Представлены численные результаты оптимизации перелетов в системе Земля–Луна на транзитные траектории в окрестности точек либрации  $L_1$ ,  $L_2$ . При этом предположение о работе двигательной установки космического аппарата только на геоцентрическом участке траектории при типичных характеристиках электроракетных двигательных установок подтвердилось, так как удовлетворяет необходимым условиям оптимальности принципа максимума Понтрягина.

Приведенные примеры показывают, что затраты топлива при перелете в окрестность точки либрации  $L_1$  для формирования орбиты временного захвата и отлетной траектории в межпланет-



**Рис. 14.** Траектория перелета на отлетную транзитную траекторию: активный участок (сплошная линия), пассивный участок (прерывистая линия), орбита Луны (точки).



**Рис. 15.** Функция переключения (прерывистая линия) и функция тяги (сплошная линия) для траектории перелета на отлетную транзитную траекторию.

ное пространство оказались эквивалентными и составили около 5% начальной массы. Предложенный метод определения транзитных траекторий, в частности, позволяет определять наиболее эффективные по скорости пересечения грависферы Земли отлетные траектории, формирующиеся при совместном воздействии эффектов трех и четырех тел: перехода неустойчивого многообразия  $L_2$  в WSB-траекторию. Скорость при пересечении грависферы Земли на таких траекториях составляет порядка 0.7 км/с. Подбором даты пролета точки либрации и фазы Солнца можно получить траектории с возвратом после пролета границы грависферы Земли обратно в окрестности Луны и совершения гравитационного маневра, что также увеличивает скорость выхода КА из грависферы Земли. По сравнению с маневром набора параболической скорости с помощью

трансверсального направления тяги за наименьшее время реализация предложенной траектории отлета от Земли требует на 50% меньше топлива.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-79-10206 “Низкоэнергетические межпланетные перелеты с малой тягой” (<https://rscf.ru/project/22-79-10206/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне // Успехи физ. наук. 1957. Т. 43. № 1. С. 73–117.
2. Егоров В.А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек // Искусственные спутники Земли. 1959. № 3. С. 3–12.
3. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. М.: Наука, 1965. 224 с.
4. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. М.: Наука, 1980. 544 с.
5. Фесенков В.Г. О возможности захвата при близком прохождении // Астрон. журн. 1946. Т. 23. № 1. С. 45–58.
6. Davidson M.C. Numerical examples of transition orbits in the restricted three body problem // Astronautica Acta. 1964. Iss. 10. P. 308–313.
7. Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. Ижевск: Ижевская республик. тип., 1999. 160 с.
8. Belbruno E.A. Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth-Moon Trajectories and the Lunar GAS Mission // 19th AIAA/DGLR/JSASS intern.electric propulsion conf. 11–13 May 1987, Colorado Springs, Co. / eds. H. Takegahara, S. Shimada, H. Kimura. Washington, 1987. Art. ID. 87-1054. <https://doi.org/10.2514/6.1987-1054>
9. Belbruno E.A., Miller J.K. Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture // J. Guidance, Control and Dynamics. 1993. V. 16. Iss. 4. P. 770–775.
10. Ивашкин В.В. Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля–Луна–Солнце: препринт. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2001. № 85. 32 с.
11. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом ее Луной // Докл. Акад. наук. 2002. Т. 387. № 2. С. 196–199.
12. Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения // Докл. Акад. наук, 2004. Т. 398. № 3. С. 340–343.
13. Ivashkin V.V. Low energy trajectories for the Moon-to-Earth space flight // J. Earth System Science. 2005. V. 114. Iss. 6. P. 613–618. <https://doi.org/10.1007/BF02715945>
14. Ельников Р.В. Использование функций Ляпунова для вычисления локально-оптимального управления вектором тяги при межорбитальном перелете с малой тягой // Косм. исслед. 2021. Т. 59. № 3. С. 255–264. (Cosmic Research, P. 212–221.) <https://doi.org/10.31857/S0023420621030043>
15. Shannon J., Ozimek M., Atchison J., Hartzell C. Rapid design and exploration of high-fidelity low-thrust transfers to the Moon // IEEE Aerospace Conf. 7–14 March 2020, Big Sky, Montana, USA. P. 4598–4610.
16. Ивашкин В.В., Петухов В.Г. Траектории перелета с малой тягой между орбитами спутников Земли и Луны при использовании орбиты захвата Луной: препринт. ИПМ им. М.В. Келдыша, 2008. № 81. 32 с.

17. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г.* Низкоэнергетические квазиоптимальные траектории с малой тягой к точкам либрации и гало-орбитам // *Косм. исслед.* 2020. Т. 58. № 2. С. 165–176. <https://doi.org/10.31857/S0023420620020053>
18. *Ozimek M.T., Howell K.C.* Low-Thrust Transfers in the Earth–Moon System, Including Applications to Libration Point Orbits // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. Iss. 2. P. 533–549. <https://doi.org/10.2514/1.43179>
19. *Mingotti G., Topputo F., Bernelli-Zazzera F.* Low-energy, low-thrust transfers to the Moon // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2009. V. 105. Iss. 1. P. 61–74.
20. *Singh S.K., Anderson B.D., Taheri E., Junkins J.L.* Exploiting manifolds of  $L_1$  halo orbits for end-to-end Earth–Moon low-thrust trajectory design // *Acta Astronautica*. 2021. V. 183. P. 255–272. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.017>
21. *Uesugi K.* Results of the MUSES-A “HITEN” mission // *Advances in Space Research*. 1996. V. 18. Iss. 11. P. 69–72. [https://doi.org/10.1016/0273-1177\(96\)00090-7](https://doi.org/10.1016/0273-1177(96)00090-7)
22. *Foing B.H., Racca G.D., Marini A.E.A. et al.* SMART-1 after lunar capture: First results and perspectives // *J. Earth System Science*. 2005. V. 114. Iss. 6. P. 687–697. <https://doi.org/10.1007/BF02715952>
23. *Wu W., Tang Y., Zhang L., Qiao D.* Design of communication relay mission for supporting lunar-farside soft landing // *Science China Information Sciences*. 2018. V. 61. Iss. 4. Art. ID. 040305. 14 p. <https://doi.org/10.1007/s11432-017-9202-1>
24. *McGuire M.L., Burke L.M., McCarty S.L. et al.* Low thrust cis-lunar transfers using a 40 kW-class solar electric propulsion spacecraft // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* Washington, 2017. Art. ID. AAS 17-583. 21 p.
25. *Davis D.C., Phillips S.M., Howell K.C. et al.* Station-keeping and Transfer Trajectory Design for Spacecraft in Cislunar Space // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf.* Washington, 2017. Art. ID. AAS 17-826. 20 p.
26. *Легостаев В.П., Лопота В.А., Синявский В.В.* Перспективы и эффективность применения космических ядерно-энергетических установок и ядерных электроракетных двигательных установок // *Косм. техника и технологии*. 2013. № 1. С. 6–17.
27. *Topputo F.* On optimal two-impulse Earth–Moon transfers in a four-body model // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. V. 117. Iss. 3. P. 279–313. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9513-8>
28. *Боровенко В.Н.* Об использовании захвата космического аппарата Луной для формирования орбиты ее искусственного спутника // *Космонавтика и ракетостроение*. 2015. № 1. С. 30–36.
29. *Константинов М.С., Тант А.М.* Использование точки либрации  $L_2$  системы Земля–Луна при перелете космического аппарата на окололунную орбиту // *Космонавтика и ракетостроение*. 2022. № 3. С. 30–43.
30. *Qi Y., Xu S.* Lunar capture in the planar restricted three-body problem // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2014. V. 120. P. 401–422. <https://doi.org/10.1007/s10569-014-9582-3>
31. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
32. *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982. 655 с.
33. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика: Аналитические и качественные методы. М.: Наука, 1964. 456 с.
34. *Archinal B.A., Acton C.H., A’Hearn M.F. et al.* Report of the IAU working group on cartographic coordinates and rotational elements: 2015 // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018. V. 130. 46 p. <https://doi.org/10.1007/s10569-017-9805-5>
35. *Conley C.C.* Low energy transit orbits in the restricted three-body problems // *SIAM J. Applied Mathematics*. 1968. V. 16. Iss. 4. P. 732–746.
36. *Fitzgerald J., Ross S.D.* Geometry of transit orbits in the periodically-perturbed restricted three-body problem // *Advances in Space Research*. 2022. V. 70. Iss. 1. P. 144–156. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2022.04.029>
37. *Лукьянов Л.Г.* Аналог поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической, параболической и гиперболической задачах трех тел // *Письма в Астрон. журн.* 2010. Т. 36. № 11. С. 869–880.
38. *Hyeraci N., Topputo F.* The role of true anomaly in ballistic capture // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013. V. 116. P. 175–193. <https://doi.org/10.1007/s10569-013-9481-z>
39. *Circi C.* Properties of transit trajectory in the restricted three and four-body problem // *Advances in Space Research*. 2012. V. 49. Iss. 10. P. 1506–1519. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2012.02.034>
40. *Петухов В.Г.* Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой // *Косм. исслед.* 2019. Т. 57. № 5. С. 373–385. (*Cosmic Research*. P. 351–363.) <https://doi.org/10.1134/S0023420619050066>
41. *Ivanyukhin A., Petukhov V.* Optimization of multi-revolution limited power trajectories using angular independent variable // *J. Optimization Theory and Applications*. 2021. V. 191. Iss. 2. P. 575–599. <https://doi.org/10.1007/s10957-021-01853-8>
42. *Petukhov V., Ivanyukhin A., Popov G. et al.* Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance // *Acta Astronautica*, 2022. V. 197. P. 354–367. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012>
43. *Yoon S.W., Petukhov V.G.* Perturbed low-thrust trajectory optimization using the algebra of complex dual numbers // *8th Intern. Conf. Astrodynamics Tools and Techniques*. ESA. 23–25 June 2021. 15 p. <https://www.researchgate.net/publication/354144026>
44. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Part 1: Theory and method // *Cosmic Research*. 2021. V. 59. Iss. 5. P. 401–413. <https://doi.org/10.1134/S0010952521050099>
45. *Petukhov V.G., Yoon S.W.* Optimization of perturbed spacecraft trajectories using complex dual numbers. Pt. 2: Numerical Results // *Cosmic Research*. 2021. V. 59. Iss. FF. 6. P. 517–528. <https://doi.org/10.1134/S0010952521060083>
46. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г.* Задача минимизации тяги и ее приложения // *Косм. исслед.* 2015. Т. 53. № 4. С. 320–331. (*Cosmic Research*. P. 300–310.) <https://doi.org/10.7868/S0023420615040044>
47. *Иванюхин А.В.* Область существования решений в задаче оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной тягой // *Современная математика. Фундам. направления*. 2016. Т. 62. С. 100–123.
48. *Иванюхин А.В., Петухов В.Г., Юн С.У.* Траектории перелета к Луне с минимальной тягой // *Косм. исслед.* 2022. Т. 60. № 6. С. 517–527. <https://doi.org/10.31857/S002342062205003X>