

УДК 538.9;539.6;544.03;544.2;544.6

О ВЛИЯНИИ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

© 2023 г. А. И. Григорьев^{1, *}, Н. Ю. Колбнева², С. О. Ширяева²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
просп. Вернадского, д. 101, к. 1, Москва, 119526 Россия

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, Ярославль, 150000 Россия

*e-mail: grigori@mail.ru

Поступила в редакцию 07.06.2023 г.

После доработки 22.06.2023 г.

Принята к публикации 22.06.2023 г.

В теоретических асимптотических линейных по малой безразмерной амплитуде осцилляций расчетах исследовано влияние вязкоупругих свойств заряженной капли электропроводной вязкоупругой жидкости на интенсивность ее электромагнитного излучения. Показано, что учет эффекта релаксации вязкости приводит: к снижению величины декремента затухания, определяемого потерями энергии на излучение электромагнитных волн, и интенсивности электромагнитного излучения на высоких частотах; к существенному снижению декремента вязкого затухания мелких облачных капель; к существенной зависимости декремента вязкого затухания от характерного времени релаксации. Обнаружено, что эффект релаксации вязкости жидкости не оказывает заметного влияния на затухающие капиллярные осцилляции и электромагнитное излучение дождевых капель. На критические условия реализации электростатической неустойчивости капли по отношению к собственному заряду вязкоупругость, как и вязкость жидкости влияния не оказывает.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, капля, заряд, электромагнитное излучение

DOI: 10.31857/S0023291223600438, **EDN:** YXIWRJ

ВВЕДЕНИЕ

Исследование электромагнитного излучения, возникающего при капиллярных осцилляциях капли, заряженной собственным или индуцированным внешним электрическим полем зарядами, представляет значительный интерес в связи с широким спектром разнообразных приложений в геофизике, технической физике, гидрометеорологии [1–3]. Впервые феномен излучения электромагнитных волн осциллирующей облачной капли, связанный с проблемами радиолокационного зондирования грозных облаков, обсуждался в [4, 5] с использованием гидродинамической модели осциллирующей заряженной капли идеальной проводящей жидкости. Важность обсуждаемой проблемы обуславливает появление новых работ [6]. Однако вопросы, связанные с наличием у реальной жидкости вязких и вязкоупругих свойств, изучены недостаточно полно. В связи со сказанным целесообразно провести исследование влияния эффекта релаксации вязкости на электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли воды. Проблема не умозритель-

ная, а реальная, поскольку температура капель воды в облаках достигает минус двадцати градусов, и капли воды становятся переохлажденными, т.е. находятся на грани замерзания и приобретают вязкоупругие свойства.

Хорошо известно, что жидкая капля обладает упругими свойствами [7, 8], если характерное гидродинамическое время осцилляций ее поверхности много больше характерных молекулярных времен 10^{-12} – 10^{-11} (при комнатных температурах [8]). Рассматривая эффект релаксации вязкости, отметим, что его физическая природа заключается в превращении накопленной энергии внешних силовых воздействий на каплю (энергии упругих деформаций) в кинетическую энергию поля скоростей течения жидкости с последующей диссипацией в тепловую энергию за счет вязкости [9].

Собственно говоря, эффект релаксации вязкости проявляется в том, что в результате кратковременных внешних силовых воздействий жидкая среда капли упруго деформируется, а возникающие после прекращения этих воздействий

сдвиговые напряжения затухают с временем релаксации $\tau \sim 10^{-5}$ с [10], превышающим характерное время внешних воздействий на каплю.

Описание вязкоупругих свойств жидкости достигается введением коэффициента комплексной кинематической вязкости ν , зависящей от частоты ω_n , согласно известной формуле Максвелла [7, 8, 11]:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + i\omega_n\tau}; \quad (1)$$

где i — мнимая единица, ν_0 — коэффициент кинематической вязкости для нулевой частоты внешнего воздействия, τ — характерное время релаксации вязкости (время, за которое возникающие в жидкости упругие деформации возвращаются к нулевому уровню). Согласно [12], для проводимого качественного анализа примем $\tau \sim 10^{-5}$ с. Здесь предполагается, что временная зависимость амплитуд капиллярных осцилляций капли изменяется по гармоническому закону: $\sim \exp(i\omega_n t)$.

Если в уравнении (1) частота капиллярных осцилляций n -ой моды (частота внешнего воздействия) удовлетворяет условию $\omega_n\tau \ll 1$, то вязкая жидкость не обладает упругими свойствами. Если же выполняется условие $\omega_n\tau \gg 1$, то получаем весьма вязкую жидкость, обладающую свойствами твердого тела.

В анализируемом случае при возбуждении основной колебательной моды $n = 2$ частота осцилляций облачных капель размером от $R = 3$ мкм до $R = 30$ мкм изменяется в диапазоне от $\omega_2 = 4.64 \times 10^6$ рад/с до $\omega_2 = 147 \times 10^3$ рад/с. Можно показать, что при характерном времени релаксации $\tau = 1 \times 10^{-5}$ с величина произведения $\omega_n\tau$ принимает значения от $\omega_n\tau \approx 1.47$ при $R = 30$ мкм до $\omega_n\tau \approx 46.4$ при $R = 3$ мкм. Собственно говоря, для облачных капель величина $\omega_n\tau > 1$, что позволяет считать жидкость вязкоупругой.

Кроме того, оценка периода T осцилляций облачных капель (периода внешнего воздействия) дает $T = 1.36 \times 10^{-6}$ с при $R = 3$ мкм и $T = 4.27 \times 10^{-5}$ с при $R = 30$ мкм. Таким образом, можно утверждать, что периоды осцилляций облачных капель велики по сравнению с молекулярными временами (10^{-12} – 10^{-11} с при комнатных температурах), поэтому вязкую жидкость можно считать ньютоновской, для которой применимо уравнение Навье–Стокса.

Следует отметить, что выражение (1) учитывает молекулярную структуру реальной жидкости, обладающей определенными скоростями передачи межмолекулярного взаимодействия.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется изолированная заряженная сферическая капля радиуса R вязкой несжимаемой проводящей жидкости, обладающая зарядом Q . Обозначим массовую плотность жидкости ρ , коэффициент поверхностного натяжения — σ , коэффициент кинематической вязкости — ν . Для простоты последующих вычислений в качестве внешней среды примем вакуум (с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_{\text{ex}} = 1$).

Все рассмотрение проведем в сферической системе координат (r, θ, ϕ) , начало которой расположим в центре масс равновесной капли. Имея в виду качественное исследование, ограничимся осесимметричной постановкой задачи, т.е. в функциях будем пренебрегать зависимостью от азимутальной координаты ϕ .

Уравнение поверхности капли, возмущенной капиллярным волновым движением, в произвольный момент времени t запишем в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t), \quad (2)$$

где $\xi(\theta, t)$ описывает возмущение равновесной сферической формы, обусловленное капиллярными осцилляциями в результате внешних силовых воздействий (коагуляция, дробление, трение о воздух, столкновение с крупными твердыми частицами, а также разными по размеру каплями), амплитуда может увеличиваться до величины $\sim R$ [13].

Для проводящей жидкости предполагается, что характерное гидродинамическое время, определяемое периодом основной моды капиллярных осцилляций капли, существенно превосходит характерное время перераспределения заряда:

$$\left(\frac{R^3 \rho}{\sigma}\right)^{1/2} \gg \frac{\epsilon_{\text{in}}}{4\pi\gamma}, \quad \text{где } \gamma \text{ — удельная проводимость,}$$

ϵ_{in} — диэлектрическая проницаемость жидкости. Отметим, что ускоренное движение поверхностного заряда Q капли при капиллярных осцилляциях вызывает излучение электромагнитных волн [4–6].

В качестве малого параметра задачи примем $\epsilon \equiv \max|\xi|/R \ll 1$, имеющего смысл безразмерной амплитуды осцилляций капли. Положим, что поле скоростей движения жидкости $\vec{V}(r, \theta, t)$ и искажение равновесной сферической формы $\xi(\theta, t)$ являются величинами одного порядка малости $|\vec{V}(r, \theta, t)| \sim |\xi(\theta, t)| \sim \epsilon$.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи о капиллярных осцилляциях заряженной электропроводной капли вязкой жидкости и об оценке интенсивности возникающего при этом электромагнитного

излучения состоит из уравнения Навье—Стокса (уравнения движения вязкой жидкости):

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t) \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) = -\frac{1}{\rho} \nabla P(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t); \quad (3)$$

$P(\vec{r}, t)$ — давление внутри капли;
уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \vec{V}(r, \theta, t) = 0; \quad (4)$$

волнового уравнения и уравнения непрерывности электрического поля, описываемого напряженностью $\vec{E}$:

$$\Delta \vec{E}(r, \theta, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E}(r, \theta, t) = 0; \quad (5)$$

с условием ограниченности напряженности электрического поля $\vec{E}(r, \theta, t)$ на бесконечном удалении от поверхности капли:

$$r \rightarrow \infty: \quad \vec{E}(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad (6)$$

и поля скоростей $\vec{V}(r, \theta, t)$ в начале координат:

$$r \rightarrow 0: \quad \vec{V}(r, \theta, t) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Условие (6) соответствует расходящейся электромагнитной волне, убывающей при $r \rightarrow \infty$.

Потребуем, чтобы на свободной поверхности капли $F(r, \theta, t) \equiv r - R - \xi(\theta, t) = 0$ выполнялись граничные условия:

кинематическое:

$$\frac{\partial F(r, \theta, t)}{\partial t} + \vec{V}(r, \theta, t) \nabla F(r, \theta, t) = 0; \quad (8)$$

динамическое для касательной компоненты тензора напряжений:

$$\vec{\tau}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t) \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}(r, \theta, t) (\vec{\tau}(r, \theta, t) \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) = 0; \quad (9)$$

$\vec{n}$, $\vec{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности капли (2);

динамическое для нормальной компоненты тензора напряжений:

$$P(r, \theta, t) - 2\rho\nu\vec{n}(r, \theta, t) (\vec{n}(r, \theta, t) \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) + P_q(r, \theta, t) = P_\sigma(r, \theta, t); \quad (10)$$

$P_q = \vec{E}^2/8\pi$ — давление электрических сил;

$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}$ — давление капиллярных сил;

а также условие эквипотенциальности:

$$(\vec{\tau}(r, \theta, t) \vec{E}(r, \theta, t)) = 0. \quad (11)$$

Кроме того, введем дополнительные интегральные условия, исходя из очевидных требова-

ний сохранения объема капли при ее осцилляциях и отсутствия движения центра масс:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (12)$$

$$V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

А также постоянства полного поверхностного заряда:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}(r, \theta, t) \vec{E}(r, \theta, t)) dS = Q; \quad (13)$$

$$S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

Здесь условия (12) накладывают ограничения снизу на спектр колебательных мод осциллирующей капли, принимающих участие в формировании деформации $\xi(\theta, t)$ равновесной сферической капли. Это означает, что в расчетах первого порядка малости по ε исключается возбуждение центрально симметричной (нулевой) моды $n = 0$, отвечающей за радиальные пульсации капли, и трансляционной (первой) моды $n = 1$, соответствующей поступательному движению капли [14].

НАЧАЛО АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Решение выписанной задачи (3), (4), (5) с граничными и дополнительными условиями (6)—(13) будем искать методом прямого разложения в рамках теории возмущений [15] в линейном приближении по малому параметру $\varepsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$, для чего все искомые функции запишем в виде асимптотических разложений по ε :

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ \vec{V}(r, \theta, t) &= \vec{V}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ \vec{E}(r, \theta, t) &= \vec{E}^{(0)}(r, \theta) + \vec{E}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P(r, \theta, t) &= P^{(0)}(r, \theta) + P^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_q(r, \theta, t) &= P_q^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \end{aligned} \quad (14)$$

где верхний индекс в скобках указывает на порядок малости соответствующей величины по ε .

Обратим внимание, что в граничных условиях (9), (10), (11), (13) требуется выписать в явном виде орты $\vec{n}(r, \theta, t)$, $\vec{\tau}(r, \theta, t)$.

Для вычисления нормального орта $\vec{n}(r, \theta, t)$ к свободной поверхности капли $F(r, \theta, t) = 0$ воспользуемся общим соотношением: $\vec{n}(r, \theta, t) = \nabla F / |\nabla F|$.

Ограничиваясь слагаемыми первого порядка малости по ε , найдем:

$$\vec{n}(r, \theta, t) = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta. \quad (15)$$

Принимая во внимание, что касательный орт $\vec{\tau}(r, \theta, t)$ в общем случае распадается на орты касательных к параллелям $\vec{\tau}_\varphi(r, \theta, t)$ и меридианам $\vec{\tau}_\theta(r, \theta, t)$, и учитывая, что они должны иметь единичную длину, получим: $\vec{\tau}_\varphi = \vec{\tau}_\varphi^* / |\vec{\tau}_\varphi^*|$, $\vec{\tau}_\theta = \vec{\tau}_\theta^* / |\vec{\tau}_\theta^*|$.

Выбирая в качестве произвольного постоянного вектора орт оси симметрии $\vec{e}_z$ из векторного произведения $\vec{\tau}_\varphi^* = \vec{e}_z \times \vec{n}$, несложно показать, что в линейном по ε приближении единичный вектор касательной к параллелям $\vec{\tau}_\varphi$ совпадает с азимутальным ортом $\vec{e}_\varphi$ сферической системы координат:

$$\vec{\tau}_\varphi = \vec{e}_\varphi. \quad (16)$$

Чтобы записать единичный вектор касательной к меридианам $\vec{\tau}_\theta$, применим формулу $\vec{\tau}_\theta^* = \vec{\tau}_\varphi^* \times \vec{n}$, из которой в первом порядке малости по ε найдем:

$$\vec{\tau}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_r + \vec{e}_\theta. \quad (17)$$

В (15)–(17) $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ – орты сферической системы координат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

Подстановка разложений (14) в полную математическую формулировку задачи (3)–(13) позволяет выделить задачу нулевого порядка малости по ε , описывающую равновесное состояние системы:

$$\text{rot } \vec{E}^{(0)} = 0; \quad \text{div } \vec{E}^{(0)} = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \vec{E}^{(0)} \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow R: \quad P_1^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(0)}(r, \theta) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta);$$

$$P^{(0)} = P_0; \quad P_q^{(0)} = \frac{(\vec{E}^{(0)})^2}{8\pi}; \quad P_\sigma^{(0)} \sigma \text{div } \vec{n}_0; \quad \vec{n}_0 = \vec{e}_r;$$

$$r \rightarrow R: \quad (\vec{\tau}_0 \vec{E}^{(0)}) = 0;$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}_0 \vec{E}^{(0)}) dS = Q;$$

$$S = [r = R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

решение которой легко находится:

$$\vec{E}^{(0)} = \frac{Q}{r^2} \vec{e}_r; \quad P_0 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4}. \quad (18)$$

В выше записанных уравнениях P_0 – постоянное давление в капле, $\vec{n}_0$ и $\vec{\tau}_0$ – орты нормали и касательной к равновесной поверхности сферы, име-

ющие вид: $\vec{n}_0 = \vec{e}_r$, $\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta$, $\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi$, где $\vec{\tau}_{0\varphi}$, $\vec{\tau}_{0\theta}$ – единичные векторы касательных к меридианам и параллелям невозмущенной сферы.

В итоге несложно убедиться, что равновесная форма поверхности капли совпадает со сферической.

РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Подставляя асимптотические разложения (14) в исходную систему уравнений (3), (4), (8)–(10), (12) и собирая слагаемые, содержащие малый параметр ε в первой степени, сформулируем гидродинамическую задачу первого порядка:

$$\frac{\partial \vec{V}(r, \theta, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P^{(1)}(r, \theta, t) + \nu \Delta \vec{V}(r, \theta, t); \quad (19)$$

$$\text{div } \vec{V}(r, \theta, t) = 0; \quad (20)$$

$$r = R: \quad -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + (\vec{V}(r, \theta, t) \vec{e}_r) = 0; \quad (21)$$

$$\vec{\tau}_0 (\vec{n}_0 \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) + \vec{n}_0 (\vec{\tau}_0 \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) = 0; \quad (22)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho\nu\vec{n}_0 (\vec{n}_0 \nabla) \vec{V}(r, \theta, t) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t); \quad (23)$$

$$3R^2 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0; \quad (24)$$

$$4R^3 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

Заметим, что в линеаризованные граничные условия (21)–(23) входит величина $\vec{V}(r, \theta, t)$ первого порядка малости, поэтому в качестве единичных векторов $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$ выбраны орты нормали $\vec{n}_0$ касательной $\vec{\tau}_0$ к невозмущенной поверхности сферы.

Для отыскания поля скоростей движения вязкой жидкости $\vec{V}(r, \theta, t)$ воспользуемся методом операторной скаляризации, подробно разобранным в [16]. Представим $\vec{V}(r, \theta, t)$ в виде суммы трех ортогональных полей:

$$\vec{V}(r, \theta, t) = \sum_{j=1}^3 \vec{N}_j \psi_j(r, \theta, t); \quad (j = 1, 2, 3); \quad (25)$$

где ψ_j – неизвестные скалярные функции, $\vec{N}_j$ – векторные дифференциальные операторы, имеющие вид:

$$\begin{aligned} \vec{N}_1 &\equiv \nabla; \quad \vec{N}_2 \equiv \vec{N}_1 \times \vec{r} \equiv \nabla \times \vec{r}; \\ \vec{N}_3 &\equiv \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{r}). \end{aligned} \quad (26)$$

Иначе говоря, поле скоростей $\vec{V}(r, \theta, t)$ записывается в виде суперпозиции потенциальной и вихревой компонент течения жидкости: оператор $\vec{N}_1$ выделяет потенциальную составляющую, а операторы $\vec{N}_2, \vec{N}_3$ – вихревые: тороидальную и полоидальную. Вихревая часть движения связана с вязкостью реальной жидкости.

Введем операторы $\vec{N}_j^+$, эрмитово сопряженные операторам $\vec{N}_j$ (26), выражаемые соотношениями:

$$\vec{N}_1^+ \equiv -\nabla; \quad \vec{N}_2^+ \equiv \vec{r} \times \nabla; \quad \vec{N}_3^+ \equiv (\vec{r} \times \nabla) \times \nabla; \quad (27)$$

$\vec{r}$ – радиус–вектор; верхний индекс “+” указывает на эрмитово сопряжение. При этом выписанные операторы $\vec{N}_j, \vec{N}_j^+$ подчиняются условиям ортогональности:

$$(\vec{N}_j^+ \vec{N}_m) = 0; \quad (j \neq m); \quad (28)$$

и условиям коммутативности с оператором Лапласа (Δ):

$$\Delta \vec{N}_j = \vec{N}_j \Delta. \quad (29)$$

Подстановка разложения (25) в уравнения Навье–Стокса (19) и непрерывности (20) при использовании свойств операторов (28), (29) позволяет получить уравнения для независимых скалярных функций $\psi_j(r, \theta, t)$:

$$\Delta \psi_j(r, \theta, t) - \frac{1}{v} (1 - \delta_{ij}) \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t} = 0; \quad (30)$$

$$(j = 1, 2, 3);$$

и выражение для поправки к давлению в капле, связанной с возмущением $\xi(\theta, t)$:

$$P(r, \theta, t) = -\rho \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (31)$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера.

Перепишем теперь граничные условия (21)–(23) в терминах проекций вектора поля скоростей V_r, V_θ, V_φ на орты сферической системы координат. В итоге, кинематическое (21) и динамическое условия для нормальной составляющей тензора напряжений (23) граничные условия представим в виде:

$$r = R: \quad -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + V_r(r, \theta, t) = 0; \quad (32)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial r} + P_q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t); \quad (33)$$

а динамическое условие (22) для касательной компоненты тензора напряжений распадется на два соотношения:

первое для $\vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta$:

$$r = R: \quad \frac{\partial V_\theta(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r(r, \theta, t)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} V_\theta(r, \theta, t) = 0; \quad (34)$$

второе для $\vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi$:

$$r = R: \quad \frac{\partial V_\varphi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} V_\varphi(r, \theta, t) = 0. \quad (35)$$

Выражая составляющие V_r, V_θ, V_φ вектора скорости $\vec{V}(r, \theta, t)$ в сферической системе координат через скалярные функции ψ_j :

$$V_r(r, \theta, t) = \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \hat{L} \psi_3(r, \theta, t);$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$V_\theta(r, \theta, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3(r, \theta, t)}{\partial \theta} \right);$$

$$V_\varphi(r, \theta, t) = -\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial \theta};$$

приведем граничные условия (32), (33), (34), (35) к виду:

$$r = R: \quad -\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{R} \hat{L} \psi_3(r, \theta, t) = 0; \quad (36)$$

$$P^{(1)}(r, \theta, t) - 2\rho v \left(\frac{\partial^2 \psi_1(r, \theta, t)}{\partial r^2} - \hat{L} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_3(r, \theta, t)}{r} \right) \right) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) = P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t); \quad (37)$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\theta} = \vec{e}_\theta: \quad 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_1(r, \theta, t)}{r} \right) -$$

$$- \frac{1}{R^2} (2 + \hat{L}) \psi_3(r, \theta, t) + \frac{\partial^2 \psi_3(r, \theta, t)}{\partial r^2} = 0;$$

$$\text{для } \vec{\tau}_{0\varphi} = \vec{e}_\varphi: \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\psi_2(r, \theta, t)}{r} \right) = 0. \quad (39)$$

В (37) выражения для добавок к давлениям $P_q^{(1)}, P_\sigma^{(1)}$ в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций ϵ ищутся в виде:

$$P_q^{(1)} = \frac{\epsilon_{ex}}{8\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\vec{E}^{(0)})^2 \xi(\theta, t) + 2\vec{E}^{(0)} \vec{E}^{(1)} \right)^2; \quad (40)$$

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R} \left[- (2 + \hat{L}) \frac{\xi(\theta, t)}{R} \right]; \quad (41)$$

где $\hat{L}$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Отметим, что при выводе выражений (37), (38) было учтено свойство $\vec{N}_2^+ \vec{N}_2 = \hat{L}$ [16].

Принимая во внимание решение задачи об излучении электромагнитных волн [7], временную

зависимость функций $\psi_j(r, \theta, t)$, $\xi(\theta, t)$ примем экспоненциальной:

$$\psi_j(r, \theta, t) \sim \exp(i\omega_n t), \quad \xi(\theta, t) \sim \exp(i\omega_n t), \quad (42)$$

где ω_n — частота n -моды капиллярных осцилляций капли, в общем случае комплексная; реальная ее часть определяет собственную частоту осцилляций, а мнимая часть — декремент затухания или инкремент капиллярной электростатической неустойчивости.

Тогда решения (30), подчиняющиеся условию ограниченности (7), будем искать в виде рядов по осесимметричным полиномам Лежандра [17, 18]:

$$\psi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) r^n P_n(\mu); \quad (43)$$

$$\psi_j(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{nj} \exp(i\omega_n t) I_n\left(r\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) P_n(\mu); \quad (44)$$

($j = 2; 3$).

В выражении (44) нижний индекс j в коэффициенте B_{nj} указывает на вихревую тороидальную ($j = 2$) или полоидальную ($j = 3$) составляющую потенциала поля скоростей течения жидкости в капле.

Ясно, что функция $\xi(\theta, t)$ связана с $\psi_j(r, \theta, t)$ кинематическим граничным условием (36), поэтому возмущение $\xi(\theta, t)$ естественно представить в виде:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu); \quad (45)$$

где в силу дополнительных условий (24) суммирование по n начинается с $n = 2$.

В (42), (44) i — мнимая единица; $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n -ого порядка [19]; $\mu \equiv \cos \theta$; $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода [20]; n — целое положительное число. Коэффициенты разложений A_n , B_{nj} , M_n являются малыми величинами первого порядка по ϵ .

Для того чтобы связать амплитудные коэффициенты A_n , B_{n3} с амплитудами капиллярных осцилляций M_n , используем граничные условия (36), (38). Подставляя в них разложения (43)–(45), получим соотношения:

$$A_n = M_n \frac{i\omega_n \left(f\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) - 1 - \frac{2}{x^2}(n-1)(n+1) \right)}{nR^{n-1} \left(f\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) - 1 \right)}; \quad (46)$$

$$B_{n3} = M_n \frac{2\nu(n-1)}{RnI_n\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) \left(f\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) - 1 \right)}; \quad (47)$$

где для удобства введено обозначение:

$$f(x) \equiv \frac{2I_{n+1}(x)}{xI_n(x)}; \quad x \equiv R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}.$$

Граничное условие (39) при подстановке в него разложения (43) и $j = 2$ дает выражение:

$$B_{n2} \left[\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}} I_{n+1}\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) + \frac{1}{R}(n-1) I_n\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) \right] = 0;$$

которое справедливо при $B_{n2} = 0$, что соответствует отсутствию тороидальной компоненты поля скоростей, связанного со скалярной функцией $\psi_2(r, \theta, t)$ при капиллярных осцилляциях капли, либо при равенстве нулю выражения в квадратных скобках, имеющее тривиальное решение. Из этого следует, что в линейном приближении по ϵ тороидальная составляющая течения жидкости в капле не оказывает влияния на формирование возмущения $\xi(\theta, t)$ равновесной сферы. В связи с этим в дальнейшем анализе $\psi_2(r, \theta, t)$ опустим.

При использовании (43), (46) решение (30) для поправки первого порядка малости к давлению внутри капли $P^{(1)}$ (см. (31)) представляется в виде:

$$P^{(1)} = \rho R \sum_{n=2}^{\infty} M_n \frac{\omega_n^2 \left(f\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right) - \frac{2}{x^2}(n-1)(n+1) \right)}{nf\left(R\sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}\right)} \times \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (48)$$

Пользуясь (41), (45), несложно найти линейную по ϵ компоненту давления капиллярных сил под искаженной капиллярным волновым движением сферической поверхностью:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (49)$$

Очевидно, что для отыскания поправки $P_q^{(1)}$ к давлению электрического поля (40) собственного заряда на свободную поверхность капли возникает необходимость в нахождении добавки к напряженности $\vec{E}^{(1)}$, вызванной возмущением $\xi(\theta, t)$. Тогда с учетом ортов касательной (16), (17) и внешней нормали (15) из системы уравнений (5), (6), (11), (13) выпишем отдельную электрическую задачу первого порядка по ϵ :

$$\Delta \bar{E}^{(1)}(r, \theta, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial t^2} = 0; \quad (50)$$

$$\operatorname{div} \bar{E}^{(1)}(r, \theta, t) = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \bar{E}^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (51)$$

$$r = R: \bar{\tau} = \bar{\tau}_\theta: \frac{Q}{R^3} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + E_\theta^{(1)} = 0; \quad (52)$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_\varphi: E_\varphi^{(1)} = 0; \quad (53)$$

$$\int_0^\pi E_r^{(1)} \sin \theta d\theta = 0; \quad (54)$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме, $E_r^{(1)}$, $E_\theta^{(1)}$, $E_\varphi^{(1)}$ — проекции вектора $\bar{E}^{(1)}$ на орты сферической системы координат.

Следуя методу скаляризации [16], представим напряженность электрического поля $\bar{E}^{(1)}$ в виде разложения по векторным ортогональным операторам $\bar{N}_j$:

$$\bar{E}^{(1)} = \sum_{j=1}^3 \bar{N}_j \Phi_j; \quad (j = 1, 2, 3); \quad (55)$$

где Φ_j — произвольные скалярные функции, а дифференциальные операторы $\bar{N}_j$ описываются соотношениями (27) и удовлетворяют свойствам (28), (29).

Подставляя векторное равенство (55) в уравнение непрерывности (50) и принимая во внимание условие ортогональности (28), для скалярной функции Φ_1 получим уравнение Лапласа:

$$\Delta \Phi_1 = 0. \quad (56)$$

Для скаляризации векторного волнового уравнения (50) подставим в него разложение (55) и используем условие коммутативности с оператором Лапласа (29). В результате имеем систему трех независимых уравнений:

$$\sum_{j=1}^3 \bar{N}_j \left\{ \Delta \Phi_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} \right\} = 0; \quad (j = 1, 2, 3).$$

Умножим эти выражения слева последовательно на эрмитово сопряженные операторы $\bar{N}_j^+$ ($j = 1, 2, 3$) и при помощи свойства ортогональности (28) получим уравнения Гельмгольца:

$$\Delta \Phi_j + k^2 \Phi_j = 0; \quad k = \frac{\operatorname{Re} \omega_n}{c};$$

при выводе которых учтена гармоническая зависимость величин Φ_j от времени: $\Phi_j \sim \exp(i\omega_n t)$ k — волновое число; c — скорость распространения электромагнитной волны в вакууме.

Зная (56), из последнего уравнения для значения индекса $j = 1$ придем к обнулению функции Φ_1 . Тогда добавка к напряженности поля $\bar{E}^{(1)}$, вызванная капиллярными осцилляциями капли, содержит лишь вихревую часть:

$$\bar{E}^{(1)} = \bar{N}_2 \Phi_2 + \bar{N}_3 \Phi_3.$$

Пользуясь явным видом операторов $\bar{N}_2$, $\bar{N}_3$, перепишем составляющие вектора $\bar{E}^{(1)}$ в сферической системе координат, выраженные через скалярные функции Φ_2 , Φ_3 :

$$\bar{N}_2 \Phi_2 \equiv -\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \bar{e}_\varphi; \quad (57)$$

$$\bar{N}_3 \Phi_3 \equiv -\frac{1}{r} \hat{L} \Phi_3 \bar{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \bar{e}_\theta. \quad (58)$$

Решения уравнений Гельмгольца при $j = 2, 3$, удовлетворяющие условию ограниченности (51), ищутся в виде [17, 18]:

$$\Phi_j = \sum_{n=0}^{\infty} D_{nj} \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu); \quad (j = 2, 3); \quad (59)$$

где $h_n^{(2)}(z)$ — сферическая функция Бесселя третьего рода [20], D_{nj} — неизвестные коэффициенты, имеющие первый порядок малости по ε .

Если же в граничные условия (53), (54) подставить представление компонент электрического поля (57), (58) с учетом выписанных решений (59), то интегральное условие сохранения полного заряда капли (54) обращается в тождество, а условие эквипотенциальности (53) для орта касательной $\bar{\tau}_\varphi$ сводится к виду $\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = 0$. Удовлетворить этому равенству можно, если амплитудные коэффициенты D_{n2} положить равными нулю, что соответствует отсутствию тороидальной части поля: $\Phi_2 = 0$.

В итоге приходим лишь к полоидальной составляющей напряженности электрического поля:

$$\bar{E}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{n3} \exp(i\omega_n t) \left[\frac{1}{r} n(n+1) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu) \bar{e}_r + \left(\frac{1}{r} h_n^{(2)}(kr) + \frac{\partial h_n^{(2)}(kr)}{\partial r} \right) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \bar{e}_\theta \right];$$

где связь постоянных коэффициентов D_{n3} с амплитудами M_n возмущения $\xi(\theta, t)$ находится из условия эквипотенциальности (52) для единичного вектора касательной $\vec{\tau}_\theta$:

$$D_n^{(3)} = -\frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2} M_n \frac{1}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}.$$

В результате получим явный вид поправки $\vec{E}^{(1)}$, связанной с искажением $\xi(\theta, t)$ сферической формы капли:

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(1)}(r, \theta, t) = & -\frac{Q}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) \times \\ & \times \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} n(n+1) P_n(\mu) \vec{e}_r + \right. \\ & \left. + \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right\}. \end{aligned} \quad (60)$$

Наконец, используя полученные решения (18), (45), (60) из общего выражения (40) для давления $P_q^{(1)}$ получим:

$$\begin{aligned} P_q^{(1)} = & -\frac{Q^2}{4\pi R^5} \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) \times \\ & \times \left(\frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} n(n+1) + 2 \right) P_n(\mu). \end{aligned} \quad (61)$$

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КАПИЛЛЯРНЫХ ОСЦИЛЛЯЦИЙ ВЯЗКОЙ КАПЛИ БЕЗ УЧЕТА ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ

Подставим теперь решения для добавок к давлению (48), (49), (61) и разложения (43), (44) с учетом (46), (47) в динамическое граничное условие для нормальной компоненты тензора напряжений (37). Воспользуемся рекуррентными соотношениями для модифицированной сферической функции Бесселя $I_n(x)$ (см. [20], стр. 262):

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_n(x)}{\partial x} &= I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x); \\ I_{n+1}(x) &= -\frac{2n+1}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x); \end{aligned}$$

и свойством ортогональности полиномов Лежандра [20], после несложных математических преобразований придем к дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned} & \omega_n^2 + i\omega_n \frac{v}{R^2} \frac{2(n-1)}{f \left(R \sqrt{\frac{i\omega_n}{v}} \right) - 1} \times \\ & \times \left(2n+1 - n(n+2) f \left(R \sqrt{\frac{i\omega_n}{v}} \right) \right) - \\ & - \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \times \\ & \times \left(1 + \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3 (n-1)(n+2)} \times \right. \\ & \times \left. (G_0(kR) n(n+1) + 2) \right) = 0; \\ & G_0(kR) = \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Отметим, что влияние вязкости жидкости на капиллярные осцилляции капли (на основной моде) оценивается величиной безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\mu = \frac{v}{\text{Re } \omega_n R^2} = v \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$

[21]. При $\mu \ll 1$ вязкость капли считается малой, при $\mu \gg 1$ вязкость велика, и осцилляции отсутствуют. Из приведенного выражения для безразмерной вязкости видно, что, кроме собственно коэффициента кинематической вязкости, безразмерная вязкость зависит от коэффициента поверхностного натяжения, массовой плотности жидкости и радиуса капли. Так, для одной и той же жидкости капли больших размеров будут осциллировать, а при малых размерах осцилляции будут отсутствовать. В анализируемом случае линейные размеры R капель в туманах, облаках и в дожде изменяются от единиц микрон до единиц миллиметров. Оценим для этих размеров величину параметра μ . Принимая $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $v = 0.01$ см²/с, можно показать, что безразмерный параметр μ в диапазоне размеров $R \in 1$ мкм–3.5 мм принимает значения от $\mu = 2 \times 10^{-3}$ при $R = 3.5$ мм до $\mu \approx 0.117$ при $R = 1$ мкм. Видно, что во всех случаях параметр μ много меньше единицы: $\mu \ll 1$, т.е. капли будут осциллировать.

В связи с этим для упрощения нижеследующих расчетов воспользуемся асимптотическим представлением функции Бесселя $I_n(x)$ при больших значениях аргумента x :

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty: \quad I_n(x) &= \frac{1}{2} \exp(x) \left(\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \right); \\ x &= R \sqrt{\frac{i\omega_n}{v}}; \end{aligned}$$

при использовании которого дисперсионное соотношение для предельного случая капли мало-

вязкой жидкости ($\mu \ll 1$) приводится к более простому виду:

$$\omega_n^2 - 2i\omega_n \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \times \left(1 + \frac{Q^2}{2\pi\sigma R^3 (n-1)(n+2)} \times (G_0(kR)n(n+1) + 2) \right) = 0. \quad (63)$$

В соответствии с представлением сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ [20, 22]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!(2z)^{n-m}}; \quad z \equiv kr;$$

распишем функцию $G_0(z)$, входящую в (63), в виде степенного ряда:

$$G_0(z) \equiv \frac{h_n^{(2)}(z)}{\partial_z (zh_n^{(2)}(z))} = - \frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)!m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)!m!} (2iz)^m}.$$

Учитывая данное разложение, построим асимптотику $\omega_{2,0} = 4.64 \times 10^6$ при малых значениях аргумента $z = z_0 \equiv kR \ll 1$:

$$G_0(kR) \approx -\frac{1}{n} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1}.$$

В этом случае (63) примет окончательный вид дисперсионного уравнения для капиллярных осцилляций капли вязкой жидкости без учета релаксации вязкости:

$$\omega_n^2 - 2i\omega_n \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) - \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \times \left(1 - \frac{W}{(n+2)} + i \frac{Wn(n+1)}{(n-1)(n+2)} \times \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \right) = 0; \quad (64)$$

где $W = \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3}$ – параметр Релея. Критерий электрогидродинамической устойчивости n -ой моды осциллирующей проводящей капли по отноше-

нию к давлению электрического поля (к величине собственного заряда) выписывается в виде $W < (n+2)$ [23].

ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Для построения решения уравнения (64) будем исходить из того, что комплексная частота ω_n представляется в виде: $\omega_n = \text{Re}\omega_n + i\text{Im}\omega_n$, где реальная часть $\text{Re}\omega_n$ определяет собственную частоту осцилляций капли, мнимая положительная часть дает декремент затухания, а мнимая отрицательная часть – инкремент капиллярной электростатической неустойчивости. При этом положительная мнимая составляющая $\text{Im}\omega_n$ имеет смысл полного декремента затухания $\text{Im}\omega_n = \text{Im}'\omega_n + \text{Im}''\omega_n \equiv \eta_1 + \eta_2$, обусловленного потерей энергии капиллярных осцилляций заряженной невязкой капли на электромагнитное излучение $\eta_2 \equiv \text{Im}''\omega_n$ и диссипацией энергии за счет вязкости $\eta_1 \equiv \text{Im}'\omega_n$.

Принимая $\text{Im}''\omega_n \ll \text{Re}\omega_n$, решения уравнения (64) представляются в виде:

$$\omega_n = \pm \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right) - \left(\frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) \right)^2} + i \left(\frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1) + W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2 (n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \frac{1}{2\text{Re}\omega_n} \right); \quad (65)$$

где $k = \frac{\text{Re}\omega_n}{c}$ – волновое число.

В уравнении (65) с учетом приближения малой вязкости $\text{Re}\omega_n \gg \frac{\nu}{R^2}$ собственная частота

$\omega_{n0} \equiv \text{Re}\omega_n$ капиллярных осцилляций n -ой моды капли без учета эффекта релаксации вязкости выписывается в виде:

$$(\text{Re}\omega_n)^2 \equiv \omega_{n0}^2 = \frac{\sigma}{\rho R^3} n(n-1)(n+2) \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right). \quad (66)$$

В (65) декремент вязкого затухания η_1 равен:

$$\text{Im}'\omega_n \equiv \eta_1 = \frac{\nu}{R^2} (n-1)(2n+1); \quad (67)$$

а поправка η_2 к декременту вязкого затухания, связанного с излучением капель электромагнитных волн, определяется как:

$$\text{Im}''\omega_n \equiv \eta_2 = W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2 (n+1) \times \\ \times \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{2n+1} \frac{1}{2 \text{Re}\omega_n}.$$

После подстановки в выше записанное выражение волнового числа $k = \frac{\text{Re}\omega_n}{c}$ и равенства (66)

найдем окончательное аналитическое выражение декремента затухания капиллярных осцилляций заряженной капли идеальной жидкости, определяемого потерями запасенной энергии на излучение электромагнитных волн:

$$\text{Im}''\omega_n \equiv \eta_2 = W \frac{1}{2} \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1}} n^{n+2} \times \\ \times ((n-1)(n+2))^n (n+1) \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right)^n. \quad (68)$$

При выполнении условия электростатической неустойчивости n -моды капиллярных осцилляций $W \geq (n+2)$ подрадикальное выражение в (65) становится отрицательным. В этом случае из (65) получим два мнимых комплексно сопряженных корня. При этом корень с отрицательной мнимой компонентой имеет смысл инкремента нарастания неустойчивости при апериодическом движении вязкой жидкости. В анализируемом случае в отсутствие капиллярных осцилляций (при $\text{Re}\omega_n = 0$) из (67) придем к отсутствию излучения капель электромагнитных волн при $\eta_2 = 0$.

Отметим, что $\text{Re}\omega_n = \omega_{n0}$ определяет частоту собственных капиллярных осцилляций капли, а $\text{Im}'\omega_n = \eta_1$ оказывает влияние на гашение осцилляций и, следовательно, на прекращение электромагнитного излучения на соответствующей частоте.

Для отыскания численных оценок обратимся к каплям естественного происхождения: конвективные облака, ливневые дожди [24, 25]. Положим средние характеристики водяных капель аналогично тому, как это было принято в [6, 7]: $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³. Тогда осцилляции внутриоблачной капли радиуса $R = 10$ мкм и зарядом $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.01 Q_{\text{кр}}$, $Q_{\text{кр}}$ – критическое значение заряда) на основной (второй) моде $n = 2$ с частотой $\omega_{20} = 0.76 \times 10^6$ рад/с исчезают при вязкости $\nu = 0.15$ см²/с. Электромагнитное излучение (осцилляции) дождевой капли размером $R = 0.025$ см и зарядом $Q = 7 \times 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 3 \times 10^{-3} Q_{\text{кр}}$) на частоте $\omega_{20} = 6.1 \times 10^3$ рад/с прекращаются при $\nu = 0.76$ см²/с.

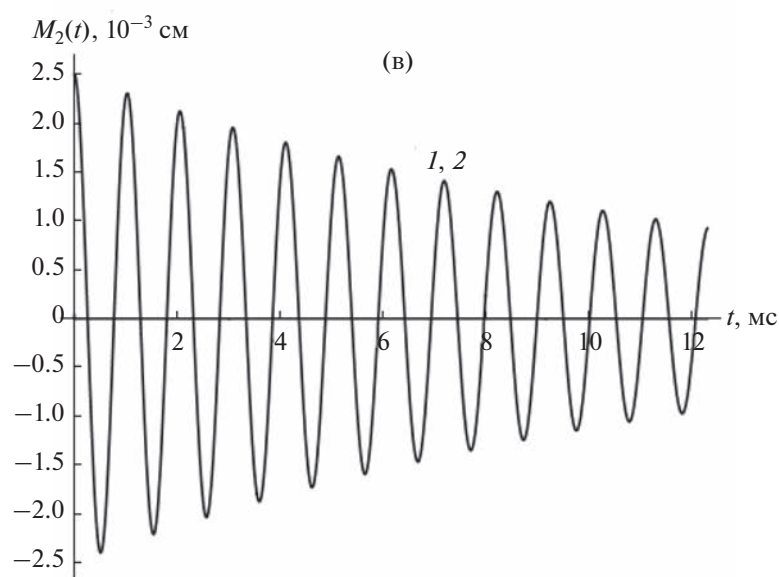
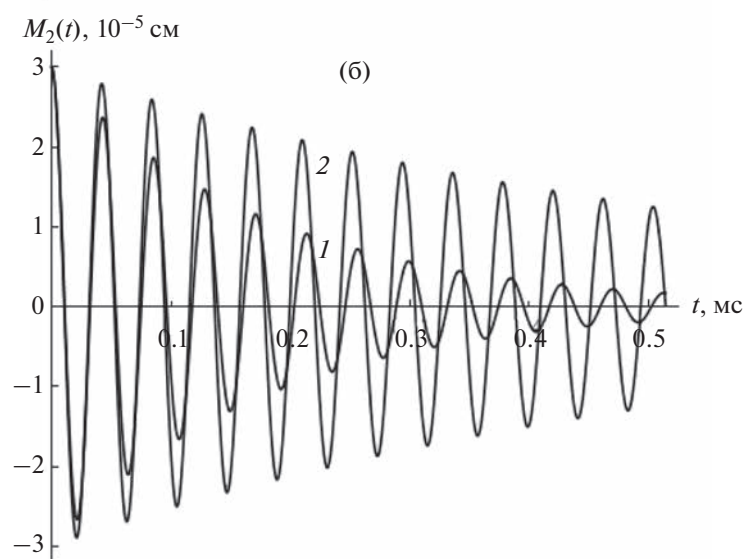
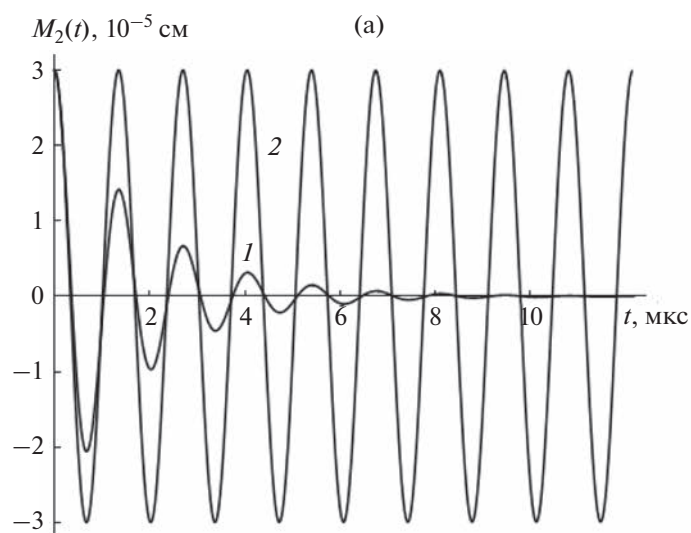
Согласно классическим представлениям, амплитуда $M_n(t)$ теплового возмущения $\xi(\theta, t)$ сферической формы капли убывает со временем по экспоненциальному закону с декрементом вязкого затухания капиллярных осцилляций, определяющимся (67). В результате имеем:

$$M_n(t) = \varepsilon R \cos(\omega_{n0} t + \varphi) \exp(-\eta_1 t); \\ \varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\eta_1}{\omega_{n0}} \right)^2}; \quad \varphi = \arctg \left(-\frac{\eta_1}{\omega_{n0}} \right), \quad (69)$$

где $\varepsilon_0 = 0.1$ является безразмерной амплитудой осцилляций.

На рис. 1–3 (кривые 1) иллюстрируется временная эволюция амплитуды возмущения основной моды ($n = 2$), рассчитанная численно по (69) при $\nu = 0.01$ см²/с. Несложно видеть, что при изменении размера капли R меняется качественный вид кривых: при снижении R уменьшается число колебаний поверхности капли до полного их прекращения. Так, для наименьшей облачной капли $R = 3$ мкм, осциллирующей на ча-

Рис. 1. Зависимость от времени t амплитуды $M_2(t)$, рассчитанная при $n = 2$, $\rho = 1$ г/см³, $\sigma = 73$ дин/см, возмущения равновесной формы: а – для вязкой заряженной облачной капли радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06 Q_{\text{кр}}$); б – для вязкой заряженной облачной капли радиуса $R = 30$ мкм и зарядом $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 2 \times 10^{-3} Q_{\text{кр}}$); в – для вязкой заряженной дождевой капли радиуса $R = 0.25$ мм и зарядом $Q = 7 \times 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 3 \times 10^{-3} Q_{\text{кр}}$). Кривая 1 получена без учета релаксации вязкости и соответствует затухающим капиллярным волнам, а кривая 2 – с учетом эффекта релаксации вязкости и соответствует вязкоупругим затухающим капиллярным осцилляциям.



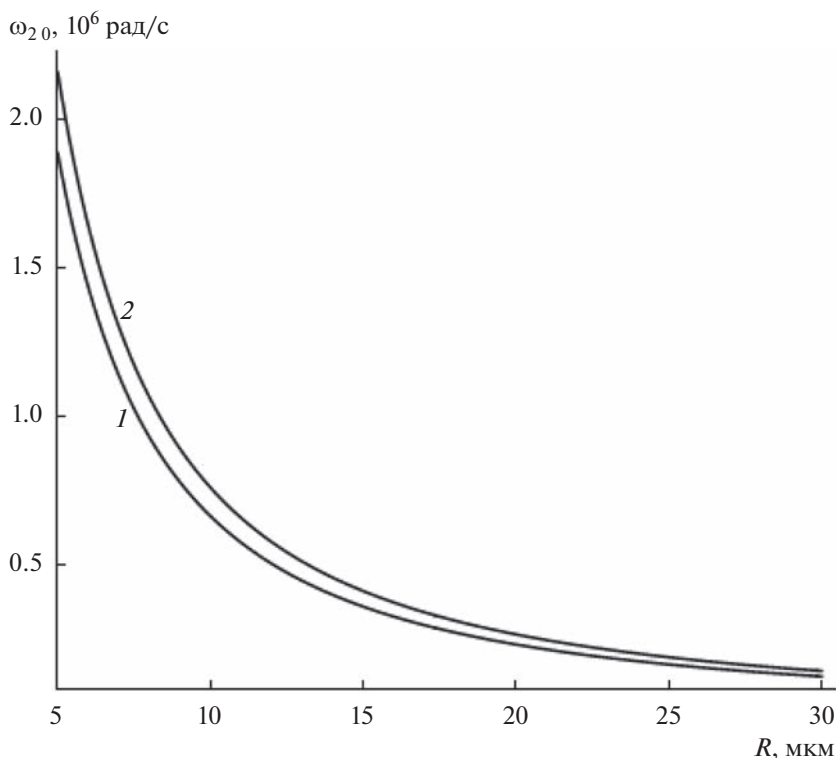


Рис. 2. Зависимость частоты $\text{Re}\omega_2 = \omega_{20}$ собственных капиллярных осцилляций вязкой заряженной облачной капли без учета эффекта релаксации вязкости от радиуса R , рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 соответствует $W = 0.95$, кривая 2 – $W = 0.01$.

стоте $\omega_{20} = 4.64 \times 10^6$ рад/с, за время вязкого затухания (при $\eta_1 = 0.56 \times 10^6$ рад/с) происходит ≈ 8 колебаний (рис. 1, кривая 1) с периодом $T = 1.36$ мкс. Однако уже крупная дождевая капля $R = 30$ мкм совершает ≈ 26 колебаний при собственной частоте $\omega_{20} = 1.47 \times 10^5$ рад/с с затуханием $\eta_1 = 5.6 \times 10^3$ рад/с (рис. 3, кривая 1) и периодом затухающих осцилляций $T = 42.75$ мкс. В случае наименьшей дождевой капли радиуса $R = 250$ мкм, осциллирующей на частоте $\omega_{20} = 6.1 \times 10^3$ рад/с при $\eta_1 = 0.08 \times 10^3$ рад/с, количество колебаний увеличивается до ≈ 76 с периодом $T = 1.03$ мс (рис. 4).

Для объяснения приведенных графиков (рис. 1–3, кривые 1), построенных при различных радиусах, целесообразно показать зависимости характеристик осцилляций капли ω_{20} , η_1 от R . Из рис. 4, 5 видно, что рост размера капли сказывается на снижении частоты ω_{20} , как $\sim 1/R^{3/2}$, а также на уменьшении декремента вязкого затухания η_1 , как $\sim 1/R^2$. Из сказанного следует, что при воз-

растании радиуса капли величина ω_{20}/η_1 , имеющая смысл числа колебаний, совершаемых за время вязкого затухания, растет $\sim R^{1/2}$ и, следовательно, увеличивается период затухающих осцилляций.

Кроме того, из рис. 4 выясняется, что возрастание величины заряда (параметра Рэлея) приводит к уменьшению частоты осцилляций ω_{20} . Следует заметить, что зависимость ω_{20} (кривая 1) при значениях параметра Рэлея, близких к критическим, имеет лишь качественный характер, так как в соответствии с данными натурных измерений $W \ll 1$ [24]. Из (67) и рис. 6 можно видеть, что декремент вязкого затухания η_1 линейно зависит от вязкости ν .

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ОТ ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ КАПЛИ

В случае маловязкой жидкости положим влияние вязкости на частоту осцилляций пренебрежимо малым. Тогда в приближении идеальной жидкости на основе закона сохранения энергии невязкое затухание капиллярных осцилляций капли вызы-

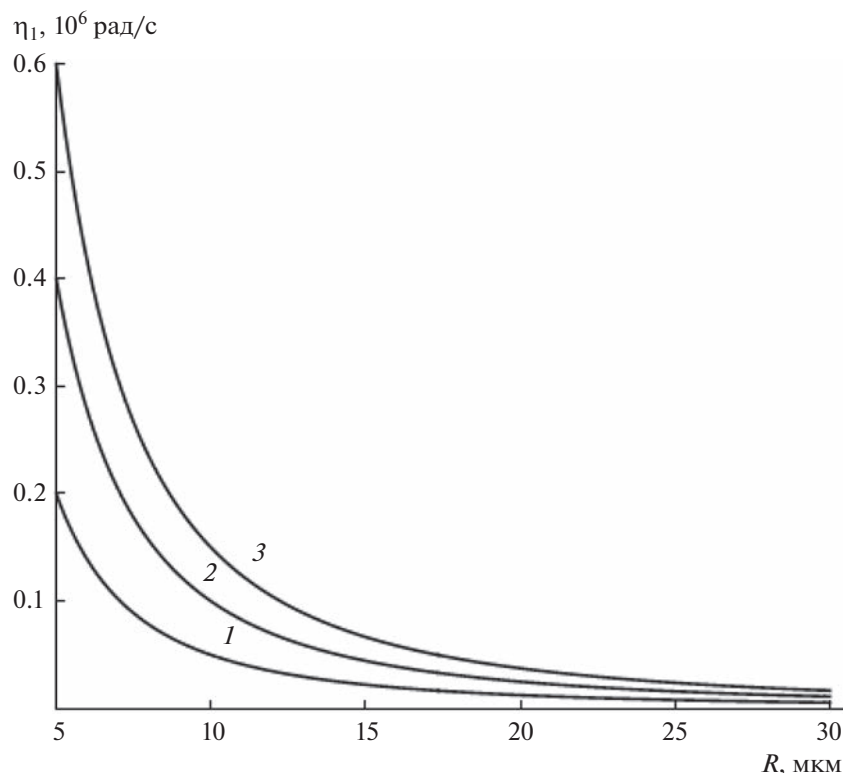


Рис. 3. Зависимость величины декремента вязкого затухания η_1 капиллярных осцилляций заряженной облачной капли без учета релаксации вязкости от радиуса R , рассчитанная при тех же физических величинах, что на рис. 1 и $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.03 Q_{\text{кр}}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 2 \times 10^{-3} Q_{\text{кр}}$ при $R = 30$ мкм). Кривая 1 построена при $v_0 = 0.01$ см²/с, кривая 2 – $v = 0.02$ см²/с, кривая 3 – $v = 0.03$ см²/с.

вается потерями энергии осцилляций при ускоренном движении зарядов на излучение электромагнитных волн. Учитывая, что энергия поверхностных колебаний n -ой моды ϑ_n убывает со временем экспоненциально: $\vartheta_n \sim \exp(-2\eta_2)$, представим мощность электромагнитного излучения в общем виде [4]:

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} = 2\eta_2\vartheta_n. \quad (70)$$

В (70) декремент η_2 невязкого затухания без учета эффекта релаксации вязкости рассчитывается по (68), а ϑ_n находится по теореме вириала как удвоенная средняя за период кинетическая энергия движения молекул внутренней среды капли:

$$\vartheta_n = \frac{\rho}{2V} \int_V |\vec{V}_1(r, \theta, t)|^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi;$$

$$V = [0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

Подставляя в равенство $\vec{V}_1(r, \theta, t) = \nabla\psi_1(r, \theta, t)$ разложение (43) для функции $\psi_1(r, \theta, t)$ с учетом (46) при $v = 0$, найдем решение для поля скоростей потенциального движения жидкости в капле:

$$\vec{V}_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{n-1} i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) \times$$

$$\times \left(P_n(\mu) \vec{e}_r + \frac{1}{n} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right);$$

при использовании которого несложно перейти к ϑ_n в виде:

$$\vartheta_n = \frac{2\pi R^3 M_n^2 \omega_n^2}{n(2n+1)}. \quad (71)$$

Исходя из вида (65), (68), (71), выпишем окончательное аналитическое выражение для интенсивности радиоизлучения (70), связанного с n -ой колебательной модой единичной заряженной капли:

$$I = \frac{2\pi W \sigma^{n+2} M_n^2}{R^{n+2} c^{2n+1} \rho^{n+1}} \times$$

$$\times \frac{n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1} (n+1)}{(2n+1)} \times$$

$$\times \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(1 - \frac{W}{(n+2)} \right)^{n+1}. \quad (72)$$

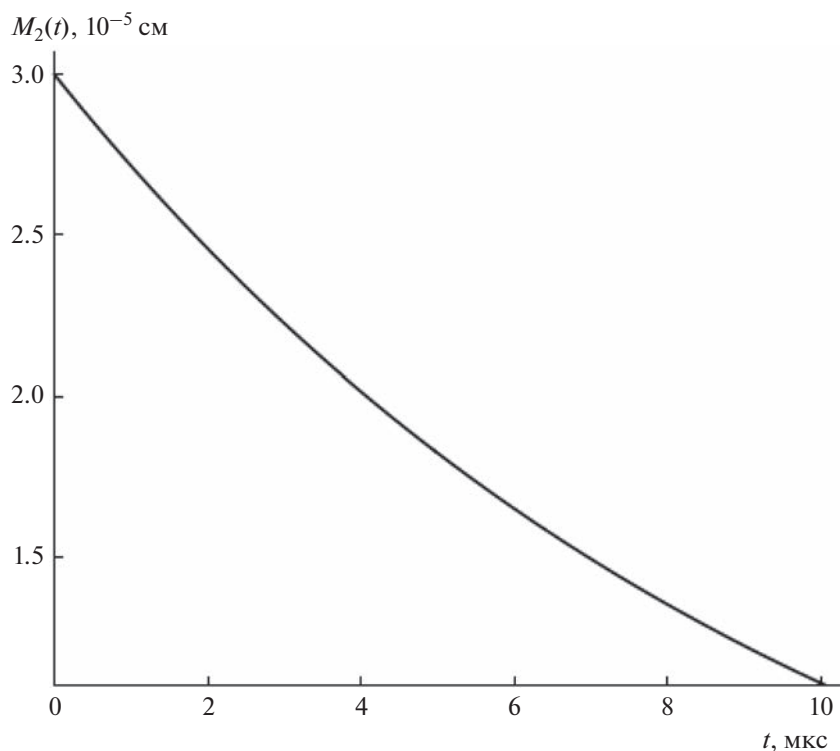


Рис. 4. Зависимость от времени t амплитуды $M_2(t)$ возмущения равновесной формы вязкой заряженной облачной капли радиуса $R = 3$ мкм и зарядом $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06Q_{кр}$), построенная с учетом релаксации вязкости. Соответствует апериодическим упругим движениям жидкости. Расчеты проведены при тех же значениях физических величин, что на рис. 1.

Используя (72), проведем численную оценку мощности электромагнитного излучения, связанного с осцилляциями заряженных капель в конвективных облаках на стадии их образования. В соответствии с данными натурных измерений типичные размеры облачных капель изменяются от 3 до 30 мкм с максимальной концентрацией, приходящейся на диапазон 3–7 мкм. При этом средняя концентрация таких капель в облаке составляет $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ [24].

Появление нескомпенсированных зарядов на отдельных осциллирующих каплях вызывается процессами электризации при захвате каплями воздушных ионов, перераспределения зарядов из-за спонтанного разрушения, слияния с более мелкими каплями, разбрызгивания и кристаллизации переохлажденных капель [25].

Для нижеследующих оценок положим, что единичная капля осциллирует с амплитудой $M_n = 0.1R$ (величина безразмерной амплитуды осцилляций равна $\epsilon = 0.1$) за счет возбуждения основной колебательной моды $n = 2$. Воспользовавшись выше приведенными значениями физических величин,

получим, что капля размером $R = 3$ мкм обладает мощностью излучения $I \sim 2 \times 10^{-40}$ эрг/с на частоте $\omega_{20} = 4.64 \times 10^6$ рад/с с декрементом невязкого затухания $\eta_2 = 3 \times 10^{-34}$ рад/с. Для капли $R = 30$ мкм интенсивность излучения составляет $I \sim 2 \times 10^{-45}$ эрг/с при $\omega_{20} = 1.47 \times 10^5$ рад/с и $\eta_2 = 3 \times 10^{-41}$ рад/с.

Моделируя грозовое облако протяженностью 10 км ансамблем осциллирующих капель размером $R = 30$ мкм, несложно оценить интегральную интенсивность излучения: $I_{lin} \sim 1 \times 10^{-24}$ эрг/с.

УЧЕТ ЭФФЕКТА РЕЛАКСАЦИИ ВЯЗКОСТИ

Введение комплексной кинематической вязкости (1) позволяет перейти от (64) к дисперсионному уравнению, учитывающему вязкоупругие свойства жидкой капли:

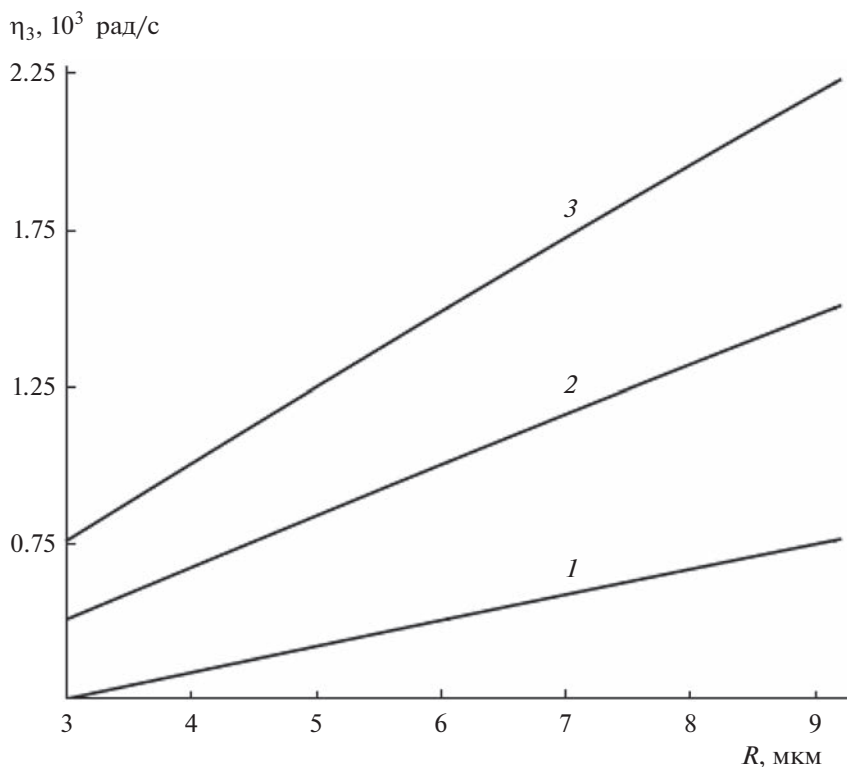


Рис. 5. Зависимость величины декремента вязкоупругого затухания η_3 капиллярных осцилляций заряженной облачной капли от радиуса R , рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рис. 3 и $\tau = 1 \times 10^{-5}$ с. Кривая 1 построена при $\nu_0 = 0.01$ см²/с, кривая 2 – $\nu_0 = 0.02$ см²/с, кривая 3 – $\nu_0 = 0.03$ см²/с.

$$\omega_n^3 - il_1\omega_n^2 - \omega_n(l_{21} + il_{22}) + il_{31} - l_{32} = 0; \quad (n \geq 2);$$

$$l_1 = \frac{1}{\tau}; \quad l_{21} = \frac{2\nu_0}{R^2\tau}(n-1)(2n+1) + \omega_{n0}^2;$$

$$l_{22} = W \frac{\sigma}{\rho R^3} n^2(n+1) \left(\frac{2^n(n-1)!}{(2n)!} \right)^2 (kR)^{(2n+1)}; \quad (73)$$

$$l_{31} = \frac{\omega_{n0}^2}{\tau}; \quad l_{32} = \frac{l_{22}}{\tau}.$$

В (73) ω_{n0}^2 определено соотношением (66), k – волновое число.

Из вида дисперсионного уравнения (73) видно, что второй и четвертый его коэффициенты чисто мнимые, и что порядок алгебраического

уравнения уже третий, а не второй, как это было без учета релаксации вязкости. Данное обстоятельство объясняется усложнением спектра реализующихся движений жидкости в капле за счет возникновения релаксационных апериодических сдвиговых движений жидкости [9, 11].

Используя пакет аналитических вычислений МАТЕМАТИКА, найдем комплексные решения кубического дисперсионного уравнения (73) для разных диапазонов размеров капель, в которых сразу же выделим реальную $\text{Re}\omega_n^{(j)}$ и мнимую $\text{Im}\omega_n^{(j)}$ части:

для $R < 58$ мкм:

$$\begin{aligned} \text{Re}\omega_n^{(1)} &= 0; \quad \text{Re}\omega_n^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_0 - \alpha_1); \\ \text{Re}\omega_n^{(3)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha_0 - \alpha_1); \quad \text{Im}\omega_n^{(1)} = \frac{l_1}{3} - \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2; \\ \text{Im}\omega_n^{(2)} &= \text{Im}\omega_n^{(3)} = \frac{l_1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2), \end{aligned} \quad (74)$$

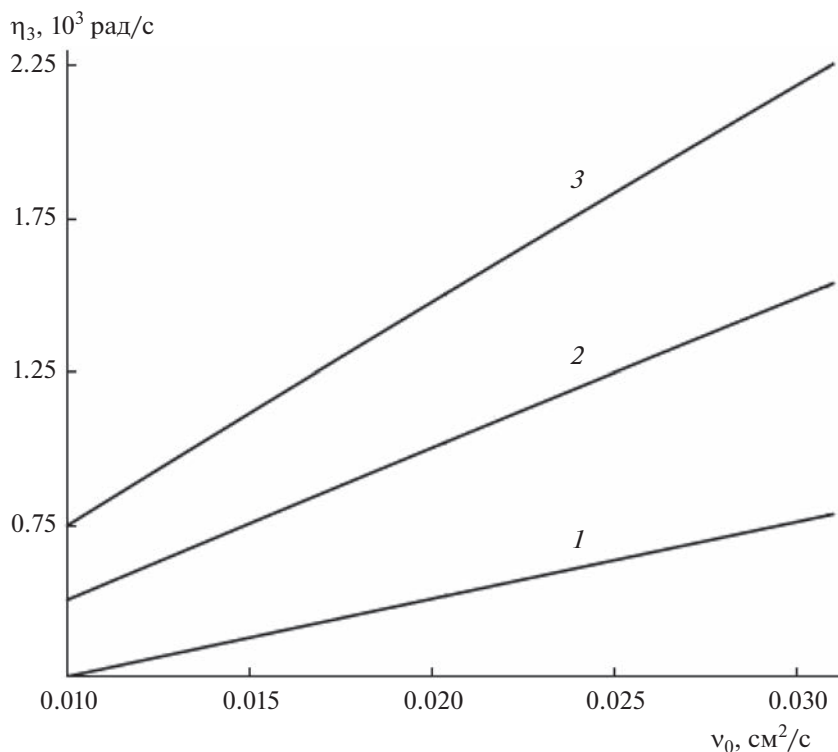


Рис. 6. Зависимость величины декремента вязкоупругого затухания η_3 капиллярных осцилляций заряженной облачной капли от величины коэффициента кинематической вязкости ν_0 , рассчитанная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 построена при $R = 3$ мкм, кривая 2 — $R = 6$ мкм, кривая 3 — $R = 9$ мкм.

для $R \geq 58$ мкм:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \omega_n^{(1)} &= 0; \quad \operatorname{Re} \omega_n^{(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha'_0 - \alpha'_1); \\ \operatorname{Re} \omega_n^{(3)} &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha'_0 - \alpha'_1); \\ \operatorname{Im} \omega_n^{(1)} &= \frac{l_1}{3} + \alpha'_0 + \alpha'_1 - \alpha'_2; \\ \operatorname{Im} \omega_n^{(2)} &= \operatorname{Im} \omega_n^{(3)} = \frac{l_1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha'_0 + \alpha'_1 - \alpha'_2); \\ \alpha_0 &= \frac{\sqrt[3]{2}\beta_0}{3\sqrt[3]{\beta_1 + \beta_2}}; \quad \alpha_1 = \frac{\sqrt[3]{\beta_1 + \beta_2}}{3\sqrt[3]{2}}; \\ \alpha_2 &= \frac{\sqrt[3]{2}l_{23}}{3\sqrt[3]{\beta_1 + \beta_2}}; \quad l_{23} = \frac{l_{32}}{\operatorname{Re} \omega_n^{(j)}}; \quad \beta_0 = l_1^2 - 3l_{21}; \\ \beta_1 &= -2l_1^3 + 9l_1l_{21} - 27l_{31}; \\ \beta_2 &= 3\sqrt[3]{3|l_1^2l_{21}^2 - 4l_{21}^3 - 4l_1^3l_{31} + 18l_1l_{21}l_{31} - 27l_{31}^2|}; \\ \alpha'_0 &= \frac{\sqrt[3]{2}\beta_0}{3\sqrt[3]{|\beta_1 + \beta_2|}}; \quad \alpha'_1 = \frac{\sqrt[3]{|\beta_1 + \beta_2|}}{3\sqrt[3]{2}}; \quad \alpha'_2 = \frac{\sqrt[3]{2}l_{23}}{3\sqrt[3]{|\beta_1 + \beta_2|}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Видно, что в (75), (76) одно решение $\omega_n^{(1)}$ является чисто мнимым, а два других $\omega_n^{(2)}$, $\omega_n^{(3)}$ — с оди-

наковой мнимой компонентой и разными по знаку вещественными составляющими.

Подставляя $\operatorname{Re} \omega_n^{(j)}$ ($j = 1-3$) в (74), (75), выпишем декременты затухания $\operatorname{Im}' \omega_n^{(1)}$ аperiodического упругого движения вязкой жидкости и декременты вязкоупругого затухания η_3 капиллярных осцилляций капли:

для $R < 58$ мкм:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}' \omega_n^{(1)} &= \frac{l_1}{3} - \alpha_0 - \alpha_1; \\ \operatorname{Im}' \omega_n^{(2)} &= \operatorname{Im}' \omega_n^{(3)} \equiv \eta_3 = \frac{l_1}{3} + \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1), \end{aligned}$$

для $R \geq 58$ мкм:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}' \omega_n^{(1)} &= \frac{l_1}{3} + \alpha'_0 + \alpha'_1; \\ \operatorname{Im}' \omega_n^{(2)} &= \operatorname{Im}' \omega_n^{(3)} \equiv \eta_3 = \frac{l_1}{3} - \frac{1}{2}(\alpha'_0 + \alpha'_1); \end{aligned}$$

и поправки к затуханию капиллярных осцилляций капли, обусловленные потерями запасенной энергии на генерацию электромагнитных волн:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \omega_n^{(1)} = 0; \quad \operatorname{Im} \omega_n^{(2)} = \operatorname{Im} \omega_n^{(3)} \equiv \eta_4 = \\ = W \frac{\sigma R^{2n-2}}{3^n 2^{\frac{2(4n+1)}{3}} \rho c^{2n+1} |\beta_1 + \beta_2|^{\frac{2n+1}{3}} \tau} \times \\ \times n^2 (n+1) \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 \left(\sqrt[3]{2\beta_0} - |\beta_1 + \beta_2|^{\frac{2n+1}{3}} \right)^{2n}, \end{aligned} \quad (77)$$

где величины $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ зависят от физических параметров задачи.

Для иллюстрации численных решений по уравнениям (74), (75) при $\tau = 1 \times 10^{-5}$ с положим, что осцилляции каплей связаны с основной модой $n = 2$. Итак, принимая выше приведенные характеристики и средний заряд облачных капель $Q = 2 \times 10^{-5}$ СГСЭ ($\sim 0.06 Q_{\text{кр}}$ при $R = 3$ мкм и $\sim 0.002 Q_{\text{кр}}$ при $R = 30$ мкм) с радиусом $R = 3$ мкм находим: $\omega_2^{(1)} = 9.95 \times 10^4 i$ рад/с, $\omega_2^{(2)} = (4.7 \times 10^6 + 0.3 \times 10^3 i)$ рад/с, $\omega_2^{(3)} = (-4.7 \times 10^6 + 0.3 \times 10^3 i)$ рад/с.

Для $R = 30$ мкм справедливо решение: $\omega_2^{(1)} = 9.65 \times 10^4 i$ рад/с, $\omega_2^{(2)} = (1.5 \times 10^5 + 1.7 \times 10^3 i)$ рад/с, $\omega_2^{(3)} = (-1.5 \times 10^5 + 1.7 \times 10^3 i)$ рад/с.

Учитывая средний заряд дождевых капель $Q = 7 \times 10^{-4}$ СГСЭ ($\sim 2 \times 10^{-3} Q_{\text{кр}}$ при $R = 0.025$ см и $\sim 3 \times 10^{-5} Q_{\text{кр}}$ при $R = 0.35$ см), при наименьшем радиусе $R = 0.025$ см несложно рассчитать: $\omega_2^{(1)} = 9.98 \times 10^4 i$ рад/с, $\omega_2^{(2)} = (6.1 \times 10^3 + 0.8 \times 10^2 i)$ рад/с, $\omega_2^{(3)} = (6.1 \times 10^3 + 0.8 \times 10^2 i)$ рад/с.

Для наиболее крупной дождевой капли $R = 0.35$ см получим: $\omega_2^{(1)} = 1 \times 10^5 i$ рад/с, $\omega_2^{(2)} = (117 + 0.4i)$ рад/с, $\omega_2^{(3)} = (-117 + 0.4i)$ рад/с.

Анализ численных решений уравнения (73), получающихся при докритических значениях параметра Релея $W/4 < 1$, показывает, что первый корень $\omega_2^{(1)}$ соответствует чисто релаксационному аperiodическому затуханию упругих движений вязкой жидкости. Второй и третий корни $\omega_2^{(2)}, \omega_2^{(3)}$ характеризуют слабо затухающие вязкоупругие осцилляции мелких облачных капель. Расчеты показывают, что декремент вязкоупругого затухания η_3 на четыре порядка меньше частоты собственных осцилляций $\operatorname{Re} \omega_2^{(2)}$. Затухающие вязкоупругие капиллярные осцилляции дождевых и крупных облачных капель (η_3 на два порядка ниже $\operatorname{Re} \omega_2^{(2)}$) представлены на рис. 16, 1в (кривые 2). Из рис. 1в видно, что с увеличением размера капли вязкоупругие и капиллярные волны сближаются, а при $R = 0.25$ мм совпадают (см. рис. 3).

Из данных численных расчетов можно видеть, что по сравнению характеристиками, получен-

ными по (66), (67) без учета релаксации вязкости, включение эффекта релаксации вязкости приводит к снижению величины декремента вязкоупругого затухания η_3 и небольшому увеличению частоты собственных капиллярных осцилляций $\operatorname{Re} \omega_2^{(2)}$.

На рис. 4 приведена зависимость от времени аperiodического затухания амплитуды основной моды мелкой облачной капли.

При возрастании R и кинематической вязкости ν_0 декремент вязкоупругого затухания η_3 увеличивается по приблизительно линейному закону (рис. 5 и 6).

Рис. 7 иллюстрирует незначительное возрастание величины η_3 при увеличении безразмерного параметра Рэлея W : при увеличении параметра Рэлея в десять раз инкремент η_3 возрастает примерно на одну пятую.

Расчеты показывают, что при увеличении вязкости ν_0 наблюдается весьма слабое линейное возрастание частоты собственных осцилляций $\operatorname{Re} \omega_2^{(2)}$: при увеличении ν_0 в три раза изменения величины η_3 происходит примерно на 0.3 процента величины. Согласно расчетам, столь же слаба зависимость $\operatorname{Re} \omega_2^{(2)}$ от характерного времени релаксации вязкости τ .

Из рис. 8, на котором представлены расчетные зависимости $\eta_3(\tau)$, видно, что декремент вязкоупругого затухания η_3 заметно уменьшается с увеличением τ : возрастание τ на порядок приводит к снижению на два порядка величины η_3 . При увеличении τ до 6×10^{-5} с кривые 1–3 сливаются, т.е. при $\tau > 6 \times 10^{-5}$ с декремент η_3 весьма слабо зависит от характерного времени релаксации τ .

В случае закритических значений параметра Рэлея $W/4 \geq 1$ из решений дисперсионного уравнения (73) можно получить три комплексных корня: один корень является мнимым положительным, а два других — мнимыми комплексно сопряженными. Корень с отрицательным знаком при мнимой единице соответствует появлению неустойчивого аperiodического упругого движения вязкой жидкости.

Воспользовавшись (70), (75) и (77), получаем, что учет эффекта релаксации вязкости приводит к изменению характеристик излучающих внутриоблачных капель в отличие от характеристик, найденных в пренебрежении вязкоупругих свойств жидкости. Так, для капли $R = 3$ мкм оценка интенсивности излучения дала $I \sim 3 \times 10^{-42}$ эрг/с на частоте $\omega_2^{(2)} = 4.7 \times 10^6$ рад/с при декременте затухания $\eta_4 = 4 \times 10^{-36}$ рад/с, численно найденному по выражению (77). При радиусе капли $R = 30$ мкм получена мощность излучения $I \sim 2 \times 10^{-45}$ эрг/с при $\omega_2^{(2)} = 0.15 \times 10^6$ рад/с и $\eta_4 = 2 \times 10^{-41}$ рад/с.

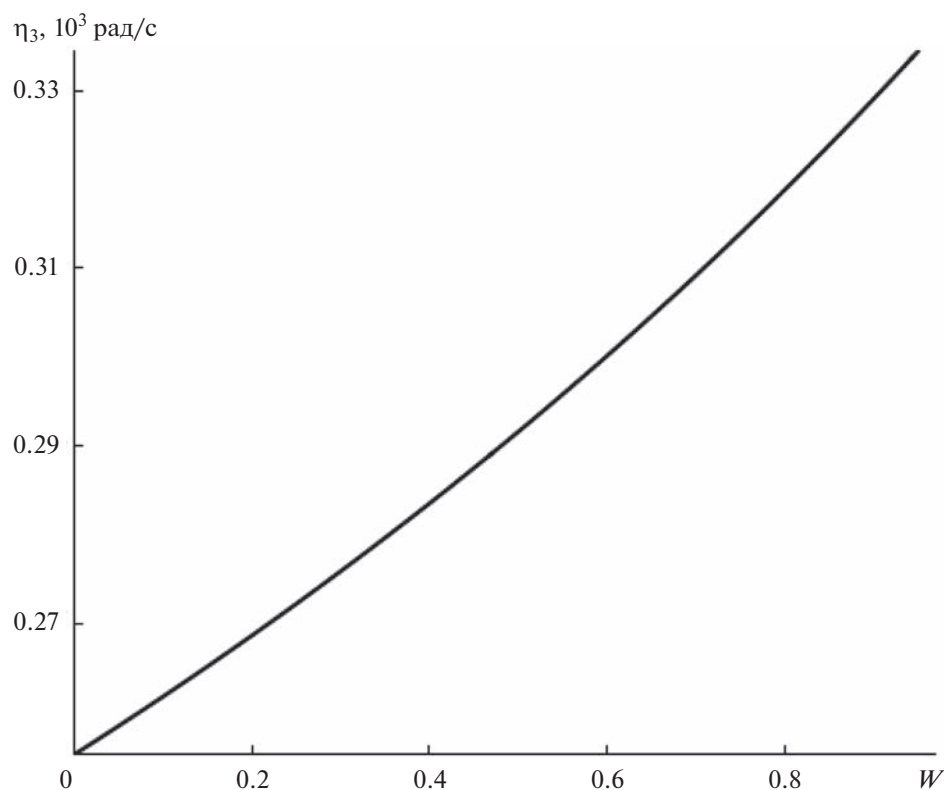


Рис. 7. Зависимость от величины параметра Релея W величины декремента вязкоупругого затухания η_3 капиллярных осцилляций заряженной облачной капли радиуса $R = 3$ мкм, построенная при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1.

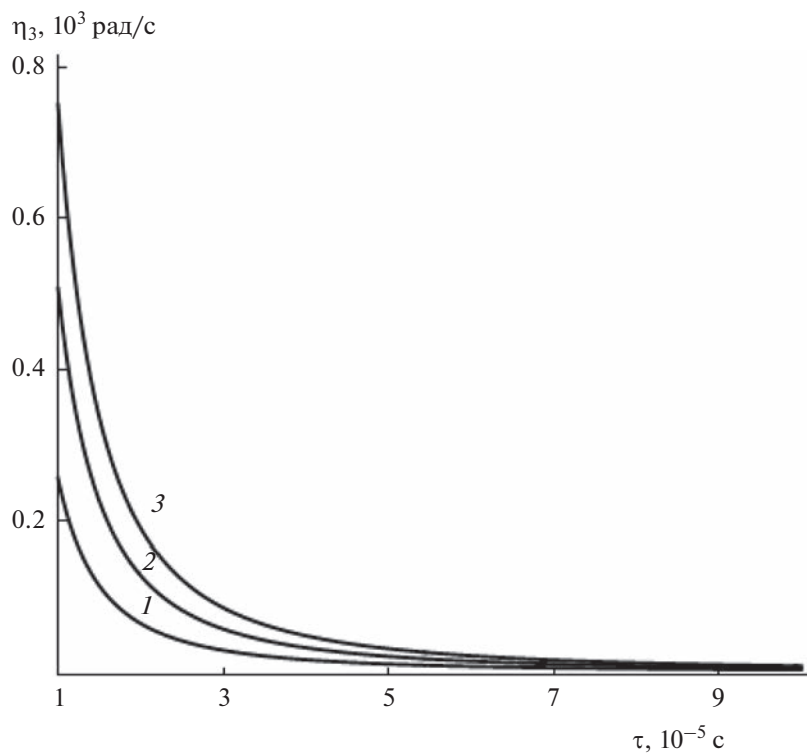


Рис. 8. Зависимость величины декремента вязкоупругого затухания η_3 капиллярных осцилляций заряженной облачной капли от характерного времени релаксации τ , построенная при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1. Кривая 1 соответствует $R = 3$ мкм, кривая 2 — $R = 6$ мкм, кривая 3 — $R = 9$ мкм.

Анализ численных оценок показывает, в силу учета эффекта релаксации вязкости поправка к декременту вязкоупругого затухания, связанная с уменьшением запасенной энергии капли на излучение электромагнитных волн, а также мощность радиоизлучения снижаются быстрее на более высоких частотах.

Численный анализ показывает, что на критические условия реализации электростатической неустойчивости капли вязкоупругость, как и вязкость жидкости влияния не оказывает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учет вязкоупругих свойств заряженной капли проводящей жидкости обеспечивает незначительное увеличение частоты собственных осцилляций и существенное снижение декремента вязкоупругого затухания мелких облачных капель. Показано, что релаксационный эффект проявляется в снижении гасящего влияния на спектр капиллярных осцилляций на высоких частотах. Однако вязкоупругие свойства жидкости не оказывают заметного влияния на вязкоупругие затухающие капиллярные осцилляции и электромагнитное излучение дождевых капель. Выявлено, что наличие собственного заряда капли сказывается на снижении частоты собственных осцилляций и возрастании декремента вязкого затухания. При этом включение релаксационного процесса приводит к существенной зависимости декремента вязкоупругого затухания от характерного времени релаксации. Наличие эффекта релаксации вязкости приводит к снижению на два порядка величины декремента затухания, определяемого потерями энергии на излучение электромагнитных волн, и интенсивности электромагнитного излучения на высоких частотах.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Караваев Д.М., Шукин Г.Г.* Совершенствование методов раннего предупреждения развития грозных процессов и выявления зон обледенения в облаках на основе комплексного использования методов активной и пассивной радиолокации // *Гидрометеорология и экология*. 2021. № 62. С. 7–26.
2. *Качурин Л.Г., Кармов М.И., Медалиев Х.Х.* Основные характеристики радиоизлучения конвективных облаков // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1974. Т. 10. № 11. С. 1164–1169.
3. *Аджиев А.Х., Богаченко Е.М.* Грозы Северного Кавказа. Нальчик: Полиграфсервис и Т. 2011. 152 с.
4. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // *ДАН СССР*. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
5. *Богатов Н.А.* Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель // *Сборник тезисов докладов VI Международной конференции “Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений”*. Петропавловск-Камчатский, ДВО РАН, 2013. С. 22–26.
6. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Колбнева Н.Ю.* Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва–Берлин: Изд. Директ-Медиа, 2021. 200 с.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 203 с.
8. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.
9. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* О капиллярном движении вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью // *ЖТФ*. 2000. Т. 70. № 8. С. 39–44.
10. *Бадмаев Б.Б., Базарон У.Б., Лайдабон Ч.С., Дерягин Б.В.* Сдвиговые механические свойства полимерных жидкостей и их растворов // *ДАН СССР*. 1992. Т. 322. № 2. С. 307–311.
11. *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г.* Спектр поверхностных колебаний жидкости с учетом релаксационных эффектов // *ЖТФ*. 1976. Т. 46. № 10. С. 2211–2213.
12. *Базарон У.Б., Дерягин Б.В., Булгадаев А.В.* Исследование сдвиговой упругости жидкостей и граничных слоев резонансным методом // *ЖЭТФ*. 1966. Т. 541. № 4 (5). С. 969–982.
13. *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
15. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
16. *Лазарянц А.Э., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Скаляризация векторных краевых задач. М.: Русайнс, 2020. 140 с.
17. *Несис Е.И.* Методы математической физики. М.: Просвещение, 1977. 199 с.
18. *Арфкен Г.* Математические методы в физике. М.: Атомиздат, 1970. 712 с.
19. *Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
20. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
21. *Григорьев А.И.* О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. № 10. С. 1–7.
22. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.
23. *Rayleigh L.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. № 87. P. 184–186.
24. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 647 с.
25. *Мазин И.П., Шмелер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 280 с.