

УДК 532.542+536.2+537.8+544.6+544.7

## АНАЛИЗ ПРОИЗВОДСТВА ЭНТРОПИИ ПРИ ПРОТЕКАНИИ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ МИКРОПОЛЯРНОЙ И НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТЕЙ ЧЕРЕЗ КАНАЛ: ВЛИЯНИЕ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

© 2023 г. Pramod Kumar Yadav<sup>1</sup>, Ankit Kumar<sup>1</sup>, А. Н. Филиппов<sup>2, \*</sup>

<sup>1</sup>Department of Mathematics, Motilal Nehru National Institute of Technology Allahabad, Prayagraj, 211004 India

<sup>2</sup>Кафедра высшей математики, Губкинский университет, Ленинский проспект, 65 корп. 1, Москва, 119991 Россия

\*e-mail: filippov.a@gubkin.ru

Поступила в редакцию 06.09.2022 г.

После доработки 22.11.2022 г.

Принята к публикации 25.11.2022 г.

Целью данной работы является анализ тепловых характеристик, производства энтропии, скорости потока и профиля числа Бежана при течении двух несмешивающихся несжимаемых микрополярной и ньютоновской вязких жидкостей в плоском канале. Внимание акцентируется на влиянии теплового излучения и ориентированного магнитного поля на тепловой профиль и производство энтропии. В уравнении для тепловой энергии учитываются вязкая диссипация и эффект теплового излучения и анализируется производство энтропии внутри канала за счет ориентированного магнитного поля и теплового излучения. Постоянный градиент давления действует на входе в область потока, а неподвижные стенки канала являются изотермическими. В этой задаче предпринята попытка смоделировать тепловое излучение в уравнении энергии, приняв диффузионное приближение Росселанда. В соответствии с геометрической конфигурацией задачи используются условия отсутствия скольжения на стенках канала и непрерывность теплообмена, микровращения, напряжения сдвига, скорости потока и теплового потока на границе раздела несмешивающихся жидкостей. Определяющие уравнения для течения несмешивающихся жидкостей решаются классическим методом и оценивается точное решение для тепловых характеристик и поля течения. Математические результаты для теплового профиля и характеристик потока используются для получения профиля числа Бежана, а также профиля производства энтропии. Графически обсуждается влияние различных теплофизических управляющих параметров, таких как параметр излучения, число Рейнольдса, параметр угла наклона магнитного поля, параметр вязкой диссипации, параметр микрополярности и число Гартмана, которые определяют физическую значимость предложенной модели, на течение и ее тепловые характеристики. Полученные в этом исследовании новые результаты подтверждаются предыдущими опубликованными данными.

**Ключевые слова:** микрополярная жидкость, несмешивающиеся жидкости, наклонное магнитное поле, тепловое излучение, число Бежана, производство энтропии

**DOI:** 10.31857/S0023291222700033, **EDN:** KFKSSS

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие возросла важность анализа магнитогидродинамического (МГД) течения жидкости и процесса теплообмена в различных геометрических конфигурациях, таких как трубы, каналы, воздухопроводы, трубопроводы и т.д. Класс МГД-течений жидкости претерпевает революцию с точки зрения простого потока, несмешивающегося течения, перистальтического потока, кровотока, пульсирующего потока, течения в канале и т.д. Магнитная гидродинамика имеет широкое применение во многих областях теплотехники и в технологических процессах, таких

как ударные волны, МГД-генераторы, тепловые насосы, реакторы термического синтеза, ядерные реакторы, расходомеры, термическое старение и т.д. В литературе упоминается несколько применений МГД-процессов теплопередачи и течения жидкости, которые были предприняты рядом исследователей. Некоторая предварительная работа была проведена еще в начале 1967 г. Блюмом и др. [1], который изучал процессы массо- и теплообмена при действии однородного магнитного поля. Гартман и Лазарус [2] в 1937 г. были среди ученых, которые провели экспериментальное исследование электропроводящего и магнитогидродинамического течения жидкости в канале между

изолированными и неподвижными параллельными пластинами. Глоб [3] изучал стационарное течение электропроводящей и несжимаемой жидкости в кольцевой области, образованной двумя бесконечно длинными цилиндрами. Голд [4] провел исследование стационарного, электропроводящего, однонаправленного МГД-течения несжимаемой жидкости в кольцевом канале. Тани [5] представил численное решение для устойчивого, ламинарного и полностью развитого течения проводящей жидкости в прямом канале с комбинированным действием тока Холла и поперечного электромагнитного поля. Саундалгекар и др. [6, 7] исследовали влияние ионного скольжения и холловских токов на полностью развитое МГД-течение Куэтта ньютоновской вязкой жидкости по горизонтальному каналу. Никодиевич и др. [8, 9] представили аналитическое исследование теплообмена и МГД-течения Куэтта несмешивающихся жидкостей в горизонтальном канале с комбинированным воздействием наклонного магнитного поля и электрического поля. Влияние электрического поля и наклонного магнитного поля на нестационарные МГД-течения Куэтта двух вязких жидкостей несмешивающегося типа в прямоугольном канале было исследовано Шахом и др. [10].

Есть ряд исследователей, которые обращались к проблеме производства энтропии вследствие течения вязкой жидкости и процесса радиационного теплообмена. Сринивас и Мутурадх [11] обсудили влияние теплового излучения и МГД-эффектов на смешанную конвекцию устойчивого и полностью развитого потока жидкости в вертикальном пористом канале. Они смоделировали механизм теплового излучения, используя приближение Росселанда. Чен и др. [12] проанализировали влияние радиационной теплопередачи на производство энтропии микрополярной жидкости, которая течет по волнистой поверхности. Магъяри и Пантократорс [13] сделали упор на линеаризованном приближении Росселанда для изучения влияния радиационного теплообмена на тепловые характеристики для нескольких течений пограничного слоя. Пракаш и Муттамилсельван [14] обсудили стационарный, намагниченный, полностью развитый и излучающий поток несжимаемой микрополярной жидкости через вертикальный прямоугольный пористый канал. Оладжувон и др. [15] исследовали массоперенос и теплообмен в нестационарном потоке микрополярной жидкости через вертикальную пористую пластину при наличии эффекта Холла, магнитного поля и теплового излучения. Джангили и др. [16] изучали влияние радиационного и конвективного теплообмена на производство энтропии за счет потока несжимаемой микрополярной жидкости в прямоугольном вертикальном пористом канале. Сринивас и др. [17] обсудили поле температуры, про-

изводство энтропии и поле скоростей излучающих, несмешивающихся моментных жидкостей внутри канала.

Бежан [18, 19] развил теорию производства энтропии при различных ситуациях и параметрах течения, граничных условиях и геометрических конфигурациях. Впоследствии несколько исследователей выполнили работу по оценке необратимых распределений и количества образования энтропии в различных геометрических ситуациях и условиях течения. Джангили и Мурти [20] обсудили теплообмен, производство энтропии и свойства течения несмешивающихся микрополярных жидкостей в горизонтальном канале. Сринивас и др. [11, 17, 21] проанализировали производство энтропии жидкостями при различных граничных условиях, ситуациях течения и геометрических конфигурациях. Нежад и др. [22] с помощью второго закона термодинамики провели анализ несмешивающихся вязких жидкостей в наклонном канале с воздействием однородного магнитного поля. Камышлы и др. [23] проанализировали режим ламинарного течения полностью развитых течений несмешивающихся жидкостей в плоскопараллельном канале, выполнили анализ производства энтропии и определили коэффициент распределения необратимости. Эль Десуки и др. [24] рассчитали число Бежана и производство энтропии для ламинарного, несжимаемого и стационарного течения микрополярной жидкости в канале с граничными условиями скольжения. Производство энтропии в двухслойном потоке несмешивающихся жидкостей через теплопередающую систему исследовано Ченом и Цзяном [25]. Сан и др. [26] изучали генерацию энтропии и тепловые характеристики в электроосмотическом полностью развитом потоке вязкой жидкости через двумерный прямоугольный микроканал. Характеристики производства энтропии двухслойной электропроводящей несмешивающейся жидкостью через канал исследованы Ядавом и Кумаром [27]. Ядав и др. [28] исследовали перенос тепла, характеристики течения и производства энтропии двухслойной электропроводящей несмешивающейся жидкости через пористый насыщенный канал с различной пористостью. Анализ тепловых характеристик и текучести несмешивающихся жидкостей очень важен при термической обработке, добыче сырой нефти, решении задач переноса, в промышленных приложениях и т.д. Мурти и Сринивас [29] изучали теплопередачу, производство энтропии и стационарное течение для горизонтального канала несмешивающихся микрополярных жидкостей. Мутурадх и Сринивас [30] представили аналитический отчет для вязких МГД-поток несмешивающихся жидкостей внутри пористого канала. Сринивас и Мурти [31] исследовали тепловые характеристики, генерацию энтропии и поле течения несмешивающихся микрополярных

жидкостей в прямоугольном канале, зажато между двумя пористыми слоями. Кумават и др. [32] работали над производством энтропии в магнитогидродинамической двухфазной системе кровотока через проницаемую артерию.

Недавние достижения в области изучения различных видов неньютоновских жидкостей привели к росту внимания исследователей и инженеров из таких важных областей, как медицинские науки, инженерные технологии, промышленное оборудование, нефтепродукты и т.д. Микрополярная жидкость — одна из значимых неньютоновских жидкостей, которая обладает многими новыми отличительными особенностями. Систематическое изучение теории микрополярной жидкости было выполнено Эрингеном [33, 34]. Микрополярная жидкость обладает моментными напряжениями, а частица жидкости имеет независимые векторы вращения. Микрополярная жидкость широко используется в жидких кристаллах, нагревательных элементах, полимерных добавках, линиях передачи, холодильных змеевиках, процессах сушки, океанографии, астрофизике и геофизике. Значительные исследования по теории микрополярной жидкости были проведены рядом современных исследователей. Ядав и др. [35] работали над характеристиками течения микрополярных и ньютоновских жидкостей через пористый прямоугольный канал, а также обсудили влияние моментных напряжений и параметра отношения вязкостей на напряжение сдвига на стенке и скорость потока. Позже Ядав и Джайсвал [36] исследовали влияние ориентированного постоянного магнитного поля при течении микрополярных и ньютоновских жидкостей в пористом канале. Оахимир и Оладжувон [37] исследовали профили концентрации и температуры микрополярной жидкости в бесконечном вертикальном пористом канале при комбинированном воздействии теплового излучения, эффекта Холла и магнитного поля. Шринивасачарья и Бинду [38] изучали тепловые характеристики, скорость потока и производство энтропии при течении микрополярной жидкости в наклонном канале. Они применили метод спектральной квазилинеаризации для оценки теплового профиля и поля течения микрополярной жидкости. Джайсвал и Ядав [39] изучали проблему кровотока под действием внешнего магнитного воздействия. Они представили поток крови в виде двухфазных несмешивающихся микрополярной и ньютоновской вязких жидкостей через пористую слоистую артерию. Део и др. [40] обсудили влияние магнитного поля на характеристики течения микрополярной жидкости через концентрический пористый цилиндр, используя ячеичный метод.

Как обсуждалось выше, ряд исследователей обращались к проблеме образования энтропии из-за эффектов вязкой и радиационной теплопереда-

чи. Однако все еще существует необходимость в обсуждении необратимости, возникающей при прохождении несмешивающихся жидкостей по каналу из-за эффектов теплового излучения. Хорошо известно, что радиационный теплообмен и тепловые механизмы необратимы по своей природе. Производство энтропии из-за тепловых процессов разрушает эффективность тепловых систем и снижает производительность тепловых технологий. Таким образом, целью нашего анализа является дальнейшее снижение производства энтропии и достижение наилучшего дизайна тепловых устройств. Данное исследование рассматривается с учетом соответствующих явлений, отмеченных в работах [20, 22, 23, 41–43] и растущего значения минимизации производства энтропии.

В данной работе выявляется влияние радиационной теплопередачи, вязкой диссипации и магнитного поля на термодинамический анализ двух типов несмешивающихся микрополярной и ньютоновской жидкости в горизонтальном плоскопараллельном канале. На основе ранее опубликованных источников мы проанализировали, что в литературе не обсуждается такой тип исследования, в котором делается акцент на термодинамическом анализе двух несмешивающихся, полностью развитых, ламинарных потоков несжимаемых микрополярной и ньютоновской жидкости в горизонтальном канале под воздействием теплового излучения и ориентированного магнитного поля. Важные результаты, полученные в результате этого исследования, мотивируют нас работать в этой области и получать некоторые новые результаты наряду с существующими. Здесь мы исследуем влияние радиационного теплообмена и ориентированного магнитного поля на поле температуры, производство энтропии, число Бежана и поведение потока несмешивающихся микрополярных и ньютоновских жидкостей в канале. Система нелинейных связанных дифференциальных уравнений энергии, уравнения сохранения линейного и углового импульса решается аналитически с помощью стандартного метода, и далее мы обсуждаем графически влияние различных реологических и теплофизических параметров на число Бежана, количество производства энтропии, температурный профиль, угловую и линейную скорость.

## 2. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

Течение несмешивающихся микрополярной и ньютоновской вязких жидкостей в канале с учетом теплопередачи, теплового излучения и ориентированного магнитного поля привлекает множество исследователей и ученых из-за его важных приложений в реакторах термоядерного синтеза, процессе термического горения, ударных волнах, ядерном реакторе и т.д. Тепловые характеристики и скорость полностью развитого потока ста-

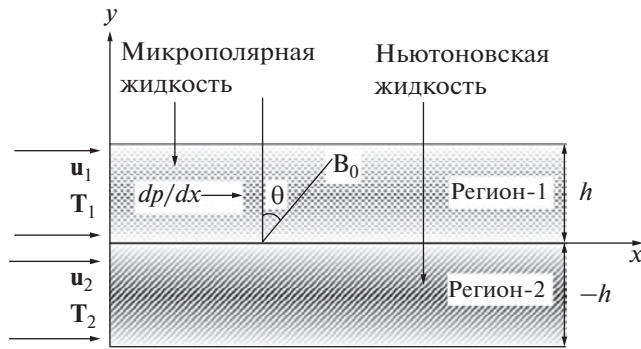


Рис. 1. Схема течения в канале.

онарной, несжимаемой, излучающей и намагниченной ньютоновской вязкой жидкости определяются консервативной формой управляющих уравнений. Полный набор из уравнения неразрывности, линейного уравнения импульса и уравнения энергии, выглядит следующим образом.

Уравнение неразрывности [8, 35]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

где скорость потока в аксиальном направлении обозначена как  $\mathbf{v}$ , а плотность жидкости равна  $\rho$ .

Уравнение сохранения количества движения [8, 35]:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{2\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2)$$

где давление  $P$  действует вдоль оси  $x$  относительно области течения, а коэффициент вязкости ньютоновской жидкости обозначен символом  $\mu$ . Первый член в правой части уравнения (2) определяет электромагнитную силу, где  $\mathbf{J}$  — плотность электрического тока, возникающего в области течения из-за наложения ориентированного магнитного поля  $\mathbf{B}$ , которое образует угол  $\theta$  с направлением перпендикулярным потоку жидкости. Эта электромагнитная сила или сила Лоренца рассматривается как массовая сила, действующая в направлении оси  $y$  в области течения (рис. 1).

Закон Ома, который определяет соотношение между плотностью электрического тока  $\mathbf{J}$ , электрическим полем  $\mathbf{E}$  и магнитным полем  $\mathbf{B}$ , принимает вид:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}), \quad (3)$$

где  $\sigma$  обозначает электропроводность. Поскольку неподвижные и изотермические стенки канала электрически изолированы то, следовательно, соответствующее уравнение для плотности электрического тока задается формулой:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Таким образом, скорость потока и электромагнитная сила коллинеарны и действуют в противоположных направлениях друг к другу. Следовательно, вместе с дальнейшими упрощениями сила Лоренца выражается в виде  $F = -\sigma B_0^2 \mathbf{v} \lambda$ , где  $\lambda = \cos \theta$ . Здесь обозначено  $B_0 = |\mathbf{B}|$ .

Уравнение энергии [8, 9]:

$$\rho \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T - P(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \phi + \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r, \quad (5)$$

$$\phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2. \quad (6)$$

Здесь символы  $k$ ,  $T$  обозначают теплопроводность и температуру ньютоновской жидкости. Множитель  $\phi$  представляет собой функцию диссипации в уравнении энергии для ньютоновской вязкой жидкости. Последний член в правой части уравнения (5) определяет излучающий тепловой поток. Чтобы получить упрощенную форму радиационного теплового потока  $q_r$  мы используем диффузионное приближение Росселанда в виде [15, 44]:

$$q_r = -\frac{4\sigma^* d T^4}{3k^* dy}. \quad (7)$$

Коэффициенты  $\sigma^*$  и  $k^*$  в уравнении (7) обозначают постоянную Стефана–Больцмана и средний коэффициент поглощения Росселанда, соответственно. Мы используем здесь разложение в ряд Тейлора по отношению к исходной температуре  $T_0$ , т.е.

$$T^4 = T_0^4 + 4T_0^3(T - T_0) + 6T_0^2(T - T_0)^2 + \dots \quad (8)$$

Предполагаем, что изменение температуры внутри жидкой среды слишком мало и, следовательно, выражение для нелинейного члена температурного профиля может быть представлено в виде:

$$T^4 = 4T_0^3 T - 3T_0^4. \quad (9)$$

Дифференцируя уравнение (7) по координате  $y$  и, используя уравнение (9), получаем:

$$\frac{dq_r}{dy} = -\frac{16\sigma^* T_0^3}{3k^*} \frac{d^2 T}{dy^2}. \quad (10)$$

Тепловые характеристики и характеристики течения полностью развитого излучающего, намагниченного, несжимаемого, устойчивого потока микрополярной жидкости определяются уравнениями сохранения. Полный набор уравнений энергии вместе с уравнениями сохранения линейного и углового импульса в форме, предло-

женной Эрингеном [33, 34], выглядит следующим образом:

Уравнение линейного импульса [15, 19, 36]:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -(\mu + \kappa) \nabla \times \nabla \times \mathbf{v} - \nabla P + \kappa \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} + (\xi_0 + 2\mu + \kappa) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (11)$$

В уравнении (11) символ  $\boldsymbol{\omega}$  обозначает угловую скорость (микроротацию) микрополярных частиц жидкости. Материальные параметры микрополярной жидкости представлены коэффициентами вязкости ( $\xi_0$ ,  $\mu$ ,  $\kappa$ ). Гравитационная сила на единицу массы выражается символом  $\mathbf{g}$ .

Уравнение углового импульса [15, 19, 36]:

$$\rho j \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = -\gamma_0 \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega} + \rho \mathbf{I} - 2\kappa \boldsymbol{\omega} + (\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \kappa \nabla \times \mathbf{v}, \quad (12)$$

где символ  $\mathbf{I}$  обозначает массовую плотность моментов сил, а символ  $j$  определяет коэффициент вращения (момент инерции). Материальные постоянные или коэффициенты вращательной (гироскопической) вязкости микрополярной жидкости представлены значениями ( $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\gamma_0$ ). Эти константы связаны между собой неравенствами, приведенными ниже:

$$2\mu + \kappa \geq 0, \quad \gamma_0 \geq 0, \quad 3\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 \geq 0, \\ \kappa \geq 0, \quad 3\xi_0 + 2\mu + \kappa \geq 0, \quad |\beta_0| \leq \gamma_0.$$

Уравнение энергии [15, 19, 29]:

$$\rho \frac{DT}{Dt} = \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma} - \nabla \cdot \mathbf{q}_r - P(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{h}) + \rho \phi', \quad (13)$$

$$\rho \phi' = \xi_0 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu (\mathbf{D} : \mathbf{D}) + 4\kappa \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \right)^2 + \alpha_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + \beta_0 (\nabla \boldsymbol{\omega} : (\nabla \boldsymbol{\omega})^T) + \gamma_0 (\nabla \boldsymbol{\omega} : \nabla \boldsymbol{\omega}). \quad (14)$$

В уравнении (13) механическая энергия на единицу массы микрополярной жидкости обозначается символом  $\phi'$ , тогда как символ  $\mathbf{D}$  в уравнении (14) обозначает тензор скорости деформации частицы микрополярной жидкости, который определяется как  $\frac{1}{2}(\mathbf{v}_{i,j} + \mathbf{v}_{j,i})$ . Отметим, что при  $\kappa = \xi_0 = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$  и нулевой плотности моментов сил  $\mathbf{I}$  угловая скорость  $\boldsymbol{\omega}$  становится равной нулю и, следовательно, уравнение (11) сводится к хорошо известному уравнению Навье–Стокса. Также замечаем, что при  $\kappa = 0$  угловая скорость (микроротация)  $\boldsymbol{\omega}$  и скорость потока  $\mathbf{v}$  не связаны друг с другом и, следовательно, угловая скорость не влияет на скорость потока микрополярной жидкости. Символ  $\mathbf{h}$  в уравнении энергии микрополярной жидкости представляет тепловой поток и принимает значение  $-k\Delta T$ , где теплопроводность обозначена символом  $k$ .

### 3. ТЕЧЕНИЕ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЬЮТОНОВСКОЙ И МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТЕЙ

#### Постановка задачи

Исзуемая здесь задача моделируется путем рассмотрения потока несмешивающихся вязких ньютоновской и микрополярной жидкостей в канале, который простирается в направлениях  $x$  и  $y$ . Геометрия потока канала схематично показана на рис. 1. В этой модели режим течения ограничивается ориентированным магнитным полем  $\mathbf{B}$ , направленным под углом  $\theta$ ,  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , который отсчитывается от вертикального к области течения направления (рис. 1). Верхняя область  $0 < y < h$ , обозначенная как Регион-1, содержит микрополярную жидкость, тогда как нижняя область  $-h < y < 0$ , обозначенная как Регион-2, содержит ньютоновскую вязкую жидкость. Течение несмешивающихся жидкостей в канале происходит за счет постоянного градиента давления. Неподвижные пластины канала поддерживаются при двух разных температурах  $T_1$  и  $T_2$  на расстоянии  $y = h$  и  $y = -h$ , соответственно, от границы раздела жидкостей. Таким образом, передача тепла в сочетании с тепловым излучением воздействует на область потока. Режим течения обеих жидкостей является несмешиваемым.

Стенки канала расположены на расстоянии  $2h$  в поперечном направлении, в то время как несмешивающаяся жидкость течет вдоль осевого направления  $x$  канала. Режим течения микрополярной жидкости поддерживается в верхней области канала значениями скорости потока  $\mathbf{v}_1$ , теплопроводности  $k_1$ , вязкости  $\mu_1$ , температуры  $T_1$  и электропроводности  $\sigma_1$ . При этом режим течения ньютоновской вязкой жидкости имеет место в нижней области канала со скоростью потока  $\mathbf{v}_2$ , теплопроводностью  $k_2$ , вязкостью  $\mu_2$ , температурой  $T_2$  и электропроводностью  $\sigma_2$ .

#### Постановка задачи и определяющие уравнения

Чтобы вычислить характеристики профиля числа Бежана, величину производства энтропии, температурные характеристики и скорость потока, мы принимаем следующие предположения, которые взаимно согласованы во всей рассматриваемой области течения.

- Сила Лоренца, которая является результирующей силой, обусловленной приложенным постоянным ориентированным магнитным полем, рассматривается как массовая сила.

- Силой, обусловленной гравитацией  $\mathbf{g}$ , для текущей задачи пренебрегаем.

• Предполагается, что тепловые свойства и характеристики течения ньютоновских вязкой и микрополярной жидкостей постоянны.

• Поток рассматривается как однонаправленный ламинарный, полностью развитый и текущий вдоль осевого направления (ось  $x$ ).

• Течение несмешивающихся ньютоновской вязкой и микрополярной жидкостей предполагается устойчивым, несжимаемым, излучающим и осесимметричным.

Тогда для рассматриваемой задачи соответствующие определяющие уравнения (10)–(13) вместе с уравнением неразрывности (1) для потока микрополярной жидкости в верхней области (Регион-1) канала будут представлены в векторной форме как:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (15)$$

$$(\mu_1 + \kappa) \nabla^2 \mathbf{v}_1 - \nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \kappa \nabla \times \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (16)$$

$$\gamma_* \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \kappa (2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{v}_1) = 0, \quad (17)$$

$$k_1 \nabla^2 T_1 + 2\mu(\mathbf{D} : \mathbf{D}) + \beta_0 (\nabla \boldsymbol{\omega} : (\nabla \boldsymbol{\omega})^T) + \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma_1} + 4\kappa \left( \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}_1 - \boldsymbol{\omega} \right)^2 - \nabla \cdot \mathbf{q}_r = 0. \quad (18)$$

Определяющие уравнения (1), (2) и (5) для течения вязкой ньютоновской жидкости в нижней области (Регион-2) канала для рассматриваемой задачи будут выражены в векторной форме как:

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad (19)$$

$$\mu_2 \nabla^2 \mathbf{v}_2 + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p = 0, \quad (20)$$

$$k_2 \nabla^2 T_2 + \frac{\mathbf{J}^2}{\sigma_2} + \mu_2 \phi - \nabla \cdot \mathbf{q}_r = 0. \quad (21)$$

Здесь вектор угловой (микровращательной) скорости  $\boldsymbol{\omega}$  микрополярной жидкости рассматривается как  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$ . Пусть линейные скорости микрополярной жидкости и ньютоновской вязкой жидкости в верхней части (Регион-1) и нижней части (Регион-2) канала равны соответственно  $\mathbf{v}_1 = (u_1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (u_2, 0, 0)$ . Уравнение неразрывности и условие полностью развитого течения несжимаемого потока предполагают, что составляющие скоростей  $\mathbf{v}_1$  и  $\mathbf{v}_2$  будут функциями только координаты  $y$ , т.е.  $u_1 = u_1(y)$ ,  $u_2 = u_2(y)$ .

Таким образом, полный набор связанных определяющих уравнений линейного импульса (16), углового импульса (17) и энергии (18) микрополярной жидкости, которые упоминаются в работах [31, 33, 45, 46], представляется в следующем виде.

Сохранение линейного импульса [19, 35, 36]:

$$(\mu_1 + \kappa) \frac{d^2 u_1}{dy^2} - \sigma_1 B_0^2 \lambda^2 u_1 + \kappa \frac{d\omega}{dy} - \frac{dp}{dx} = 0. \quad (22)$$

Сохранение углового импульса [15, 29, 35]:

$$\gamma_* \frac{d^2 \omega}{dy^2} - \kappa \left( \frac{du_1}{dy} + 2\omega \right) = 0. \quad (23)$$

Символ  $\gamma_*$  в приведенных выше уравнениях (17) и (23) был введен Ахмади и др. в работе [47] и определяется следующим образом:

$$\gamma_* = \left( \mu_1 + \frac{\kappa}{2} \right) i. \quad (24)$$

Параметр  $i$  обозначает плотность микроинерции микрополярной жидкости.

Уравнение энергии [15, 19, 36]:

$$k_1 \frac{d^2 T_1}{dy^2} + \left[ \kappa \left( \frac{du_1}{dy} + 2\omega \right)^2 + \mu_1 \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2 + \beta_0 \left( \frac{d\omega}{dy} \right)^2 \right] + \sigma_1 B_0^2 \lambda^2 u_1^2 - \frac{dq_r}{dy} = 0. \quad (25)$$

Полный набор определяющих уравнений для сохранения линейного импульса (26) и энергии (27) ньютоновской вязкой жидкости, который обсуждается в работе Хаппеля и Бреннера [48], имеет следующий вид:

Сохранение линейного импульса [8, 11, 13, 49]:

$$\mu_2 \frac{d^2 u_2}{dy^2} - P - \sigma_2 B_0^2 \lambda^2 u_2 = 0. \quad (26)$$

Сохранение энергии [8, 11, 13, 49]:

$$k_2 \frac{d^2 T_2}{dy^2} + \sigma_2 B_0^2 \lambda^2 u_2^2 - \frac{dq_r}{dy} + \mu_2 \left( \frac{du_2}{dy} \right)^2 = 0. \quad (27)$$

### Решение задачи

Чтобы преобразовать уравнения (22)–(27) в безразмерную форму, введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{aligned} u_i^* &= \frac{u_i}{U_0}, \quad i = 1, 2, \quad y^* = \frac{y}{h}, \quad x^* = \frac{x}{h}, \\ p^* &= \frac{p}{\rho_1 U_0^2}, \quad n_\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \omega^* = \frac{\omega h}{U_0}, \quad n_\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}, \\ c &= \frac{\kappa}{\mu_1}, \quad \text{Br} = \frac{\mu_1 U_0^2}{k_1 \Delta T}, \quad \theta_i = \frac{T_i^* - T_0}{\Delta T}, \\ \delta_0 &= \frac{\beta_0}{\mu_1 h^2}, \quad n_k = \frac{k_2}{k_1}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_1 U_0 h}{\mu_1}, \\ \text{Nr} &= \frac{4\sigma^* T_0^3}{k^* k_1}, \quad \text{Ha} = B_0 h \sqrt{\frac{\sigma_1}{\mu_1}}. \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta T$  и  $U_0$  обозначают характерную температуру и скорость соответственно. Значение  $\Delta T$

оценивается как  $\Delta T = T_1^* - T_2^*$ , при этом  $T_2^* < T_1^*$ . Безразмерная величина  $\delta_0$  определяет моментный параметр. Величины  $Re$ ,  $Nr$ ,  $Ha$  и  $B\Gamma$  обозначают число Рейнольдса, параметр излучения, число Гартмана и число Бринкмана, соответственно. Теперь, приняв вышеупомянутые безразмерные переменные и удалив символ “звездочка” у безразмерных величин, уравнения (22)–(27) принимают следующий безразмерный вид.

Регион-1 ( $-1 \leq y \leq 0$ ):

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} - \frac{Ha^2 \lambda^2}{(1+c)} u_1 + \frac{c}{1+c} \frac{d\omega}{dy} - \frac{Re P}{(1+c)} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{d^2 \omega}{dy^2} - \frac{2c}{2+c} \left( \frac{du_1}{dy} + 2\omega \right) = 0, \quad (29)$$

$$\left( 1 + \frac{4}{3} Nr \right) \frac{d^2 \theta_1}{dy^2} + B\Gamma \left[ c \left( \frac{du_1}{dy} + 2\omega \right)^2 + \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2 + Ha^2 \lambda^2 u_1^2 + \delta \left( \frac{d\omega}{dy} \right)^2 \right] = 0, \quad (30)$$

где  $P = \frac{dp}{dx}$ .

Регион-2 ( $0 \leq y \leq 1$ ):

$$\frac{d^2 u_1}{dy^2} - \frac{Re P}{n_\mu} - \frac{n_\sigma}{n_\mu} Ha^2 \lambda^2 u_2 = 0, \quad (31)$$

$$\left( 1 + \frac{4}{3} \frac{Nr}{n_k} \right) \frac{d^2 \theta_2}{dy^2} + \frac{B\Gamma}{n_k} \left[ n_\sigma Ha^2 \lambda^2 u_2^2 + n_\mu \left( \frac{du_2}{dy} \right)^2 \right] = 0. \quad (32)$$

Точное решение связанной нелинейной системы дифференциальных уравнений (28)–(32), подчиненное соответствующим граничным условиям, находится с использованием классических методов и здесь далее будут представлены только конечные формулы.

Выражение для линейной скорости потока микрополярной жидкости имеет вид:

$$u_1(y) = -\frac{P Re}{\lambda^2 Ha^2} + c_1 e^{\alpha y} + c_2 e^{-\alpha y} + c_3 e^{\beta y} + c_4 e^{-\beta y}. \quad (33)$$

Угловая скорость микрополярной жидкости описывается следующей формулой:

$$\omega(y) = \gamma(c_1 e^{\alpha y} - c_2 e^{-\alpha y}) + \delta(c_3 e^{\beta y} - c_4 e^{-\beta y}). \quad (34)$$

Выражение для теплового профиля микрополярной жидкости представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \theta_1(y) = & B\Gamma(8P Ha^2 \lambda^2 Re(\alpha_1^2 e^{\alpha y} c_1 + e^{-\alpha y} \alpha_1^2 c_2 + \\ & + \beta_1^2 e^{\beta y} c_3 + \beta_1^2 e^{-\beta y} c_4) - \alpha_1^2 e^{2y\alpha} Ha^2 \lambda^2 \varphi c_1^2) - \\ & - B\Gamma(8(\alpha + \beta)_1^2 e^{(\alpha+\beta)y} Ha^2 \lambda^2 \zeta c_1 c_3 + 8(\alpha - \beta)_1^2 e^{-(\alpha+\beta)y} \times \\ & \times Ha^2 \lambda^2 \eta c_2 c_3 + e^{2y\beta} Ha^2 \lambda^2 \beta_1^2 c_3^2 \Gamma) - B\Gamma(8(\alpha - \\ & - \beta)_1^2 e^{y(\alpha-\beta)} Ha^2 \lambda^2 \eta c_1 c_4 + 8(\alpha + \beta)_1^2 e^{-y(\alpha+\beta)} Ha^2 \lambda^2 \times \\ & \times (2c\alpha\delta + 2c\gamma(\beta + 2\delta))) - B\Gamma(\alpha\beta(1 + c + \gamma\delta\xi_0) \\ & Ha^2 \lambda^2 c_2 c_4) - 2B\Gamma y^2 P^2 Re^2 + 2B\Gamma y^2 (2Ha^2 \alpha^2 \lambda^2 \times \\ & \times c_1 c_2 (1 + c) + 8c Ha^2 \gamma \lambda^2 c_1 c_2 (\alpha + \gamma) + 2Ha^2 \beta^2 \lambda^2 c_3 c_4 \times \\ & \times (1 + c)) - 2B\Gamma y^2 (2Ha^2 \xi_0 \lambda^2 (\alpha^2 \gamma^2 c_1 c_2 + \beta^2 \delta^2 c_3 c_4) + \\ & + 2Ha^4 \lambda^4 (c_1 c_2 + c_3 c_4) - 8c Ha^2 \delta \lambda^2 c_3 c_4 (\beta + \delta)) - \\ & - B\Gamma(e^{-2y(\alpha+\beta)} Ha^2 \lambda^2 \alpha \beta_1 (e^{2y\beta} \beta \alpha_1 c_2^2 \varphi + \\ & + e^{2y\alpha} \alpha \beta_1 c_4^2 \Gamma)) + c_5 + y c_6. \end{aligned} \quad (35)$$

Скорость потока ньютоновской жидкости принимает вид:

$$u_2(y) = c_7 e^{-\gamma y} + c_8 e^{\gamma y} - \frac{P Re}{Ha^2 \lambda^2 n_\sigma}. \quad (36)$$

Температурный профиль ньютоновской жидкости представляется как:

$$\begin{aligned} \theta_2(y) = & c_9 + c_{10} y + B\Gamma_2(-P^2 Re^2 y^2 + \\ & + 4P Re(c_7 e^{-\gamma y} + c_8 e^{\gamma y}) n_\mu) - \\ & - B\Gamma_2(Ha^2 \lambda^2 n_\mu n_\sigma (c_7^2 e^{-2\gamma y} + c_8^2 e^{2\gamma y})). \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь для удобства введены следующие обозначения:

$$\varphi = \alpha^2 + c\alpha^2 + 4c\alpha\gamma + 4c\gamma^2 + \alpha^2 \gamma^2 \xi_0 + Ha^2 \lambda^2, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \zeta = & \alpha\beta + c\alpha\beta + 2c\beta\gamma + 2c\alpha\delta + \\ & + 4c\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\delta\xi_0 + Ha^2 \lambda^2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \eta = & -\alpha\beta - c\alpha\beta - 2c\beta\gamma - 2c\alpha\delta - \\ & - 4c\gamma\delta + \alpha\beta\gamma\delta\xi_0 + Ha^2 \lambda^2, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Gamma = \beta^2 + c\beta^2 + 4c\beta\delta + 4c\delta^2 + \beta^2 \delta^2 \xi_0 + Ha^2 \lambda^2, \quad (41)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha}, \quad \beta_1 = \frac{1}{\beta}, \quad (42)$$

$$(\alpha + \beta)_1 = \frac{1}{(\alpha + \beta)}, \quad (\alpha - \beta)_1 = \frac{1}{(\alpha - \beta)},$$

$$B\Gamma_1 = \frac{3B\Gamma}{4Ha^2 \lambda^2 (3 + 4Nr)}, \quad (43)$$

$$B\Gamma_2 = \frac{3B\Gamma}{2Ha^2 \lambda^2 n_\sigma (3n_k + 4Nr)}, \quad (44)$$

$$\alpha = \sqrt{\left( \frac{c}{1+c} + \frac{Ha^2 \lambda^2}{2(1+c)} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-16c Ha^2 \lambda^2}{2+3c+c^2} - \left( \frac{2c}{1+c} + \frac{Ha^2 \lambda^2}{1+c} \right)^2}}, \quad (45)$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{c}{1+c} + \frac{\text{Ha}^2 \lambda^2}{2(1+c)}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-16c \text{Ha}^2 \lambda^2}{2+3c+c^2} - \left(\frac{2c}{1+c} + \frac{\text{Ha}^2 \lambda^2}{(1+c)}\right)^2}}, \quad (46)$$

$$\gamma = \alpha \left( \frac{\text{Ha}^2 \lambda^2 (2+c)}{4c^2} - \frac{1}{2} \right) - \alpha^3 \left( \frac{(2+c)(1+c)}{4c^2} \right), \quad (47)$$

$$\delta = \beta \left( \frac{\text{Ha}^2 \lambda^2 (2+c)}{4c^2} - \frac{1}{2} \right) - \beta^3 \left( \frac{(2+c)(1+c)}{4c^2} \right), \quad (48)$$

$$\chi = \frac{\text{Ha} \lambda \sqrt{n_0}}{n_u}. \quad (49)$$

Решение для температурного профиля  $\theta_1(y)$ , скорости микровращения  $\omega_1(y)$ , скорости потока микрополярной жидкости  $u_1(y)$  включает константы  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$ , тогда как выражение для температурного профиля  $\theta_2(y)$ , скорости потока ньютоновской жидкости  $u_2(y)$  включает константы  $c_7, c_8, c_9, c_{10}$ . Эти произвольные константы находятся с использованием необходимых граничных условий, которые ставятся в соответствии с рассматриваемой задачей.

#### Граничные условия

Качественным свойством процесса протекания двухфазной несмешивающейся жидкости является сцепление на границе раздела жидкостями. Слои несмешивающейся жидкости соединяются посредством передачи импульса по границе раздела. Передача импульса происходит из-за баланса напряжений и непрерывности тангенциальной скорости на границе раздела. Чтобы оценить теплообмен и характерные компоненты течения несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей, принимаем физически реалистичные граничные условия на границе раздела. Течение несмешивающейся жидкости происходит внутри канала, так что стенки канала находятся в изотермическом и статическом состоянии. Условия отсутствия проскальзывания накладываются на неподвижные нижнюю и верхнюю стенки канала, в то время как на границе раздела имеет место непрерывность скорости потока несмешивающихся жидкостей. Условие непрерывности напряжения сдвига и скорости потока на границе раздела несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей задается в следующем виде (Ядав и др. [35]):

$$(1+c) \frac{du_1}{dy} + c\omega = n_u \frac{du_2}{dy}, \quad (50)$$

$$u_1(y) = u_2(y). \quad (51)$$

Регион-1 содержит верхнюю неподвижную пластину,  $y = 1$ , а граница раздела несмешиваю-

щейся жидкости задается как  $y = 0$ . Регион-2 содержит нижнюю неподвижную пластину,  $y = -1$ . Непрерывность теплового потока и температурного профиля по центральной линии (границе раздела) выражается равенствами (Мурти и Сринивас [29]):

$$\frac{d\theta_1}{dy} = n_k \frac{d\theta_2}{dy}, \quad (52)$$

$$\theta_1(y) = \theta_2(y). \quad (53)$$

Постоянная угловая скорость (микроротация) микрополярной частицы жидкости на границе раздела задается условием симметрии (Ариман и Какмак [50], Ариман и др. [51]):

$$\left. \frac{d\omega}{dy} \right|_{y=0} = 0. \quad (54)$$

Распределения температуры на неподвижных изотермических стенке канала задаются как (Мурти и Сринивас [29]):

$$\theta_1 = 1 \text{ при } y = 1, \quad (55)$$

$$\theta_2 = 0 \text{ при } y = -1. \quad (56)$$

Как отмечал Лукашевич [52], микрополярная частица жидкости обладает микровращательной скоростью, которая эквивалентна угловой скорости на неподвижной изотермической стенке канала. Таким образом, имеем

$$\omega_{\text{wall}} = n(\nabla \times v_1), \text{ где } 0 \leq n \leq 1. \quad (57)$$

Величина вращения является наименьшей, когда параметр  $n$  приближается к нулю. Если  $n = 0$ , то  $\omega = 0$  на стенках. Это указывает на то, что в таком режиме течения микрополярной жидкости, частицы вблизи поверхности пластин не способны вращаться (Йена и Матур [53]). Как упоминалось рядом авторов (Рис и Боссом [54], Бхаттачарья и др. [55]), скорость микровращения микрочастиц жидкости равна нулю на неподвижных границах канала.

Следовательно,

$$\omega(y) = 0 \text{ при } y = 1. \quad (58)$$

Условия отсутствия скольжения на неподвижных непроницаемых границах канала записываются в следующем виде (Сандип и Дешпанде [56]):

$$u_1(y) = 0 \text{ при } y = 1, \quad (59)$$

$$u_2(y) = 0 \text{ при } y = -1. \quad (60)$$

*Объемное производство энтропии*

Выражение для объемного производства энтропии в случае одномерного течения вязкой, несжимаемой, микрополярной жидкости в присутствии радиационного теплообмена и ориентированного магнитного поля задается вторым законом термодинамики и обозначается здесь как  $(S_1)_G$ :

$$(S_1)_G = \frac{k_1}{T_0^2} \left[ 1 + \frac{16\sigma^* T_0^3}{3k^* k_1} \right] \left( \frac{\partial T_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma_1 B_0^2 \lambda^2 u_1^2}{T_0} + \frac{\mu_1}{T_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2 + \frac{\beta_1}{T_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 + \frac{k_1}{T_0} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + 2\omega \right)^2. \quad (61)$$

Производство энтропии микрополярной жидкости за счет теплового излучения и теплопроводности представлено первым членом уравнения (61), тогда как энтропия, обусловленная ориентированным магнитным полем, выражается вторым членом уравнения (61). Остальные члены представляют энтропию, обусловленную эффектом вязкой диссипации несжимаемой микрополярной жидкости. Объемное производство энтропии для несжимаемого, излучающего, одномерного МГД-режима течения ньютоновской вязкой жидкости задается вторым законом термодинамики и обозначается как  $(S_2)_G$

$$(S_2)_G = \frac{k_2}{T_0^2} \left[ 1 + \frac{16\sigma^* T_0^3}{3k^* k_2} \right] \left( \frac{\partial T_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{\sigma_2 B_0^2 \lambda^2 u_2^2}{T_0} + \frac{\mu_2}{T_0} \left( \frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2. \quad (62)$$

Производство энтропии ньютоновской жидкости за счет теплового излучения и теплопроводности представлено первым членом уравнения (62), тогда как второе слагаемое представляет производство энтропии, вызванное наклонным магнитным полем. Оставшийся член представляет собой производство энтропии из-за эффекта вязкой диссипации несжимаемой ньютоновской жидкости. Термин “характерное производство энтропии” был использован Бежаном [17, 18, 57] и определяется как:

$$S_{G,C} = \left[ \frac{k_1 (\Delta T)^2}{h^2 T_0^2} \right]. \quad (63)$$

Это количество производства энтропии связывается с профилем производства энтропии для микрополярной и ньютоновской вязкой жидкости в горизонтальном канале. Выражение для количества производства энтропии вычисляется путем деления выражения общей скорости производства энтропии на характеристическую скорость производства энтропии. Оценка количества производства энтропии для вязкого, излучающего, несжимаемого, МГД-потока микрополярной жид-

кости в канале вычисляется с помощью выражения:

$$Ns_1 = \left[ 1 + \frac{4}{3} Nr \right] \left( \frac{d\theta_1}{dy} \right)^2 + \frac{Br}{\Omega} \left[ c \left( \frac{du_1}{dy} + 2\omega \right)^2 + \left( \frac{du_1}{dy} \right)^2 + Ha^2 \lambda^2 u_1^2 + \delta_0 \left( \frac{d\omega}{dy} \right)^2 \right]. \quad (64)$$

Оценка количества образовавшейся энтропии  $Ns_2$  для вязкого, излучающего, несжимаемого, намагниченного потока ньютоновской вязкой жидкости в канале получается с помощью аналогичного выражения:

$$Ns_2 = \left[ 1 + \frac{4}{3} \frac{Nr}{n_k} \right] \left( \frac{d\theta_2}{dy} \right)^2 + \frac{1}{n_k} \frac{Br}{\Omega} \left[ n_o Ha^2 \lambda^2 u_2^2 + n_\mu \left( \frac{du_2}{dy} \right)^2 \right]. \quad (65)$$

Влияние вязкой диссипации определяется числом Бринкмана  $Br$ , а член  $\Omega = \frac{\Delta T}{T_0}$  обозначает безразмерное приращение температуры. Из уравнений (64)–(65) можно сделать вывод, что количество производства энтропии  $Ns_i$  представляет собой комбинацию двух слагаемых. Второй член представляет число генерации энтропии ( $Nf_i$ ) за счет комбинированного эффекта трения жидкости и магнитного поля, а первый член ( $Ny_i$ ) представляет число генерации энтропии за счет радиационного теплообмена внутри системы. Таким образом,

$$Ns_i = Ny_i + Nf_i. \quad (66)$$

*Профиль числа Бежана*

В термодинамическом анализе распределение необратимости в различных термодинамических процессах определяется термодинамическим параметром, который известен как число Бежана. Коэффициент распределения необратимости введен Паолетти и др. [58] и представляет собой отношение общей энтропии, обусловленной комбинированным эффектом трения жидкости и магнитного поля, к энтропии, вызванной радиационным теплообменом внутри системы.

$$s_i = \frac{Nf_i}{Ny_i}, \quad i = 1, 2. \quad (67)$$

Если диапазон изменения  $s_i$  принимает значения от 0 до 1, это означает, что коэффициент распределения необратимости возникает из-за переноса тепла в области потока (Мурти и Сринивас

[29]);  $s_i \geq 1$  указывает на то, что коэффициент распределения необратимости возрастает только из-за трения жидкости, однако тем не менее представляет коэффициент распределения необратимости из-за трения жидкости и передачи тепла внутри системы (Мурти и Сринивас [29]).

Механизм необратимости имеет физическую значимость в тепловых процессах и процессах течения жидкости. Энтропия создается внутри системы из-за трения жидкости, процесса теплообмена, магнитного поля и теплового излучения. Важно проанализировать механизм необратимости, обусловленный различными источниками теплопереноса внутри системы. Значимость этих механизмов определяется важным термодинами-

ческим параметром, который называется числом Бежана,  $Be$ .

Паолетти и др. [58] исследовали число Бежана и определили его как отношение необратимости из-за теплообмена к необратимости из-за других неидеальностей внутри системы, т.е. к сумме необратимости теплообмена, необратимости из-за магнитного поля и необратимости трения жидкости.

$$Be_i = \frac{Ny_i}{Ns_i} = \frac{Ny_i}{Ny_i + Nf_i} = \frac{1}{1 + s_i}; \quad i = 1, 2. \quad (68)$$

Профиль числа Бежана  $Be_1$  для микрополярной жидкости внутри канала под влиянием радиационного теплообмена и ориентированного магнитного поля получен нами в следующем виде (Мурти и Сринивас [29]):

$$Be_1 = \frac{\left(1 + \frac{4}{3}Nr\right)\left(\frac{d\theta_1}{dy}\right)^2}{\left(1 + \frac{4}{3}Nr\right)\left(\frac{d\theta_1}{dy}\right)^2 + \frac{Br}{\Omega}\left[c\left(\frac{du_1}{dy} + 2\omega\right)^2 + \left(\frac{du_1}{dy}\right)^2 + Ha^2\lambda^2u_1^2 + \delta_0\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2\right]}. \quad (69)$$

Профиль числа Бежана  $Be_2$  для ньютоновской жидкости внутри канала под влиянием радиационного теплообмена и ориентированного маг-

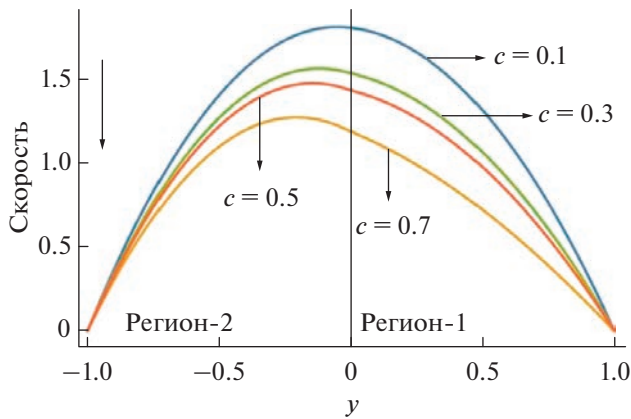
нитного поля имеет аналогичный вид (Мурти и Сринивас [29]):

$$Be_2 = \frac{\left(1 + \frac{4}{3}\frac{Nr}{n_k}\right)\left(\frac{d\theta_2}{dy}\right)^2}{\left(1 + \frac{4}{3}\frac{Nr}{n_k}\right)\left(\frac{d\theta_2}{dy}\right)^2 + \frac{1}{n_k}\frac{Br}{\Omega}\left[n_oHa^2\lambda^2u_2^2 + n_\mu\left(\frac{du_2}{dy}\right)^2\right]}. \quad (70)$$

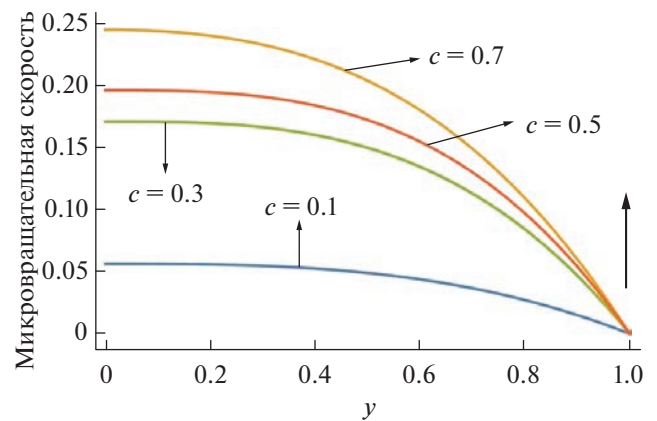
#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Анализ производства энтропии в горизонтальных и вертикальных воздуховодах, каналах, трубопроводах в различных условиях имеет динамические применения во вращающихся электрических машинах, при оптимизации промышленных устройств, повышении производительности различных инженерных технологий. За последние десятилетия было опубликовано много инновационных исследований, поскольку анализ второго закона термодинамики является разумным для получения оптимального дизайна системы. Поэтому, в данном исследовании обсуждается производство энтропии несмешивающимися микрополярной и ньютоновской вязкими жидкостями, протекающими по каналу. В работе мы обсуждаем влияние различных тепловых и физических параметров потока, таких как параметр излучения, параметр микрополярности  $s$ , число Рей-

нольдса, параметр вязкой диссипации, число Гартмана и параметр угла наклона на число Бежана, скорость потока, теплообмен и количество (число) производства энтропии. Цель настоящего исследования достигается путем рассмотрения соответствующих численных значений вышеупомянутых тепловых параметров и параметров потока, связанных с рассматриваемой задачей. Эти значения достаточно хорошо подтверждены уже опубликованными работами [8, 17, 20, 34, 36]. Диапазон безразмерного градиента давления лежит в диапазоне  $(-\infty, 0)$  (Джангили и Мурти [20], Ядав и др. [35]). Влияние микрополярности на поток и тепловые свойства несмешивающейся жидкости описывается параметром микрополярности  $s$ , и значения этого параметра лежат в области  $[0, \infty)$  (Джангили и Мурти [20], Оахмир и Оладжувон [37]). Напряженность магнитного поля в области потока описывается числом Гартма-



**Рис. 2.** Зависимости линейной скорости для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей от параметра микрополярности  $c$ :  $\delta_0 = 0.7$ ,  $Re = 2.5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_u = 0.9$ ,  $Br = 0.5$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_G = 0.5$ ,  $Nr = 1$ ,  $P = -1.5$ ,  $Na = 0.5$ .



**Рис. 3.** Зависимости микровращательной скорости  $\omega$  микрополярной жидкости от параметра микрополярности  $c$ :  $\delta_0 = 0.7$ ,  $Re = 2.5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_u = 0.9$ ,  $Br = 0.5$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_G = 0.5$ ,  $Nr = 1$ ,  $P = -1.5$ ,  $Na = 0.5$ .

на, которое принимает значения из диапазона  $[0, \infty)$  (Джангили и Мурти [20], Нежад и Шахри [22]) для анализа влияния эффекта магнитного поля при нескольких углах наклона области потока от нуля до  $\frac{\pi}{2}$  (Никодиевич и др. [8]). Термин  $Nr$  представляет относительный вклад радиационной теплопередачи в кондуктивную теплопередачу и лежит в интервале  $(0, \infty)$  (Сринивас и др. [17]).

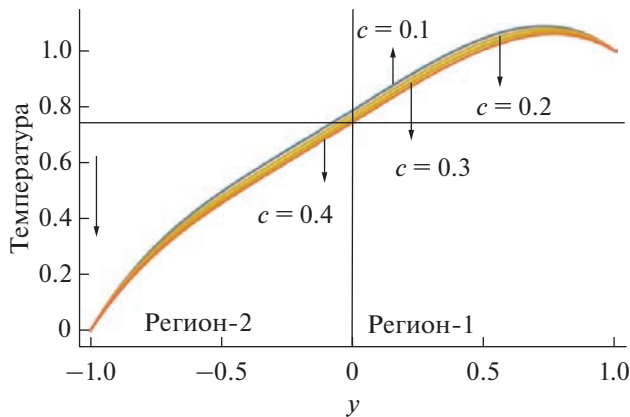
#### Влияние параметра микрополярности

Соотношение между ньютоновской и вращательной вязкостью выражается хорошо известным параметром микрополярности  $c$ . Из рис. 2 и 3 мы можем заключить, что микроструктура микрополярной жидкости оказывает значительное влияние на линейную скорость и скорость микровращения при  $c \rightarrow 1$ . Если мы примем  $c \rightarrow 0$ , то это означает, что  $c \rightarrow 0$ , следовательно, микрополярностью можно пренебречь, то есть в этом случае жидкость считается неполярной. Таким образом, как только  $c \rightarrow 0$ , уравнения (29) и (31) преобразуются в соответствующие уравнения для ньютоновской жидкости. Следовательно, рис. 2 демонстрирует влияние параметра микрополярности на линейную скорость несмешивающейся жидкости, и можно сделать вывод о том, что линейная скорость увеличивается с уменьшением параметра микрополярности. Рис. 2 показывает также, что характеристики течения ньютоновской жидкости превосходят характеристики микрополярной жидкости.

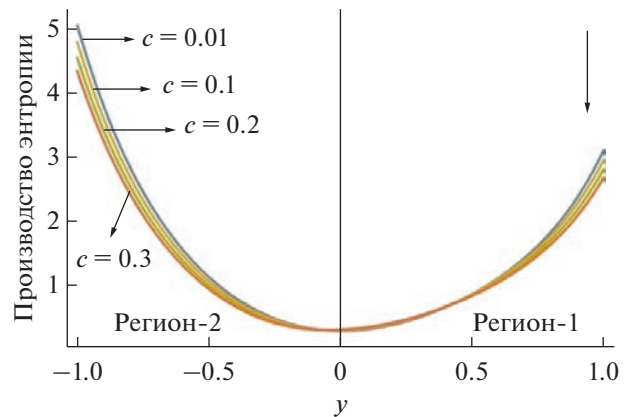
Это происходит из-за того, что с увеличением микровращательной скорости импульс частиц жидкости передается вращательному движению

частиц жидкости. Изменение угловой скорости (микровращения) микрополярных частиц жидкости при различных значениях параметра микрополярности  $c$  показано на рис. 3. Из этого рисунка видно, что параметр микрополярности  $c$  сильно влияет на микровращение микрополярных частиц жидкости: микровращательная скорость микрополярной жидкости растет при увеличении параметра микрополярности  $c$ . Наука, стоящая за этим фактом, заключается во вращательной градиентной вязкости микрополярной жидкой частицы, которая увеличивается с увеличением параметра микрополярности.

Из рис. 3 можно заключить, что при большом значении  $c$  угловое вращение микрополярных частиц жидкости медленно убывает от центральной линии (границы раздела жидкостей) к середине Региона-1, а затем быстро убывает к границе канала и становится пренебрежимо малым на неподвижной границе канала, что подтверждает граничное условие (59). Наши результаты хорошо коррелируют с результатами Мурти и Сриниваса [29]. Характер теплового профиля с различными приемлемыми значениями параметра микрополярности  $c$  показан на рис. 4. Мы видим, что температура несмешивающихся жидкостей уменьшается с увеличением значений параметра микрополярности. Это связано с тем, что увеличение значения параметра микрополярности снижает линейные характеристики потока несмешивающейся микрополярно-ньютоновской жидкости и, следовательно, энергия несмешивающихся жидкостей уменьшается. Таким образом, температура несмешивающихся жидкостей снижается при увеличении значений параметра микрополярности  $c$ . Влияние физически приемлемых значений параметра микрополярности  $c$  на профиль количе-



**Рис. 4.** Температурные профили для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных  $c$ :  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 0.8$ ,  $P = -1.5$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $Re = 2.5$ ,  $Br = 0.5$ .



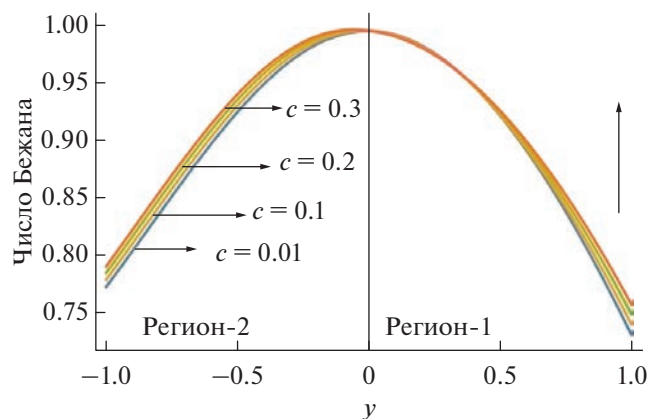
**Рис. 5.** Профили количества производства энтропии для несмешивающейся ньютоновской и микрополярной жидкости в зависимости от параметра микрополярности  $c$ :  $Re = 2.5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $P = -1.5$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $Nr = 1$ ,  $Br = 0.5$ ,  $\delta_0 = 0.7$ .

ства производства энтропии показано на рис. 5. Мы наблюдаем, что профиль количества производства энтропии достигает своего минимального значения на центральной линии (границе раздела). Рис. 5 показывает, что производство энтропии уменьшается при увеличении значений параметра микрополярности  $c$ , однако вблизи центральной линии (границы раздела жидкостей) изменение числа производства энтропии с ростом параметра микрополярности происходит в обратном порядке. Более того, мы также можем заключить, что число производства энтропии достигает более высоких значений в области ньютоновской жидкости (Регион-2) по сравнению с областью микрополярной жидкости (Регион-1). Это явление возникает из-за эффектов трения, которые более заметны в случае ньютоновской жидкости, чем для микрополярной жидкости.

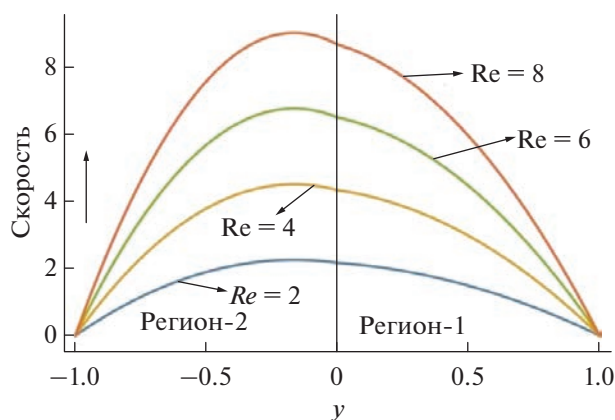
На рис. 6 представлено влияние параметра микрополярности на профиль числа Бекмана. Замечаем, что увеличение параметра микрополярности усиливает профиль числа Бекмана для несмешивающихся жидкостей. График показывает, что число Бекмана достигает более высоких значений в области ньютоновской жидкости (Регион-2), чем в области микрополярной жидкости (Регион-1). Оно достигает максимального значения на центральной линии (границе раздела жидкостей). Аналогичный вид изменения распределения числа Бекмана и числа производства энтропии с ростом параметра микрополярности  $c$  был обнаружен также в работах Джангили и др. [16], Джангили и Мурти [20] и Сринивас и Мурти [29], которые подтверждают результат нашего исследования.

#### Влияние числа Рейнольдса

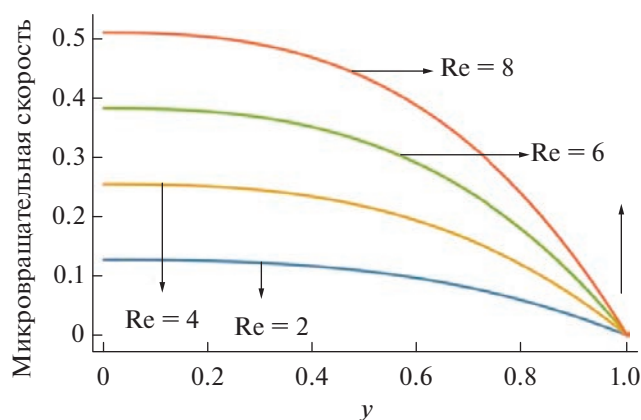
Влияние числа Рейнольдса на линейную скорость потока, угловую скорость, профиль числа Бекмана, тепловые поля и количество производства энтропии показано на рис. 7–11. Из рис. 7 замечаем, что характеристики линейного течения несмешивающихся жидкостей усиливаются при увеличении значений числа Рейнольдса, и линейная скорость достигает несколько более высоких значений в области ньютоновской жидкости (Регион-2), чем в области микрополярной жидкости (Регион-1). Это явление возникает из-за вклада инерционных эффектов несмешивающихся жид-



**Рис. 6.** Профиль числа Бекмана для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях параметра  $c$ :  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $P = -0.1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.6$ ,  $Re = 5$ ,  $Br = 0.8$ .



**Рис. 7.** Профили скорости несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях  $Re$ :  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $P = -2$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $Br = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $c = 0.2$ .



**Рис. 8.** Профили микровращательной скорости  $\omega$  микрополярной жидкости при разных значениях  $Re$ :  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $P = -2$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $Br = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $c = 0.2$ .

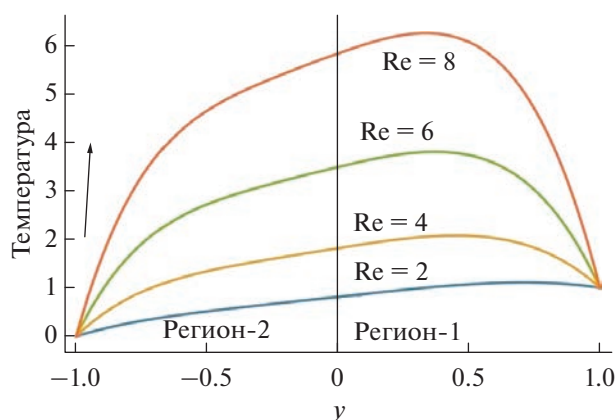
жидкостей. Определение скорости течения микрополярной и ньютоновской жидкостей хорошо согласуется с результатами, опубликованными в работах [16, 20, 29].

Изменение профиля угловой скорости при различных предпочтительных значениях числа Рейнольдса показано на рис. 8. Можно сделать вывод, что угловая скорость (скорость микровращения) увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Влияние числа Рейнольдса на тепловое поле проиллюстрировано на рис. 9. Следует отметить, что с увеличением числа  $Re$  профиль температуры увеличивается в обеих областях канала, и достигает несколько более высоких значений в области микрополярной жидкости по сравнению с областью вязкой жидкости Ньютона. Причина этого факта заключается в том, что при увеличении скорости потока несмешивающихся жидкостей увеличивается рассеивание энергии и, следовательно, повышается их температура. Наши результаты для температурного профиля, угловой скорости и линейной скорости потока согласуются с результатами, опубликованными в работах [16, 20].

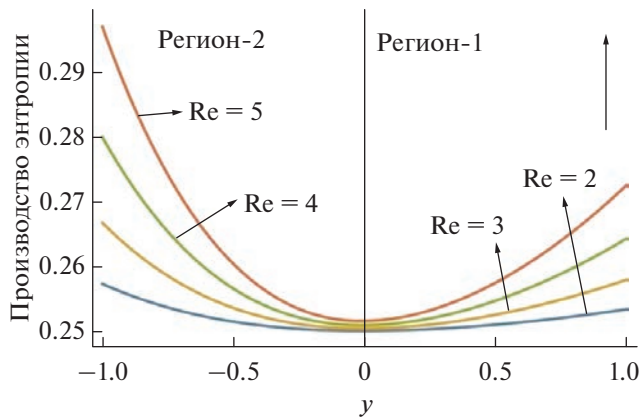
Характер изменения числа производства энтропии при различных физически обоснованных значениях числа Рейнольдса показан на рис. 10. Из этого графика видно, что профиль числа производства энтропии увеличивается с увеличением значений числа Рейнольдса. Это явление возникает из-за более высоких значений тепловых градиентов и градиентов скорости.

Было замечено, что изменение числа генерации энтропии вблизи стенок канала более выражено, в то время как оно имеет минимум на центральной линии (границе раздела несмешивающихся жидкостей). Причиной возникновения

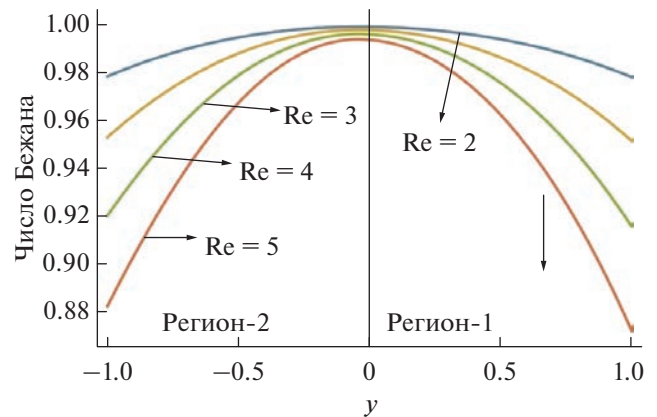
такого результата является вязкая природа жидкостей. По мере увеличения вязкости жидкости увеличивается и трение жидкости, поэтому производство энтропии максимизирует вблизи стенок. Здесь мы обнаружили, что производство энтропии выше в области ньютоновской жидкости (Регион-2), чем в области микрополярной жидкости (Регион-1). Производство энтропии выше в случае ньютоновской жидкости, потому что ньютоновская жидкость обладает большей вязкостью, чем микрополярная жидкость. Наши результаты, по-видимому, хорошо подтверждаются результатами, опубликованными в работах [16, 20, 29]. Анализ профиля числа Бежана при различных предпочтительных значениях числа Рейнольдса показан на рис. 11. Этот рисунок показы-



**Рис. 9.** Температурные профили для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях  $Re$ :  $c = 0.2$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $P = -2$ ,  $Br = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.7$ .



**Рис. 10.** Кривые профиля производства энтропии для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях  $Re$ :  $c = 0.2$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Nr = 1$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $Br = 0.4$ .



**Рис. 11.** Кривые изменения числа Бэжана для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях  $Re$ :  $c = 0.2$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $Nr = 1$ ,  $Br = 0.4$ ,  $\delta_0 = 0.9$ .

вает, что профиль числа Бэжана уменьшается с увеличением значений числа Рейнольдса. Мы обнаружили более высокие значения числа Бэжана на центральной линии (границе раздела несмешивающихся жидкостей). Но, около неподвижной пластины, профиль числа Бэжана уменьшается с увеличением числа Рейнольдса, что происходит из-за высокой диссипации энергии вблизи стенок канала. Эти результаты превосходно согласуются с результатами, опубликованными в литературе [16, 20, 29].

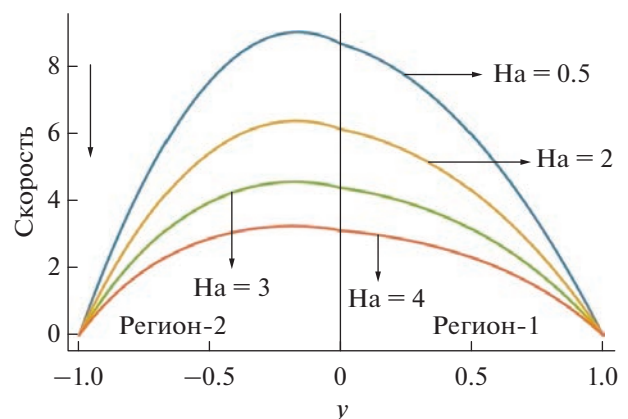
#### Влияние числа Гартмана

Анализ влияния параметра магнитного поля (числа Гартмана) на распределение линейной скорости потока несмешивающихся микрополярной и ньютоновской жидкостей представлен на рис. 12. Мы обнаружили, что увеличение числа Гартмана,  $Ha$ , приводит к падению скорости потока в обоих сечениях несмешивающихся жидкостей. Мы проанализировали с физической точки зрения, что по мере усиления напряженности магнитного поля скорость потока несмешивающихся жидкостей уменьшается. Существование магнитного поля в процессе течения жидкости создает силу сопротивления, и эта сила сопротивления противодействует движению жидкости в канале, и, следовательно, движение микрополярной и ньютоновской жидкостей замедляется в обеих областях канала. Графические результаты поведения угловой скорости при различных значениях числа Гартмана показаны на рис. 13. На этом рисунке мы видим, что увеличение значений числа Гартмана приводит к уменьшению угловой скорости (микровращения) микрополярных частиц жидкости. Аналогичные наблюдения за ха-

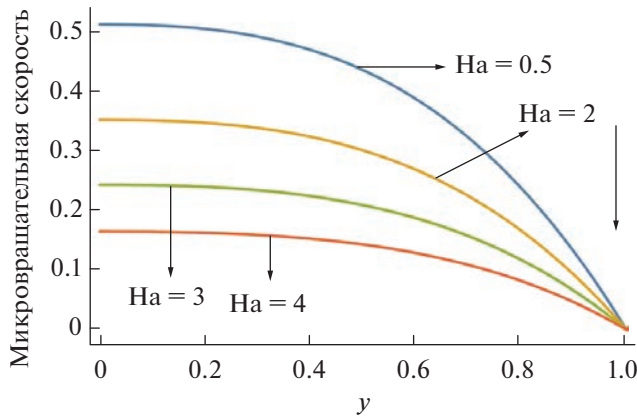
рактеристиками угловой скорости и потока с ростом числа Гартмана были представлены Джангили и Мурти [20], Ядавом и Джайсвалом [36].

#### Влияние параметра угла наклона

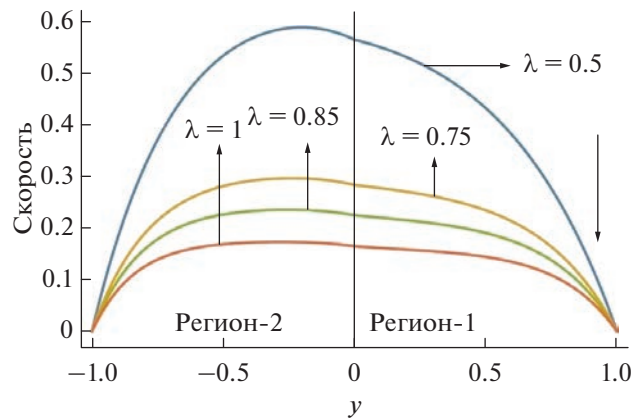
Чтобы проанализировать поведение линейной и угловой скорости потока при различных значениях параметра угла наклона магнитного поля к вертикальной оси, мы построили графики на рис. 14, 15. Целью рис. 14 является анализ влияния изменения параметра угла наклона  $\lambda = \cos\theta$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) на характеристики потока несмешивающихся жидкостей. График линейной скорости потока при различных значениях параметра угла наклона форми-



**Рис. 12.** Профили линейной скорости несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных числах Гартмана:  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $P = -2$ ,  $c = 0.2$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $Re = 8$ ,  $Nr = 1$ ,  $Br = 0.5$ .



**Рис. 13.** Профили микровращательных скоростей  $\omega$  для микрополярной жидкости при различных числах Гартмана,  $\text{Ha}$ :  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $P = -2$ ,  $c = 0.2$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $\text{Re} = 8$ ,  $\text{Nr} = 1$ ,  $\text{Br} = 0.5$ .



**Рис. 14.** Профили линейной скорости несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных  $\lambda$ :  $\text{Br} = 0.5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $P = -2$ ,  $\text{Re} = 2$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $\text{Nr} = 1$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\text{Ha} = 5$ .

рует параболический профиль, который достигает своего наивысшего значения на границе раздела жидкостей. Более того, из рис. 14 следует, что скорость течения микрополярной и ньютоновской жидкостей увеличивается с уменьшением значений параметра угла наклона магнитного поля. Это физическое явление возникает из-за присутствия силы сопротивления Лоренца, которая развивается из-за действия постоянного магнитного поля под углом  $\frac{\pi}{2} - \theta$  к направлению потока.

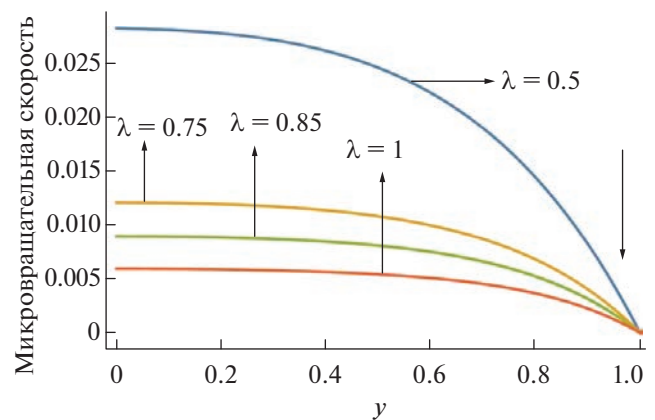
Сила сопротивления Лоренца усиливает движение жидкости и управляет потоком жидкости по всему каналу. Аналогичный характер графика для скорости потока при различных значениях параметра угла наклона получен в работах [8, 9]. На рис. 15 показано, что угловая скорость увеличивается с уменьшением параметра угла наклона.

Графические результаты для числа производства энтропии при различных значениях параметра угла наклона показаны на рис. 16. Из этого графика мы приходим к выводу, что образование энтропии имеет минимум на центральной линии (границе раздела жидкостей), в то время как оно имеет максимум на стенке области ньютоновской жидкости. Это явление вызвано необратимостью трения жидкости, которое минимально в центре канала. Графическое исследование числа Бекмана для ряда значений параметра угла наклона представлено на рис. 17, который показывает, что профиль числа Бекмана увеличивается с уменьшением значений параметра угла наклона относительно центральной линии (границы раздела несмешивающихся жидкостей), однако в другой части канала он увеличивается с увеличением параметра угла наклона.

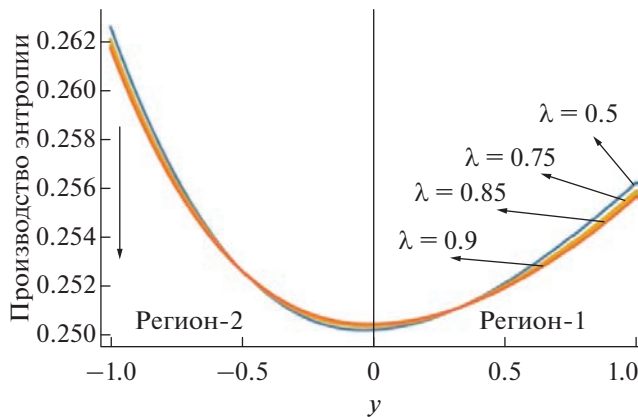
Аналогичные наблюдения поведения производства энтропии и профиля числа Бекмана с различными физически приемлемыми значениями параметра угла наклона приведены в работах [59, 60].

#### Влияние параметра излучения

Здесь мы обсуждаем влияние параметра излучения  $\text{Nr}$  на количество образования энтропии, тепловой профиль и профиль числа Бекмана. Анализ теплового профиля несмешивающихся жидкостей при нескольких значениях параметра излучения показан на рис. 18. Из рис. 18 следует, что по мере увеличения параметра излучения  $\text{Nr}$  температура жидкостей снижается из-за поглощения тепловой энергии из несмешивающихся жидкостей.



**Рис. 15.** Профили микровращательной скорости  $\omega$  микрополярной жидкости при различных значениях  $\lambda$ :  $\text{Br} = 0.5$ ,  $\Omega = 1$ ,  $P = -2$ ,  $\text{Re} = 2$ ,  $n_\mu = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $\text{Nr} = 1$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\text{Ha} = 5$ .

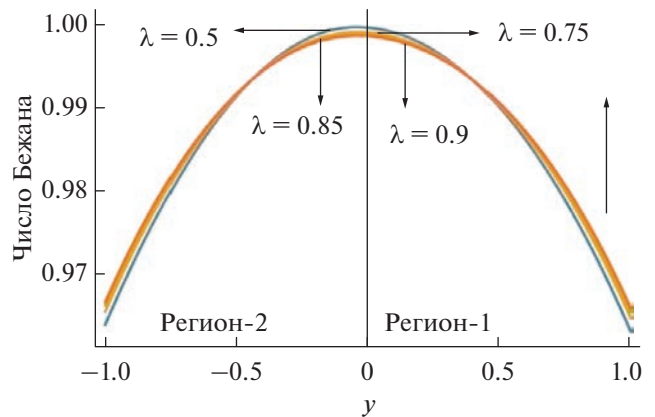


**Рис. 16.** Профили количества производства энтропии для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных значениях  $\lambda$ :  $c = 0.2$ ,  $P = -0.1$ ,  $Br = 0.1$ ,  $n_u = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $\Omega = 1$ ,  $Re = 5$ .

Анализ профиля производства энтропии относительно различных числовых значений параметра излучения  $Nr$  показан на рис. 19. Из приведенного рисунка видно, что производство энтропии уменьшается при увеличении значений  $Nr$ . При этом минимальное значение количества образования энтропии имеет место на центральной линии канала, тогда как максимальное значение достигается на неподвижной стенке области ньютоновской жидкости. Этот результат показывает, что повышение параметра излучения приводит к снижению теплового профиля несмешивающихся жидкостей, а также к уменьшению выработки энтропии за счет теплообмена в поле потока. Из этого рисунка мы также приходим к выводу, что большие значения параметра излучения  $Nr$  оказывают меньшее влияние на количество генерации энтропии, чем его меньшие значения. Поведение числа производства энтропии с параметром излучения такое же, как и в работах [12, 16, 17]. Рис. 20 построен для анализа влияния параметра излучения  $Nr$  на профиль числа Бекмана. Рисунок иллюстрирует, что профиль числа Бекмана улучшается при увеличении значений параметра излучения и достигает большего значения в средней точке канала и минимального значения у стенки канала. Поведение профиля числа Бекмана с параметром излучения такое же, как и в работах [16, 17].

#### Влияние параметра вязкой диссипации

В этом подразделе мы проанализировали графические результаты влияния параметра вязкой диссипации на профиль числа Бекмана, а также на профиль числа генерации энтропии. Анализ производства энтропии для различных числовых значений параметра вязкой диссипации показан на рис. 21. Этот термодинамический параметр являет-

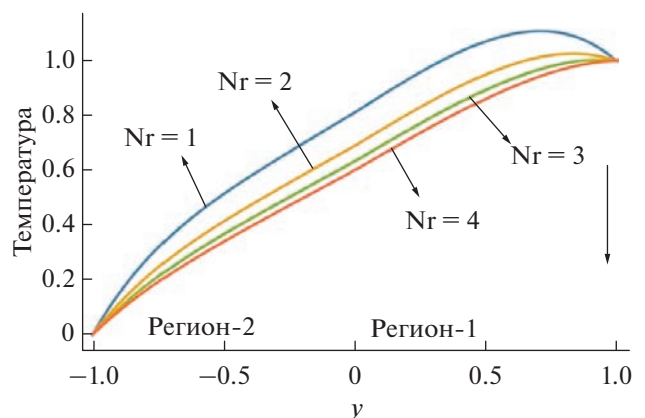


**Рис. 17.** Профили числа Бекмана для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей для различных значений  $\lambda$ :  $c = 0.2$ ,  $P = -0.1$ ,  $Br = 0.1$ ,  $n_u = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $Nr = 1$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $\Omega = 1$ ,  $Re = 5$ .

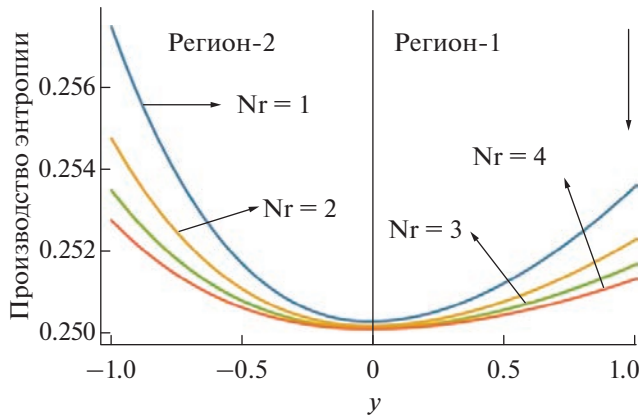
ся безразмерным числом, которое играет жизненно важную роль в анализе производства энтропии.

Из рис. 21 видно, что производство энтропии увеличивается с увеличением параметра диссипации. Из этого рисунка также заключаем, что параметр диссипации оказывает меньшее влияние на производство энтропии вблизи границы раздела несмешивающихся жидкостей, однако он оказывает максимальное влияние на производство энтропии на стенках канала. Эти результаты согласуются с выводами Редди [61].

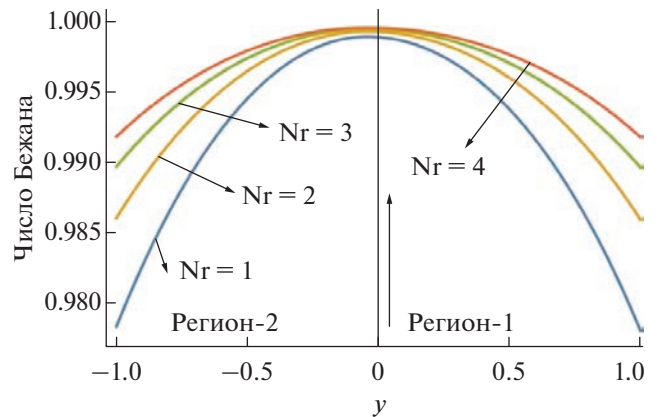
Влияние параметра вязкой диссипации на профиль числа Бекмана иллюстрирует рис. 22. На этом рисунке обнаруживаем, что профиль числа Бекмана уменьшается при увеличении параметра



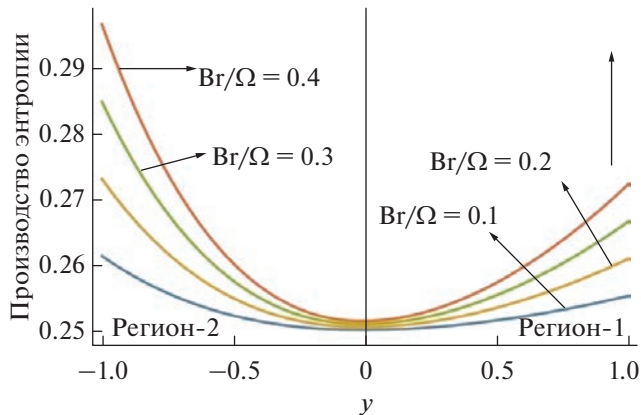
**Рис. 18.** Температурные кривые для несмешивающейся ньютоновской и микрополярной жидкостей при различных параметрах излучения  $Nr$ , когда  $\delta_0 = 0.7$ ,  $\Omega = 1$ ,  $n_u = 0.6$ ,  $n_k = 1.1$ ,  $P = -2$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $Br = 0.5$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $n_\sigma = 0.9$ ,  $Re = 2$ ,  $c = 0.2$ .



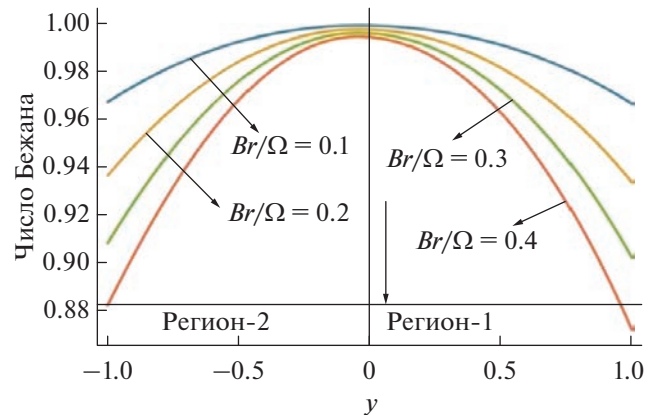
**Рис. 19.** Профили количества производства энтропии для несмешивающейся ньютоновской и микрополярной жидкости при различных параметрах излучения  $Nr$ , когда  $\Omega = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Re = 2$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $Br = 0.4$ .



**Рис. 20.** Профили числа Бэжана для несмешивающейся ньютоновской и микрополярной жидкости при различных параметрах излучения  $Nr$ , когда  $\Omega = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Re = 2$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.9$ .



**Рис. 21.** Профили числа производства энтропии для несмешивающейся ньютоновской и микрополярной жидкости при различных  $Br/\Omega$ , когда  $\Omega = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Re = 5$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $Nr = 0.1$ .



**Рис. 22.** Профили числа Бэжана для несмешивающихся ньютоновской и микрополярной жидкостей для различных параметров диссипации  $Br/\Omega$ , когда  $\Omega = 1$ ,  $Ha = 0.5$ ,  $n_\sigma = 1$ ,  $n_\mu = 1$ ,  $n_k = 1$ ,  $Re = 5$ ,  $P = -0.1$ ,  $\lambda = 0.9$ ,  $c = 0.2$ ,  $\delta_0 = 0.9$ ,  $Nr = 1$ .

диссипации, а траектории профиля числа Бэжана достигают своего наивысшего значения на центральной линии канала. Графические результаты влияния вязкой диссипации на число образования энтропии вместе с числом Бэжана имеют ту же природу, что и полученные Сринивасом и др. [17], Сринивасом и Мурти [29].

Отметим, что в данной работе использовались определяющие уравнения для описания движения микрополярной жидкости, записанные в форме Эрингена [33, 34]. В работе [62] проведено сравнение различных записей определяющих уравнений и граничных условий, в том числе в форме, предложенной Новацким [63]. Там же приведен обзор существующих аналитических решений и

возможных приложений микрополярной теории, рассмотрена механически обоснованная постановка задачи для течения микрополярной жидкости в пористой среде типа Бринкмана.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе изучается тепловое поле, характеристики потока, число Бэжана и проводится энтропийный анализ течения несмешивающихся микрополярной и ньютоновской вязких жидкостей в плоском канале. Производство энтропии анализируется с использованием второго закона термодинамики. Представлено подробное объяс-

нение образования энтропии при протекании несмешивающихся жидкостей внутри канала под воздействием радиационного теплообмена и ориентированного магнитного поля. Дифференциальные уравнения для рассматриваемой задачи решены аналитически классическим методом и получены математические выражения для полей температуры и линейной и угловой скоростей несмешивающихся жидкостей. Графически обсуждается влияние различных параметров, таких как параметр излучения, параметр угла наклона магнитного поля, параметр вязкой диссипации, число Рейнольдса, число Гартмана, параметр микрополяриности, на профиль числа Бежана, тепловой профиль, количество образования энтропии и характеристики потока. Проведенное исследование производства энтропии при прохождении несмешивающихся жидкостей по каналу имеет множество практических приложений в термоядерных реакторах, системах охлаждения, нефтепродуктах и т.п. Результаты, полученные для рассматриваемой задачи, могут быть использованы при охлаждении ядерных реакторов, контуров тепловых электростанций, самолетов и т.д. Поэтому анализ энтропии предоставляет предварительные знания об улучшении конструкции системы, повышении ее эффективности и оптимизации условий эксплуатации. С учетом этого контекста приведенное здесь обсуждение обеспечивает наилучшие результаты для минимизации производства энтропии путем анализа влияния различных возникающих тепловых параметров и параметров потока, таких как параметр излучения, параметр вязкой диссипации, число Гартмана, число Рейнольдса, на число Бежана, тепловой профиль, число производства энтропии и скорость потока. Влияние радиационной теплопередачи на поток жидкости и теплопередачу несмешивающихся жидкостей изучено с использованием диффузионного приближения Росселанда в уравнении энергии. Данная работа может быть полезна для ученых, исследователей, инженеров и промышленников, которые работают в областях, связанных с теплопередачей. Из представленного исследования сделаны следующие выводы.

1. Выяснено, что тепловые характеристики и поведение потока несмешивающихся жидкостей могут быть увеличены за счет уменьшения величины параметра микрополяриности. Число производства энтропии достигает минимального значения на центральной линии канала и максимально — на неподвижной стенке области, занимаемой ньютоновской вязкой жидкостью. Это открытие предполагает, что необратимость трения жидкости, возникающая на поверхности

канала, увеличивает производство энтропии в области ньютоновской жидкости.

2. Из проведенного исследования можно сделать вывод о том, что угловая и линейная скорости потока уменьшаются с увеличением числа Гартмана. Это происходит из-за наложения магнитного поля в режимах течения, создающего магнитогидродинамическую силу сопротивления, которая противодействует движению жидкости и замедляет его. Описанное явление указывает на то, что приложенное постоянное магнитное поле в направлении потока оказывает резистивное влияние на профиль скорости.

3. Получено, что с увеличением числа Гартмана производство энтропии уменьшается во всех областях канала, за исключением центральной линии и вблизи нее (границы раздела несмешивающихся жидкостей). Увеличение значения параметра магнитного поля понижает профиль числа Бежана вблизи неподвижной стенки канала.

4. Найдено, что увеличение параметра вязкой диссипации также понижает профиль числа Бежана, в то время как оно повышает профиль числа производства энтропии. Обнаружено, что из-за увеличения доступной энергии на центральной линии (границе раздела несмешивающихся жидкостей) производство энтропии там минимально.

5. Полученные и обсуждаемые здесь данные показывают, что тепловые характеристики несмешивающихся жидкостей уменьшаются с увеличением параметра излучения  $N_r$ . Это явление возникает из-за поглощения тепловой энергии из несмешивающихся жидкостей.

6. Также сделан вывод о том, что характеристики течения несмешивающихся микрополярированной и ньютоновской жидкостей являются параболическими и достигают своих более высоких значений в области ньютоновской вязкой жидкости.

7. Число Рейнольдса может быть использовано для контроля распределения потока, скорости микровращения, конвективной теплопередачи и производства энтропии в проточной среде.

8. Важный вывод, который вытекает из настоящего исследования, заключается в том, что увеличивающиеся значения параметра угла наклона магнитного поля уменьшают скорость потока, скорость микроротации и образование энтропии двух несмешивающихся микрополярированной и ньютоновской жидкостей в канале.

Исследование проведено для устойчивого, несжимаемого, излучающего, осесимметричного и полностью развитого течения несмешивающихся ньютоновской и микрополярированной жидкостей с постоянными тепловыми свойствами и свойствами

текучести, т.е. теплопроводность, вязкость и проницаемость принимаются в качестве постоянных величин. Отметим, что данное исследование может быть расширено на явления перистальтического переноса двух несмешивающихся микрополярной и ньютоновской жидкостей в пористом или непористом канале путем рассмотрения изменяющихся свойств потока, таких как переменная теплопроводность, вязкость и проницаемость.

#### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа в части анализа полученных результатов выполнена при частичной поддержке Российского научного фонда (грант № 20–19–00670).

#### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Blum E.L., Zaks M.V., Ivanov U.I., Mikhailov Y.A.* Heat exchange and mass exchange in magnetic field, Riga: Zinatne, 1967.
2. *Hartmann J., Lazarus F., Hg-Dynamics* Copenhagen: Levin & Munksgaard, 1937.
3. *Globe S.*, Laminar steady-state magnetohydrodynamic flow in an annular channel // *The Phys. Fluids*. 1959. V. 2. № 4. P. 404–407.
4. *Gold R.R.* Magnetohydrodynamic pipe flow. Part 1 // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. № 4. P. 505–512.
5. *Tani I.* Steady flow of conducting fluids in channels under transverse magnetic fields, with consideration of hall effect // *J. Aerosp. Sci.* 1962. V. 29. № 3. P. 297–305.
6. *Soundalgekar V., Vighnesam N., Takhar H.* Hall and ion-slip effects in MHD Couette flow with heat transfer // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1979. V. 7. № 3. P. 178–182.
7. *Soundalgekar V., Uplekar A.* Hall effects in MHD Couette flow with heat transfer // *IEEE Trans. Plasma Sci.* 1986. V. 14. № 5. P. 579–583.
8. *Nikodijević D., Stamenković Z., Milenković D., Blagojević B., Nikodijević J.* Flow and heat transfer of two immiscible fluids in the presence of uniform inclined magnetic field // *Math. Prob. Eng.* 2011. V. 2011. Article № 132302. P. 1–18.
9. *Nikodijević D., Milenković D., Stamenković Z.* MHD Couette two-fluid flow and heat transfer in presence of uniform inclined magnetic field // *Heat Mass Transf.* 2011. V. 47. № 12. P. 1525–1535.
10. *Shah N.A., Alrabaiah H., Vieru D., Yook S.* Induced magnetic field and viscous dissipation on flows of two immiscible fluids in a rectangular channel // *Scientific Reports*. 2022. V. 12. № 1. P. 1–14.
11. *Srinivas S., Muthuraj R.* Effects of thermal radiation and space porosity on MHD mixed convection flow in a vertical channel using homotopy analysis method // *Comm. Nonlin. Sci. Num. Sim.* 2010. V. 15. № 8. P. 2098–2108.
12. *Chen C.K., Yang Y.T., Chang K.H.* The effect of thermal radiation on entropy generation due to micro-polar fluid flow along a wavy surface // *Entropy*. 2011. V. 13. № 9. P. 1595–1610.
13. *Magyari E., Pantokratoras A.* Note on the effect of thermal radiation in the linearized Rosseland approximation on the heat transfer characteristics of various boundary layer flows // *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 2011. V. 38. № 5. P. 554–556.
14. *Prakash D., Muthamilselvan M.* Effect of radiation on transient MHD flow of micropolar fluid between porous vertical channel with boundary conditions of the third kind // *Ain Shams Eng. J.* 2014. V. 5. № 4. P. 1277–1286.
15. *Olajuwon B., Oahimire J., Ferdow M.* Effect of thermal radiation and hall current on heat and mass transfer of unsteady MHD flow of a viscoelastic micropolar fluid through a porous medium // *Eng. Sci. Technol. an Int. J.* 2014. V. 17. № 4. P. 185–193.
16. *Jangili S., Adesanya S., Falade J., Gajjala N.* Entropy generation analysis for a radiative micropolar fluid flow through a vertical channel saturated with non-Darcian porous medium // *Int. J. Appl. Comp. Math.* 2017. V. 3. № 4. P. 3759–3782.
17. *Srinivas J., Murthy J.R., Bég O.A.* Entropy generation analysis of radiative heat transfer effects on channel flow of two immiscible couple stress fluids // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* 2017. V. 39. № 6. P. 2191–2202.
18. *Bejan A.* Second law analysis in heat transfer // *Energy*. 1980. V. 5. № 8. P. 720–732.
19. *Bejan A.* Convection heat transfer // John Wiley and Sons, 2013.
20. *Jangili S., Murthy J.* Thermodynamic analysis for the MHD flow of two immiscible micropolar fluids between two parallel plates // *Front. Heat Mass Transf. (FHMT)*. 2015. V. 6. № 1. P. 1.
21. *Srinivas J., Murthy J.R., Chamkha A.J.* Analysis of entropy generation in an inclined channel flow containing two immiscible micropolar fluids using ham // *Int. J. Num Meth. Heat Fluid Flow*. 2016. V. 26. № 3. P. 1027–1049.
22. *Nezhad A., Shahri M.* Entropy generation case studies of two-immiscible fluids under the influence of a uniform magnetic field in an inclined channel // *J. Mech.* 2016. V. 32. № 6. P. 749–757.
23. *Kamışlı F., Öztop H.F.* Second law analysis of the 2D laminar flow of two-immiscible, incompressible viscous fluids in a channel // *Heat Mass Transf.* 2008. V. 44. № 6. P. 751–761.
24. *Desoukya A.El., Ismaila H.N.A., Abourabiab A.M., Hammada D., Ahmeda N.A.* Analysis of entropy generation of MHD micropolar fluid through a rectangular duct with effect of induced magnetic field and slip boundary conditions // *Int. J. Adv. App. Math. Mech.* 2020. V. 7. № 3. P. 31–42.

25. *Chen X., Jian Y.* Entropy generation minimization analysis of two immiscible fluids // *Int. J. Therm. Sci.* 2022. V. 171. Article № 107210. P. 1–10.
26. *Sun R., Hu W., Jiao B. and Qi C.* Heat transfer characteristics and entropy generation of electroosmotic flow in a rotating rectangular microchannel // *Int. J. Therm. Sci.* 2019. V. 140. P. 238–254.
27. *Yadav P.K. and Kumar A.* An inclined magnetic field effect on entropy production of non-miscible Newtonian and micropolar fluid in a rectangular conduit // *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 2021. V. 124. Article № 105266. P. 1–13.
28. *Yadav P.K., Kumar A., El-Sapa S. and Chamkha A.J.* Impact of thermal radiation and oriented magnetic field on the flow of two immiscible fluids through porous media with different porosity // *Waves Rand Comp. Med.* 2022. V. 32. P. 1–33.
29. *Murthy J.R., Srinivas J.* Second law analysis for Poiseuille flow of immiscible micropolar fluids in a channel // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2013. V. 65. P. 254–264.
30. *Muthuraj R., Srinivas S.* Fully developed MHD flow of a micropolar and viscous fluids in a vertical porous space using ham // *Int. J. App. Math. Mech.* 2010. V. 6. № 11. P. 55–78.
31. *Srinivas J., Murthy J.R.* Second law analysis of the flow of two immiscible micropolar fluids between two porous beds // *J. Eng. Thermophys.* 2016. V. 25. № 1. P. 126–142.
32. *Kumawat C., Sharma B.K., Al-Mdallal Q.M. and Rahimi-Gorji M.* Entropy generation for MHD two phase blood flow through a curved permeable artery having variable viscosity with heat and mass transfer // *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 2022. V. 133. Article № 105954. P. 1–23.
33. *Eringen A.C.* Simple microfluids // *Int. J. Eng. Sci.* 1964. V. 2. № 2. P. 205–217.
34. *Eringen A.C.* Theory of micropolar fluids // *J. Math. Mech.* 1966. V. 16. № 1. P. 1–18.
35. *Yadav P.K., Jaiswal S., Sharma B.* Mathematical model of micropolar fluid in two-phase immiscible fluid flow through porous channel // *App. Math. Mech.* 2018. V. 39. № 7. P. 993–1006.
36. *Yadav P.K., Jaiswal S.* Influence of an inclined magnetic field on the Poiseuille flow of immiscible micropolar–Newtonian fluids in a porous medium // *Canad. J. Phys.* 2018. V. 96. № 9. P. 1016–1028.
37. *Oahimire J., Olajuwon B.* Effect of hall current and thermal radiation on heat and mass transfer of a chemically reacting MHD flow of a micropolar fluid through a porous medium // *J. King Saud Univ.-Eng. Sci.* 2014. V. 26. № 2. P. 112–121.
38. *Srinivasacharya D., Bindu K.H.* Entropy generation in a micropolar fluid flow through an inclined channel // *Alex. Eng. J.* 2016. V. 55. № 2. P. 973–982.
39. *Jaiswal S., Yadav P.K.* A micropolar-Newtonian blood flow model through a porous layered artery in the presence of a magnetic field // *Phys. of Fluids.* 2019. V. 31. № 7. Article № 071901. P. 1–14.
40. *Deo S., Maurya D.K. and Filippov A.N.* Effect of magnetic field on hydrodynamic permeability of biporous membrane relative to micropolar liquid flow // *Colloid J.* 2021. V. 83. № 6. P. 662–675.
41. *Khan A., Khan I., Alkanhal T.A., Ali F., Khan D., Nisar K.S.* Entropy generation in MHD conjugate flow with wall shear stress over an infinite plate: exact analysis // *Entropy.* 2019. V. 21. № 4. Article № 359. P. 1–21.
42. *Gupta V. Jain A., Jha A.K.* Convective effects on MHD flow and heat transfer between vertical plates moving in opposite direction and partially filled with a porous medium // *J. App. Math. Phys.* 2016. V. 4. № 2. P. 341–358.
43. *Rashidi M., Kavyani N., Abelman S.* Investigation of entropy generation in MHD and slip flow over a rotating porous disk with variable properties // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2014. V. 70. P. 892–917.
44. *Umavathi J.C., Chamkha A.J., Mateen A., Al-Mudhaf A.* Unsteady two-fluid flow and heat transfer in a horizontal channel // *Heat Mass Transf.* 2005. V. 42. № 2. P. 81–90.
45. *Sparrow E.M.* Radiation Heat Transfer. Routledge, 2018.
46. *Eringen A.C.* Microcontinuum Field Theories: II. Fluent media, Springer Science Business Media. 2001. V. 2.
47. *Ahmadi G.* Self-similar solution of incompressible micropolar boundary layer flow over a semi-infinite plate // *Int. J. Eng. Sci.* 1976. V. 14. № 7. P. 639–646.
48. *Happel J., Brenner H.* Low Reynolds Number Hydrodynamics: with Special Applications to Particulate Media. Springer Science Business Media. 2012. V. 2.
49. *Afridi M.I., Qasim M., Hussanan A.* Second law analysis of dissipative flow over a riga plate with non-linear Rosseland thermal radiation and variable transport properties // *Entropy.* 2018. V. 20. № 8. Article № 615. P. 1–19.
50. *Ariman T., Cakmak A.S.* Some basic viscous flows in micropolar fluids // *Rheol. Acta.* 1968. V. 7. № 3. P. 236–242.
51. *Ariman T., Turk M., Sylvester N.* Applications of microcontinuum fluid mechanics // *Int. J. Eng. Sci.* 1974. V. 12. № 4. p. 273–293.
52. *Lukaszewicz G.* Micropolar Fluids: Theory and Applications. Springer Science Business Media, 1999.
53. *Jena S.K., Mathur M.* Similarity solutions for laminar free convection flow of a thermomicropolar fluid past a non-isothermal vertical flat plate // *Int. J. Eng. Sci.* 1981. V. 19. № 11. P. 1431–1439.
54. *Rees D.A.S., Bassom A.P.* The Blasius boundary-layer flow of a micropolar fluid // *Int. J. Eng. Sci.* 1996. V. 34. № 1. P. 113–124.
55. *Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G., Pop I.* Effects of thermal radiation on micropolar fluid flow and heat transfer over a porous shrinking sheet // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2012. V. 55. № 11. P. 2945–2952.

56. *Sandeep P., Deshpande M.* A note on the no-slip boundary condition // Nat. Aerosp. Lab. Rept. PD-CF-0304, Bangalore, India, 2003.
57. *Bejan A.* Advanced Engineering Thermodynamics. John Wiley and Sons, 2016.
58. *Paoletti S., Rispoli F., Sciubba E.* Calculation of exergetic losses in compact heat exchanger passages // In ASME AES. 1989. V. 10. P. 21–29.
59. *Dar A.A., Elangovan K.* Influence of an inclined magnetic field on heat and mass transfer of the peristaltic flow of a couple stress fluid in an inclined channel // World J. Eng. 2017. V. 14. № 1. P. 7–18.
60. *Bitla P., Iyengar T.* Pulsating flow of an incompressible micropolar fluid between permeable beds with an inclined uniform magnetic field // European J. Mech.-B/Fluids. 2014. V. 48. P. 174–182.
61. *Gorla R.S.R.* Second law analysis of mixed convection in a laminar, non-Newtonian fluid flow through a vertical channel // ISRN Appl. Math. 2011. V. 2011. Article № 287691. P. 1–13.
62. *Khanukaeva D.Yu., Filippov A.N.* Isothermal flows of micropolar liquids: formulation of problems and analytical solutions // Colloid J. 2018. V. 80. P. 14–36.
63. *Nowacki W.* Theory of Micropolar Elasticity. Wien: Springer-Verlag, 1970.