

УДК 534.2

АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ В СУПЕРПОЗИЦИИ ГРАВИТАЦИОННОГО И ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ

© 2023 г. А. И. Григорьев^{1, *}, Н. Ю. Колбнева², С. О. Ширяева²

¹Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, пр. Вернадского, д. 101, к. 1, Москва, 119526 Россия

²Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, д. 14, Ярославль, 150000 Россия

*e-mail: grigorai@mail.ru

Поступила в редакцию 27.08.2022 г.

После доработки 16.09.2022 г.

Принята к публикации 18.09.2022 г.

Для заряженных капель в конвективных облаках и приземных туманах, неподвижных в суперпозиции гравитационного и электрического полей, рассчитывается интенсивность акустического излучения и характерные ширины (в зависимости от радиусов и зарядов капель) диапазонов частот, на которые это излучение приходится. Расчеты проводятся методами классической математической физики с учетом двух малых параметров: безразмерной амплитуды осцилляций и равновесной сфероидальной деформации заряженной капли во внешнем электростатическом поле. Все расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Выяснилось, что акустическое излучение от облаков и туманов приходится на ультразвуковой диапазон частот, а акустическое излучение крупных капель, которые формируют дождь, идет в слышимом ухом человека звуковом диапазоне. Граница между ультразвуковым и звуковым излучениями определяется как размерами капель, так и величинами напряженностей электрических полей (в малой окрестности капель) и величиной коэффициента межфазного поверхностного натяжения.

Ключевые слова: заряд, осциллирующая капля, электростатическое поле, акустическое излучение

DOI: 10.31857/S002329122260047X, **EDN:** KENCQR

ВВЕДЕНИЕ

Около сорока лет назад появилась первая статья об электромагнитном излучении осциллирующей капли воды [1]. С тех пор опубликовано много статей на эту тему, см., например, [2], а основная идея расчета использована и для расчета акустического излучения от осциллирующей капли [3, 4]. Основная идея расчета проста для восприятия: ускоренно движущиеся заряды излучают электромагнитные волны. Заряд капли идеально электропроводной жидкости находится на поверхности капли и при осцилляциях ее поверхности двигается с ускорением и, следовательно, излучает электромагнитные волны. Частота осцилляций, как показывают расчеты, становится комплексной [1]. Вещественная часть комплексной частоты определит частоту осцилляций капли, а мнимая часть — потери энергии при осцилляциях. А так как в капле идеальной жидкости не может быть потерь энергии кроме как на излучение, то декремент затухания осцилляций определит интенсивность излучения.

Изложенная выше идея и положена в основу расчета интенсивности акустического излучения

заряженной капли, подвешенной в суперпозиции гравитационного и электростатического полей. Накладываемое требование нахождения заряженной капли в условиях электростатического подвеса не приводит к ограничению общности рассмотрения, поскольку капли естественного происхождения (т.е. капли облаков и туманов) а priori существуют в условиях подвешивания в суперпозиции гравитационного и электростатических полей (внутриоблачного или приземного). В искусственных условиях со времен Милликена [5–8] с такими каплями приходится иметь дело в электростатических подвесах, в экспериментах по получению высокочистых веществ и прецизионному измерению величины коэффициента поверхностного натяжения или при проверке критерия электростатической неустойчивости Релея.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется изолированная заряженная капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ_1 . Примем, что капля неподвижно висит в суперпозиции коллинеарных

полей: электростатического $\vec{E}_0$ (внутриоблачного или приземного, однородного хотя бы в малой окрестности капли) и гравитационного $\vec{g}$ полей. Принимая центр масс капли неподвижным, внешнее электростатическое поле $\vec{E}_0$ направим в сторону противоположную гравитационному полю $\vec{g}$. Положим, что исходная капля является равновеликой по объему сфере радиуса R . Для идеально проводящей жидкости заряд капли Q равномерно распределен по ее поверхности. В качестве внешней среды примем идеальную сжимаемую диэлектрическую среду с плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} , в которой звук распространяется со скоростью v . Коэффициент межфазного поверхностного натяжения σ .

Согласно [9–12] электрическое поле вызывает деформацию исходной сферической формы: капля с осью симметрии z , направленной параллельно электрическому полю $\vec{E}_0$, принимает форму, близкую к вытянутому вдоль $\vec{E}_0$ сфероиду. В качестве малого параметра, характеризующего отклонение сфероидальной поверхности от сферы, примем квадрат эксцентриситета сфероидальной капли $e^2 = 9w/(1 - W)$ [12], где величина параметра Релея $W = Q^2/64\pi^2\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}}R^3\sigma$ характеризует электрогидродинамическую устойчивость капли по отношению к собственному заряду [5], а величина параметра Тейлора $w = \epsilon_0\epsilon_{\text{ex}}E_0^2R/4\sigma$ определяет устойчивость капли по отношению к зарядам, индуцированным внешним электростатическим полем [13].

Для оценки порядка малости e^2 отметим, что размеры одиночных капель в жидкокапельных системах естественного происхождения (туманы, облака, дождь) изменяются от единиц микрометров до единиц миллиметров. Принимая, что средние электрические характеристики рассматриваемых капель $Q = 1 \times 10^{-14}$ Кл, $E_0 = 50$ В/см, получим диапазон возможного изменения величины малого параметра e^2 от 9×10^{-9} (при $R = 1$ мкм) до 2×10^{-5} (при $R = 3.5$ мм).

В виду теплового движения молекул жидкости равновесная поверхность капли возмущается осцилляциями весьма малой амплитуды $|\xi| \sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура [4]. Для любых жидкостей, включая жидкие металлы, оценки показывают, что тепловая амплитуда осцилляций не превосходит $1 \text{ \AA}$. Однако при наличии внешних силовых воздействий типа обтекания капли потоком воздуха при падении капли дождя или восходящим потоком для облачной капли амплитуда капиллярных осцилляций $|\xi|$ может увеличиваться до десятков про-

центов от радиуса капли [15, 16]. Величина отношения амплитуды $|\xi|$ к равновесному радиусу R образует малый параметр $\epsilon \equiv |\xi|/R \ll 1$. В дальнейшем при проведении численных оценок будем принимать $\epsilon = 0.1$. В этой связи обсуждаемая задача содержит два независимых малых параметра ϵ и e^2 различных порядков величины, причем: $e^2 \ll \epsilon$.

Математическую постановку и решение задачи проведем в сферической системе координат (r, θ, ϕ) , начало которой совпадает с положением центра масс равновесной капли. Для упрощения последующих вычислений воспользуемся осесимметричной постановкой, и в сферических функциях будем опускать зависимость от азимутальной координаты ϕ .

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение, задающее возмущенную поверхность капли в любой момент времени t , запишем в виде:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t); \quad (1)$$

где $r(\theta)$ — равновесная сфероидальная форма капли, $\xi(\theta, t)$ — волновое возмущение, порождаемое тепловыми осцилляциями капли: $\max |\xi| \ll R$.

Положим движения жидкости в капле и во внешней среде безвихревыми с малыми амплитудами: $\text{rot } \vec{V}_j(r, \theta, t) = 0$. Тогда поле скоростей $\vec{V}_j(r, \theta, t)$ внутри ($j = 1$) и вне капли ($j = 2$) определяется градиентами потенциалов $\psi_j(r, \theta, t)$: $\vec{V}_j(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t)$ [17]. Отметим, что возмущение границы раздела внутренней и внешней сред $\xi(\theta, t)$, поля скоростей $\vec{V}_j(r, \theta, t)$, гидродинамических потенциалов $\psi_j(r, \theta, t)$ и давления $P_j(r, \theta, t)$ являются величинами первого порядка.

Обозначим потенциал электростатического поля в окрестности капли $\Phi(r, \theta)$. Он связан с напряженностью электрического поля $\vec{E}_0$ соотношением $\vec{E}_0 = -\nabla \Phi(r, \theta)$. Постоянный потенциал поверхности капли обозначим $\Phi_s(t)$.

Математическая модель решаемой задачи, описывающая капиллярные осцилляции заряженной капли, находящейся в однородных электростатическом и гравитационном полях, имеет вид:

$$\Delta \psi_1(r, \theta, t) = 0; \quad \Delta \Phi(r, \theta, t) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta \psi_2(r, \theta, t) = 0; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty: \Phi(r, \theta, t) &\rightarrow -E_0 r \cos \theta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (5)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t): \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta}; \quad (j = 1, 2) \quad (6)$$

$$P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_{QE}(r, \theta, t) + P_g(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0; \quad (7)$$

$$P_j = P_{0j} - \rho_j \frac{\partial \psi_j}{\partial t}; \quad P_{QE} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex} (\nabla \Phi)^2}{2};$$

$$P_g = (\rho_1 - \rho_2) g [r(0) - r(\theta, t) \mu]; \quad \mu = \cos \theta; \quad (8)$$

$$P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \vec{n}; \quad \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t).$$

Потребуем также выполнения дополнительных интегральных условий: неизменности объема, отсутствия движения центра масс капли и сохранения ее полного заряда:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$-\oint_S (\vec{n}, \nabla \Phi) dS = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex}}; \quad (10)$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

В этих выражениях ε_0 — электродинамическая постоянная, $k = \frac{\operatorname{Re} \omega_n}{v}$ — волновое число, P_j — давления внутри ($j = 1$) и вне капли ($j = 2$), P_{0j} — постоянные давления в капле и среде, P_{QE} — давление электрического поля на поверхность идеально проводящей капли, P_g — давление поля силы тяжести, P_σ — капиллярное (лапласовское) давление, $\vec{n}$ — единичный вектор положительной нормали к поверхности капли $F(r, \theta, t) = r - r(\theta) - \xi(\theta, t) = 0$, вычисляемый в общем случае соотношением $\vec{n}(r, \theta, t) = \nabla F / |\nabla F|$.

Решение задачи (2)–(10) будем искать классическими методами теории возмущений в линейном приближении по малому параметру ε [18]. В рамках метода прямого разложения искомые величины $\xi(\theta, t)$, $\psi_j(r, \theta, t)$, $\Phi(r, \theta, t)$, а также давления $P_j(r, \theta, t)$, $P_{QE}(r, \theta, t)$, P_g , $P_\sigma(r, \theta, t)$ в динамическом граничном условии (7), представим в виде асимптотических разложений:

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\psi_j(r, \theta, t) = \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\Phi_s(t) = \Phi_s^{(0)} + \Phi_s^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2); \quad (11)$$

$$P_j(r, \theta, t) = P_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad (j = 1, 2);$$

$$P_{QE}(r, \theta, t) = P_{QE}^{(0)}(r, \theta) + P_{QE}^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$P_g(r, \theta, t) = P_g^{(0)}(r, \theta) + P_g^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2);$$

где верхний индекс “0” относится к величинам, имеющим нулевой порядок по ε , и обозначает равновесное состояние системы, а верхний индекс “1” соответствует величинам первого порядка по ε , возникающих из-за возмущения равновесной поверхности капли.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Подставляя данные разложения в исходную систему уравнений (2)–(10) и собирая слагаемые $\sim \varepsilon^0$, выделим задачу нулевого порядка по безразмерной амплитуде осцилляций ε :

$$\Delta \Phi^{(0)}(r, \theta) = 0; \quad (12)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta; \quad (13)$$

$$r = r(\theta): P_1^{(0)}(r, \theta) - P_2^{(0)}(r, \theta) + P_{QE}^{(0)}(r, \theta) + P_g^{(0)}(r, \theta) - P_\sigma^{(0)}(r, \theta) = 0;$$

$$P_1^{(0)} = P_1; \quad P_2^{(0)} = P_2; \quad P_{QE}^{(0)} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex} (\nabla \Phi^{(0)})^2}{2}; \quad (14)$$

$$P_g^{(0)} = (\rho_1 - \rho_2) g [r(0) - r(\theta) \mu];$$

$$P_\sigma^{(0)} = \sigma \operatorname{div} \vec{n}_0; \quad \vec{n}_0(r, \theta) = \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta;$$

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \Phi_s^{(0)};$$

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \vec{r} \cdot r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0;$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \quad (15)$$

$$-\oint_S (\vec{n}_0(r, \theta), \nabla \Phi^{(0)}(r, \theta)) dS = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex}};$$

$$S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

имеющую решение:

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{ex}r} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{R^2}{r^2} e^2 P_2(\mu) \right] + E_0 \times \\ \times \left[r \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu) + \frac{2}{5} \frac{R^3}{r^2} e^2 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} P_3(\mu) \right) \right]; \quad (16)$$

$$\mu \equiv \cos\theta;$$

$$P_{QE}^{(0)} = \frac{\epsilon_0\epsilon_{ex}}{2} \left[9E_0^2\mu^2 + \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_{ex})^2 R^4} + \right. \\ \left. + 6E_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{ex}R^2} \mu + \frac{2}{3} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0\epsilon_{ex})^2 R^4} e^2 P_2(\mu) \right]; \quad (17)$$

$$P_g^{(0)} = (\rho_1 - \rho_2) g R (1 - \mu); \\ P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = \frac{2\sigma}{R} \left(1 + \frac{2}{3} e^2 P_2(\mu) \right); \\ r(\theta) \approx R + h(\theta) + O(e^4) \equiv \\ \equiv R \left(1 + \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right) + O(e^4); \quad (18)$$

$$e^2 = \frac{9w}{1-W}; \quad W = \frac{Q^2}{64\pi^2\epsilon_0\epsilon_{ex}R^3\sigma}; \quad (19) \\ w = \frac{\epsilon_0\epsilon_{ex}E_0^2R}{4\sigma}; \quad g = 12 \frac{\sigma}{R^2} \frac{\sqrt{Ww}}{(\rho_1 - \rho_2)}.$$

где уравнение (19) является условием неподвижности центра масс заряженной капли, находящейся в коллинеарных гравитационном и электростатическом полях.

В выше записанных выражениях $P_n(\mu)$ — полином Лежандра порядка n (n — целое число) [19], $h(\theta)$ — функция, характеризующая отклонение равновесной поверхности от исходной сферической, $\Phi_s^{(0)}$ — постоянное значение электрического потенциала вдоль невозмущенной поверхности, $\vec{n}_0(r, \theta)$ — единичный вектор нормали к поверхности вытянутого вдоль поля равновесного сфероида, $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ — радиальный и полярный орты сферических координат.

Уравнение (18) показывает, что в линейном по квадрату эксцентриситета e^2 приближении равновесная форма поверхности капли описывается вытянутым в направлении электрического поля сфероидом. При этом наличие собственного заряда Q на капле приводит к увеличению величины ее эксцентриситета (в отличие от незаряженной капли в электрическом поле).

Выражение (16) для равновесного электрического потенциала представляет суперпозицию электрических потенциалов в окрестности заряженного сфероида и вблизи незаряженного сфероида, расположенного во внешнем электрическом поле. Расчет потенциала (16) приведен в “Приложении I”.

Отметим, что в реальных условиях некоторая часть водяных капель естественного и искусственного происхождения может принимать сплюснутую сфероидальную форму [20–22]. Так для заряженной капли в электрическом поле, имеющей равновесную форму сплюснутого сфероида с ориентированной по полю осью симметрии, все вышеприведенные выражения будут отличаться лишь знаком при e^2 [23, 24].

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ϵ

После подстановки асимптотических разложений (11) в систему уравнений (2)–(10), приравняв друг другу величины $\sim \epsilon$ и получим задачу первого порядка малости:

$$\Delta\psi_1(r, \theta, t) = 0; \quad (20)$$

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi_2(r, \theta, t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r, \theta, t) = 0; \quad (21)$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (22)$$

$$r \rightarrow \infty: \frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r} + ik\psi_2(r, \theta, t) = o\left(\frac{1}{r}\right); \quad (23)$$

$$r = R: \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} + \\ + \frac{1}{3} e^2 \left\{ R \frac{\partial^2 \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r^2} P_2(\mu) - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right\}; \quad (24)$$

$$P_1^{(1)}(r, \theta, t) - P_2^{(1)}(r, \theta, t) + P_{QE}^{(1)}(r, \theta) + \\ + P_g^{(1)}(r, \theta) - P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad (25)$$

$$3R^2 \int_0^\pi \left(1 + \frac{2}{3} e^2 P_2(\cos\theta) \right) \xi(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0; \quad (26)$$

$$4R^3 \int_0^\pi \left(1 + e^2 P_2(\cos\theta) \right) \xi(\theta, t) \cos\theta \sin\theta d\theta = 0; \quad (27)$$

где $P_j^{(1)}, P_{QE}^{(1)}, P_g^{(1)}, P_\sigma^{(1)}$ — добавки к давлениям (17), появляющиеся из-за возмущения равновесной поверхности капли.

Будем считать, что зависимость от времени исходных функций $\xi(\theta, t), \psi_1(r, \theta, t), \psi_2(r, \theta, t)$ является периодической $\sim \exp(i\omega_n t)$.

Возмущение сфероидальной формы капли, вызванное волновым движением в ней, может быть записано в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n(t) P_n(\mu); \quad M_n(t) \equiv M_n \exp(i\omega_n t). \quad (28)$$

Гармоническое решение уравнения Лапласа (20) с учетом условия (22) ограниченности гидродинамического потенциала $\psi_1(r, \theta, t)$ в центре масс капли естественно искать в виде разложения:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n(t) r^n P_n(\mu); \\ A_n(t) &\equiv A_n \exp(i\omega_n t). \end{aligned} \quad (29)$$

Полагая, что потенциал поля скоростей движения внешней среды $\psi_2(r, \theta, t)$ представляется в виде гармонически изменяющейся во времени функции, из волнового уравнения (21) придем к однородному уравнению Гельмгольца:

$$\Delta \psi_2(r, \theta, t) + k^2 \psi_2(r, \theta, t) = 0.$$

В случае осесимметричных осцилляций капли решение этого уравнения для потенциала $\psi_2(r, \theta, t)$ с учетом условия излучения Зоммерфельда на бесконечности (23) определится в виде:

$$\begin{aligned} \psi_2(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n(t) h_n^{(2)}(kr) P_n(\mu); \\ B_n(t) &\equiv B_n \exp(i\omega_n t). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь $h_n^{(2)}(z)$ – сферическая функция Бесселя третьего рода [19, 25].

Отметим, что в разложениях (28)–(30) амплитудные множители M_n , A_n , B_n при полиномах Лежандра имеют первый порядок малости по безразмерной амплитуде ε .

Подставим (3.ПП)–(5.ПП), (6.ПП), (14.ПП) из “Приложения II” в динамическое граничное условие (25) и после несложных математических преобразований получим дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 &= \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{1 - n \frac{\rho_2}{\rho_1} H_0} \times \left(\left(1 - \frac{4W}{(n+2)} \right) + \right. \\ &+ e^2 \left[G_0 + W G_1 + \frac{G_2 + n \frac{\rho_2}{\rho_1} G_3}{1 - n \frac{\rho_2}{\rho_1} H_0} \left(1 - \frac{4W}{(n+2)} \right) \right] \Bigg); \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{h_n^{(2)}(kR)}{R \partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}}; \\ G_0 &= -\frac{2n(2n^4 + 29n^3 + 24n^2 - 23n - 2)}{3(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \\ G_1 &= \frac{4n(10n^3 + 11n^2 - 7n + 1)}{3(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \\ G_2 &= -\frac{(n+1)(n+3)}{3(2n-1)(2n+3)}; \\ G_3 &= \frac{1}{3} \left(\left(1 - \frac{\partial^2_{r^2} (h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right) K_{2,n,n} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{R^2} \left(\frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \right)^2 \alpha_{2,n,n} \right). \end{aligned}$$

Чтобы выявить физическую интерпретацию решений уравнения (31), воспользуемся представлением сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ для целого значения индекса n в виде степенного ряда [19, 26]:

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} \exp(-iz) \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}}; \quad z = kr.$$

При малом значении аргумента $z_0 = kR \ll 1$ для функций H_0 и G_3 , входящих в дисперсионное соотношение (31), получим следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} H_0 &\approx -\frac{n+1}{n^2} + i \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right)^2 z_0^{2n+1}; \\ G_3 &\approx -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} K_{2,n,n} - \frac{1}{(n+1)^2} \alpha_{2,n,n} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Используя (32), найдем реальную $\text{Re } \omega_n$ и мнимую $\text{Im } \omega_n$ части уравнения (31) в виде:

$$\begin{aligned} \text{Re } \omega_n^2 &= \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left(\left(1 - \frac{4W}{(n+2)} \right) + \right. \\ &+ e^2 \left[G_0 + W G_1 + \frac{G_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} G_4}{1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left(1 - \frac{4W}{(n+2)} \right) \right] \Bigg); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
\text{Im } \omega_n &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^{n+1}}{R^{n+2} \nu^{2n+1} \rho_1^{n+1}} \frac{\rho_2}{\rho_1} \left(1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-(n+2)} \times \\
&\times \left(\frac{2^n (n-1)!}{(2n)!}\right)^2 n^{n+2} ((n-1)(n+2))^{n+1} \times \\
&\times \left[\left(1 - \frac{4W}{(n+2)}\right) + e^2 \left(G_0 + W G_1 + \frac{G_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} G_4}{1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left(1 - \frac{4W}{(n+2)}\right) \right) \right]^n \left(\left(1 - \frac{4W}{(n+2)}\right) + \right. \\
&+ \left. e^2 \left(G_0 + W G_1 + \frac{2 \left(G_2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} G_4 \right)}{1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left(1 - \frac{4W}{(n+2)}\right) \right) \right); \\
G_4 &= -\frac{n^2 (n-2)}{3(2n-1)(n+1)(2n+3)};
\end{aligned} \tag{34}$$

где $\text{Re } \omega_n^2 = \omega_n'^2$ соответствует квадрату частоты собственных осцилляций заряженной сферической капли в электростатическом поле, а $\text{Im } \omega_n = \eta_n$ определяет декремент затухания, обусловленный потерями энергии капиллярных осцилляций капли в сжимаемой среде на излучение звуковых волн.

Согласно (47) на рис. 1а, 1б представлены зависимости частоты осцилляций капель ω_2' , связанные с возбуждением второй колебательной моды $n = 2$, от величины собственного заряда Q вплоть до критических значений $Q_{\text{кр}}$ [27] для указанного радиуса. Видно, что облачные капли излучают акустические волны на ультразвуковых частотах. Однако капли большего размера (дождевые капли) излучают на звуковых частотах, воспринимаемых человеческими органами слуха. Из приведенных графиков следует, что отсутствие заряда $Q = 0$ соответствует частоте осцилляций ω_2' незаряженной капли в электрическом поле, а наличие собственного заряда на капле $Q \neq 0$ приводит к уменьшению частоты излучения: чем Q ближе к критическому значению $Q_{\text{кр}}$, тем больше снижается частота.

Из рис. 2а, 2б, полученных по (34), можно видеть, что при изменении заряда капли Q от нуля до критических значений $Q_{\text{кр}}$ для указанных размеров облачной и дождевой капель, величина декремента затухания η уменьшается.

На рис. 3а, 3б иллюстрируется тенденция изменения декремента затухания η от радиуса R внутри-

облачной и дождевой каплей при различных значениях заряда Q . Видно, что при стремлении заряда Q к его критическому значению $Q_{\text{кр}}$ ($Q \rightarrow Q_{\text{кр}}$) декремент затухания возрастает и при достижении максимального значения весьма быстро уменьшается.

ИНТЕНСИВНОСТЬ АКУСТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Принимая длину акустической волны λ много большей линейного размера капли R ($\lambda \gg R$), вычислим полную мощность излучаемого звука осциллирующей каплей по известной формуле [28]:

$$I = \rho_2 \nu \oint_S \bar{V}_2^2 dS; \tag{35}$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi].$$

В (35) скорость частиц внешней среды $\bar{V}_2(r, \theta, t)$ определяется нормальной компонентой, в линейном приближении по $1/r$ равной:

$$\begin{aligned}
\bar{V}_2(r, \theta, t) &= \\
&= \text{Re}(\nabla \psi_2(r, \theta, t), \vec{n}) \approx \text{Re}\left(\frac{\partial \psi_2(r, \theta, t)}{\partial r}\right) \vec{e}_r;
\end{aligned} \tag{36}$$

где $\psi_2(r, \theta, t)$ выражается (2.ПІІ).

Потенциал внешней среды $\psi_2(r, \theta, t)$ будем искать на больших расстояниях r от поверхности капли, определяемых условиями $r \gg \lambda$, $R \ll r$, т.е. в волновой зоне акустического поля. Для этого в $\psi_2(r, \theta, t)$ оставим лишь члены, наименее быстро убывающие с ростом r . В (2.ПІІ) раскладывая в ряд по $z = kr$ в области $kr \gg 1$ сферическую функцию Бесселя $h_n^{(2)}(z)$ и ее производную $\partial_z(h_n^{(2)}(z))$ по $z = z_0 = kR$ в приближении $kR \ll 1$, запишем $\psi_2(r, \theta, t)$ в виде суперпозиции расходящихся сферических волн

$$\begin{aligned}
\psi_2(r, \theta, t) &= -\sum_{n=0}^{\infty} i^{n+1} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \frac{k^n R^{n+2}}{r} \times \\
&\times \exp(-ikr) [\omega_n' M_n \exp(i\omega_n' t) + \\
&+ e^2 (\omega_{n-2}' M_{n-2} \exp(i\omega_{n-2}' t) K_4 + \omega_n' M_n \times \\
&\times \exp(i\omega_n' t) K_5 + \omega_{n+2}' M_{n+2} \exp(i\omega_{n+2}' t) K_6)] P_n(\mu).
\end{aligned} \tag{37}$$

Используя (37), из (36) найдем поле скоростей движения внешней среды:

$$\begin{aligned} \bar{V}_2(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n+2} \frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} R^{n+2} k^{n+1} \frac{1}{r} \exp \times \\ \times (-ikr) [\omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} \times \\ \times \exp(i\omega'_{n-2} t) K'_4 + \omega'_n M_n \exp(i\omega'_n t) K'_5 + \\ + \omega'_{n+2} M_{n+2} \exp(i\omega'_{n+2} t) K'_6] P_n(\mu) \bar{e}_r; \end{aligned} \quad (38)$$

имеющее в рассматриваемом приближении только радиальную составляющую.

Чтобы получить аналитическое выражение для интенсивности звукового излучения, входящее в (35) среднее значение величины $\bar{V}_2^2$ рассчитаем по соотношению $|\bar{V}_2|^2 = |V_2|^2 / 2$. Умножим (38) на комплексно сопряженное ему выражение и учтем свойство ортогональности полиномов Лежандра. Подставляя в получившееся выражение волновое число $k = \frac{\omega'_n}{v}$, найдем из (35) мощность акустического излучения единичной осциллирующей заряженной капли в присутствии внешнего электростатического поля в окончательном виде:

$$\begin{aligned} I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 R^{2n+4} \frac{\omega_n'^{2n+2}}{v^{2n+1}} \times \\ \times [\omega'_n M_n + e^2 (\omega'_{n-2} M_{n-2} K'_4 + \\ + \omega'_n M_n K'_5 + \omega'_{n+2} M_{n+2} K'_6)]^2; \\ K'_4 = \text{Re } K_4 \approx \frac{1}{3} (n-1) \times \\ \times \left((n-1) \left(\frac{2}{(n-2)^2} + \frac{1}{n-3} \right) K_{2,n-2,n} - \right. \\ \left. - \frac{1}{(n-2)^2} \alpha_{2,n-2,n} \right); \quad K'_5 = \text{Re } K_5 \approx \frac{1}{3} (n+1) \times \\ \times \left((n+1) \left(\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n-1} \right) K_{2,n,n} - \frac{1}{n^2} \alpha_{2,n,n} \right); \\ K'_6 = \text{Re } K_6 \approx \frac{1}{3} (n+3) \left((n+3) \times \right. \\ \times \left. \left(\frac{2}{(n+2)^2} + \frac{1}{n+1} \right) K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+2)^2} \alpha_{2,n+2,n} \right); \end{aligned} \quad (39)$$

где ω'_n находится (33).

Несложно видеть, что соотношение (39) в отличие от приведенного в [4] выражения для интенсивности излучения акустических волн незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле, содержит частоты $\omega'_n, \omega'_{n\pm 2}$, зависящие

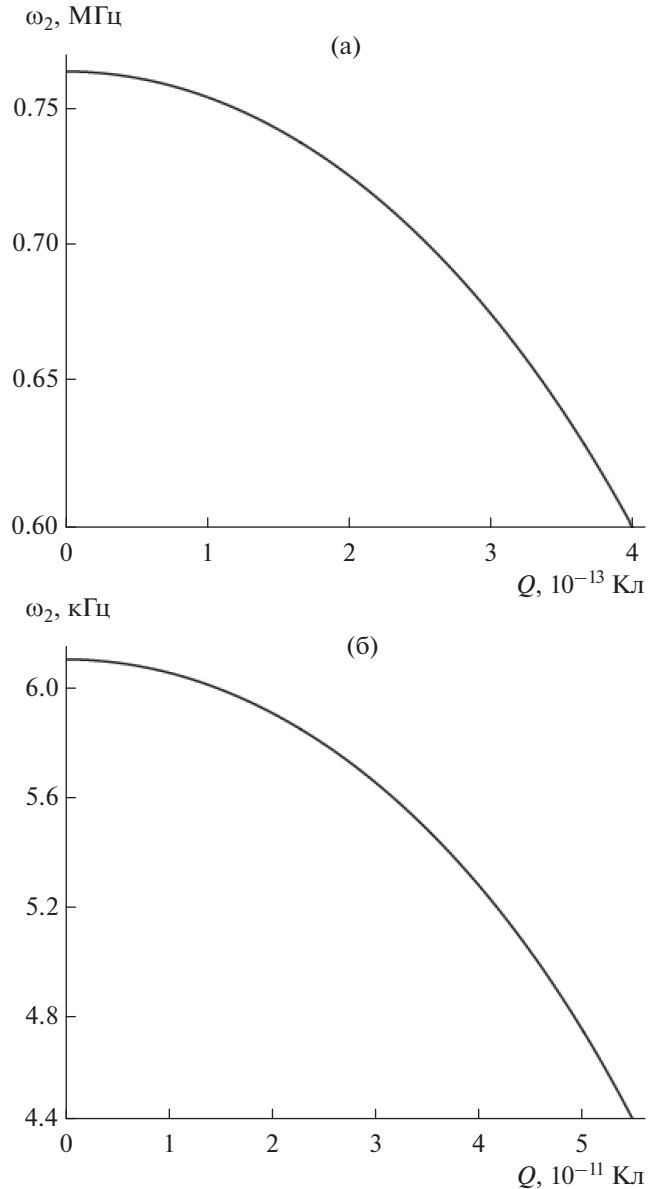


Рис. 1. Зависимость частоты осцилляций ω_2 заряженной капли, во внешнем однородном электростатическом поле, от величины собственного заряда Q , рассчитанная при $n = 2$, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м, $\epsilon_{\text{ex}} = 1$, $\rho_1 = 1 \times 10^3$ кг/м³, $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$ г/см³, $\sigma = 73 \times 10^{-3}$ Н/м, $E_0 = 50$ В/см: а – капля радиусом $R = 10$ мкм, б – дождевая капля радиусом $R = 250$ мкм.

от собственного заряда Q капли, характеризуемого параметром Релея W .

Если же положить напряженность электрического поля $E_0 = 0$, из (39) придем к мощности звукового излучения заряженной капли, осциллирующей в отсутствие внешнего электрического поля:

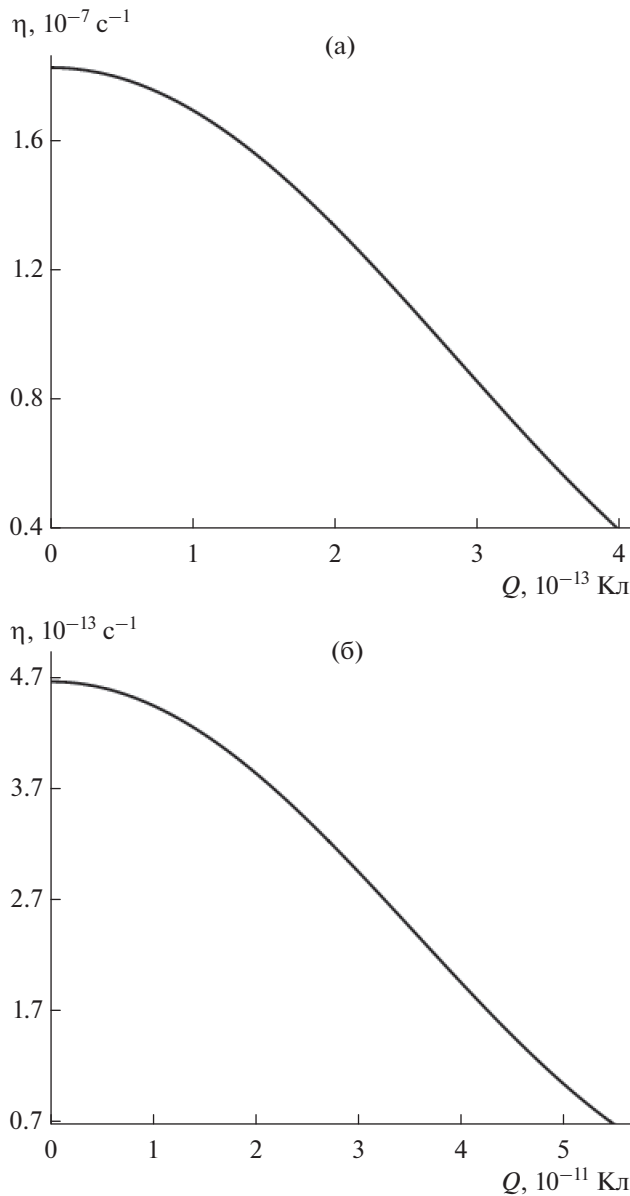


Рис. 2. Зависимость декремента затухания η заряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, от величины собственного заряда Q , построенная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, и $\nu = 3.3 \times 10^4$: а – облачная капля радиусом $R = 10$ мкм, б – дождевая капля радиусом $R = 250$ мкм.

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)} \right)^2 \rho_2 R^{2n+4} \frac{\omega_n'^{2(n+2)}}{\nu^{2n+1}} M_n^2;$$

$$\omega_n'^2 = \frac{\sigma}{R^3 \rho_1} \frac{n(n-1)(n+2)}{1 + \frac{n+1}{n} \frac{\rho_2}{\rho_1}} \left(1 - \frac{4W}{(n+2)} \right).$$

Используя (39) с учетом (33), проведем оценку интенсивности акустического излучения от объ-

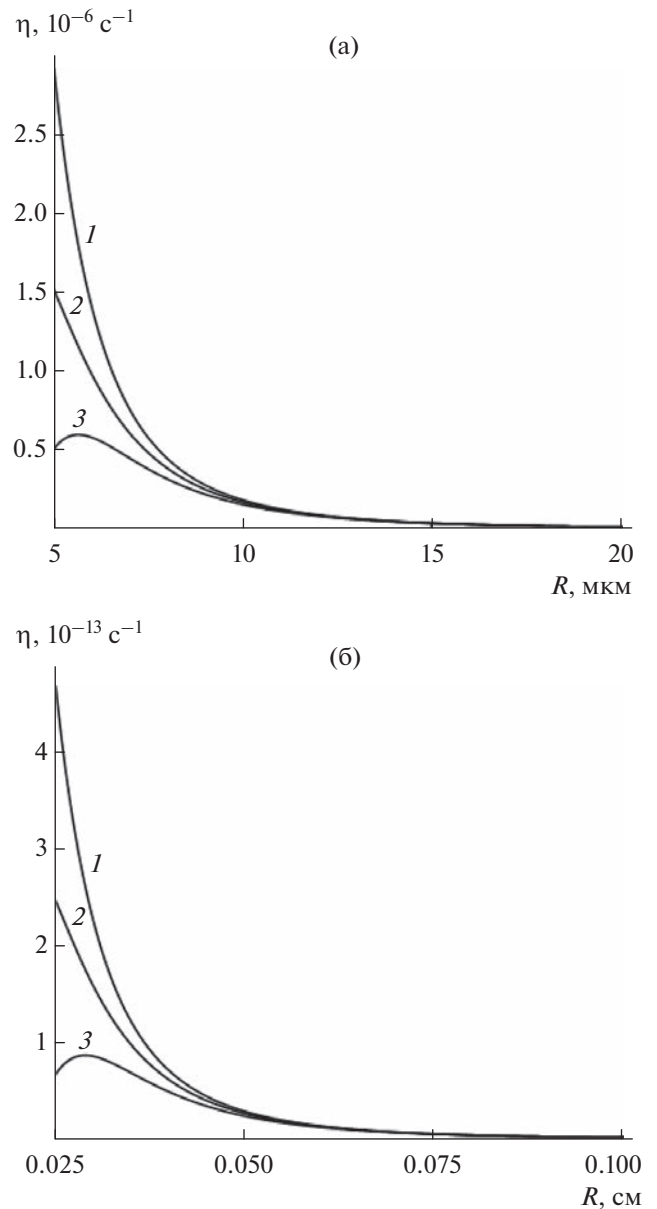


Рис. 3. Зависимость декремента затухания η от радиуса капли R : а – облачная капля, б – дождевая капля. Кривая 1 соответствует $Q = 0$, кривая 2 – $Q = 1 \times 10^{-13}$ Кл ($\sim 0.6Q_{кр}$ при $R = 5$ мкм и $\sim 0.08Q_{кр}$ при $R = 20$ мкм) (а), $Q = 3.5 \times 10^{-11}$ Кл ($\sim 0.6Q_{кр}$ при $R = 5$ мкм и $\sim 0.08Q_{кр}$ при $R = 0.1$ см) (б), кривая 3 – $Q = 1.5 \times 10^{-13}$ Кл ($\sim Q_{кр}$ при $R = 5$ мкм и $\sim 0.1Q_{кр}$ при $R = 20$ мкм) (а), $Q = 5.5 \times 10^{-11}$ Кл ($\sim Q_{кр}$ при $R = 0.025$ см и $\sim 0.1Q_{кр}$ при $R = 0.1$ см) (б).

ектов различных жидкокапельных систем естественного происхождения.

Возможный источник излучения звуковых волн в конвективных облаках связан с осцилляциями

мелких капель, типичные размеры которых колеблются в пределах от 3 до 30 мкм, а наибольшая концентрация приходится на диапазон 3–7 мкм. Согласно [29] концентрация таких капель в грозовом облаке составляет порядка 10^3 см^{-3} . Появление заряда на отдельных облачных каплях связано с механизмами электризации капель при захвате воздушных ионов и фазовых переходах, перераспределения зарядов в результате дробления, коагуляции и столкновения капель разных размеров. При этом осцилляции капель большой амплитуды объясняются микрофизическими внутриоблачными процессами: гидродинамическим и электрическим взаимодействием с соседними частицами, разбрызгиванием капель в результате их электростатической неустойчивости, слиянием крупных капель с более мелкими [30]. Для численных оценок положим, что капля осциллирует с амплитудой $M_n = 0.1R$ в результате возбуждения основной колебательной моды $n = 2$.

Приведем средние характеристики единичной водяной капли: $\rho_1 = 1 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\sigma = 73 \times 10^{-3} \text{ Н/м}$, $Q = 7 \times 10^{-14} \text{ Кл}$ ($\sim Q_{\text{кр}}$ при $R = 3 \text{ мкм}$ и $\sim 0.03Q_{\text{кр}}$ при $R = 30 \text{ мкм}$), $E_0 = 50 \text{ В/см}$ ($\sim 3 \times 10^{-4} E_{0\text{кр}}$ при $R = 3 \text{ мкм}$ и $\sim 1 \times 10^{-3} E_{0\text{кр}}$ при $R = 30 \text{ мкм}$), где $Q_{\text{кр}}$, $E_{0\text{кр}}$ – критические значения заряда и напряженности электрического поля. Примем также $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Ф/м}$, $\epsilon_{\text{ex}} = 1$, $\rho_2 = 1.3 \text{ кг/м}^3$, $v = 330 \text{ м/с}$. Тогда из (39) для капли размером $R = 3 \text{ мкм}$ несложно получить $I \sim 6 \times 10^{-13} \text{ мкВт}$ на частоте $\omega_2 \approx 3 \text{ МГц}$. При радиусе капли $R = 8 \text{ мкм}$ мощность ее звукового излучения составляет $I \sim 8 \times 10^{-14} \text{ мкВт}$ на частоте $\omega_2 \approx 1 \text{ МГц}$. При $R = 30 \text{ мкм}$ интенсивность излучения равна $I \sim 7 \times 10^{-15} \text{ мкВт}$ и идет на частоте $\omega_2 \approx 147 \text{ кГц}$.

Грозовое облако протяженностью 10 км, состоящее из ансамбля осциллирующих капель одинакового размера $R = 30 \text{ мкм}$, обладает уже значительной мощностью акустического излучения $I_{\text{ин}} \sim 3 \times 10^6 \text{ мкВт}$ (в 5×10^{20} раз выше по сравнению с излучением одиночной капли) на ультразвуковой частоте 147 кГц.

Используя вышеприведенные характеристики, оценим по порядку величины интенсивность излучения звуковых волн от капель дождя. Согласно данным натурных измерений [31] характерные размеры дождевых капель изменяются в диапазоне от $R = 0.025 \text{ см}$ до $R = 0.35 \text{ см}$. Однако более мелкие капли радиусом от $R = 0.01 \text{ см}$ до $R = 0.025 \text{ см}$, образующиеся в результате слияния облачных капелек, относятся к мороси, а более крупные капли $R > 0.35 \text{ см}$ при падении в воздухе разрушаются из-за аэродинамического

сопротивления. Заряд дождевой капли примем $Q = 2 \times 10^{-12} \text{ Кл}$ ($\sim 0.04Q_{\text{кр}}$ при $R = 0.025 \text{ см}$ и $\sim 7 \times 10^{-4}Q_{\text{кр}}$ при $R = 0.35 \text{ см}$). Тогда из (39) для дождевой капли радиуса $R = 0.025 \text{ см}$ получим звуковое излучение мощностью $I \sim 1 \times 10^{-16} \text{ мкВт}$ на частоте $\omega_2 \approx 6 \text{ кГц}$. Если же размер капли возрастает на порядок $R = 0.025 \text{ см}$, то интенсивность акустического излучения уменьшается на два порядка величины $I \sim 1 \times 10^{-18} \text{ мкВт}$ и соответствует частоте $\omega_2 \approx 0.2 \text{ кГц}$. Интенсивность излучения наиболее крупной дождевой капли $R > 0.35 \text{ см}$ составляет $I \sim 5 \times 10^{-19} \text{ мкВт}$ и приходится на частоту $\omega_2 \approx 0.1 \text{ кГц}$.

Принимая концентрацию дождевых капель $R = 0.025 \text{ см}$, по справочным данным [30] равную 0.3 см^{-3} , из (39) несложно найти, что интегральная интенсивность звукового излучения на границе пространства объемом 1 км^3 , занятого ливневым дождем, будет $I \sim 3 \times 10^{-2} \text{ мкВт}$ на частоте $\approx 6 \text{ кГц}$.

На рис. 4а, 4б показан характер зависимости интенсивности излучения I от заряда Q облачной и дождевой капель, рассчитанного по (39), аналогичный рис. 2а, 2б. При расчетах принимались те же значения физических величин, что и на рис. 2а, 2б.

На рис. 5а, 5б продемонстрированы зависимости интенсивности акустического излучения I от характерного размера облачной и дождевой капли R . Приведенные кривые, построенные при тех же значениях собственного заряда, которые были использованы в расчетах к рис. 3а, рис. 3б, повторяют характер зависимости декремента затухания η от радиуса капли R .

Расчеты показывают, что частоты и величины декремента затухания и интенсивности акустического излучения от величины индуцированного в капле электрического заряда: $q = 3\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}}E_0R^2$, весьма слабы.

Кроме сказанного выше, источниками акустического излучения являются приземные туманы, имеющие типичные размеры капель 2–10 мкм с максимальной концентрацией, приходящейся на 3–5 мкм [2.ПП], которые в ультразвуковом диапазоне излучают акустические волны достаточно большой мощности.

Расчеты показывают, что при увеличении номера колебательной моды n на единицу излучаемая мощность акустических волн уменьшается на два порядка величины.

Согласно (39) с ростом напряженности электростатического поля интенсивность излучения возрастает крайне слабо.

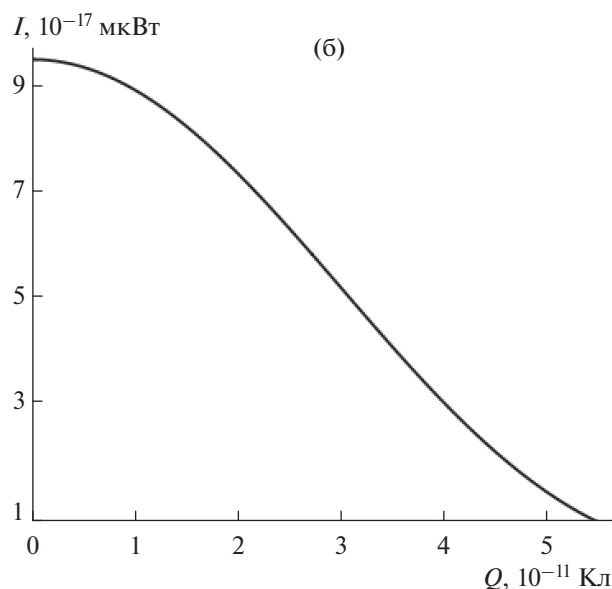
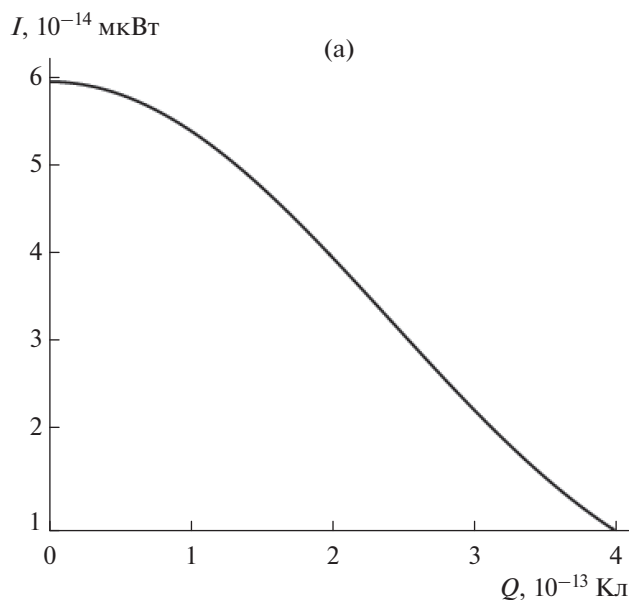


Рис. 4. Зависимость интенсивности акустического излучения I заряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле, от величины собственного заряда Q , построенная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, и $v = 3.3 \times 10^4$, $M_n = 0.1R$: а — облачная капля радиусом $R = 10$ мкм, б — дождевая капля радиусом $R = 250$ мкм.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что акустическое излучение мелких облачных капель создается в ультразвуковом диапазоне частот, при этом его интенсивность на три порядка величины превышает интенсивность излучения крупных дождевых капель, создающих акустическое излучение в диапазоне слышимых звуковых волн. Показано, что в отличие от неза-

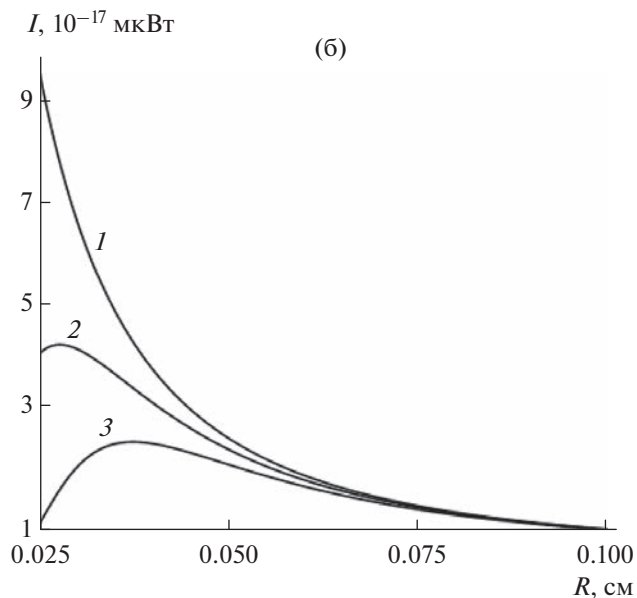
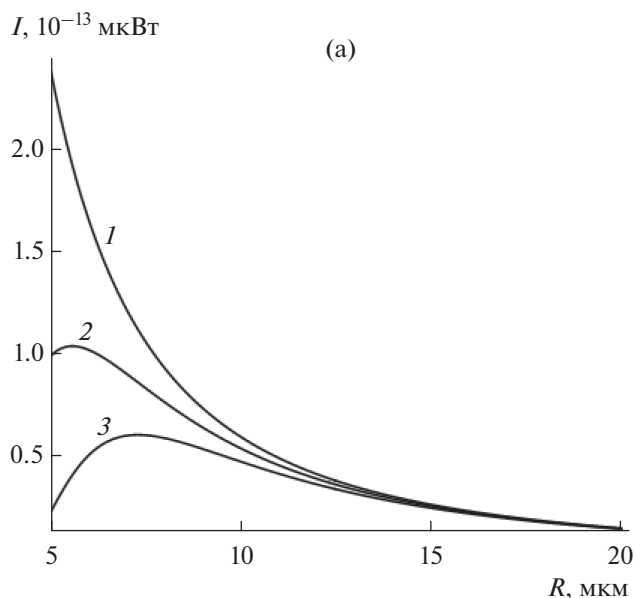


Рис. 5. Зависимость интенсивности акустического излучения I от радиуса капли R : а — облачная капля, б — дождевая капля. Кривая 1 соответствует $Q = 0$, кривая 2 — $Q = 1 \times 10^{-13}$ Кл (а), $Q = 3.5 \times 10^{-11}$ Кл (б), кривая 3 — $Q = 1.5 \times 10^{-13}$ Кл (а), $Q = 5.5 \times 10^{-11}$ Кл (б).

ряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле, наличие собственного заряда приводит к снижению частоты и мощности излучения: при стремлении собственного заряда к его критическому значению частота осцилляций капли может быть уменьшена в 1.5 раза, а мощность излучения — на порядок. При этом влияние индуцированного заряда (в отличие от собственного заряда) на интенсивность излучения весьма

мало. Для сильно заряженных капель граница между ультразвуковыми и слышимыми звуковыми волнами смещается в область меньших размеров капель, генерирующих излучение большей мощности.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Потенциал электростатического поля в окрестности невозмущенной сфероидальной капли $\Phi^{(0)}(r, \theta)$

Потенциал в окрестности невозмущенной сфероидальной капли $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ будем искать в линейном приближении по квадрату эксцентриситета e^2 . Представим $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ в виде асимптотического разложения по степеням малого параметра e^2 :

$$\Phi^{(0)}(r, \theta) \approx \Phi_0^{(0)}(r, \theta) + \Phi_1^{(0)}(r, \theta) + O(e^4); \quad (1.П1)$$

где $\Phi_0^{(0)}(r, \theta)$ — компонента электрического потенциала в окрестности заряженной сферы во внешнем электрическом поле, $\Phi_1^{(0)}(r, \theta)$ — добавка к потенциалу, связанная с отклонением сфероидальной формы от равновеликой по объему сферы. Нижний индекс в (1.П1) означает порядок малости по e^2 .

Подставляя разложение (1.П1) в систему уравнений (12)–(15) и раскладывая получившиеся соотношения, отнесенные к границе раздела $r = r(\theta)$, в ряд Тейлора в окрестности сферической поверхности капли радиуса R , несложно выписать краевую задачу для электрического потенциала нулевого порядка по e^2 :

$$\Delta \Phi_0^{(0)}(r, \theta) = 0; \quad (2.П1)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi_0^{(0)}(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta; \quad (3.П1)$$

$$r = R: \Phi_0^{(0)}(r, \theta) = \Phi_{s0}^{(0)}; \quad (4.П1)$$

$$-\int_0^\pi \frac{\partial \Phi_0^{(0)}(r, \theta)}{\partial r} R^2 \sin \theta d\theta = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}}}; \quad (5.П1)$$

и для добавки к потенциалу первого порядка по e^2 :

$$\Delta \Phi_1^{(0)}(r, \theta) = 0; \quad (6.П1)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi_1^{(0)}(r, \theta) \rightarrow 0; \quad (7.П1)$$

$$r = R: \Phi_1^{(0)}(r, \theta) + \frac{1}{3} R e^2 \frac{\partial \Phi_0^{(0)}(r, \theta)}{\partial r} P_2(\mu) = \Phi_{s1}^{(0)}; \quad (8.П1)$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{3} e^2 \left(2 \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial r} + R \frac{\partial^2 \Phi_0^{(0)}}{\partial r^2} \right) P_2(\mu) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) R^2 \sin \theta d\theta = 0; \quad (9.П1)$$

где $\Phi_{0s}^{(0)}$ — постоянное значение электрического потенциала на поверхности сферы, $\Phi_{1s}^{(0)}$ — добавка к поверхностному потенциалу, вызванная стационарной сфероидальной деформацией сферической формы.

Решение задачи (2.П1)–(5.П1) для компоненты равновесного электрического потенциала $\Phi_0^{(0)}(r, \theta)$ находится легко. Уравнение Лапласа (2.П1) в сферических координатах в случае осевой симметрии имеет известное решение:

$$\Phi_0^{(0)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n^{(0)} r^n + B_n^{(0)} r^{-(n+1)} \right) P_n(\mu). \quad (10.П1)$$

Удовлетворяя этим решением граничному условию (3.П1) получим:

$$\Phi_0^{(0)}(r, \theta) = -E_0 r P_1(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(0)} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (11.П1)$$

Используя разложение (11.П1), из условия сохранения заряда капли (5.П1) найдем:

$$B_0^{(0)} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}} R}; \quad (12.П1)$$

а из условия (4.П1):

$$B_1^{(0)} = E_0 R^3. \quad (13.П1)$$

При этом потенциал на невозмущенной поверхности заряженной сферы в электрическом поле определяется в виде: $\Phi_{0s}^{(0)} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}} R}$.

Подставляя (12.П1), (13.П1) в (11.П1), запишем окончательно:

$$\Phi_0^{(0)}(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}} r} + E_0 r \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu). \quad (14.П1)$$

Теперь найдем решение задачи (6.П1)–(9.П1) для добавки к потенциалу (14.П1). Используя условие ограниченности (7.П1), компоненту электрического потенциала $\Phi_1^{(0)}(r, \theta)$ будем искать в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра, убывающим на бесконечности ($r \rightarrow \infty$):

$$\Phi_1^{(0)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(0)} r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (15.П1)$$

Из граничного условия (8.П1) с учетом (9.П1) найдем постоянные коэффициенты:

$$C_1^{(1)} = \frac{2}{5} E_0 R^3 e^2; \quad (16.П1)$$

$$C_2^{(1)} = \frac{1}{3} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}}} R^2 e^2; \quad C_3^{(1)} = \frac{3}{5} E_0 R^5 e^2,$$

Для поправки к поверхностному потенциалу найдем: $\Phi_{s1}^{(0)} = 0$.

В итоге, (15.П1)–(16.П1) дает аналитическое выражение для равновесного электрического потенциала вытянутого заряженного сфероидального коллинеарно внешнему электрическому полю:

$$\Phi_1^{(0)}(r, \theta) = e^2 \left(\frac{1}{3} \frac{R^2}{r^3} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}}} P_2(\mu) + \frac{2}{5} \frac{R^3}{r^2} E_0 \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^2} P_3(\mu) \right) \right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Вывод аналитических выражений для коэффициентов $A_n(t)$, $B_n(t)$, гидродинамических потенциалов $\psi_1(r, \theta, t)$, $\psi_2(r, \theta, t)$ и поправок первого порядка малости к давлениям $P_1^{(1)}(r, \theta, t)$, $P_2^{(1)}(r, \theta, t)$, $P_\sigma^{(1)}$, P_g , $P_{QE}^{(1)}$.

Связь коэффициентов $A_n(t)$, $B_n(t)$ в (29), (30) с коэффициентами $M_n(t)$ в разложении для $\xi(\theta, t)$ можно найти из кинематического граничного условия (24) в виде:

$$\begin{aligned} A_n(t) &= R^{-n+1} \left(\frac{i\omega_n}{n} M_n(t) + e^2(i\omega_{n-2} M_{n-2}(t) K_1 + \right. \\ &\quad \left. + i\omega_n M_n(t) K_2 + i\omega_{n+2} M_{n+2}(t) K_3) \right); \quad n \geq 2; \\ B_n(t) &= \left(\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R} \right)^{-1} (i\omega_n M_n(t) + \\ &\quad + e^2(i\omega_{n-2} M_{n-2}(t) K_4 + i\omega_n M_n(t) K_5 + \\ &\quad + i\omega_{n+2} M_{n+2}(t) K_6)); \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (29), (30) позволяет выписать потенциалы поля скоростей внутри и вне капли:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, t) &= R \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\mu) \left[\frac{i\omega_n}{n} M_n(t) + \right. \\ &\quad \left. + e^2(i\omega_{n-2} M_{n-2}(t) K_1 + i\omega_n M_n(t) K_2 + \right. \\ &\quad \left. + i\omega_{n+2} M_{n+2}(t) K_3) \right]; \end{aligned} \quad (1. \text{ПІІ})$$

$$\begin{aligned} K_1 &= -\frac{1}{3n(n-2)} \times \\ &\times ((n-2)(n-3) K_{2,n-2,n} - \alpha_{2,n-2,n}); \\ K_2 &= -\frac{1}{3n^2} (n(n-1) K_{2,n,n} - \alpha_{2,n,n}); \\ K_3 &= -\frac{1}{3n(n+2)} \times \\ &\times ((n+2)(n+1) K_{2,n+2,n} - \alpha_{2,n+2,n}); \\ \psi_2(r, \theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} P_n(\mu) \times \\ &\times \left[i\omega_n M_n(t) + e^2(i\omega_{n-2} M_{n-2}(t) K_4 + \right. \\ &\quad \left. + i\omega_n M_n(t) K_5 + i\omega_{n+2} M_{n+2}(t) K_6) \right]; \end{aligned} \quad (2. \text{ПІІ})$$

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2 (h_{n-2}^{(2)}(kr))}{\partial_r (h_{n-2}^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} K_{2,n-2,n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R \partial_r (h_{n-2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n-2,n} \right); \\ K_5 &= \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2 (h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} K_{2,n,n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R \partial_r (h_n^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n,n} \right); \\ K_6 &= \frac{1}{3} \left(-R \frac{\partial_{r^2}^2 (h_{n+2}^{(2)}(kr))}{\partial_r (h_{n+2}^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} K_{2,n+2,n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R \partial_r (h_{n+2}^{(2)}(kr)) \Big|_{r=R}} \alpha_{2,n+2,n} \right); \\ K_{m,k,n} &= [C_{k0,m0}^{n0}]^2; \quad \alpha_{m,k,n} = \\ &= -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} C_{m-1,k1}^{n0}; \end{aligned}$$

где $C_{mk,lp}^{nq}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [19, 25], принимающие ненулевые значения при $|m-l| \leq n \leq m+l$, $m+l+n$ — четное и $k+p=q$.

Поправки к давлениям $P_j(r, \theta, t)$, связанные с течением жидкости в капле и во внешней среде, вычисляются из соотношений:

$$\begin{aligned} r = R: P_j^{(1)}(r, \theta, t) &= -\rho_j \left[\frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} e^2 R \frac{\partial^2 \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r \partial t} P_2(\mu) \right]; \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Подставляя сюда решения для гидродинамических потенциалов (1.ПІІ), (2.ПІІ), окончательно найдем:

$$\begin{aligned} P_1^{(1)} &= \rho_1 R \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left[\frac{\omega_n^2}{n} M_n(t) + \right. \\ &\quad \left. + e^2(\omega_{n-2}^2 M_{n-2}(t) K_1^+ + \right. \\ &\quad \left. + \omega_n^2 M_n(t) K_2^+ + \omega_{n+2}^2 M_{n+2}(t) K_3^+) \right]; \end{aligned} \quad (3. \text{ПІІ})$$

$$\begin{aligned}
 K_1^+ &= K_1 + \frac{1}{3} K_{2,n-2,n}; \\
 K_2^+ &= K_2 + \frac{1}{3} K_{2,n,n}; \quad K_3^+ = K_3 + \frac{1}{3} K_{2,n+2,n} \\
 P_2^{(1)} &= \rho_2 \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left[\omega_n^2 M_n(t) \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} + (4.ПП) \right. \\
 &\quad \left. + e^2 (\omega_{n-2}^2 M_{n-2}(t) K_4^+ + \omega_n^2 M_n(t) K_5^+ + \right. \\
 &\quad \left. + \omega_{n+2}^2 M_{n+2}(t) K_6^+) \right]; \\
 K_4^+ &= K_4 \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} + \frac{1}{3} RK_{2,n-2,n}; \\
 K_5^+ &= K_5 \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} + \frac{1}{3} RK_{2,n,n}; \\
 K_6^+ &= K_6 \frac{h_n^{(2)}(kR)}{\partial_r (h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} + \frac{1}{3} RK_{2,n+2,n}.
 \end{aligned}$$

Чтобы найти поправку к давлению сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(1)}$ на поверхность осесимметричной капли, прежде необходимо выписать вектор нормали, определяемый соотношением:

$$\begin{aligned}
 \vec{n}(r, \theta, t) &= \left(1 - \frac{1}{3} e^2 \frac{R}{r^2} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \zeta} \right) \vec{e}_r - \\
 &\quad - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{3} e^2 R \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta.
 \end{aligned}$$

Тогда давление $P_\sigma^{(1)}$, вызванное искажением сфероидальной формы капиллярным волновым движением, примет вид:

$$\begin{aligned}
 r = R: P_\sigma^{(1)} &= \frac{\sigma}{R} \left[- \left(1 - \frac{2}{3} e^2 P_2(\mu) \right) (2 + \hat{L}) \times \right. \\
 &\quad \times \frac{\xi(\theta, t)}{R} + \frac{2}{3} e^2 \frac{\xi(\theta, t)}{R} \hat{L} P_2(\mu) \Big]; \\
 \hat{L} &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);
 \end{aligned}$$

подставляя в которое (28), окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 P_\sigma^{(1)} &= \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[K_7 M_n(t) + e^2 (K_8 M_{n-2}(t) + \right. \\
 &\quad \left. + K_9 M_n(t) + K_{10} M_{n+2}(t)) \right] P_n(\mu); \\
 K_7 &= (n-1)(n+2); \\
 K_8 &= -\frac{2}{3} (4 + (n-2)(n-1)) K_{2,n-2,n}; \\
 K_9 &= -\frac{2}{3} (4 + n(n+1)) K_{2,n,n}; \\
 K_{10} &= -\frac{2}{3} (4 + (n+2)(n+3)) K_{2,n+2,n}.
 \end{aligned} \quad (5.ПП)$$

Выражение для линейной по ϵ поправки к давлению гравитационного поля выражается в виде:

$$r = R: P_g = -(\rho_1 - \rho_2) g \xi(\theta, t) P_1(\mu).$$

После подстановки в него ускорения свободного падения, определяемого (19), и разложения по полиномам Лежандра для функции $\xi(\theta, t)$, получим:

$$\begin{aligned}
 P_g &= -\frac{3}{4\pi \epsilon_{\text{ex}}} \frac{QE_0}{R^2} \times \\
 &\times \left(M_{n-1}(t) \frac{n}{2n-1} + M_{n+1}(t) \frac{n+1}{2n+3} \right) P_n(\mu).
 \end{aligned} \quad (6.ПП)$$

Расчет добавки к потенциалу $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$, необходимому для нахождения линейной по ϵ компоненты давления электрического поля $P_{QE}^{(1)}$, выделяется в отдельную электрическую задачу.

Подставим разложение потенциала (11) в систему уравнений (2), (4), (8), (10) и получим краевую задачу, состоящую из уравнения Лапласа:

$$\Delta \Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad (7.ПП)$$

условия ограниченности потенциала на бесконечности:

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (8.ПП)$$

условия эквипотенциальности:

$$\begin{aligned}
 \Phi^{(1)}(r, \theta, t) &- \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}} R^2} + 3E_0 \mu \right) \times \\
 &\times \xi(\theta, t) + e^2 \left\{ \frac{1}{3} P_2(\mu) \times \right. \\
 &\times \left(R \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_{\text{ex}} R^2} \xi(\theta, t) \right) - \\
 &\quad \left. - \frac{6}{5} E_0 \xi(\theta, t) \mu P_3(\mu) \right\} = \Phi_s^{(1)};
 \end{aligned} \quad (9.ПП)$$

и условия неизменности заряда капли

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \left[R \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{3} e^2 \left\{ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}} R^2} \times \right. \right. \\
& \times \left(6\xi(\theta, t) P_2(\mu) - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) + \\
& + 3E_0 \left(\left(\frac{4}{5} P_1(\mu) + \frac{36}{5} P_3(\mu) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) \xi(\theta, t) - \frac{2}{5} \times \right. \\
& \times \left(2 \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} + 3 \frac{\partial P_3(\mu)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} + \\
& + \left(\frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} - 2P_1(\mu) \xi(\theta, t) \right) P_2(\mu) \Big) + \\
& + \left(2R \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} + \right. \\
& + \left. R^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r^2} \right) P_2(\mu) \Big] \times \\
& \times \sin \theta d\theta = 0;
\end{aligned} \quad (10. \text{ПП})$$

где $\Phi_s^{(1)}$ — поправка первого порядка малости по ϵ к электростатическому потенциалу поверхности капли.

Согласно условию (8.ПП) решение уравнения (7.ПП), будем искать в виде ряда:

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (11. \text{ПП})$$

где постоянные коэффициенты F_n , имеющие первый порядок по ϵ , находятся из граничных условий (9.ПП), (10.ПП):

$$\begin{aligned}
F_n = 0; \quad F_n = R^{n+1} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}} R^2} \{ M_n(t) + e^2 \times \right. \\
\times (l_1 M_{n-2}(t) + l_2 M_n(t) + l_3 M_{n+2}(t)) \} + \\
+ E_0 \left\{ l_4 M_{n-1}(t) + l_5 M_{n+1}(t) + \right. \\
+ e^2 (l_6 M_{n-3}(t) + l_7 M_{n-1}(t) + \\
+ l_8 M_{n+1}(t) + l_9 M_{n+3}(t)) \Big\} \Big]; \quad n \geq 1.
\end{aligned} \quad (12. \text{ПП})$$

Для добавки к потенциалу поверхности капли получим:

$$\Phi_s^{(1)} = \frac{2}{5} e^2 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}} R^2} M_2(t) + \frac{3}{7} E_0 M_3(t) \right).$$

Подставляя амплитудные коэффициенты (12.ПП) в разложение (11.ПП), определим явный вид электрического потенциала $\Phi^{(1)}(r, \theta, t)$:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon_{\text{ex}} R^2} + \right. \\
+ \left\{ M_n(t) + e^2 (l_1 M_{n-2}(t) + l_2 M_n(t) + l_3 M_{n+2}(t)) \right\} \\
+ E_0 \left\{ l_4 M_{n-1}(t) + l_5 M_{n+1}(t) + e^2 (l_6 M_{n-3}(t) + \right. \\
+ l_7 M_{n-1}(t) + l_8 M_{n+1}(t) + l_9 M_{n+3}(t)) \Big\} \Big] P_n(\mu); \\
l_1 = \frac{n^2(n-1)}{2(2n-3)(2n-1)}; \quad l_2 = \frac{n(n+1)(n+2)}{2(2n-1)(2n+3)}; \\
l_3 = \frac{(n+1)(n+2)(n+4)}{2(2n+3)(2n+5)}; \quad l_4 = \frac{3n}{2n-1}; \\
l_5 = \frac{3(n+1)}{2n+3}; \quad l_6 = \frac{3n(n-2)(n-1)(n+1)}{2(2n-5)(2n-3)(2n-1)}; \\
l_7 = \frac{n(50n^4 + n^3 - 103n^2 + 39n - 27)}{10(4n^2 - 9)(2n-1)^2}; \\
l_8 = \frac{(n+1)(50n^4 + 321n^3 + 621n^2 + 278n - 180)}{10(4n^2 + 8n - 5)(2n+3)^2}; \\
l_9 = \frac{3(n+5)(n+3)(n+2)(n+1)}{2(2n+7)(2n+5)(2n+3)}.
\end{aligned} \quad (13. \text{ПП})$$

Поправку же к давлению электрического поля на поверхность электропроводной капли в принятом приближении можно найти на основе соотношения:

$$\begin{aligned}
 r = R: P_{QE}^{(1)}(r, \theta, t) = & -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex}}{R} \times \\
 & \times \left[\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex}R^2} + 3E_0P_1(\mu) \right) \times \right. \\
 & \times \left(2 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex}R^2} + 3E_0P_1(\mu) \right) \xi(\theta, t) + R \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \\
 & + \frac{1}{3} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex}R^2} e^2 \left\{ -\frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} + \right. \\
 & + \left(R \frac{\partial \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} + R^2 \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \right. \\
 & \left. \left. + 8 \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex}R^2} \xi(\theta, t) \right) P_2(\mu) \right\} \left. \right].
 \end{aligned}$$

Учитывая уже найденные решения (28), (13.ПІІ), для $P_{QE}^{(1)}$, получим:

$$\begin{aligned}
 P_{QE}^{(1)} = & \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{ex}}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{Q^2}{(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex})^2 R^4} \{ L_1 M_n(t) + \right. \\
 & + e^2 (L_2 M_{n-2}(t) + L_3 M_n(t) + L_4 M_{n+2}(t)) \} + \\
 & + \frac{QE_0}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{ex}R^2} \left\{ L_5 M_{n-1}(t) + L_6 M_{n+1}(t) \right\} + E_0^2 \times \\
 & \times \left\{ L_7 M_{n-2}(t) + L_8 M_n(t) + L_9 M_{n+2}(t) \right\} \left. \right] P_n(\mu); \\
 L_1 = n-1; \quad L_2 = & \frac{n(n-1)(n-5)}{2(2n-3)(2n-1)}; \\
 L_3 = & \frac{n(n+1)(n-4)}{3(2n-1)(2n+3)}; \\
 L_4 = & \frac{(n+1)(n+2)(n-7)}{2(2n+3)(2n+5)}; \\
 L_5 = & \frac{3n(2n-3)}{(2n-1)}; \quad L_6 = \frac{3(2n-1)(n+1)}{(2n+3)}; \\
 L_7 = & \frac{9n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}; \\
 L_8 = & \frac{9n(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}; \\
 L_9 = & \frac{9n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}.
 \end{aligned} \tag{14.ПІІІ}$$

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
2. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Дипольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле // Изв. РАН. Серия МЖГ. 2018. № 2. С. 62–76.
3. Григорьев А.И., Гаилов А.Р. Об излучении звука при осцилляциях заряженной капли // ЖТФ. 2001. № 11. С. 6–11.
4. Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О. Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле // Изв. РАН. Серия МЖГ. 2022. № 5. С. 80–93.
5. Rayleigh. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V. 14. P. 184–186.
6. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. М: Мир, 1972. 218 с.
7. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. Shape oscillations and stability of charged microdroplets // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. № 8. P. 1–4.
8. Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. An experiment on the Rayleigh instability of charged liquid drops // Am. J. Phys. 2007. V. 75. № 6. P. 499–503.
9. O’Konski C.J., Thacher H.C. The distortion of aerosol droplets by an electric field // J. Phys. Chem. 1953. V. 57. P. 955–958.
10. Торза С., Кокс Р., Мейсон С. Электродинамическая деформация и разрыв капель // В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975. С. 347–350.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1957. 532 с.
12. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белафина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т. 59. № 6. С. 27–34.
13. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc., London. 1964. V. A280. P. 383–397.
14. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим по-

- лем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
15. *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // Изв. АН СССР. Сер. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
 16. *Beard K.V., Tokay A.* A field study of small raindrop oscillations // Geophysical Research Letters. 1991. V. 18. № 12. P. 2257–2260.
 17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
 18. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
 19. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979. 830 с.
 20. *Ausman E.L., Brook M.* Distortion and disintegration of water drops in strong electric fields // J. Geophys. Res. 1967, V. 72. № 24. P. 6131–6135.
 21. *Jones D.M.* The shape of raindrops // J. Meteorology. 1959. V. 16. № 5. P. 504–510.
 22. *Pruppacher H.R., Piter R.L.* A semi-empirical determination of the shape of cloud and rain drop // J. Atm. Sci. 1971. V. 28. № 1. P. 86–94.
 23. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Критические условия неустойчивости сплюснутой сфероидальной сильно заряженной капли // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 7. С. 10–14.
 24. *Щекин А.К., Варшавский В.Б.* Равновесная форма, химический потенциал и работа образования диэлектрической капли в электрическом поле диполя ядра конденсации // Коллоидный журнал. 1996. Т. 58. № 4. С. 564–571.
 25. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
 26. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1963. 1108 с.
 27. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе // ЭОМ. 2015. Т. 51. № 3. С. 44–50.
 28. *Лепендин Л.Ф.* Акустика. М.: Высшая школа, 1978. 448 с.
 29. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеоздат, 1989. 647 с.
 30. *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоздат, 1983. 280 с.
 31. *Тверской П.Н.* Курс метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1962. 700 с.
 32. *Грин Х., Лейн В.* Аэрозоли — пыли, дымы и туманы. Л.: Изд. Химия, 1969. 428 с.